С29

400/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В.Ю.СЕРЕДА

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ

/008 – дифференциальные и интегральные уравнения/

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев – 1968

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313805

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент П.С.БОНДАРЕНКО.

Официальные оппоненты:

1. Доктор физико-математических наук, профессор С.М.БЕЛОНОСОВ.
2. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А.Ю.ЛУЧКА.

Ведущее предприятие /научно-исследовательское учреждение/ - Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан " " 1968г.

Защита диссертации состоится " " 1968г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького /бульвар Шевченко, 22/24/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

Интегральные уравнения являются одним из наиболее плодотворных средств математического исследования как в чистом, так и в прикладном анализе. Многие задачи математической физики и инженерные задачи сводятся к решению линейных и не - линейных интегральных уравнений [1,2].

Решение интегральных уравнений в замкнутом виде удается найти лишь в отдельных частных случаях. Поэтому, как правило, интегральные уравнения решаются приближенными и численными методами, разработка которых, особенно в связи с развитием вычислительной техники, приобрела большое значение.

Методы решения интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода разделяются на аналитические и численные. К аналитическим приближенным методам относятся: итерационные /метод последовательных приближений/, проекционные /метод Ритца, метод Галеркина, метод моментов, метод наименьших квадратов и т.д./, проекционно-итерационные /метод Ю.Д.Соколова осреднения функциональных поправок [3] и его видоизменения/, метод приближенной замены ядра вырожденным, метод осциллирующих функций, метод конечных разностей и различные комбинационные методы, как, например, метод полос [4], методы Бельтюкова и др.

К численным методам относятся численные реализации итерационных, проекционно-итерационных и квадратурных методов.

Наиболее простыми с точки зрения вычислительной схемы являются итерационные методы решения интегральных уравнений. Однако, существенным недостатком метода итераций, взятого в его простейшем варианте, является то, что область значений параметра λ интегрального уравнения, при которых этот метод сходится, ограничена:

$$|\lambda| < \frac{1}{\|K(x,s)\|}, \qquad /1/$$

где $\|K(x,s)\|$ - норма ядра интегрального уравнения. В настоящее время известен целый ряд работ, посвященных обобщению метода простой итерации. Эти обобщения характерны тем, что интегральное уравнение за счет предварительного преобразования сводится к другому интегральному или операторному уравнению, для которого ограничительное условие /1/ заменяется каким-либо более слабым ограничением.

В реферируемой работе рассматривается обобщенный метод приближенного решения линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, основы которого развиты и опубликованы в работах [7 - 14]. При помощи обобщенного метода можно решать интегральные уравнения вышеуказанного вида с заданной степенью точности при любых значениях параметра λ, отличных от собственных значений ядра.

Рассматриваемый метод обобщает такие известные методы решения линейных интегральных уравнений, как метод замены ядра вырожденным, метод осреднения функциональных поправок [8] и метод полос [4].

Суть обобщенного метода состоит ь том, что он позволяет сводить процесс решения данного интегрального уравнения к решению вспомогательных интегральных уравнений с малым по норме ядром, что, в свою очередь, дает возможность для их решения применять различные итерационные методы.

Работа состоит из введения и трех глав.

В главе 1 рассматриваются общие теоретические вопросы

обобщенного метода. В §1 изложено исследование обобщенного метода в том случае, когда область определения ядра интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = P_0(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds \qquad /2/$$

рассматривается как один прямоугольник. Для получения приближенного решения уравнения /2/ ядро $K(x,s)$ представим в виде суммы двух ядер - вырожденного и "малого":

$$K(x,s) = \overset{*}{K}(x,s) + \mathcal{D}(x,s),$$

где

$$\overset{*}{K}(x,s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) Q_i(s),$$

причем ядро $\mathcal{D}(x,s)$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$q = |\lambda| \sqrt{\int_a^b \int_a^b |\mathcal{D}(x,s)|^2 dx\,ds} < 1. \qquad /3/$$

