ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені Михайла Драгоманова

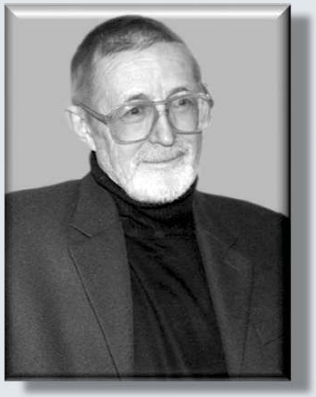
9 789669 313324

Василь Швець, Ірина Соколовська

Василь Швець
Ірина Соколовська

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ





Михалін Геннадій Олександрович (08.01.1945 – 03.12.2020) – кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук. Автор понад 120 наукових робіт у галузі математичного аналізу, прикладної математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії й методики професійної освіти та методики навчання математики. У 1998 р. його дослідження було підтримано Міжнародною Сорівською Програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP). Відмінник народної освіти України.

Геннадій Олександрович у 1969 р. закінчив з відзнакою навчання на фізико-математичному факультеті Київського державного педагогічного інституту імені О. М. Горького за спеціальністю «Математика і програмування» і вступив до аспірантури при кафедрі математичного аналізу КДПІ імені О. М. Горького. Після закінчення аспірантури працював на цій же кафедрі асистентом (1972 – 1974 рр.), старшим викладачем (1974 – 1977 рр.), доцентом (1977 – 2000 рр.).

У 1974 р. здобув ступінь кандидата фізико-математичних наук захистивши дисертаційне дослідження «Некоторые вопросы включения, равносильности и совместимости линейных методов суммирования» зі спеціальності 01.01.01 – Математичний аналіз.

У 2004 р. Геннадій Олександрович захистив докторську дисертацію «Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу» за спеціальністю 13.00.04 – Теорія і методика професійної освіти.

За станом здоров'я Геннадій Олександрович був вимушений завершити викладацьку діяльність але не наукову роботу. Працював старшим науковим співробітником інституту інформатики НПУ імені М. П. Драгоманова, керував виконанням кандидатських дисертаційних досліджень, виконував обов'язки заступника голови спеціалізованої вченої ради Д 26.053.03 з правом прийняття до розгляду та проведення захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора (кандидата) педагогічних наук за спеціальностями 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» та 13.00.02 – «Теорія та методика навчання (інформатика)» і плідно працював над створенням підручників і посібників для студентів математичних спеціальностей і вчителів математики.



Швець Василь Олександрович (народився 20.01.1948 р. у с. Рогізна Сквирського району Київської обл.) – кандидат педагогічних наук, професор кафедри методики навчання математики УДУ імені Михайла Драгоманова.

Після закінчення школи у 1966 р. вступив до фізико-математичного факультету Чернігівського державного педагогічного інституту імені Т. Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у 1970 р. Після служби в армії працював на посаді асистента кафедри вищої математики Чернігівського педінституту (1971—1973 рр.) й одночасно проходив стажування в Інституті математики АН України.

У 1973—1985 рр. В. О. Швець працював учителем математики в смт Немішаєве Київської обл. З 1985 р. викладацька і наукова діяльність Василя Олександровича пов'язана з Київським педагогічним, нині УДУ імені Михайла Драгоманова.

У 1989 р. В. О. Швець захистив кандидатську дисертацію на тему «Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы» (науковий керівник професор З. І. Слєпкань) і здобув науковий ступінь кандидата педагогічних наук. У 1990 р. йому присвоєно вчене звання доцента кафедри математики і методики викладання математики, а в 2004 р. — звання професора.

Василь Олександрович читає такі навчальні курси, як «Методика навчання математики», «Елементарна математика», «Педагогічні технології» для студентів фізико-математичного факультету; керує написанням курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт, педагогічною практикою студентів. Під керівництвом В. О. Швеця захистили кандидатські дисертації понад 20 осіб. Він є співавтором «Галузевих стандартів вищої освіти. Математика». У його науковому доробку понад 200 публікацій.



Соколовська Ірина Степанівна (народилася 27.08.1963 р. у м. Прилуки Чернігівської обл.) – учителька математики ліцею «Престиж» м. Києва. Закінчила з відзнакою КДПІ імені О. М. Горького (1984 р.) З 1988 р. працювала спочатку асистентом кафедри вищої математики, а з 1992 р. – старшим викладачем кафедри методики математики КДПІ імені М. П. Драгоманова (нині УДУ імені Михайла Драгоманова).

Ірина Степанівна читала лекції і проводила практичні заняття з елементарної математики, основ статистики, ризиків в управлінні, розробила спецкурс і спецсемінар «Методика навчання елементів стохастики учнів загальноосвітніх навчальних закладів». Неодноразово запрошувалася для читання лекцій слухачам курсів підвищення кваліфікації вчителів математики м. Києва і Київської обл. Педагогічну діяльність поєднувала з видавничою. Працювала спочатку заступником головного редактора (1998–2003 рр.), а потім головним редактором Всеукраїнської газети для освітян «Математика» (2003–2013 рр.). Має більше 50 друкованих праць з методики навчання математики.

Василь Швець
Ірина Соколовська

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Київ 2025

УДК 373.5.016:519.1/.2](075.8)
Ш 35

Рекомендовано до друку
рішенням Вченої ради УДУ імені Михайла Драгоманова
(протокол № 13 від 29 травня 2025 р.)

Рецензенти:

Торбін Г. М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірностей, проректор з наукової роботи УДУ імені Михайла Драгоманова;

Нікіфоров Р. О., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірностей УДУ імені Михайла Драгоманова.

Швець В. О.

Елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей в закладах загальної середньої освіти: навчально-методичний посібник / В. О. Швець, І. С. Соколовська; за наук. ред. Г. О. Михаліна. 2-ге вид. перероб. та допов. – К.: Видавництво УДУ імені Михайла Драгоманова, 2025. 170 с.

ISBN 978-966-931-332-4

Книжка містить необхідні теоретичні й практичні матеріали для ознайомлення учнів закладів загальної середньої освіти з елементами комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей.

Теоретичні відомості, ілюстровані прикладами, зразки розв’язань задач, добірки задач з вказівками до їх розв’язування і відповідями дадуть можливість організувати вивчення теми на різних рівнях навчання: стандарту, профільного й поглибленого.

Для вчителів математики, студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів та учнів, які цікавляться математикою.

© Швець В., Соколовська І., 2025
ISBN 978-966-931-332-4 © Український державний університет
імені Михайла Драгоманова, 2025

Колезі і другу,
Геннадію Олександровичу Михаліну,
присвячуємо…

ПЕРЕДМОВА

Включення в середині 90-х років XX ст. до змісту шкільної математичної освіти *стохастичної лінії*, а саме тем «Елементи комбінаторики», «Початки теорії ймовірностей», «Елементи математичної статистики» викликало чимало проблем. Спірними й на сьогодні є питання змістового наповнення вказаної лінії шкільного курсу математики, програмних вимог до рівня навчальних досягнень математичної підготовленості учнів, методологічних та математичних підходів до викладу й вивчення навчального матеріалу, критеріїв оцінювання навчальних досягнень, міжпредметних та внутріпредметних зв'язків тощо. Остаточно не вирішено, цілісно як окрему тему, чи розосереджено в часі, вивчати елементи стохастики, скільки годин слід присвятити вивченню навчального матеріалу. Є також проблеми у математичній і методичній підготовленості вчителів математики.

І в теоретичних дослідженнях, і на практиці вже отримані певні результати, які сприяють розв'язанню спірних питань, але до їх повного вирішення ще далеко. Та це й закономірно, оскільки ця змістова лінія нова і має накопичитися достатній досвід, щоб визріли ефективні методи розв'язування проблем, що виникають.

У другому виданні посібника подано елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей в обсязі, який передбачений програмою з математики для профільного й поглибленого рівнів вивчення математики. Зрозуміло, що ним можна користуватись і в класах, де математика вивчається на рівні стандарту.

Елементи комбінаторики мають скоріше самостійний інтерес, ніж є базою для вивчення теорії ймовірностей. Вивченню елементів теорії ймовірностей передує знайомство

з елементами статистики. Такий підхід дає змогу учням краще зрозуміти поняття ймовірності події, аксіоматичний підхід до його формування.

Теоретичний матеріал кожного розділу ілюструється достатньою кількістю прикладів і розв'язаних задач; на початку є короткі історичні відомості, в кінці добірка задач, до яких подаються відповіді і поради щодо їх розв'язування.

Книжка створена на основі теоретичних і методичних досліджень М. І. Жалдака, Г. О. Михаліна, І. С. Соколовської, В. О. Швеця та інших науковців і вчителів. Її апробація впродовж декількох років проходила в УДУ імені Михайла Драгоманова під час навчання студентів – майбутніх учителів математики, та в Київському університеті імені Бориса Грінченка на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики.

Коли вийшло перше видання посібника, його зміст і структуру ретельно прорецензував і відредагував наш незабутній доктор педагогічних наук, колега і друг, Геннадій Олександрович Михалін. Книжка стала довершенішою і досконалішою. Велика йому вдячність. Пам'ятаємо, сумуємо за ним і вважаємо своїм обов'язком згадати «незлим тихим словом…».

Щиро сподіваємось, що запропонований посібник стане в нагоді для організації самоосвіти та практичної роботи. Просимо читачів свої зауваження та пропозиції надсилати за адресою: 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, УДУ імені Михайла Драгоманова, кафедра методики навчання математики.

З повагою,
Василь Швець, Ірина Соколовська

Розділ І. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ



...Читач завважить, що в цій книжці [у трактаті «Про розрахунки в азартних іграх»] він має справу не лише з грою, але що тут закладаються основи дуже цікавої і глибокої теорії.
Х. Гюйгенс (1657 р.)

У багатьох галузях людської діяльності доводиться підраховувати кількість можливих розташувань предметів, кількість способів, якими можна здійснити певний вибір тощо. Такі задачі вивчає *комбінаторика.*

Комбінаторика (від латинського combino — сполучаю) — *розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору і розташування елементів деякої, зазвичай скінченної, множини відповідно до вказаних правил.*

Історична довідка. Виникнення основних понять та розвиток комбінаторики йшло паралельно з розвитком інших розділів математики, таких, як алгебра, теорія чисел, теорія ймовірностей, з якими комбінаторика тісно пов'язана. Окремі комбінаторні задачі розв'язували ще в стародавні часи. Так математики Стародавнього сходу знали формулу, за якою визначалася кількість комбінацій через біноміальні коефіцієнти, і формулу бінома Ньютона з натуральним показником.

Перші теоретичні дослідження в цій галузі в XVII ст. були зроблені видатними французькими математиками Блезом Паскалем і П'єром Ферма у зв'язку з підрахунком кількості різних можливостей в азартних іграх (ігри з кубиком, карточні ігри тощо).

Їхні праці, що стали основою теорії ймовірностей, одночасно містили принципи визначення кількості сполук елементів скінченної множини.







Блез Паска́ль (фр. Blaise Pascal; 19.06.1623 — 19.08.1662) — французький філософ, письменник, фізик, математик. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проєктивної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями.

П'єр Ферма́ (фр. Pierre de Fermat; 17.08.1601 — 12.01.1665) — французький математик, засновник аналітичної геометрії і теорії чисел. Працюючи над «Арифметикою» Діофанта, він суттєво розвинув теорію чисел, поклавши початок широкому розділові математики — теорії алгебраїчних чисел, яка виникла внаслідок спроб довести деякі сформульовані, але не доведені самим П'єром Ферма теореми.

Великий внесок в розвиток комбінаторних методів зробили Готфрід Лейбніц і Якоб Бернуллі. У праці Бернуллі «Мистецтво припущень», яку було опубліковано в 1713 р. містилися формули для обчислення кількості перестановок з n елементів, комбінацій (без повторень і з повтореннями), розміщень.

Пізніше низку задач комбінаторики розв’язав Леонард Ейлер.



$$P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$



Готфрід Вільгельм Лейбніц (нім. Gottfried Wilhelm Leibniz; 1.07.1646 — 14.11.1716) — провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець і дипломат. Є однією з найвидатніших постатей як в історії філософії, так і в історії математики. Передбачив принципи сучасної комбінаторики та поняття, які виникли набагато пізніше в теорії ймовірностей, біології, медицини, геології, психології, лінгвістиці та інформатиці. Незалежно від Ісаака Ньютона створив диференціальне й інтегральне числення та заклав основи двійкової системи числення.

Я́коб Берну́ллі (нім. Jakob Bernoulli; 6.01.1655 — 16.08.1705) — швейцарський математик, основоположник теорій варіаційного числення і диференційних рівнянь, старший із знаменитої династії науковців Бернуллі. Йому належать значні досягнення в теорії рядів, диференціальному численні, варіаційному численні, теорії ймовірностей і теорії чисел, де його ім'ям названі числа з деякими певними властивостями (числа Бернуллі). У теорії ймовірності, формула Бернуллі дає змогу обчислити ймовірність успіхів у серії незалежних випробувань.



Леона́рд Е́йлер або Леона́рд О́йлер (нім. Leonhard Euler; 15.04.1707 — 18.09.1783) — швейцарський математик та фізик. Здійснив важливі відкриття в математичному аналізі та теорії графів, увів багато сучасної математичної термінології і позначень, зокрема поняття математичної функції. Під час розв’язування комбінаторних задач він глибоко вивчив властивості розміщень і перестановок, увів у розгляд числа Ейлера.

Але в справжню математичну науку комбінаторика перетворилася лише в XX ст. З 50-х рр. XX ст. відроджується інтерес до комбінаторики в зв'язку з бурхливим розвитком кібернетики, дискретної математики, теорії планування і теорії інформації. У цей період активізувалася увага й до *класичних комбінаторних задач*.

Класичні комбінаторні задачі — це задачі вибору і розташування елементів скінченної множини, що зазвичай формулювалися як розважальні головоломки. Їх сприймали як математичні розваги. Проте завдяки роботам Джан-Карла Рота і Річарда Стенлі комбінаторика піддалася потужному процесу алгебраїзації. Вивчення ними частково впорядкованих множин, властивостей функцій Мебіуса, абстрактних властивостей лінійної залежності, з'ясування їх ролі для розв'язування комбінаторних задач сприяли збагаченню комбінаторних методів дослідження і подальшої інтеграції комбінаторики в сучасну математику.



Джан-Карло Рота (італ. Gian-Carlo Rota; 27.04.1932 — 18 квітня 1999) — італійсько-американський математик та філософ. Більшу частину кар'єри він провів в Массачусетському технологічному інституті, де працював над галузями: комбінаторика, функціональний аналіз, теорія ймовірності та феноменологія. Його серія з 10 статей про основи комбінаторики (перша «Про основи комбінаторної теорії», 1964 р.) стала визначною в сучасній математиці.

Він казав, що хотів, щоб його запам'ятали лише через одну комбінаторну ідею — це відповідність між комбінаторними проблемами та проблемами розміщення нулів в поліномі.



Річард Пітер Стенлі (анг. Richard Peter Stanley; 23.06.1944) є почесним професором математики в Массачусетському технологічному інституті та видатним науковцем у галузі мистецтв і наук Університету Маямі . Отримав ступінь доктора філософії в Гарвардському університеті в 1971 р. під керівництвом Джан-Карло Рота. Є експертом у галузі комбінаторики та її застосування в інших математичних дисциплінах.

Стенлі відомий своєю двотомною книгою «Енумеративна комбінаторика» (1986–1999). Також є автором «Комбінаторики та комутативної алгебри» (1983) і понад 200 наукових статей з математики.

1.1. Правила комбінаторики

Розпочнемо знайомство з комбінаторикою з двох основних правил, які можна вважати за аксіоми комбінаторики.

1.1.1. Правило суми

Спочатку розглянемо задачі, які дають можливість зрозуміти сутність цього правила.

Задача 1. У класі навчається 10 хлопців і 12 дівчат. Потрібно вибрати одного учня для чергування в їдальні. Скількома способами можна зробити такий вибір?

Розв'язання. Відповідь очевидна — 22 способами (скільки учнів у класі, стільки й способів). Однак проведемо розв'язання цієї задачі дещо інакше. Позначимо множину хлопців буквою A, а кількість елементів у ній через $N(A)$. Отже, $N(A) = 10$. Множину дівчат у класі позначимо буквою B, а кількість елементів у ній через $N(B)$. Очевидно, що $N(B) = 12$. Тоді $C = A \cup B$ — множина всіх учнів класу, кількість елементів в ній $N(C) = 22$. Вибрати чергового в їдальню можна

або з 10 хлопців $N(A)$ способами або з 12 дівчат $N(B)$ способами. Тому сумарна кількість таких виборів буде $N(C) = 10 + 12 = 22$. Має місце рівність

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

Ця рівність справджується за умови $A \cap B = \emptyset$.

Розглянемо ще одну задачу.

Задача 2. У будинку чотири вікна та двоє дверей. Скільки існує способів потрапити пожежнику до будинку?

Розв'язання. Нехай вікна утворюють множину A. Зрозуміло, що $N(A) = 4$. Двері утворюють множину B, де $N(B) = 2$. Тоді $A \cup B$ — множина, яку утворюють і вікна, і двері. Потрапити пожежнику до кімнати можна або через вікно (4 способи) або через двері (2 способи).

Отже, до кімнати можна потрапити $N(A \cup B)$ способами, де $N(A \cup B) = 4 + 2 = 6$. Оскільки $A \cap B = \emptyset$, то має місце рівність $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$.

Узагальнюючи розв'язані задачі сформулюємо **перше правило** комбінаторики, яке називають **правилом суми**.

*Нехай елемент **x** із множини A можна вибрати **m** способами, а елемент **y** із множини B — **n** способами, причому множини A і B не перетинаються. Тоді один з елементів **x або y** можна вибрати **m + n** способами.*

Інакше це правило можна сформулювати так.

Якщо $N(A) = m$, $N(B) = n$ і $A \cap B = \emptyset$, то $N(A \cup B) = m + n$.

1.1.2. Правило добутку

Розглянемо тепер задачу, розв'язання якої відрізняється від попередніх.

Задача 3. З Києва до Чернівців можна дістатися або поїздом, або автобусом, або літаком, з Чернівців до Коломиї або автобусом або поїздом. Скількома способами можна здійснити подорож з Києва до Коломиї через Чернівці?

Розв'язання. Скористаємось графічною моделлю (рис. 1).



Рис. 1.

З рисунка видно, що коли обрати один з трьох можливих способів подорожі з Києва до Чернівців, то подорожувати далі до Коломиї можна двома способами. Отже, різних маршрутів з Києва до Коломиї буде $3 \cdot 2 = 6$. Отже, способів здійснити подорож з Києва до Коломиї через Чернівці буде 6.

Якщо скористатись позначеннями з попереднього правила, де множина A — способи подорожувати з Києва до Чернівців, $N(A) = 3$, множина B — способи подорожувати з Чернівців до Коломиї, $N(B) = 2$, то множина $C = A \times B = \{(x; y): x \in A,\ y \in B\}$ містить способи, якими можна подорожувати з Києва до Коломиї через Чернівці. Кількість таких способів буде $N(C) = N(A \times B) = N(A) \cdot N(B) = 6$. Множину $C = A \times B$ називають декартовим добутком множин A і B. Елементами цього добутку є усі пари $(x; y)$, де $x \in A, y \in B$.

Сформулюємо тепер **друге правило** комбінаторики, яке називають **правилом добутку**.

Якщо елемент ***x*** *із множини A можна вибрати* ***m*** *способами і при кожному виборі елемента* ***x*** *елемент* ***y*** *із множини B можна вибрати* ***n*** *способами, то вибір пари* ***(x; y)*** *можна здійснити* ***m · n*** *способами.*

Інакше це правило можна сформулювати так.

Якщо $N(A) = m$, $N(B) = n$ і $C = A \times B$, то вибрати пару $(x; y) \in C$, де $x \in A$, $y \in B$ можна $N(A \times B) = N(A) \cdot N(B)$ способами.

1.1.3. Узагальнені правила суми і добутку

Правила суми і добутку можна узагальнити і на довільну скінчену кількість множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Узагальнене правило суми таке.

Нехай множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно не перетинаються. Тоді* $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n)$.

Узагальнене правило добутку таке.

Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— довільні множини. Тоді* $N(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \ldots \cdot N(A_n)$*, де знаком* $\times$ *позначається декартовий добуток множин.*

Ці правила легко довести методом математичної індукції, враховуючи що вони є правильними для двох множин. (Пропонуємо довести їх самостійно і розглядати це як завдання для пошукової роботи).

Задача 4. Скільки можна записати п'ятицифрових натуральних чисел так, щоб довільні дві сусідні цифри числа були різними?

Розв'язання. П'ятицифрове число з цифрами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 можна розглядати як упорядковану п'ятірку елементів: $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$. При цьому цифру x_1 можна вибрати 9 способами, оскільки цифра 0 у п'ятицифровому числі не може бути першою. Якщо цифра x_1 вибрана, то для вибору цифри x_2 також існує 9 можливостей (на місці x_2 може бути будь-яка з цифр 0, 1, 2, 3, …, 9, відмінна від x_1). Після вибору цифр x_1, x_2 для вибору цифри x_3 знову є 9 можливостей і т. д. Застосовуючи узагальнене правило добутку для п'ятьох множин, знаходимо кількість п'ятицифрових чисел: $k = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = 59\ 049$.

Відповідь. 59 049 чисел.

1.2. Вибірки

Під **вибіркою** з множини $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, де елементи x_i попарно різні, будемо розуміти сукупність деяких елементів цієї множини, вибраних певним чином. Цю сукупність позначають $(a_1; a_2; \ldots; a_k)$, де кожне $a_i \in X$, причому елементи a_i не обов'язково попарно різні.

Наприклад, нехай є множина символів на клавішах клавіатури комп'ютера. Вибіркою буде довільна послідовність символів, виведених з клавіатури на екран. Вона може бути такою: (*в*; *и*; *б*; *і*; *р*; *к*; *а*) чи (*м*; *а*; *м*; *а*). З цього прикладу видно, що до складу вибірки можуть входити й однакові елементи.

Вибірки, які містять однакові елементи, називають **вибірками з повтореннями**, в іншому випадку — **без повторень**. Очевидно, що кількість елементів у вибірці з повтореннями може бути більшою від кількості елементів у множині *X*.

Вибірки бувають **упорядкованими** і **невпорядкованими**. Кожну множину можна подати як вибірку, але не навпаки.

Наприклад, вибірку (*а*; *а*) не можна подати як множину {*а*; *а*}, оскільки ця множина дорівнює множині {*а*}, яку можна вважати вибіркою (*а*), що не дорівнює вибірці (*а*; *а*).

Вибірку називають упорядкованою, коли її елементи занумеровані певним чином або записані в певному порядку.

Наприклад, щоб комп'ютер виконав певну дію, ми повинні з клавіатури ввести деяку команду. Символи, якими записана ця команда, утворюють упорядковану вибірку. Порядок цих символів важливий, бо коли поміняти місцями два довільні символи, то очікуваного результату можемо не отримати. Проте, наприклад, коли в класі обирають двох учнів, які будуть чергувати, то порядок вибору двох осіб може бути не важливим. Це приклад вибірки невпорядкованої.

Усе вище сказане подамо у вигляді схеми 1.

Схема 1



Розглядатимемо вибірки впорядковані і невпорядковані **без повторень**.

Під час розв'язування задач комбінаторики потрібно вміти знаходити кількість вибірок того чи іншого виду. Найпоширеніші з них є вибірки, які отримали назву **перестановки, розміщення, комбінації.**

1.2.1. Перестановки

Перестановкою елементів множини A, що містить n елементів, називають упорядковану n-елементну вибірку цієї множини.

Приклад 1. Нехай множина $A = \{1; 2\}$. Тоді перестановками її елементів будуть вибірки (1; 2) і (2; 1). Їх дві. Якщо взяти множину $B = \{a; b; c\}$, то перестановками її елементів будуть шість вибірок:

$(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$.

Кількість перестановок без повторень з n елементів позначають символом P_n, який походить від початкової букви французького слова *permutation*, що означає «перестановка». Тому, для прикладу 1, наведеного вище, маємо: $P_2 = 2$, $P_3 = 6$.

Звернемо увагу на те, що **кожна перестановка** елементів даної множини **містить всі елементи даної множини**, але **в**

різних перестановках ці **елементи записані в різному порядку**.

1.2.2. Розміщення

Упорядковану k-елементну вибірку з n-елементної множини A називають розміщенням з n елементів по k елементів.

Приклад 2. Нехай множина $A = \{1; 2\}$. Тоді відповідними розміщеннями по одному елементу будуть вибірки (1) і (2), по два елементи — вибірки (1; 2) та (2; 1). Для множини $B = \{a; b; c\}$ розміщеннями по одному елементу будуть упорядковані вибірки (a), (b), (c), по два елементи — $(a; b)$, $(b; a)$, $(c; a)$, $(a; c)$, $(b; c)$, $(c; b)$, по три елементи — $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$.

Кількість розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k. Нижній індекс n показує скільки елементів у заданій множині, а верхній k — скільки елементів у вибірці. Буква A — це перша буква французького слова *arrangement* — розміщення, впорядкування.

У прикладі 2 для множини A: $A_2^1 = 2$; $A_2^2 = 2$; для множини B: $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

Легко помітити, що $P_3 = A_3^3$. (Поясніть чому!)

Звернемо увагу на те, що **розміщення з *n* елементів по *k* елементів відрізняються** між собою **або елементами, або порядком елементів**.

1.2.3. Комбінації

Невпорядковану k-елементну вибірку n-елементної множини A називають комбінацією з n елементів по k елементів.

Приклад 3. Нехай множина $A = \{1; 2\}$. Тоді відповідними комбінаціями по одному елементу будуть невпорядковані вибірки (1), (2), по два елементи — невпорядкована вибірка (1; 2). Для множини $B = \{a; b; c\}$ комбінаціями по одному елементу будуть невпорядковані вибірки (a), (b), (c), по два елементи —(a; b), (a; c), (b; c), по три елементи — (a; b; c).

Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k елементів позначають символом C_n^k. Нижній індекс n показує скільки елементів в заданій множині, а верхній k — скільки елементів у вибірці. Буква C — перша буква французького слова *combinasion* — комбінація.

У прикладі 3 для множини A: $C_2^1 = 2$; $C_2^2 = 1$; для множини B: $C_3^1 = 3$; $C_3^2 = 3$; $C_3^3 = 1$.

Звернемо увагу на те, що **комбінації з n елементів по k елементів відрізняються** одна від одної лише **елементами**.

1.3. Формули підрахунку кількості вибірок

Для підрахунку кількості перестановок, розміщень, комбінацій існують відповідні формули. Знайдемо ці формули.

1.3.1. Кількість розміщень

Розглянемо множину $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$. Необхідно визначити скільки різних упорядкованих k-елементних вибірок можна утворити з її елементів. Нехай потрібно утворити вибірки (x_1; x_2; …; x_k), де x_i — i-тий елемент цієї впорядкованої вибірки. На місце x_1 можна вибрати елемент множини B n способами. На місці x_2 має бути елемент відмінний від x_1. Таких елементів у множині B залишилося $n - 1$. Тому x_2 можна вибрати $(n - 1)$ способом. Якщо на місце x_1 і x_2 вже вибрані елементи множини B, то на місці x_3 має бути елемент відмінний від x_1 і x_2. Таких елементів у множині B залишилося $(n - 2)$. Тому елемент x_3 можна вибрати $(n - 2)$ способами і т. д. Міркуючи аналогічно доходимо висновку, що

на останнє місце x_k вибірки можна вибрати елемент з множини B $(n-k+1)$ способом. Тому за узагальненим правилом добутку кількість k-елементних упорядкованих вибірок без повторень дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Отже, нами доведено таке твердження.

Теорема 1. *Кількість розміщень з n елементів по k елементів обчислюється за формулою*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \qquad (1)$$

Формулу (1) можна дещо змінити. Помножимо вираз, що стоїть справа в цій формулі на вираз

$$(n-k)\cdot(n-(k+1))\cdot(n-(k+2))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

і одночасно поділимо на нього. Тоді маємо:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-(k+1))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

У математиці добуток перших n натуральних чисел називають **факторіалом** числа n і позначають $\boldsymbol{n!}$ (читається «n факторіал»).

Отже, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n$. Тоді

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Користуючись останньою формулою маємо:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2} = 3,$$

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 9\cdot 10 = 90.$$

Задача 5. У класі 24 учні. Скількома способами можна обрати з них старосту, представника класу в учнівській раді школи і адміністратора класного чату?

Розв'язання. Очевидно, що з учнів класу потрібно утворити упорядковану вибірку з трьох елементів без повторень. Отже, говорячи математичною мовою, потрібно

підрахувати скільки буде 3-елементних розміщень з 24-елементної множини. Відповідь знаходимо за формулою (2):
$A_{24}^{3} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 21} = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = 12\,144.$

Відповідь. 12 144 способів.

1.3.2. Кількість перестановок

Оскільки $P_n = A_n^n$, то за формулою (1) отримуємо:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-n+1),$$

тобто

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Таким чином з теореми 1 випливає наслідок, який дає можливість підрахувати кількість перестановок з *n* елементів.

Наслідок 1. *Кількість перестановок з n елементів без повторень обчислюється за формулою*

$$P_n = n!. \qquad (3)$$

Задача 6. Скількома способами можна закодувати замок, якщо код складається з десяти різних цифр.

Розв'язання. Оскільки для кодування замка використовують десять цифр 0, 1, 2, 3, 4, …, 9, то кожен код відрізнятиметься один від одного лише порядком набору цифр. Отже, потрібно підрахувати кількість перестановок елементів множини {0; 1; 2; …; 9}. Відповідь знаходимо за формулою (3): $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

Відповідь. 3 628 800 способів.

1.3.3. Кількість комбінацій

Знайдемо тепер кількість комбінацій з *n* елементів по *k* елементів. Розглянемо довільну таку комбінацію. Це буде

невпорядкована вибірка з k елементами. З цієї вибірки можна утворити $k!$ перестановок, кожна з яких є розміщенням з n елементів по k елементів. Тому кількість розміщень з n елементів по k елементів є у $k!$ раз більшою за кількість комбінацій з n елементів по k елементів.

Отже, $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Скориставшись формулою (2), отримуємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Таким чином нами доведена наступна теорема.

Теорема 2. *Кількість комбінацій з n елементів по k елементів обчислюється за формулою*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (4)$$

Задача 7. У класі 30 учнів. Скількома способами можна вибрати комісію з трьох осіб, яка б перевірила санітарний стан класних кімнат в школі.

Розв'язання. Зрозуміло, що важливим є те, хто увійде в комісію, а не в якому порядку запишуть члена комісії. Тому, щоб відповісти на запитання задачі, потрібно підрахувати кількість комбінацій з 30 елементів по 3 елементи.