Искомое решение $\varphi(x)$ ищется в виде

$$\varphi(x) = M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i(x),$$

где неизвестные функции $M_i(x)$ $(i = \overline{0,n})$ являются решениями $n+1$ вспомогательных интегральных уравнений

$$M_i(x) = P_i(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{D}(x,s) M_i(s)ds, \quad i = \overline{0,n} \qquad /4/$$

с одним и тем же "малым" ядром $\mathcal{D}(x,s)$, а параметры α_i -

решением системы n линейных алгебраических уравнений

$$A\vec{\alpha} = \vec{B}, \qquad /5/$$

где $A = E - \lambda C$, E - единичная матрица, $C = \{c_{ij}\}$ - n - квадратная матрица с элементами

$$c_{ij} = \int_a^b Q_i(s) M_j(s)\, ds, \quad i,j = \overline{1,n},$$

$\vec{\alpha} = \{\alpha_i\}$, $\vec{B} = \{b_i\}$ - n - компонентные векторы, причем

$$\alpha_i = \int_a^b Q_i(s)\varphi(s)\, ds,$$

$$b_i = \int_a^b Q_i(s) M_0(s)\, ds.$$

В силу выполнимости условия /8/ вспомогательные интегральные уравнения /4/ можно решать как методом последовательных приближений, так и другими приближенными итерационными методами.

В этом же параграфе выводятся оценки погрешности метода в пространствах C и L_2, имеющие априорный характер, следующего вида:

$$\|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\| \le \mu\left(1 + \frac{\delta|\lambda|NQ}{\Delta}\right), \qquad /6/$$

где величина μ зависит от конкретного метода решения интегральных уравнений /4/, а δ, N, Q, Δ - априори известные величины.

Если, в частности, уравнения /4/ решать методом простой итерации, то после выполнения ν итераций получим приближенное решение интегрального уравнения /2/ с погрешностью

$$\| \varphi(x) - \overset{*}{\varphi}(x) \| \leq L \frac{q^{\nu+1}}{1-q}, \qquad /7/$$

где q определяется соотношением /3/, а L - априори известная константа.

Здесь же доказывается равномерная сходимость метода и сходимость в среднем.

Во втором параграфе первой главы исследуется обобщенный метод решения интегральных уравнений в том случае, когда область определения ядра $a \leq x, s \leq b$ делится на m прямоугольников прямыми, параллельными оси OX: $s = s_k$ $/k = \overline{0,m}$; $s_0 = a$, $s_m = b$ /. В каждом из таких прямоугольников ядро $K(x,s)$ уравнения /2/ представляется в виде суммы двух ядер - вырожденного и малого по норме:

$$K(x,s) = \sum_{k=1}^{m} K_k(x,s) + \mathcal{D}(x,s),$$

$$K_k(x,s) = \sum_{i=1}^{n_k} P_{ik}(x) Q_{ik}(s)$$

при $s_{k-1} \leq s \leq s_k$ $(k = \overline{1,m})$, где n_k - количество членов аппроксимации ядра на k-ом прямоугольнике /для каждого прямоугольника это число, вообще говоря, разное/. Решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения /2/ ищется в виде

$$\varphi(x) = M_0(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik} M_{ik}(x),$$

где

$$\alpha_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)\varphi(s)ds \quad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m};\ n=max\{n_1,n_2,\dots,n_m\}).$$

Для определения неизвестных функций $M_0(x)$ и $M_{ik}(x)$ нужно решить $nm+1$ линейных интегральных уравнений

$$M_0(x) = P_0(x) + \lambda\int_a^b \mathcal{D}(x,s)M_0(s)ds,$$

$$M_{ik}(x) = P_{ik}(x) + \lambda\int_a^b \mathcal{D}(x,s)M_{ik}(s)ds \quad (i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}) \qquad /8/$$

с одним и тем же "малым" ядром $\mathcal{D}(x,s)$, а параметры α_{ik} определяются из системы nm линейных алгебраических уравнений

$$A\vec{\alpha} = \vec{b}, \qquad /9/$$

где $A = E - \lambda C$, C - nm - квадратная матрица с элементами

$$c_{ik,rs} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)M_{rs}(s)ds \quad (i,r=\overline{1,n};\ k,s=\overline{1,m}),$$