Отже,

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!3!} = \frac{30!}{27!3!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 28 \cdot 29 \cdot 5 = 2060.$$

Відповідь. 2060 способів.

Зауваження. У комбінаториці порожню множину вважають вибіркою, причому, як упорядкованою, так і невпорядкованою (залежно від практичної задачі). Це аналогічне до того, що число нуль називають як невід'ємним числом так і недодатним. З довільної множини можна утворити лише одну вибірку, яка не матиме елементів. Тому за домовленістю вважають, що $P_0 = 0! = 1$, $C_n^0 = 1$, $A_n^0 = 1$.

1.4.* Вибірки з повтореннями, формули підрахунку їх кількості

До вибірок з повтореннями відносять розміщення з повтореннями, перестановки з повтореннями та комбінації з повтореннями. Розглянемо їх.

1.4.1. Розміщення з повтореннями

Упорядковану k-елементну вибірку з повтореннями n-елементної множини A називають розміщенням з повтореннями з n елементів по k елементів.

Приклад 4. Нехай дано множину $A = \{a; b; c\}$. З її елементів можна утворити шість упорядкованих вибірок по два елементи без повторень: $(a; b)$, $(b; a)$, $(c; a)$, $(a; c)$, $(b; c)$, $(c; b)$. Якщо тепер до них приєднати ще двоелементні упорядковані вибірки з повтореннями $(a; a)$, $(b; b)$, $(c; c)$, то отримаємо дев'ять розміщень з трьох елементів по два елементи з повтореннями.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів позначають символом $\overline{A_n^k}$. Нижній індекс n показує скільки елементів у даній множині, верхній k — скільки елементів у вибірці, а риска вказує на те, що елементи у вибірці повторюються. Для прикладу 4 маємо $\overline{A_3^2} = 9$. Легко показати, що $\overline{A_3^1} = 3$, $\overline{A_3^3} = 27$. (Пропонуємо зробити це самостійно). Помічаємо, що $\overline{A_3^1} = 3^1$, $\overline{A_3^2} = 3^2$, $\overline{A_3^3} = 3^3$. Тому виникає припущення, що правильною є така теорема.

Теорема 3. Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k елементів обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k. \qquad (5)$$

Доведення. Розглянемо n-елементну множину $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$. Потрібно визначити скільки різних k-елементних

розміщень з повтореннями можна утворити з її елементів. Візьмемо довільне розміщення з повтореннями. На місце x_1 можна вибрати елемент множини B n способами; на місце x_2 можна вибрати елемент множини B також n способами (адже елементи можуть повторюватись) і т.д. І на місце x_k можна вибрати елемент множини B n способами. Тому за узагальненим правилом добутку кількість k-елементних розміщень з повтореннями з елементів множини B дорівнює

$$\overline{A_n^k} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\text{разів}} = n^k.$$

Теорему доведено.

Слід зауважити, що розміщення з повтореннями можна розглядати і у випадку, коли $k > n$.

Задача 8. До семицифрового коду входять цифри від 0 до 9. Скільки можна записати різних кодів?

Розв'язання. Розглянемо множину A = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}. Вона містить 10 різних елементів. Кожен код — упорядкована 7-елементна вибірка з повтореннями множини A. Тому кількість усіх кодів буде $\overline{A_{10}^7} = 10^7 = 10\ 000\ 000$.

Відповідь. 10 000 000 кодів.

1.4.2. Перестановки з повтореннями

Упорядковану n-елементну вибірку, утворену перестановкою елементів фіксованої вибірки з повторенням, називають перестановкою з n-елементів з повтореннями.

Приклад 5. Нехай дано фіксовану вибірку A = {*м*; *а*; *м*; *а*}. В ній буква *а* повторюється два рази, буква *м* — два рази. Якщо пронумерувати елементи вибірки A, вважаючи що всі вони різні, то матимемо 24 перестановки (P_4 = 24). Запишемо їх, позначивши букви індексами: $м_1$, $а_1$, $м_2$, $а_2$:

($м_1$; $а_1$; $м_2$; $а_2$), ($м_1$; $а_1$; $а_2$; $м_2$), ($м_1$; $м_2$; $а_1$; $а_2$),
($м_1$; $м_2$; $а_2$; $а_1$), ($м_2$; $а_1$; $м_1$; $а_2$), ($м_2$; $а_1$; $а_2$; $м_1$),
($м_2$; $м_1$; $а_1$; $а_2$), ($м_2$; $м_1$; $а_2$; $а_1$), ($м_1$; $а_2$; $м_2$; $а_1$),
($м_1$; $а_2$; $а_1$; $м_2$), ($м_1$; $м_2$; $а_2$; $а_1$), ($м_1$; $м_2$; $а_2$; $а_1$),
($а_1$; $м_1$; $а_2$; $м_2$), ($а_1$; $м_1$; $м_2$; $а_2$), ($а_1$; $а_2$; $м_1$; $м_2$),
($а_1$; $а_2$; $м_2$; $м_1$), ($а_2$; $м_1$; $а_1$; $м_2$), ($а_2$; $м_1$; $м_2$; $а_1$),
($а_2$; $а_1$; $м_1$; $м_2$), ($а_2$; $а_1$; $м_2$; $м_1$), ($а_2$; $м_2$; $а_1$; $м_1$),
($а_2$; $м_2$; $м_1$; $а_1$), ($а_2$; $а_1$; $м_2$; $м_1$), ($а_2$; $а_1$; $м_1$; $м_2$).

Оскільки букви *а* і *м* повторюються, то різних перестановок з повтореннями (знімемо індекси з букв) буде лише 6:

(*м*; *а*; *м*; *а*), (*м*; *а*; *а*; *м*), (*м*; *м*; *а*; *а*),
(*а*; *м*; *а*; *м*), (*а*; *а*; *м*; *м*), (*а*; *м*; *м*; *а*).

Їх кількість позначають символом $P_4(2, 2)$, де число 4 вказує на кількість елементів множини A, числа 2 і 2 — на те, що різних елементів два і кожен з них повторюється двічі.

З наведеного прикладу 5 бачимо, що кожна перестановка з повтореннями складається з n *не обов'язково* різних елементів (серед них є як однакові, так і попарно різні). Причому, якщо один елемент повторюється k_1 разів, другий — k_2, третій — k_3, ..., останній — k_i разів, то очевидно, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$. Деякі, а можливо і всі, з чисел k_i можуть дорівнювати 1, тобто деякі елементи, а можливо і всі, можуть і не повторюватись.

Кількість перестановок з n елементів з повтореннями позначають символом $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_i)$, де число n вказує на кількість елементів у перестановці, число i – на кількість попарно різних елементів, а числа $k_1, k_2, \ldots, k_i$ — на те, скільки різних елементів містить множина і скільки разів повторюється той чи інший елемент.

Як практично підрахувати кількість таких перестановок з повтореннями? Щоб знайти відповідь на це запитання розглянемо таку фіксовану вибірку:

$$\left(\underbrace{b_1;\ b_1;\ \ldots;\ b_1}_{k_1};\underbrace{b_2;\ b_2;\ \ldots;\ b_2}_{k_2};\ \ldots\ \underbrace{b_i;\ b_i;\ \ldots;b_i}_{k_i}\right), \quad (6)$$

У ній спочатку виписані всі елементи b_1, потім всі елементи b_2, ..., і нарешті, усі елементи b_i. Елементи b_1 можна переставити один з одним $k_1!$ способами, отримуючи однакові перестановки. Так само отримуємо $k_2!$ Однакових перестановок елементів b_2, ... , $k_i!$ однакових перестановок, коли переставляємо між собою елементи b_i .

Усі інші способи переставляти місцями елементи вибірки (6) дають різні перестановки з повтореннями. Тому їх кількість дорівнює $P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_i)$. За правилом добутку кількість перестановок з n елементів вибірки (6) (якби всі елементи були різними) дорівнює:

$$P_n = P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots\ ,\ k_i) \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!.$$

Звідси отримуємо, що

$$P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots\ ,\ k_i) = \frac{P_n}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!},$$

І враховуючи формулу (3) маємо:

$$P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots\ ,\ k_i) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!}.$$

Таким чином нами доведена наступна теорема.

Теорема 4. *Кількість перестановок з n елементів з повтореннями обчислюється за формулою*

$$P_n(k_1,\ k_2,\ \ldots\ ,\ k_i) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!}. \quad (7)$$

Задача 9. Старшокласник Денис вирішив зателефонувати по мобільному телефону своєму однокласнику Тарасу. Номер оператора він знає, а номер телефону забув. Проте він пам’ятає, що потрібний йому номер містить чотири одиниці, дві шістки і один нуль. Розташування цифр він забув. Яку кількість спроб повинен зробити Денис, щоб набрати потрібний номер?

Розв'язання. Цифри номера телефону Тараса утворюють множину $A = \{1; 1; 1; 1; 6; 6; 0\}$. Щоб набрати потрібний номер, елементи множини A потрібно упорядкувати. Отримаємо 7-елементні перестановки з повтореннями. Їх кількість:

$$P_7(4,\ 2,\ 1) = \frac{7!}{4!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 105.$$

Відповідь. 105 спроб.

1.4.3. Комбінації з повтореннями

Невпорядковану k-елементну вибірку з повтореннями з n-елементної множини A називають комбінацією з повтореннями з n елементів по k елементів.

Приклад 6. Нехай дано множину $A = \{a; b; c\}$. З її елементів можна утворити три комбінації по два елементи без повторень: $(a; b)$, $(a; c)$, $(b; c)$. Якщо тепер до них приєднати ще двоелементні невпорядковані вибірки з повтореннями $(a; a)$, $(b; b)$, $(c; c)$, то отримаємо шість комбінацій з повтореннями з трьох елементів по два елементи.

Кількість комбінацій з повтореннями позначають символом $\overline{C_n^k}$. Нижній індекс n показує скільки елементів в даній множині, верхній k — скільки елементів у вибірці, а риска вказує на те, що елементи у вибірці повторюються.

Для наведеного прикладу маємо $\overline{C_3^2} = 6$. Легко показати, що $\overline{C_3^1} = 3$, $\overline{C_3^3} = 10$. (Пропонуємо зробити це самостійно).

З'ясуємо, як практично підраховувати кількість таких комбінацій.

Для цього розглянемо множину $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$, яка складається з n різних елементів. Утворимо з її елементів k елементні комбінації з повтореннями. Виберемо довільну з них. У цій комбінації елемент b_1 зустрічається $k_1 \geq 0$ разів, елемент b_2 — $k_2 \geq 0$ разів, …, елемент b_n — $k_n \geq 0$ разів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = k$.

Поставимо у відповідність обраній комбінації такий код. Замість елемента b_1 запишемо $k_1 \geq 0$ раз цифру 1, потім запишемо цифру 0; замість елемента b_2 запишемо $k_2 \geq 0$ раз цифру 1, потім запишемо цифру 0 і т. д. Отже, замість кожного елемента b_i множини B, де $i < n$, записуємо відповідну кількість $k_i \geq 0$ одиниць та нуль (якщо $k_i = 0$, то записуємо лише цифру 0). Замість останнього елемента записуємо лише $k_n \geq 0$ одиниць (якщо $k_n = 0$, то нічого не записуємо). В утвореному коді кожному елементу b_i множини B відповідає $k_i \geq 0$ одиниць (і тому кількість одиниць у коді дорівнює $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = k$, а також кожному елементу b_i, де $i < n$, відповідає один нуль, а елементу b_n не відповідає жодного нуля. Тому кількість нулів у коді буде $n - 1$).

Наприклад, комбінаціям з повтореннями у прикладі 6 ставляться у відповідність коди:

$(a; b) \leftrightarrow (1\ 0\ 1\ 0)$, $(a; a) \leftrightarrow (1\ 1\ 0\ 0)$,
$(b; b) \leftrightarrow (0\ 1\ 1\ 0)$, $(a; c) \leftrightarrow (1\ 0\ 0\ 1)$,
$(b; c) \leftrightarrow (0\ 1\ 0\ 1)$, $(c; c) \leftrightarrow (0\ 0\ 1\ 1)$.

Таким чином кожній комбінації з повтореннями відповідатиме один і лише один код, записаний k одиницями і $(n - 1)$ нулями.

Звідси доходимо висновку, що кількість $\overline{C_n^k}$ комбінацій з повтореннями з n елементів по k елементів дорівнює кількості перестановок з повтореннями з k одиниць і $(n-1)$ нулів, тобто $\overline{C_n^k} = P_{k+(n-1)}(k,\ n-1)$.

Тому, враховуючи формулу (7), а також формулу (4), маємо:

$$\overline{C_n^k} = P_{k+(n-1)}(k,\ n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Таким чином доведена ще одна теорема.

Теорема 5. Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k елементів обчислюється за формулою

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k. \qquad (8)$$

Задача 10. У скількох трикутників довжини сторін можуть набувати одного з таких значень: 4 см, 5 см, 6 см, 7 см?

Розв'язання. Вказані значення утворюють множину $A = \{4; 5; 6; 7\}$. Трикутники, довжини сторін яких набувають одного з таких значень можуть бути і різносторонніми, і рівнобедреними, і рівносторонніми. Порядок значень довжин сторін не важливий. Тому кількість трикутників буде такою, як кількість комбінацій з повтореннями з 4 елементів по 3 елементи. За формулою (8) маємо:

$$\overline{C_4^3} = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Відповідь. У 20 трикутників.



Вправи для самостійного розв'язування

1. Упорядкуйте множину $A = \{3; 1; 2; 2; 10\}$ за: а) зростанням, б) спаданням.

2. На тарілці лежать 4 яблука і 5 груш. Скількома способами можна з тарілки вибрати один фрукт?

3. З 15 хлопців і 12 дівчат потрібно вибрати одного хлопця і одну дівчину для участі в змаганнях. Скількома способами це можна зробити?

4. В інформаційно-технологічному відділі банка працюють 3 аналітики, 10 програмістів і 20 інженерів. Для роботи у святковий день начальник відділу повинен виділити одного співробітника. Скільки способів є у начальника?

5. Міста A і B сполучають 5 доріг, а міста B і C — 6 доріг. Скількома способами можна здійснити поїздку з A до C через місто B і повернутися назад?

6. Обчисліть: а) A_8^4; б) P_6; в) C_{10}^6.

7. Скількома способами з цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти п'ятицифрове число, якщо цифри в ньому не повторюються?

8. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?

9. Скільки трицифрових чисел можна утворити цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну з цих цифр можна використовувати не більше одного разу?

10. У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі вони різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

11. У змаганнях з бальних танців беруть участь 16 пар. Скількома способами між парами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

12. Скількома різними способами можна обрати старосту класу і його заступника, якщо в класі 35 учнів?

13. У парламенті ліцею 11 учнів. З них треба обрати голову, заступника та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

14. Скільки прямих можна провести через 10 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?

15. Учитель літератури запропонував учням список із 10 творів, з яких необхідно обов'язково прочитати 6 будь-яких. Скількома способами учень може вибрати рекомендовані твори?

16. У підготовці до математичного турніру беруть участь 9 учнів 10—11-х класів ліцею. Команда, яка поїде на турнір, буде складатися з 5 чоловік. Скількома різними способами можна створити команду?

17. З 10 різних книжок вибирають 4 для нагородження переможців олімпіади. Скількома способами це можна зробити?

18. Обчисліть: а) $\frac{P_{10}-P_9}{9P_9}$; б) $\frac{P_{12}-10P_9}{P_{10}}$.

19. Спростіть $\frac{P_{k+1}}{P_{k-1}}$.

20. Розв'яжіть рівняння:

а) $A_x^3 = 56x$; б) $A_{x+3}^4 = 30A_x^2$; в) $C_{x+1}^{x-1} = 25 - 2C_x^{x-1}$.

21. Скільки правильних дробів можна скласти з чисел 4, 5, 7, 9, 11? (у чисельнику і знаменнику кожного дробу має бути по одному числу).

22. Скільки серед перестановок цифр 1, 2, 4, 5, 6 скільки таких, що не починаються цифрою 4?

23. Визначте кількість п'ятицифрових чисел, які можна записати цифрами 0, 3, 4, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються?

24. П'ять хлопчиків і 5 дівчаток сідають в ряд на 10 розташованих поруч стільців, причому хлопчики сідають на місця з непарними номерами, а дівчатка — на місця з парними номерами. Скількома способами це можна зробити?

25. Скільки потрібно взяти елементів, щоб кількість розміщень з них по 5 елементів було в 6 раз більшою, ніж кількість розміщень з них по 3 елементи?

26. У одного учня є 9 різних книжок з математики, а у іншого — 7 . Під час підготовки до олімпіади, вони вирішили обмінятися трьома книжками. Скількома способами можна зробити такий обмін?

27. У класі навчаються 13 хлопців і 8 дівчат. Для чергування в їдальні необхідно виділити чотирьох хлопців і трьох дівчат. Скількома способами це можна зробити?

28. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний учитель викладатиме у двох класах?

29. У ящику лежать білі і сині кульки, серед яких 12 білих. Відомо, що існує 330 способів вибрати дві білі і одну синю кульки. Скільки синіх кульок лежить у ящику?

30. Сашко і Маринка регулярно скачують фільми. У Сашка є 30 комедій, 80 бойовиків і 7 мелодрам. У Маринки — 20 комедій, 5 бойовиків і 90 мелодрам. Скількома способами вони можуть обмінятися записами трьох комедій, двох бойовиків і однієї мелодрами?

31. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов їх забрати, то виявилось, що він забув код. Пасажир пам'ятає, що в номері були числа 23 і 37. Для відкриття камери, потрібно набрати п'ятизначний код. Яку

найбільшу кількість варіантів треба перебрати, щоб відкрити камеру?

32. На зборах повинні виступити 4 особи *A*, *B*, *C*, *D*. Скількома способами їх можна розташувати в списку ораторів, якщо *B* не може виступати до того часу, поки не виступить *A*?

33. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, ..., n\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поруч і в порядку зростання?

34. В розіграші першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Команди, які займуть перше, друге і третє місця, нагороджуються золотою, срібною і бронзовою медалями відповідно, а команди, що зайняли останні 2 місця, залишають вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

35. Скількома способами можна поділити $m + n + s$ предметів на три групи так, щоб в одній групі було m предметів, в другій – n предметів, в третій – s предметів?

36. Скількома способами можна поділити $3n$ різних предметів між трьома особами так, щоб кожна особа одержала n предметів?

37. У кімнаті n лампочок.

а) Скільки є різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно k лампочок?

б) Скільки всього може бути різних способів освітлення кімнати?

38. Напишіть всі комбінації з повтореннями з трьох елементів *a*, *b*, *c* по 3.

39. Скількома способами з цифр 3, 5, 7, 9 можна скласти чотирицифрове число, якщо кожна цифра може входити в нього довільну кількість разів?

40. Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

41. Шість пасажирів заходять у поїзд метро, в якому три вагони. Скількома різними способами можуть розміститись пасажири по вагонах?

42. Знайти суму цифр усіх чотирицифрових чисел, записаних за допомогою цифр 2, 4, 5, 8.

43. Чому дорівнює кількість різних чотирицифрових чисел, які можна утворити з цифр 0, 1, 2, 5, 6, 7?

44. Скільки чисел, менших від мільйона, можна написати за допомогою цифр 9, 8, 7?

45. Скільки є п'ятицифрових чисел, які діляться на 5?

46. Скільки перестановок букв можна зробити в слові «математика»?

47. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова «комбінаторика»?

48. Скількома способами можна розставити білі фігури: 2 коні, 2 слони, 2 тури, ферзя і короля на першій лінії шахової дошки?

49. У поштовому відділенні продають марки 10 сортів. Скількома способами можна купити: а) 8 різних марок; б) 12 будь-яких марок?

50. У селищі мешкає 1500 жителів. Довести, що принаймні два з них мають однакові ініціали.

51. Маринка дуже любить тістечка і щоденно в кондитерській, що поряд зі школою, купує 6 тістечок (однакових або різних). Усього в кондитерській продається 11 видів тістечок. Скількома способами Маринка може вибрати з них шість штук?

52. У конкурсі за трьома номінаціями беруть участь 10 кінофільмів. Обчисліть кількість варіантів розподілу призів, якщо з кожної номінації нагороджують: а) різними призами; б) однаковими призами.

Відповіді та вказівки до розв'язування

1. а) $A = \{1; 2; 2; 3; 10\}$; б) $A = \{10; 3; 2; 2; 1\}$.

2. 9. **3.** 180. **4.** 3 + 10 + 20 = 33. **5.** 60.

6. а) $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; б) $P_6 = 6! = 720$; в) $C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$.

7. $P_5 = 5! = 120$. **8.** $P_7 = 5040$. **9.** $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

10. $A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200$. **11.** $A_{16}^3 = \frac{16!}{13!} = 3360$.

12. $A_{35}^2 = 1190$. **13.** $A_{11}^3 = 990$. **14.** $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$.

15. $C_{10}^6 = 210$. **16.** $C_9^5 = 126$. **17.** $C_{10}^4 = 210$.

18. а) 1; б) 131. **19.** $k(k + 1)$.

20. а) 9; б) коренів немає; в) 5. **21.** 9.

22. 96. Першою можна записати будь-яку з чотирьох цифр (цифру 4 не використовуємо), другою — знову будь-яку з чотирьох цифр, адже одна цифра вже задіяна, третьою — будь-яку з трьох, що залишилися, четвертою — будь-яку з двох, п'ятою — одну цифру. За узагальненим правилом множення маємо $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Можна міркувати інакше. Різних перестановок $P_5 = 120$. Серед них є і ті, що починаються з цифри 4. Якщо відкинути її, то отримаємо перестановки з 4-х елементів, їх $P_4 = 24$. Тобто, є 24 перестановки, у яких на першому місці цифра 4. Тому умову задачі задовольняє 120 – 24 = 96 перестановок.

23. $P_5 - P_4 = 96$.

24. $(P_5)^2 = 14\,400$. Занумеруємо стільці: 1, 2, 3, 4. 5, 7, 8, 9, 10. Способів утворити різні перестановки з чисел 1, 3, 5, 7, 9 є $P_5 = 120$. Так само є $P_5 = 120$ способів утворити перестановки з чисел 2, 4, 6, 8, 10. За правилом добутку маємо $120 \cdot 120 = 14\,400$ способів.

25. 6. Розв'яжіть рівняння $A_n^5 = 6A_n^3$.

26. $C_9^3 \cdot C_7^3 = 2940$. Перший учень для обміну може вибрати книжки $C_9^3 = 84$ способами, другий — $C_7^3 = 35$ способами. За правилом добутку маємо $84 \cdot 35 = 2940$ способи обміну книжками..

27. $C_{13}^4 \cdot C_8^3 = 40040$. **28.** $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$.

29. 5. Розв'яжіть рівняння $C_{12}^2 \cdot C_n^1 = 330$.

30. $C_{30}^3 \cdot C_{20}^3 \cdot C_{80}^2 \cdot C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{90}^1 = 92142187200000$.

31. $A_{12}^3 = 1320$. Слід розглянути розміщення з 13 елементів — 23, 37, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — по 3 елементи.

32. $P_3 = 6$. **33.** $P_{n-2} = (n-2)!$ **34.** $A_{16}^5 = 524160$.

35. $C_{m+n+s}^m \cdot C_{n+s}^n \cdot C_s^s$. **36.** $C_{3n}^n \cdot C_{2n}^n \cdot C_n^n$.

37. а) C_n^k; б) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

38. (*a*; *b*; *c*), (*a*; *a*; *b*), (*a*; *a*; *c*), (*b*; *b*; *a*), (*b*; *b*; *c*), (*c*; *c*; *a*), (*c*; *c*; *b*), (*a*; *a*; *a*), (*b*; *b*; *b*), (*c*; *c*; *c*).

39. 4^4. **40.** 5^3. **41.** 3^6. **42.** $4^4 \cdot 19$.

43. 1080. Оскільки цифри в запису числа можуть повторюватися, то різних чотирицифрових чисел з шести цифр можна записати $\overline{A_6^4} = 6^4$. Серед них будуть і всі числа, у яких на першому місці стоїть цифра 0. Такі числа можна розглядати як трицифрові, записані за допомогою цифр 0, 1, 2, 5, 6, 7. Їх буде $\overline{A_6^3} = 6^3$. Тоді всіх чисел — $6^4 - 6^3 = 5 \cdot 6^3 = 1080$.

44. $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 1092$.

45. 18 000. Будемо записувати числа, починаючи з останньої цифри. Нею може бути або 0, або 5 — 2 варіанти. На четвертому, третьому і другому місцях цифри можуть розміститися 10^3 способами. На першому місці може бути будь-яка цифра, крім 0, — 9 варіантів. За узагальненим правилом добутку маємо $2 \cdot 10^3 \cdot 9 = 18\,000$.

46. $P_{10}(2;3;2) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$

47. $P_{13}(2;2;2) = \frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 778377600$.

48. $P_8(2;2;2) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 5040$.

49. а) $C_{10}^8 = 90$; б) 10^{12}.

50. Навіть коли для утворення ініціалів, а для цього потрібно 2 букви, взяти всі букви українського алфавіту, а їх 33, то утвориться різних $33^2 = 1089$ ініціалів. Тому не більше від 1089 мешканців селища можуть мати різні ініціали.

51. $\overline{C_{11}^6} = C_{16}^{10} = 8008$.

52. а) $\overline{A_{10}^3} = 10^3 = 1000$; б) $\overline{C_{10}^3} = 220$.

Розділ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ



У математичній статистиці,
тобто в практиці застосування теорії ймовірностей,
висновки мають загальний характер критеріїв практики.
В.С.Королюк, А.В.Скороход

2.1. Статистика як наука

«За статистичними даними», «статистичний звіт», «статистика говорить про те, що…» — достатньо часто такі слова можна прочитати в газетах, почути по радіо чи телебаченню. Що ж таке статистика, чим вона займається і що вивчає?

Статистика (від латинського *status* — держава, становище, стан явища) — це наука, яка вивчає кількісну сторону масових суспільних, соціально-економічних та інших явищ у нерозривному зв'язку з їх якісними показниками в певних умовах місця і часу.

Історична довідка. Як наука статистика виникла тільки в XVII ст. Проте статистичний облік існував і в далекій давнині. Відомо, що за 5 тис. років до н. є. проводилися переписи населення в Китаї, відбувалося порівняння військового потенціалу різних країн, вівся облік майна громадян у Давньому Єгипті тощо.

У країнах стародавнього світу склалися розвинені системи державного і адміністративного обліку. Проте ні наукової бази, ні чіткого тлумачення отриманих результатів на той час ще не було.

Біля джерел статистичної науки стоять дві школи: ***німецька*** (суто описова наука) і ***англійська*** (інша назва — «школа політичних арифметиків»).

Представники описової школи вважали, що завданням статистики — державознавства — є опис устрою, території,

населення, віросповідання, клімату, ведення господарства і т. п. тільки в словесній формі, без чисел і динаміки, тобто без відображення особливостей розвитку держави в ті чи інші періоди. Визначними представниками описової школи були Герман Конрінг і Готфрід Ахенваль, який у 1746 р. увів термін «статистика».

Політичні арифметики ставили за мету вивчати суспільні явища за допомогою числових характеристик. Вони бачили основне призначення статистики у вивченні масових суспільних явищ, розуміли необхідність врахування в статистичних дослідженнях вимог закону великих чисел. Видатними представниками англійської школи були Вільям Петті і Джон Граунт.



Герман Конрінг (нім. Hermann Conring; 9.11.1606 — 12.12.1681) — німецький полігістор, лікар, історик та державознавець, був професором медицини та політики в Хельмштадті. Зробив суттєвий внесок у вивчення медицини, політики та закону.Як видатний державний діяч він захоплювався державознавством, яке часто називалося описовою статистикою — суспільною наукою про соціальні, правові та господарські аспекти держави.



Готфрід Ахенвалль (нім. Gottfried Achenwall; 20.10.1719 — 1.05.1772) — німецький філософ, історик, економіст, педагог та юрист епохи Просвітництва. Він вважається основоположником статистики. У своїй науковій роботі слідував за засновником державознавства Германом Конрінгом і вперше систематично виклав цю дисципліну, притому вже німецькою, а не латинською мовою.

І по Конрінгу, і по Ахенваллю метою статистики було: опис клімату, географічного положення, політичної структури економіки даної держави, оцінка її населення і повідомлення відомостей з її історії; співвідношення між кількісними даними не вивчалися.



Сер Вільям Петті (англ. Sir William Petty; 26.05.1623 — 16.12.1687) — англійський економіст, лікар, учений та філософ. Короткий час Петті був членом парламенту Англії, а також був ученим, винахідником і торговцем, статутним членом Королівського товариства. Однак найбільший внесок він зробив саме до економічної теорії та методів політичної арифметики (економічної статистики), і саме йому приписують філософію невтручання уряду в економіку — «laissez-faire».

Джон Граунт (англ. John Graunt; 24.04.1620 — 18.04.1674) — англійський вчений, родоначальник науки демографії, статистичного вивчення людських популяцій. У 1662 р. опублікував свої знамениті «Природничі та політичні спостереження щодо лондонських рахунків про смертність». Це був перший трактат про статистику життєдіяльності, який демонструє найдавнішу спробу застосувати теорію до реальних статистичних проблем. Граунт був оцінений Карлом Пірсоном як батько сучасної статистики.



У XIX ст. отримало розвиток вчення про середні величини бельгійського статистика Адольфа Кетле. Його вважають одним із засновників наукової статистики.



Ламбер Адольф Жак Кетле (фр. Lambert-Adolph-Jacques Quetelet; 22.02.1796 — 17.02.1874) — французький та бельгійський математик, астроном, метеоролог, соціолог. Один із засновників наукової статистики. Доробок Кетле налічує 65 праць, присвячених статистиці. Він узагальнював різноманітні дані, що стосувалися населення, клімату, торгівлі, бідности, освіти, злочинности та ін. Окрім відкриття статистичних закономірностей, концепції середніх величин, поняття соціального закону, Кетле визначив методологічні правила формулювання анкетних запитань.

Найвизначнішим теоретиком статистики початку XX ст. був Олександр Чупров. Його праці сприяли розвитку математичної статистики, застосуванню ймовірнісних методів у статистичних дослідженнях.

Олександр Олександрович Чупров (18.02.1874 —19.04.1926) — російський статистик, який виробив неперевершену систему викладання статистики і успішно її здійснив у роки викладання в Санкт-Петербурзькому Політехнічному інституті. Найбільш відома його праця «Нариси з теорії статистики». Спираючись на теорію стійкості визначив необхідні та достатні умови застосування закону великих чисел. Був обраний кореспондентом Королівського економічного товариства в Лондоні, членом Міжнародного статистичного інституту, а пізніше (1923) — почесним членом Королівського статистичного товариства в Лондоні.