$\vec{\alpha} = \{\alpha_{ik}\}$, $\vec{b} = \{b_{ik}\}$ - nm - компонентные векторы, причем

$$b_{ik} = \int_{s_{k-1}}^{s_k} Q_{ik}(s)M_0(s)ds \quad (s_{k-1} \le s \le s_k,\ k=\overline{1,m}).$$

Выводится априорная оценка погрешности метода вида /6/, /7/, доказывается сходимость метода. Скорость сходимости обобщенного метода можно регулировать как увеличением числа членов

аппроксимации ядра на прямоугольниках $S_{k-1} \le S \le S_k$, $K = \overline{1,m}$, так и дроблением области $a \le x, s \le b$, то есть, увеличением числа прямоугольников.

Априорный характер оценок погрешности метода /6/, /7/ позволяет оптимально выбирать некоторые параметры обобщенного метода для нахождения решения данного интегрального уравнения с любой наперед заданной точностью. Этот вопрос исследуется в §3. Показано, что если вспомогательные интегральные уравнения /8/ решаются методом последовательных приближений, то для получения приближенного решения уравнения /2/ с точностью до ε нужно при решении уравнений /8/ остановиться на

$$\nu \ge \frac{\lg \frac{\varepsilon(1-q)}{L}}{\lg q} - 1$$

итерации, где величины q, L - априори известны вычислителю.

В §4 первой главы рассматриваются так называемые "многоступеньчатые" методы решения линейных интегральных уравнений вида /2/. Приводится, в частности, детальное исследование двуступеньчатого метода, суть которого состоит в том, что ядро $\mathcal{D}(x,s)$ вспомогательных интегральных уравнений /8/ представляется в области $a \le x, s \le b$, рассматриваемой как, например, один прямоугольник, в виде суммы двух ядер:

$$\mathcal{D}(x,s) = \sum_{j=1}^{m} y_j(x) z_j(s) + \mathcal{D}_1(x,s),$$

где ядро $\mathcal{D}_1(x,s)$ "мало" по сравнению с ядром $\mathcal{D}(x,s)$ а для решения вспомогательных интегральных уравнений /4/

применяется обобщенный метод, рассмотренный в §1 настоящей главы.

Преимущество многоступеньчатых методов решения интегральных уравнений в том, что они позволяют сводить решение системы вспомогательных алгебраических уравнений /5/ или /9/, скажем, t -го порядка при одноступеньчатом методе к решению нескольких систем более низких порядков $n_1, n_2, \ldots, n_K$ $/n_1 + n_2 + \ldots + n_K = t /$ с K различными матрицами при K - ступеньчатом методе. При этом число вспомогательных интегральных уравнений типа /4/, /8/ не зависит от K .

Изложение теоретических исследований в каждом параграфе первой главы иллюстрируется детально разобранными примерами.

Глава 2 посвящена нахождению собственных значений и собственных функций интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода.

В первом параграфе этой главы показано применение обобщенного метода для нахождения собственных функций интегральных уравнений, а в §2 выводятся априорные оценки погрешности метода, имеющие вид /6/, /7/, и излагается способ нахождения собственных значений ядра интегрального уравнения. Отличие от известных методов нахождения собственных значений ядра [5,6] здесь в том, что определитель матрицы D , как правило, не - высокого порядка и легко раскрывается, что повышает эффективность и дает значительные преимущества.

В заключение главы /§8/ применение метода иллюстрируется на конкретных примерах и показано, как находить значения собст-

венных функций с наперед заданной точностью.

В третьей главе диссертации исследуется обобщенный метод решения интегральных уравнений с использованием формул численного интегрирования.

В §1 этой главы показано построение алгорифмов численного решения интегральных уравнений, а в §2 выводится оценка погрешности одного класса реальных вычислительных алгорифмов решения этих уравнений. Так как полная погрешность реального решения интегрального уравнения /2/ зависит от реальных решений вспомогательных интегральных уравнений /8/ и системы алгебраических уравнений /9/, то в этом параграфе приведены детальные исследования всех погрешностей, возникающих при реальном решении интегрального уравнения на вычислительной машине.