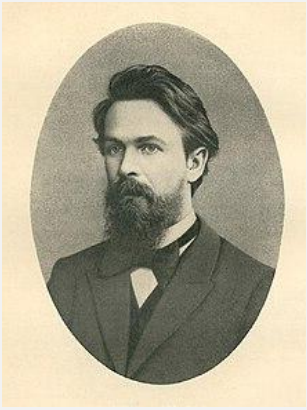


Великий вплив на розвиток математичного напрямку в статистиці мали праці Пануфтія Чебишова, Андрія Маркова, Олександра Ляпунова, Карла Пірсона, Вільяма Госсета, відомого під псевдонімом «Стьюдент», Рональда Фішера та ін.

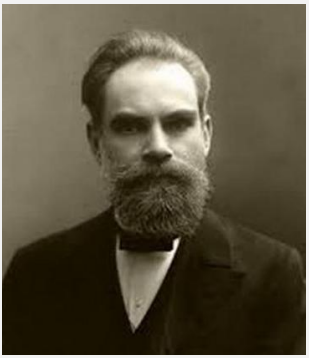


Пафну́тій Льво́вич Че́бишов (4.05.1821 — 26.11.1894) — російський математик і механік. Дослідження Чебишова відносяться до теорії наближення функцій многочленами, інтегрального числення, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії механізмів і багатьом іншим розділам математики та суміжним галузям знань. У 1866 р. була надрукована його робота «Про середні величини», в якій висвітлено теорему, що лежить в основі різних питань теорії ймовірностей і полягає в собі знамениту теорему Якова Бернуллі як окремий випадок.

Отримав фундаментальні результати в теорії ймовірностей (центральна гранична теорема, закон великих чисел).



Андрі́й Андрі́йович Ма́рков (14.06.1856 — 20.07.1922) — російський математик. З кінця 1890-х років головним предметом досліджень вченого стала теорія ймовірностей. Тут він продовжив роботу свого вчителя П. Л. Чебишова і ввів новий об'єкт дослідження — послідовності залежних випадкових величин, що отримали надалі назву ланцюгів Маркова. З теорії марковських ланцюгів виникла загальна теорія випадкових процесів, яка застосовується при вивченні лавинних процесів та інших проблем.



Олекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в (25.051857 — 3.11.1918) — російський математик і механік, академік, почесний член Харківського університету, Харківського математичного товариства. Учень П. Л. Чебишова. В теорії ймовірностей довів центральну граничну теорему, запропонував метод «характеристичних» функцій; автор центральної граничної теореми теорії ймовіртностей та інших глибоких досліджень галузі механіки і математичної статистики.



Карл Пірсон (англ. Karl (Carl) Pearson; 27.03.1857 — 27.04.1936) — англійський математик, статистик, біолог та філософ; один із засновників математичної статистики. Розробив теорію кореляції, критерії узгодженості, алгоритм прийняття рішень з оцінки параметрів. З його іменем пов'язані такі широко використовувані терміни та методи, як: криві Пірсона, розподіл Пірсона, критерій узгодженості Пірсона (критерій хі-квадрат), коефіцієнт кореляції Пірсона та кореляційний аналіз, рангова кореляція, множинна регресія, коефіцієнт варіації, нормальний розподіл.



Вільям Сілі Госсет (англ. William Sealy Gosset, 13.06.1876 — 16.10.1937) — британський вчений-статистик, більш відомий під своїм псевдонімом Стьюдент (англ. Student — студент). Був також хіміком і головним експериментальним пивоваром Guinness. Він був піонером експериментального планування та аналізу малих вибірок з економічним підходом до логіки невизначеності. Розробив найвідоміший t-розподіл Стьюдента – спочатку називався «z» Стьюдента – та «критерій статистичної значущості Стьюдента».

Сер Рональд Ейлмер Фішер (англ. Sir Ronald Aylmer Fisher; 17.02.1890 — 29.07.1962 — англійський статистик, теоретик-еволюціоніст, генетик та євгеник. Першим в науці ввів поняття демографічного потенціалу населення, започаткував застосування статистичних процедур для розробки наукових експериментів.

Його «Статистичні методи для дослідників» (1925) друкувалися понад 50 років.



Значні досягнення в розвитку демографічної статистики належать українському вченому Михайлу Птусі.



Птуха Михайло Васильович (07.11.1884 – 03.10.1961) – видатний вчений у галузі демографічної статистики, магістр політичної економії і статистики (1917), доктор економічних наук (1934), професор (1950), академік АН УРСР (1920), член-кореспондент АН СРСР (1943), заслужений діяч науки УРСР (1944). Наукові дослідження вченого присвячені теоретичним питанням загальної статистики і демографії, прикладної демографії, історії статистики. Розробив єдину схему вивчення конкретних масових явищ соціального життя людини, схему їх загального уявлення і представлення як спеціальної демостатистичної методології. Запропоновані ним рішення досліджуваних проблем увійшли до методів аналізу сучасної демографії, зокрема: індекси шлюбності, методика побудови коротких таблиць смертності та показників смертності для немовлят за місяцями року, методичні питання перспективних розрахунків населення та ін.

У сучасному розумінні слово «статистика» має кілька значень:

• дані, які характеризують масові процеси або явища, наприклад, рівень цін на конкретний товар у кількох продавців на певну дату, або чисельність населення у декількох регіонах на певну дату і т. д.;

• діяльність системи статистичних установ зі збирання та обробки даних, що характеризують усі аспекти державного життя;

• наука, яка має свій предмет та методи.

Статистика є багатогалузевою наукою, вона складається з окремих розділів або галузей, які, будучи її самостійними частинами, тісно пов'язані між собою.

Нині виокремлюють такі складові статистики:

• теорія статистики, яка розглядає категорії статистичної науки, а також спільні для будь-яких масових явищ методи й засоби аналізу;

• соціально-економічна статистика, яка вивчає явища і процеси, що відбуваються в економіці, розробляє систему економічних показників та методи вивчення економіки країни чи регіону як одного цілого, а також соціальних умов і характеру праці, рівня життя населення;

• галузеві статистики (промислова, фінансова, соціальної інфраструктури та ін.) розробляють зміст і методи обчислення показників, які відображають особливості кожної окремої галузі.

2.2. Статистичне дослідження та його етапи

Об'єктивний аналіз будь-яких масових явищ та процесів потребує наукових методів збирання, обробки даних та інтерпретації отриманих результатів. Це обумовлює використання широкого спектру засобів: від апарату математичної статистики (*математична статистика* — розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків) до затверджених

відповідними відомствами (наприклад Державним комітетом статистики) методик обчислення конкретних показників. Можна сказати, що статистичне дослідження об'єднує різні методи, або методи різних розділів статистики (різних статистичних дисциплін).

Будь-яке статистичне дослідження послідовно проходить три етапи.

Перший етап — статистичне спостереження, збирання первинного статистичного матеріалу, реєстрація фактів чи опитування респондентів.

На **другому етапі** зібрані дані підлягають систематизації та групуванню — від характеристики окремих елементів переходять до узагальнюючих показників у формі абсолютних, відносних чи середніх величин.

Третій етап — аналіз варіації, динаміки, взаємозв'язків.

Статистичне спостереження — науково організований збір масових даних про явища та процеси, які відбуваються у суспільстві.

Для проведення спостереження складають план, який передбачає мету, об'єкт та одиницю спостереження, джерела та засоби одержання даних, час (момент) спостереження та ін.

Від якості статистичного спостереження залежать результати подальшого дослідження, тому статистичні дані мають відповідати певним вимогам:

1) достовірність даних, тобто їх відповідність реальному стану;

2) повнота даних як за їх обсягом, так і за суттю;

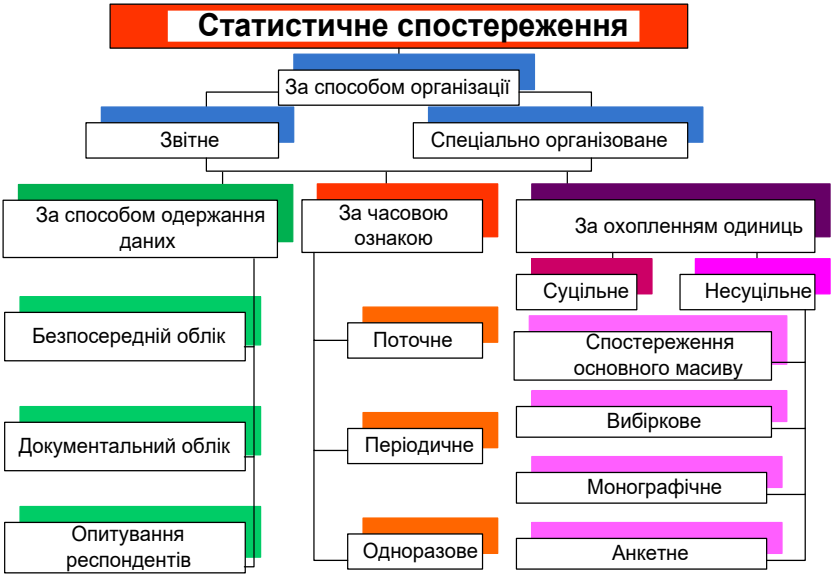
3) своєчасність даних;

4) порівнянність даних у часі або просторі, за складом сукупності, за одиницями вимірювання;

5) доступність даних.

Є різні види статистичних спостережень (схема 2).

Схема 2



За *організаційною формою* спостереження поділяють на *звітність* і *спеціально організовані спостереження.*

При *звітності* кожний суб'єкт діяльності подає свої дані в державні органи статистики та відомства у вигляді документів, звітів спеціально затвердженої форми.

Спеціально організоване спостереження — це форма спостереження, яка охоплює сфери життя та діяльності, що не відображаються звітністю. До таких спостережень належать: *переписи*, *обліки*, *спеціальні обстеження*, *опитування*.

За способом одержання даних розрізняють *безпосереднє спостереження*, *опитування*, *документальне спостереження*.

Залежно від *характеру реєстрації фактів у часі* статистичне спостереження може бути *поточним*, *періодичним* і *одноразовим*.

За охопленням одиниць сукупності вирізняють *суцільне* і *несуцільне спостереження*.

Суцільним вважається спостереження, при якому обліком охоплюються всі без винятку одиниці досліджуваної сукупності.

Несуцільне спостереження орієнтується на облік деякої, як правило, достатньо масової частини одиниць спостереження, яке дає можливість отримати стійкі (сталі) характеристики всієї статистичної сукупності. Найпоширенішим видом несуцільного спостереження є *вибіркове спостереження*.

2.2.1. Вибіркове спостереження. Статистична вибірка

Вибіркове спостереження — науково обґрунтований спосіб несуцільного спостереження, при якому досліджується лише частина сукупності, відібрана спеціальним методом, і яке забезпечує результати, що наближено характеризують усю сукупність у цілому.

Сукупність, з якої провадять вибір одиниць, називають *генеральною,* а відібрану частину — *вибіркою.*

Наприклад, для пошиття форми ліцеїстів військових ліцеїв необхідно визначити, які розміри одягу і в якій кількості будуть потрібні. Зрозуміло, що неможливо обміряти всіх ліцеїстів — генеральну сукупність. У подібних випадках обмежуються дослідженням частини ліцеїстів — вибіркою.

Утворення вибірки підпорядковується таким вимогам:

- кожна одиниця сукупності має рівні шанси потрапити у вибірку;
- кількість відібраних одиниць повинна бути достатньою для того, щоб результати спостереження можна було поширити на всю сукупність.

Виконання цих двох вимог робить вибірку *репрезентативною,* представницькою.

Наприклад, у місті планується відкриття музичної радіостанції. Тому необхідно знати музичні уподобання жителів міста. Зрозуміло, що музичні смаки дорослих відрізняються від уподобань підлітків. Якщо вибірка буде складатися з жителів міста тільки віком 40—45 років, або тільки зі службовців, то вона не буде репрезентативною. Якщо ж опитати достатньо велику кількість людей різних вікових категорій, різного соціального статусу, різних уподобань тощо, то таку вибірку можна вважати репрезентативною.

Характеристики вибіркової сукупності є оцінками відповідних параметрів генеральної сукупності.

2.3. Первинна обробка статистичних даних. Статистичні таблиці і графіки. Ряди розподілу

Під час статистичного спостереження збирається велика кількість первинних статистичних даних. Ці дані характеризують окремі одиниці сукупності, а не сукупність у цілому.

Статистик Олександр Кауфман ((12.03.1864 — 18.05.1919) зауважував, що зібрані в результаті статистичного спостереження дані так належать до статистичної інформації (чисел), як купа цегли до побудованої із цієї цегли споруди.

Отже, зібраний у процесі статистичного спостереження матеріал необхідно певним чином опрацювати, об’єднати розрізнені дані воєдино.

2.3.1. Методи і шляхи опрацювання статистичних даних

Стосовно методів обробки й аналізу даних статистику поділяють на *описову* (дескриптивну) й *індуктивну*.

Мета *описової* статистики — обробка зібраних даних, їх систематизація, наочне подання у формі графіків і таблиць, а

також їх кількісний опис через основні статистичні показники. *Описова* статистика не робить висновків про генеральну сукупність на основі результатів дослідження окремих випадків. Цим займається *індуктивна* статистика, яка передбачає, що властивості і закономірності, які виявляються під час дослідження об'єктів вибірки, також притаманні генеральній сукупності.

Обробку результатів статистичного спостереження здійснюють шляхом зведення та групування.

Статистичне зведення — упорядкування, систематизація, науково організована обробка матеріалів спостереження, метою якої є виявлення характерних рис та певних типових ознак тих чи інших явищ, а також закономірностей процесів, що досліджуються.

За глибиною обробки матеріалів зведення поділяється на *просте* і *складне*.

Просте зведення — це операція з підрахунку загальних підсумків результатів первинного статистичного матеріалу. Наприклад, на початок 2023/24 н.р. в Україні налічувалося 12 701 загальноосвітній навчальний заклад, де навчалися 3 906 174 учні і працювали 390 089 учителів.

Складне зведення або *групування* — це спосіб обробки даних, який полягає в:

об'єднанні одиниць сукупності в однорідні групи та підгрупи; отриманні системи показників для характеристики груп і підгруп;

підрахунку групових та загальних підсумків;

табличному і графічному оформленні статистичних даних.

Приклади табличного і графічного подання даних наведено у таблиці 1 і на рисунках 2—5.

Таблиця 1

Країни світу з найбільшою чисельністю населення

№	Країна	Чисельність населення, 2020 р. (за даними ООН), осіб	№	Країна	Прогноз чисельності населення на 2050 р., тис. осіб
1	КНР	1 439 323 776	1	Індія	1 705 333
2	Індія	1 380 004 385	2	КНР[1]	1 348 056
3	США	331 002 651	3	Нігерія	398 508
4	Індонезія	273 523 615	4	США	388 865
5	Пакистан	220 892 340	5	Пакистан	309 640
6	Бразилія	212 559 417	6	Індонезія	288 237
7	Нігерія	206 139 589	7	Бразилія	238 270
8	Бангладеш	164 689 383	8	Бангладеш	202 209
9	РФ	144 386 830	9	ДР Конго	195 277
10	Мексика	128 932 753	10	Ефіопія	188 455
11	Японія	126 476 461	11	Мексика	163 754
12	Ефіопія	114 963 588	12	Єгипет	151 111
13	Філіппіни	109 581 078	13	Філіппіни	148 260
14	Єгипет	102 334 404	14	Танзанія	137 136
15	В'єтнам	97 338 579	15	В'єтнам	112 783
16	ДР Конго	89 561 403	16	Японія	107 411
…	…	…	…	…	…
28	Україна	45 415 596	59	Україна	35 117
…	…	…	…	…	…
Разом у світі		**7 797 798 739**	**Разом у світі**		**9 704 191**

Найвищі вершини Українських Карпат

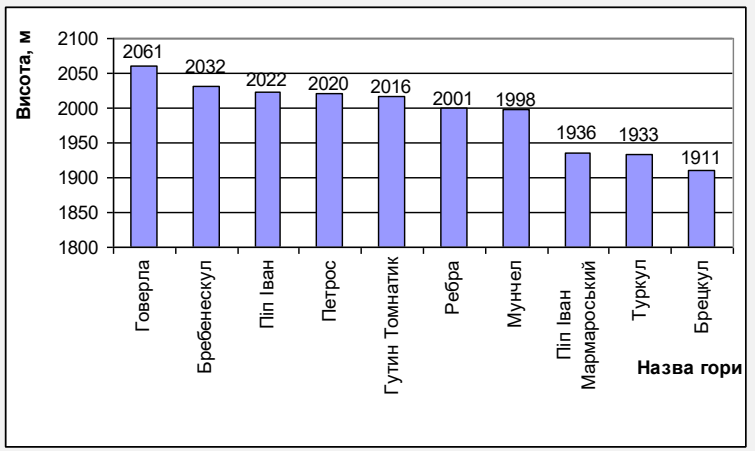


Рис. 2

Особи, які користуються Internet
(% населення, перші 10 країн в рейтингу, 2020 р.)



Рис. 3

Структура доходів (млн грн) населення України в 2020 р.

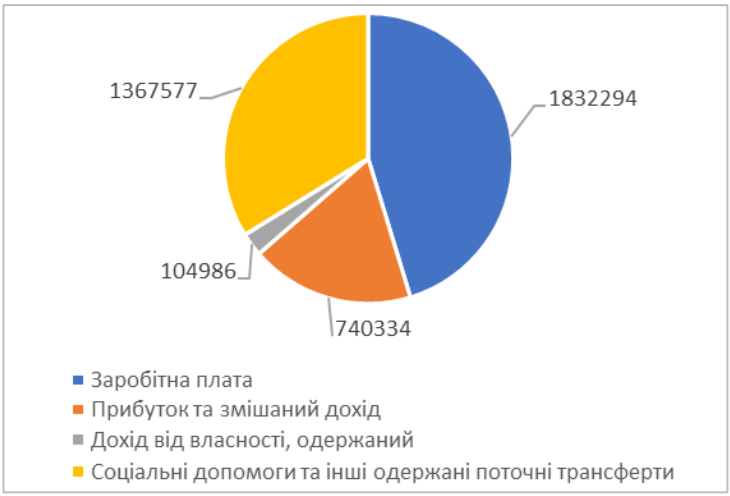


Рис. 4

Динаміка користувачів Internet (млн осіб)

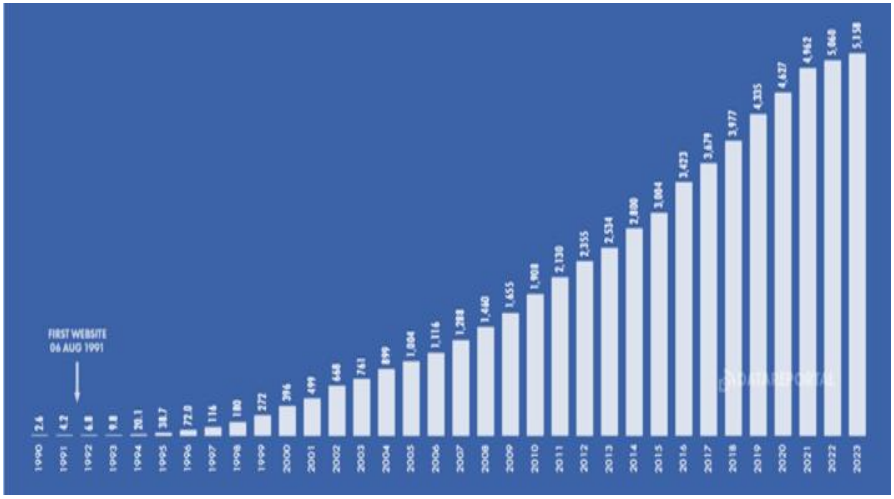


Рис. 5

2.3.2. Види групувальних ознак

Для групування важливим є правильний вибір *групувальних ознак*, на основі яких проводиться розподіл одиниць сукупності на групи.

Групувальні ознаки можуть бути різними. Найчастіше використовують *якісні* (*атрибутивні*) і *варіаційні* (*кількісні*) ознаки.

Якісною є така ознака, що характеризує властивість, якість даного явища і не має кількісного вираження, наприклад, розподіл населення за національністю. Окремим випадком атрибутивної ознаки є *альтернативна ознака*. *Альтернативна* — це ознака, при якій можуть бути тільки два варіанти атрибутивної ознаки і при цьому одна виключає іншу, наприклад, розподіл населення за статтю (чоловіки, жінки).

Варіаційною є ознака, що виражається числом (групування населення за віком, підприємств за обсягом виробництва).

Під час групування статистичних даних постає питання кількості груп. Вона залежить від того, якою є групувальна ознака.

Коли групування відбувається за якісною ознакою, кількість груп, на які ділиться сукупність, визначається кількістю різновидів цієї ознаки. Наприклад, групування за статтю дає дві групи, за національністю — стільки груп, скільки національностей.

Кількість груп при групуванні за кількісною ознакою залежить від конкретного завдання дослідження. При цьому кількість груп має бути не надто великою і не дуже малою, у кожній групі має бути достатня кількість одиниць сукупності.

2.3.3. Статистичні ряди

У результаті зведення статистичного матеріалу отримують ряди числових показників. Такі ряди називають *статистичними* і за їх сутністю поділяють на *ряди розподілу*

та *ряди динаміки*. *Ряд динаміки* — це розміщення в часі значення явища, тобто послідовність чисел, які характеризують зміни розмірів суспільних явищ у часі (рис. 5).

Ряд розподілу — це групування одиниць сукупності за однією ознакою. Він складається з упорядкованої послідовності пар елементів: варіанта—частота. *Варіанта* — це окреме значення групувальної ознаки; *частота* — це кількість елементів у групі з відповідним значенням (рівнем) ознаки.

Замість частот іноді зручніше використовувати *відносну частоту* або *частку,* виражену дробом чи відсотком. Відносна частота отримується шляхом ділення частоти окремої варіанти на суму частот усіх значень ознаки, яка дорівнює *обсягу вибірки*.

Наприклад, в результаті групування населення України за статтю отримують ряд розподілу у вигляді таблиці 2, а за віком — ряд розподілу у вигляді таблиці 3.

Таблиця 2

Розподіл постійного населення України за статтю

(на 1 січня 2022 р.)

Стать	Чоловіки	Жінки
Кількість осіб	19 006 979	21 990 719

Таблиця 3

Розподіл населення України за віком у 2010 р.

Вік, роки	0—14	15—24	25—44	45—64	65 і більше
Кількість осіб	6 119 886	3 892 639	12 338 544	11 415 523	7 231 106

2.3.4. Дискретні та інтервальні ряди розподілів

Ряди розподілів можуть бути *дискретними* або *інтервальними*. *Дискретні ряди* будують для *дискретних ознак*. *Дискретною* є така ознака, значення якої можна

занумерувати або скінченною кількістю натуральних чисел (номерів) або усіма натуральними числами.

Інтервальні ряди будуються зазвичай для ознак, значення яких занумерувати не можна. Ці значення, як правило, виражаються лише наближено (наприклад, зріст людини).

Інтервальний ряд може бути побудований і для дискретної ознаки, якщо вона змінюється (варіює) у широких межах (наприклад, розподіл всіх підприємств міста за чисельністю працівників). При цьому варіанти групуються в числові проміжки (інтервали), а частоти відносяться не до окремого значення ознаки, як у дискретних рядах, а до відповідного проміжку.

Приклад 1. За результатами контрольної роботи в 11-му класі учні отримали такі бали:

5, 6, 8, 9, 3, 9, 7, 8, 8, 10,
6, 12, 11, 5, 7, 5, 9, 7, 8, 9,
6, 4, 10, 11, 9.

Побудувати ряд розподілу отриманих даних.

Для побудови ряду розподілу необхідно визначити, яких різних значень (варіант) набуває ознака «отриманий за контрольну роботу бал» і скільки разів зустрічається кожне значення (частоти варіант). Для зручності розмістимо отримані учнями бали в порядку зростання. Отримаємо *варіаційний ряд*.

3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7,
7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9,
10, 10, 11, 11, 12.

Як бачимо, варіантами є 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12, їхніми частотами числа 1, 1, 3, 3, 3, 4, 5, 2, 2 і 1 відповідно. Тоді ряд розподілу матиме вигляд таблиці 4.

Таблиця 4

Кількість балів, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота, w_i	1	1	3	3	3	4	5	2	2	1

Побудуємо за цими даними ряд розподілу відносних частот варіант. Для цього кожну частоту поділимо на суму всіх частот: $\omega_{\text{і}} = \frac{m_{\text{і}}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$. У нашому випадку $\sum_{i=1}^{n} m_i = 25$. Шуканий ряд розподілу матиме вигляд таблиці 5.

Таблиця 5

Кількість балів, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Відносна частота, ω_i	0,04	0,04	0,12	0,12	0,12	0,16	0,2	0,08	0,08	0,04

Отримані ряди розподілу є дискретними.

За цими самими даними можна побудувати й інтервальний ряд розподілу, якщо ми хочемо провести групування за рівнями навчальних досягнень учнів: початковим (1—3 бали), середнім (4—6 балів), достатнім (7—9 балів) і високим (10—12 балів). Тоді варіанти групуються відповідно до інтервалів [1; 3], [4; 6], [7; 9] і [10; 12], а частоти відносяться не до окремого значення ознаки, як у дискретних рядах, а до всього інтервалу. Ряд розподілу матиме вигляд таблиці 6.

Таблиця 6

Кількість балів, $x \in [x_i; x_j]$	[1; 3]	[4; 6]	[7; 9]	[10; 12]
Частота, m_i	1	7	12	5

Зазвичай для побудови інтервальних рядів використовують напіввідкриті інтервали виду $[a; b)$, де $a \le x_{\min}$, $b \ge x_{\max}$, x_{min} — мінімальне значення ознаки в сукупності, x_{max} — максимальне значення. При цьому перший інтервал може бути також виду $(a; b)$, а останній — $[a; b]$. Інтервали можуть бути рівними $(b_i - a_i = b_j - a_j)$ і нерівними $(b_i - a_i \ne b_j - a_j)$. Величину інтервалу l у випадку групування з рівними інтервалами визначають формулою $l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, де k — задана кількість груп. Кількість груп вибирають з умови $k \approx \sqrt{n}$, або обчислюють за формулою $k = 1 + 3{,}322\, lg\, n$, де n — обсяг вибірки.

Наприклад, замість таблиці 6 можна отримати інтервальний ряд у вигляді таблиці 7.

Таблиця 7

Кількість балів, $x_i \in \langle x_i ; x_j \rangle$	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 12]
Частота, m_i	1	7	12	5

Для відповідних відносних частот матимемо ряд розподілу у вигляді таблиці 8.

Таблиця 8

Кількість балів, $x \in \langle x_i; x_j \rangle$	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 12]
Відносна частота, ω_i	0,04	0,28	0,48	0,20

2.3.5. Полігони і гістограми

Дані, що отримують в результаті досліджень, буває зручно зображати графічно. Для графічного зображення дискретних рядів розподілу використовують *полігони*, інтервальних — *гістограми*.

Полігон (від грецького πολυγωνοζ — многокутний) — це ламана лінія, що складається зі скінченної кількості прямолінійних відрізків.

Побудуємо полігони для рядів розподілу, поданих в таблицях 4 і 5. Для цього в прямокутній системі координат позначаємо точки, в яких першою координатою є варіанта, другою — відповідна частота або відносна частота, і сполучаємо їх відрізками. Отримана ламана є полігоном частот (рис. 6) або відносних частот (рис. 7).

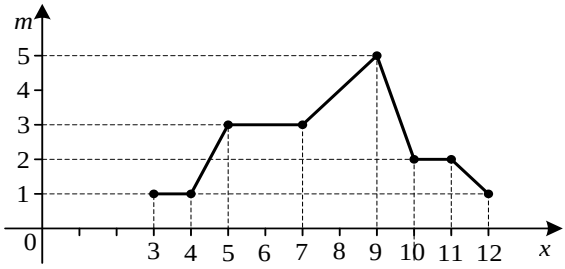


Рис. 6

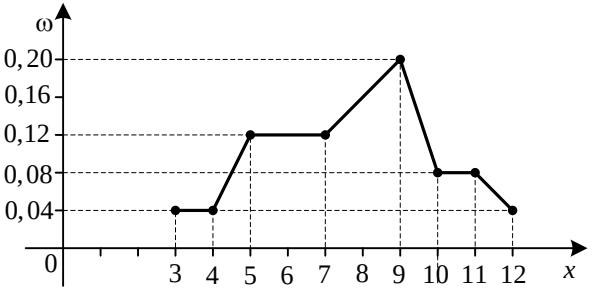


Рис. 7

Гістограма (від грецьких ιστοζ — стовп, γραμμα — написання, буква) — фігура, що складається з прямокутників, основи яких дорівнюють довжинам інтервалів кожної групи, а висоти — частці від ділення відповідної відносної частоти на довжину інтервалу.

Зауваження. Достатньо часто за висоту прямокутників беруть або частоту яка відноситься до відповідного інтервалу, або відносну частоту для тих самих інтервалів.

Побудуємо гістограми для рядів розподілу, поданих в табл. 7 і 8, врахувавши зауваження (рис. 8 і 9).

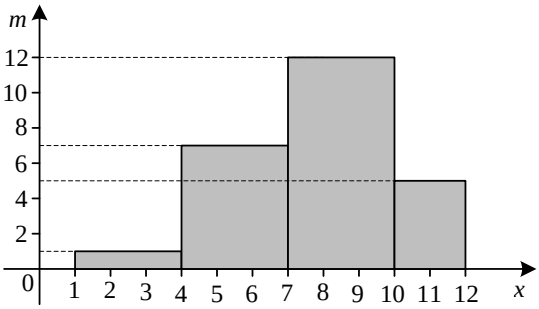


Рис. 8

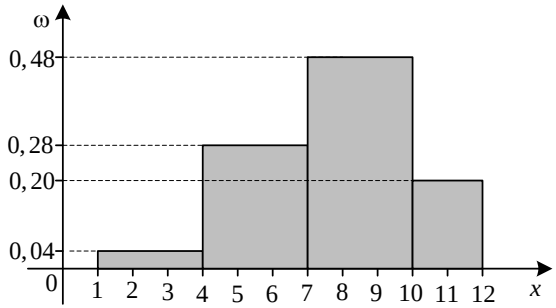


Рис. 9

2.4. Числові характеристики вибірки

Нехай у результаті статистичного спостереження отримали сукупність значень досліджуваної ознаки. З цих значень можна утворити варіаційний ряд

$\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{m_k}$, де x_i, $i = 1, \dots, k$ — значення ознаки, розміщені в порядку зростання.