В §3 последней главы приведены примеры численного решения линейных интегральных уравнений обобщенным методом. Рассматривается случай, когда параметр λ уравнения /2/ значительно отличается от всех собственных чисел ядра данного уравнения, а также случай, когда параметр λ очень близок к одному из них. Приведены таблицы, в которых даны сравнения полученных результатов с истинными значениями решений рассматриваемых уравнений в соответственных точках, указаны абсолютные и относительные погрешности решений.

Приводится пример численного решения интегрального уравнения на электронной цифровой вычислительной машине "Минск-1".

Основные результаты диссертации изложены в работах [7 - 14] и докладывались на IV Республиканской научной конференции молодых математиков Украины /Институт математи-

ки АН УССР /Киев, 1968г./, на Республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям /Киевский государственный педагогический институт им. А.М.Горького, 1967г./, на семинаре по дифференциальным и интегральным уравнениям под руководством член-корреспондента АН УССР Ю.Д.Соколова /Институт математики АН УССР, Киев, 1967г./, на семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством академика АН УССР И.З.Штокало /Киевский государственный университет им.Т.Г.Шевченко, 1966г/ на научных семинарах кафедры математики и математической физики Киевского госуниверситета /Вычислительный центр КГУ, 1966 - 1968г.г./, на научной конференции кафедр Киевского педагогического института им.А.М.Горького /1967г./.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Белоносов С.М.,Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей, Изд.-во СО АН СССР,Новосибирск,1962.
2. Мусхелишвили Н.И.,Некоторые основные задачи математической теории упругости,Изд.-во "Наука",М.,1966.
3. Соколов Ю.Д.,Об одном методе приближенного решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений, ДАН УРСР,№2,1955 /на укр.языке/.
4. Половий Г.Н.,Чаленко П.И.,Решение интегральных уравнений методом полос,Вопросы матем. физики и теории функций, Сборник Института математики АН УССР,1968.
5. Акбергенов И.А.,О приближенном решении линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода и об определении его собственных значений,Труды САГУ,серия V-а, матем.вып.,16,1937.
6. Корепов В.Г.,Об одном итерационном методе решения полной проблеммы собственных чисел,УМЖ,14,№8,1962.
7. Калайда А.Ф.и Середа В.Ю.,Об одном общем методе решения линейных интегральных уравнений второго рода, ДАН УРСР,№6,1967 /на укр.языке/.
8. Середа В.Ю.,О нахождении собственных функций интегральных уравнений Фредгольма второго рода,ДАН УРСР,сер.А, физ.-техн.и мат.науки,№12,1967 /на укр.языке/.
9. Бондаренко П.С.и Середа В.Ю.,Об оценке погрешности одного класса реальных алгорифмов численного решения линейных интегральных уравнений второго рода,ДАН УРСР,сер.А,физ.-техн.и мат.науки,№12,1967 /на укр.языке/.

10. Калайда А.Ф., Середа В.Ю., Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода, УМЖ, 20, №2, 1968.
11. Середа В.Ю., Обобщенный метод решения линейных интегральных уравнений второго рода, ДАН УРСР, сер. А, физ.-техн. и мат. науки, №2, 1968 /на укр. языке/.
12. Калайда А.Ф., Середа В.Ю. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений второго рода, "Дифференциальные уравнения", 4, №5, 1968.
13. Калайда А.Ф., Середа В.Ю., О решении линейных интегральных уравнений второго рода, Тезисы докладов отчетно-научной конференции кафедр Киевского государственного пединститута им. А.М. Горького за 1966г. /физико-математические науки/, К., 1967 /на укр. языке/.
14. Середа В.Ю., О погрешности численной реализации одного метода решения линейных интегральных уравнений второго рода, там же /на укр. языке/.

БФ 28086. 6.VI.1968. Об"ем 0,75 печ.л. зак. 1788-150
Книжная типография № 5. Киев, Репина, 4.