За даними вибірки визначаються її числові характеристики такі, як *мода, медіана, середнє значення і розмах,* а також характеристики відхилень окремих значень ознаки від середнього значення.

2.4.1. Мода вибірки

Мода (*Mo*) — це варіанта, яка найчастіше зустрічається серед спостережених значень ознаки.

У дискретному ряді розподілу моду легко відшукати візуально — це значення ознаки з найбільшою частотою. Якщо така варіанта одна, то мають мономодальний розподіл частот. У випадку, коли кілька варіант мають найбільшу однакову частоту, то говорять про полімодальний розподіл частот. У

випадку, коли всі значення мають однакову частоту, то говорять, що мода відсутня.

У прикладі 1 найчастіше зустрічається варіанта 9 балів — 5 разів. Тому мода даної вибірки дорівнюватиме 9. Отже, $Mo = 9$ і розподіл мономодальний.

Наведіть самостійно приклад полімодального розподілу.

В інтервальному ряді легко відшукати модальний інтервал (він має найбільшу частоту), а наближене значення моди обчислюється за формулою

$$Mo = x_{Mo} + l_{Mo} \cdot \frac{(m_{Mo} - m_{Mo-1})}{2m_{Mo} - m_{Mo-1} - m_{Mo+1}},$$

де x_{Mo} — початок модального інтервалу; l_{Mo} — довжина модального інтервалу; m_{Mo} — частота модального інтервалу; m_{Mo-1} — частота попереднього інтервалу; m_{Mo+1} — частота інтервалу, наступного за модальним.

2.4.2. Медіана вибірки

Медіана (*Me*) — це варіанта, що міститься по середині варіаційного ряду, тобто ділить його на дві, рівні за чисельністю, частини.

Для прикладу 1 варіаційний ряд мав такий вигляд.

3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12.

Тоді варіанта 8, яка міститься посередині (рис. 10), буде медіаною: *Me* = 8. Тобто половина учнів отримали за контрольну роботу неменше від 8 балів, а половина — небільше.

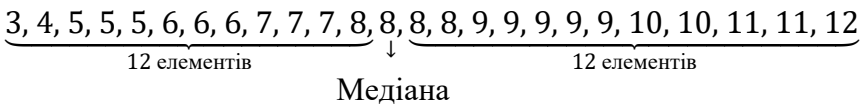


Рис. 10

Коли ряд містить парну кількість елементів, медіана дорівнює середньому арифметичному двох значень розміщених всередині ряду.

Наприклад, якщо варіаційний ряд має вигляд

3, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, то $M_e = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$.

Для знаходження медіани вибірки, для якої побудовано дискретний ряд розподілу, використовують *накопичену частоту* q_i (*комуляту*), коли для першої варіанти записується її частота — $q_1 = m_1$, а для кожної наступної обчислюється сума її частоти і частот попередніх варіант — $q_2 = m_1 + m_2$, $q_3 = m_1 + m_2 + m_3$, … (табл. 9).

Таблиця 9

Кількість балів, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота, m_i	1	1	3	3	3	4	5	2	2	1
Накопичена частота, q_i	1	2	5	8	11	15	20	22	24	25

Для останньої варіанти накопичена частота дорівнює сумі всіх частот — $q_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Далі обчислюють число $\frac{q_n}{2}$, якщо q_n — парне, або $\left[\frac{q_n}{2}\right] + 1$, якщо q_n — непарне ($[a]$ — ціла частина числа a). Коли q_n — парне, медіану обчислюють як середнє арифметичне варіант, що містяться на $\frac{q_n}{2}$ і $\frac{q_n}{2} + 1$ місцях, для непарного медіана дорівнює варіанті, що розташована на $\left[\frac{q_n}{2}\right] + 1$ місці. У вказаному прикладі

$$\left[\frac{q_n}{2}\right] + 1 = \left[\frac{25}{2}\right] + 1 = 12 + 1 = 13.$$

Отже, медіаною є варіанта, що розміщена на 13-му місці. З таблиці 9 бачимо, що перші 11 місць припадають на варіанти від 3 до 7. Тоді 13-те місце «займає» варіанта 8. Тому вона і є медіаною вказаної вибірки.

Для інтервального ряду медіану обчислюють за формулою

$$Me = x_{Me} + l_{Me}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} m_k}{2} - S_{Me-1}}{m_{Me}}, \qquad (8)$$

де x_{Me} — початок медіанного інтервалу; l_{Me} — довжина медіанного інтервалу; m_{Me} — частота медіанного інтервалу; S_{Me-1} — сума накопичених частот перед медіанним інтервалом; $\frac{\sum_{i=1}^{k} m_k}{2}$ — півсума частот.

2.4.3. Середнє значення вибірки

Середнім значенням $\bar{X}$ вибірки називають середнє арифметичне всіх варіант.

У прикладі 1 середнє значення можна обчислити так:

$$\bar{X} = \frac{5+6+8+9+3+9+7+8+8+10+6+12+11+5+7+5+9+7+8+9+6+4+10+11+9}{25} = 7{,}68.$$

Отже, середній бал класу за контрольну роботу дорівнює 7,68.

Проте, коли побудовано дискретний ряд розподілу (табл. 3), середнє значення обчислюють так:

$$\bar{X} = \frac{3\cdot1+4\cdot1+5\cdot3+6\cdot3+7\cdot3+8\cdot4+9\cdot5+10\cdot2+11\cdot2+12\cdot1}{25} = \frac{192}{25} = 7{,}68.$$

Тобто, для обчислення середнього значення потрібно суму добутків варіант і відповідних частот поділити на суму частот:

$$\bar{X} = \frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_km_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_im_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

Якщо середнє значення обчислюється для інтервального ряду розподілу, то варіантами виступають числа, які припадають на середину інтервалу.

2.5*. Показники варіації

Варіація ознаки — це коливання окремих значень ознаки від середнього значення. Чим менша варіація, тим надійнішим, типовішим є середнє. Для характеристики варіації частіше застосовують такі показники: *розмах варіації, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації*.

2.5.1*. Розмах вибірки

Розмах вибірки R — це різниця між найбільшою і найменшою варіантами ознаки: $R = x_{max} - x_{min}$.

Якщо розглядати результати контрольної роботи у прикладі 1, то розмах R =12 – 3 = 9, де 12 — найбільше значення варіанти, а 3 — найменше.

В інтервальному ряді розподілу R визначають як різницю між кінцем останнього інтервалу і початком першого, або ж різницю між значеннями, що припадають на середини цих інтервалів.

Як показник варіації розмах R не завжди є надійним, оскільки залежить від двох крайніх значень, які часто не є типовими для вибірки, або мають випадковий характер. Вони отримали назву «викиди». Їх часто просто викидають, зменшуючи тим самим розмах і роблячи сукупність більш однорідною.

2.5.2*. Дисперсія

Дисперсія — це середнє арифметичне квадратів різниць, утворених кожною варіантою і середнім значенням ознаки.

Обчислюється за формулами:

$D(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$ або $D(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} m_i}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{X})^2 m_i$.

Обчислимо дисперсію для прикладу 1.

$$D(X) = \frac{1}{25}((3-7{,}68)^2 \cdot 1 + (4-7{,}68)^2 \cdot 1 + (5-7{,}68)^2 \cdot 2 + \\ + (6-7{,}68)^2 \cdot 3 + (7-7{,}68)^2 \cdot 3 + (8-7{,}68)^2 \cdot 4 + (9-7{,}68)^2 \times \\ \times 5 + (10-7{,}68)^2 \cdot 2 + (11-7{,}68)^2 \cdot 2 + (12-7{,}68)^2 \cdot 1) \approx 5{,}10.$$

На практиці застосовують простішу формулу для обчислення дисперсії:

$$D(X) = \left(\overline{x_i^2}\right) - \bar{X}^2.$$

Дисперсія характеризує скупченість (розсіювання) спостережуваних значень ознаки навколо середнього значення (центра розсіювання). Чим менша дисперсія, тим точнішим, вірогіднішим, надійнішим є середнє значення при достатньо великій кількості спостережень.

2.5.3*. Середнє квадратичне відхилення

Середнє квадратичне відхилення (*стандартне відхилення*) — це корінь квадратний з дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2} \quad \text{або}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k} m_i}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{X})^2 m_i}.$$

Для прикладу 1 середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) \approx 2{,}26$.

Середнє квадратичне відхилення (стандартне відхилення, міра розкиду) — показує ступінь відхилення спостережених даних від середнього значення. Слід зазначити, що елементи вибірки в середньому відрізняються від середнього значення на ± σ. Тому невелике середнє квадратичне відхилення вказує на те, що дані групуються навколо середнього значення.

2.5.4*. Коефіцієнт варіації

Коефіцієнт варіації — це відношення середнього квадратичного відхилення до середнього значення.

Виражається дробом або відсотком:

$$V = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} \text{ або } V = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} \cdot 100\%, \bar{X} \neq 0.$$

Для прикладу 1 коефіцієнт варіації $V \approx 0{,}29$ (29 %).

Коефіцієнт варіації дає змогу порівнювати варіацію однієї ознаки у різних вибірках та варіацію різних ознак в одній вибірці. Коефіцієнт варіації вважається критерієм надійності середнього значення. Якщо він перевищує 30—35 %, то вважається, що середнє є нетиповим, ненадійним, а сама вибірка за цією ознакою неоднорідна.

Приклад 2. Маємо дані денної виручки продавців двох змін:

I зміна — 310, 250, 300, 260, 280 грн;

II зміна — 270, 200, 560, 190, 180 грн.

Обчислимо середнє значення виручки для кожної зміни:

$\bar{X}_I = \frac{310+250+300+260+280}{5} = 280$ (грн);

$\bar{X}_{\text{II}} = \frac{270+200+560+190+180}{5} = 280$ (грн).

Середня виручка однакова. Дослідимо варіацію денної виручки для обох змін.

Визначимо розмах варіації:

$R_I = 310 - 250 = 60$ (грн);

$R_{\text{II}} = 560 - 180 = 380$ (грн.).

Розмах варіації у II зміні на 320 грн більший.

Для обчислення інших показників використаємо розрахункову таблицю (табл. 10)

Таблиця 10

Продавець	Виручка, x_i	$\bar{X}_{\text{I}}$	$(x_i - \bar{X}_{\text{I}})^2$
I зміна			
1	310	280	900
2	250	280	900
3	300	280	400
4	260	280	400
5	280	280	0
Разом	1400	1400	2600
II зміна			
1	270	280	100
2	200	280	6400
3	560	280	78 400
4	190	280	8100
5	180	280	10 000
Разом	1400	1400	103 000

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{2600}{5}} = \sqrt{520} \approx 22{,}8;\ \sigma_{\text{II}} = \sqrt{\frac{103\ 000}{5}} = \sqrt{20600} \approx 143{,}5$$

Коефіцієнт варіації:

$$V_I = \frac{22{,}8}{280} \cdot 100\% \approx 8{,}1\%;$$

$$V_{\text{II}} = \frac{143{,}5}{280} \cdot 100\% \approx 51{,}2\%.$$

Для I зміни набагато меншим є середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації. Це вказує на те, що перша сукупність однорідніша за другу і середня величина виручки для неї є надійнішою.



Вправи для самостійного розв'язування

1. Працівники обласного центру дитячого туризму організовують під час зимових канікул поїздки для школярів. З метою покращення своєї роботи вони проводять опитування

щодо побажань дітей. Виберіть з вказаних вибірок репрезентативну:

1) учні одинадцятих класів міста і області;

2) учні різного віку з шкіл міста і області;

3) учні двох шкіл обласного центру;

4) учні початкових класів міста і області;

5) школярі однієї сільської школи.

2. Серед учнів одного класу проведено опитування щодо кількості книг, прочитаних ними під час літніх канікул. Результати цього опитування подано в табл. 11. Побудуйте графічне зображення вказаних даних.

Таблиця 11

Кількість книг, x_i	2	3	4	6	8
Кількість учнів, m_i	12	6	3	1	1

3. Група студентів із 15 осіб написала контрольну роботу з вищої математики. Оцінки, одержані студентами за виконання контрольної роботи, виявилися такими: 4, 2, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 3, 5, 3, 4, 4, 3. Укажіть полігон частот, що відповідає цьому ряду даних (рис. 10—14).

1)

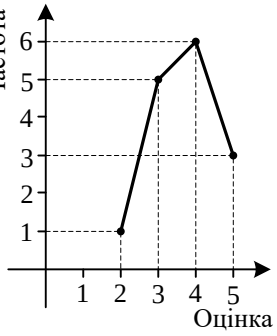


Рис. 10

2)

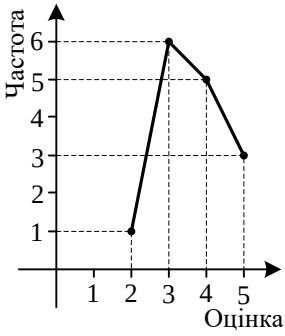


Рис. 11

3)

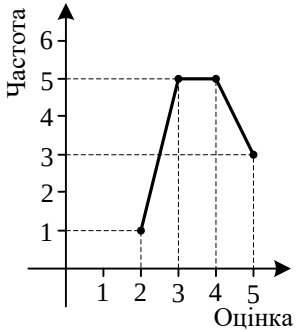


Рис. 12

4)

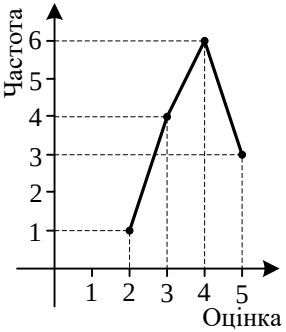


Рис. 13

5)

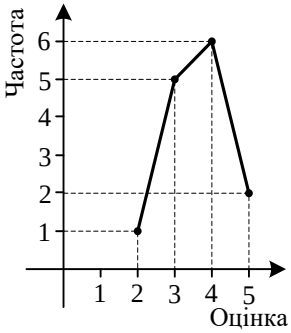


Рис. 14

4. Нижче наведено дані про кількість підприємств ресторанного господарства (позначено: Р – ресторани; К – кафе; Б – бари; Ї – їдальні):

К,	К,	Б,	К,	К,	К,	К,	К,	Б,	Ї,
Б,	Р,	К,	Ї,	К,	Ї,	К,	Ї,	К,	К,
Б,	Б,	К,	К,	К,	К,	Р,	Б,	Ї,	К,
К,	К,	Б,	К,	К,	Р,	К,	К,	К,	К,
Ї,	К,	К,	Б,	Б,	К,	Р,	Ї,	Р,	Ї,
Р,	К,	К,	Р,	Ї,	Б,	К,	К,	К,	К,
К,	К,	Ї,	К,	К,	К,	К,	К,	К,	Б.

Побудуйте ряд розподілу підприємств за їх видами та подайте його графічно.

5. Дано такі відомості про тарифні розряди 50-ти робітників

5,	4,	2,	1,	6,	3,	3,	4,	3,	2,
2,	5,	6,	4,	3,	5,	4,	1,	2,	3,
3,	4,	1,	6,	5,	1,	3,	4,	3,	5,
4,	3,	4,	3,	6,	4,	4,	3,	4,	3,
3,	4,	6,	5,	4,	4,	3,	2,	3,	5.

Виконайте:

1) групування робітників за тарифним розрядом;

2) групування робітників за рівнем кваліфікації (низька — 1, 2 розряди; середня — 3, 4 розряди; висока — 5, 6 розряди);

3) зобразіть результати групувань графічно.

6. В уривку художнього твору 47 слів мають різну кількість букв. Укажіть моду даного розподілу за допомогою зображеного полігона частот (рис. 15).



Рис. 15

7. Знайдіть моду, медіану, середнє значення для вказаних сукупностей даних:

1) 3, 5, 8, 5, 6, 7, 3, 5, 7, 5, 4, 8, 6, 5, 7;

2) 1, 1, 2, 5, 3, 3, 7, 5, 5, 7, 1, 3, 3, 1;

3) 10, 10, 3, 7, 7, 3, 10, 3, 7;

4) 5, 5, 7, 8, 5, 7, 3, 7, 5, 7, 7, 3, 5, 8.

8. Задано 25 чисел. Серед них число 9 повторюється 12 разів, число 8 — 9 разів, число 15 — 4 рази. Знайдіть середнє арифметичне заданих чисел.

9. Стрілець при 100 незалежних пострілах вибиває 7 очок — 20 разів, 9 очок — 50 разів, 10 очок — 30 разів.

1) Знайдіть середню кількість очок, які вибиває стрілець.

2) Заповніть пропуск у реченні: «У 50 % пострілах стрілець вибиває небільше за … очок».

10. Учасники міської олімпіади з математики серед учнів 10-х класів набрали таку кількість балів: 12; 35; 17; 10; 12; 12; 30; 4; 3; 1; 0; 12; 17; 30; 3; 4; 12; 5; 11; 3; 1; 16. Визначте частоту кожної кількості балів. Побудуйте дискретний ряд розподілу частот і відносних частот, зобразіть їх графічно. Визначте моду, медіану, середнє значення.

11. У результаті вивчення попиту населення на зимове чоловіче взуття отримали дані про продаж зимових чоловічих чобіт таких розмірів:

39, 41, 40, 38, 43, 41, 40, 42, 41, 42,
38, 40, 43, 39, 41, 40, 42, 43, 41, 41,
42, 40, 41, 38, 44, 42, 40, 42, 41, 42,
42, 39, 42, 43, 42, 44, 41, 43, 40, 40,
41, 42, 40, 41, 42, 43, 39, 41, 42, 42.

Для узагальнення цієї інформації побудуйте дискретний ряд розподілу, визначте моду, медіану, середнє значення. Зіставте результати з типовою шкалою пошиття цього взуття.

Типова шкала пошиття чоловічих чобіт

Розмір	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар, %	2	8	14	22	26	20	6	2

Побудуйте та зіставте графіки типової шкали та ряду розподілу, зробіть висновки щодо відповідності пропозиції попиту.

12. На лабораторній роботі учням було запропоновано виміряти довжину 45 колосків, розміри яких змінювалися

завдяки модифікаційній мінливості, яка залежить від отриманих генів та умов зростання. Були отримані такі результати (в см):

57, 52, 56, 56, 70, 64, 58, 68, 60, 62,
60, 61, 61, 68, 52, 72, 52, 62, 52, 56,
44, 58, 62, 58, 60, 64, 68, 66, 68, 48,
62, 56, 60, 68, 60, 70, 48, 52, 56, 72,
60, 58, 64, 66, 48.

Згрупуйте ці дані в 7 груп, побудуйте інтервальний ряд розподілу, визначивши відносні частоти для кожної групи. Зобразіть його графічно.

Відповіді та вказівки до розв'язування

1. 2).

2. Полігон зображено на рис. 16.

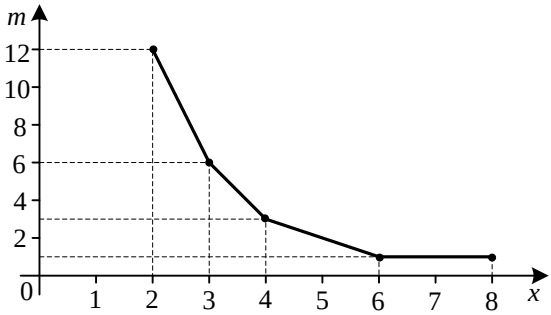


Рис.16

3. 1).

4. Ряд розподілу подано в табл. 12.

Таблиця 12

Вид підприємства	Бар	Їдальня	Кафе	Ресторан
Кількість	11	10	42	7

Графічно подання доцільно з робити у вигляді кругової діаграми (рис. 17).

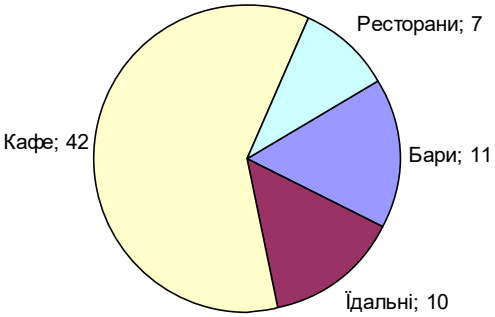


Рис. 17

5. 1) Результати групування за тарифними розрядами подано в табл. 13.

Таблиця 13

Тарифний розряд, x_i	1	2	3	4	5	6
Кількість робітників, m_i	4	5	15	14	7	5

2) Результати групування за рівнем кваліфікації подано в табл. 14

Таблиця 14

Рівень кваліфікації, $x_i \in [a; b]$	Низький, 1—2	Середній, 3—4	Високий, 5—6
Кількість робітників, m_i	9	29	12

3) Полігон, що відповідає завданню 1), зображено на рис. 18.



Рис. 18

Зобразимо результати групування у завданні 2) за допомогою стовпчикової діаграми (рис. 19).

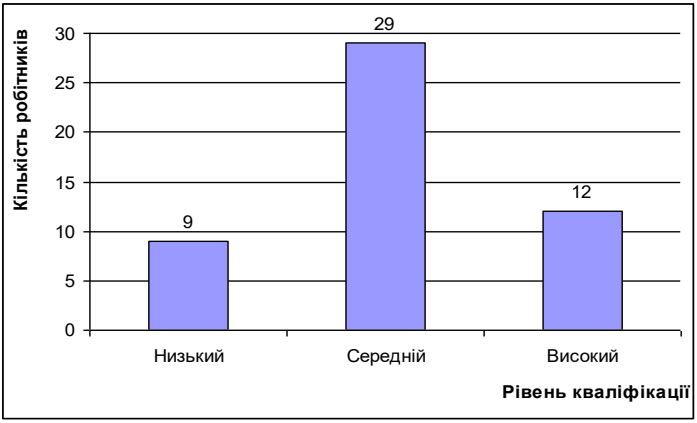


Рис. 19

6. $Mo = 5$.

7. 1) $Mo = 5$, $Me = 5$, $\bar{X} = 5{,}6$;

2) $Mo = \{1, 3\}$, $Me = 3$, $\bar{X} \approx 3{,}36$;

3) Mo — відсутня, $Me = 7$, $\bar{X} \approx 6{,}67$;

4) $Mo = 6$, $Me = 6$, $\bar{X} \approx 5{,}86$;

8. 9,6.

9. 1) $\bar{X} = 8{,}9$. 2) 9.

10. Дискретні ряди розподілу частот і відносних частот подано у таблицях 15 і 16 відповідно.

Таблиця 15

x_i	0	1	3	4	5	10	11	12	16	17	30	35
m_i	1	2	3	2	1	1	1	5	1	2	2	1

Таблиця 16

x_i	0	1	3	4	5	10	11	12	16	17	30	35
ω_i	0,05	0,09	0,14	0,09	0,05	0,05	0,05	0,23	0,05	0,09	0,09	0,05

Полігон відносних частот зручно будувати за допомогою ППЗ Gran1 (рис. 20). Моду і середнє значення також можна визначити за допомогою цієї програми.

$Mo = 12$, $Me = 11{,}5$, $\bar{X} \approx 11{,}36$.

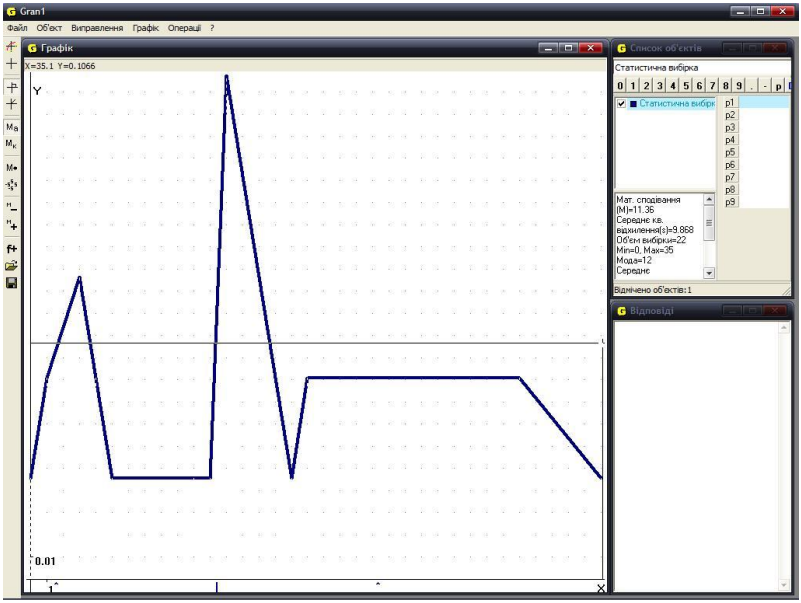


Рис. 20

11. Побудуємо дискретний ряд розподілу відносних частот, які виразимо у відсотках (табл. 17).

Таблиця 17

Розмір	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар, %	0	6	8	18	24	28	12	4

$Mo = 42$, $Me = 41$, $\bar{X} \approx 41{,}12$;

Полігони рядів розподілу попиту і пропозиції подано на рис. 21.

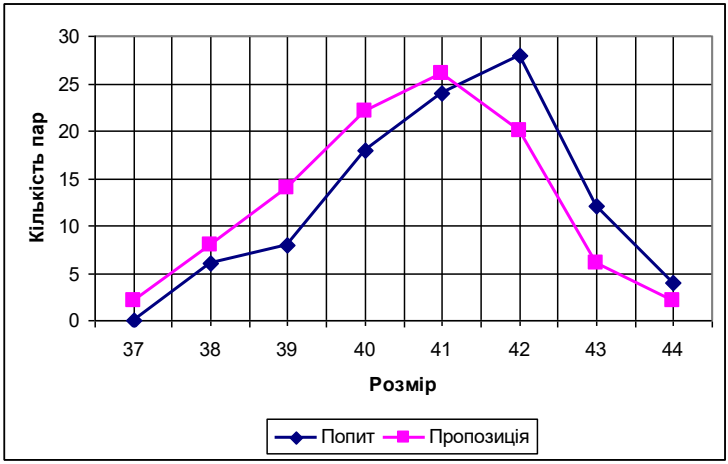


Рис. 21

12. Інтервальний ряд розподілу подано в табл. 18.

Таблиця 18

$x_i \in \langle a; b\rangle$	[44; 48)	[48; 52)	[52; 56)	[56; 60)	[60; 64)	[64; 68)	[68; 72]
ω_i	0,02	0,07	0,11	0,22	0,27	0,11	0,20

Гістограму зображено на рис. 22.

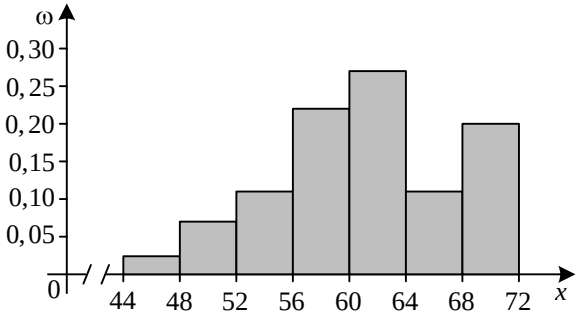


Рис. 22

Розділ ІІІ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ



Теорія ймовірностей — це, власне, здоровий глузд, зведений до обчислення: вона дає нам змогу оцінювати з точністю те, що проникливий розум відчуває немовби інстинктивно, часто навіть не усвідомлюючи цього.
П'єр-Сімо́н Лаплас

3.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій

У повсякденному житті часто доводиться чути фрази: «сьогодні ймовірність опадів 80 %», «малоймовірно, що така подія може відбутися», «ймовірність захворіти значно менша, якщо вжити профілактичних заходів» тощо. Що людина розуміє під словом «імовірність»? Чи можна прогнозувати відбудеться чи ні якесь явище, що пов'язане з випадком? Як вимірюється точність такого пронозу?

Ми розпочинаємо знайомство з наукою, що вивчає закономірності випадку. Ви можете сказати: саме слово «випадок» означає щось несподіване, те, що не можна передбачити. Як же можна говорити про якісь закономірності того, що відбувається випадково? Виявляється, що можна.

У середні віки в багатьох країнах Європи великою популярністю користувалася гра в кості. І от якось на одному майдані в Неаполі трапилася така пригода. Чоловік, що приїхав з міста Базилікати, струшував у чашці три гральні кості і пропонував усім бажаючим побитися об заклад, що він викине одразу три шістки. І справді, йому це вдалося.

Хтось може сказати: ну що ж, так буває. Але чоловік із Базилікати знову побився об заклад і знов виграв. Потім він ще тричі підряд викидав три шістки. Вчений Фердинандо Галіані, який був якраз на площі і спостерігав за цим, що відбувалося, вигукнув:

— Він шахрай! Кості налити свинцем.

Це підтвердилося. Як же Галіані вдалося викрити шахрая?

Випадок, що стався в Неаполі, — один з прикладів практичного застосування *теорії ймовірностей — науки, що вивчає закономірності відбування випадкових явищ.*

Історична довідка. Теорія ймовірностей як самостійна наука виникла в середині XVII століття, коли були дуже поширені азартні ігри, в яких результат залежить лише від випадку (від французького слова nasard — випадок). До таких ігор належить гра «в орлянку », ігри з кісткою, деякі карточні ігри. У листуванні Блеза Паскаля і П'єра Ферма з приводу задач, які постали в зв'язку з азартними іграми, було введено поняття ймовірності, математичного сподівання. Для розв'язування цих задач існуючих тоді математичних знань було замало. Так були закладені основи нової науки. Перший трактат з теорії ймовірностей написав Хрістіан Гюйгенс і видав його в 1657 р. під назвою «Про розрахунки в азартних іграх».



Христия́н Гю́йгенс або Хрістіан Гюйгенс (нід. Christiaan Huygens; 14.04.1629 — 8.07.1695) — нідерландський фізик, механік, математик і астроном, автор хвильової теорії світла та праць з оптики і теорії імовірностей.

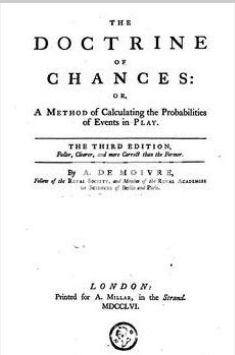
У 1657 р. Гюйгенс написав додаток «Про рахунки в азартній грі» до книжки свого вчителя ван Схаутена «Математичні етюди». Це був змістовний виклад початків теорії ймовірності, що зароджувалася в той час. Гюйгенс, разом із Ферма і Паскалем, заклав її основи. За цією книжкою ознайомився з теорією ймовірності Якоб Бернуллі, який і завершив формулювання основних принципів теорії.

Наступний період у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з іменем Якоба Бернуллі. Дякуючи його роботам теорія ймовірностей набула важливого значення в практичній діяльності.

Довгий час теорія ймовірностей вважалася фізичною наукою. Про це говорять і терміни, які використовуються в ній: стохастичний експеримент, подія, ймовірність.

Нині теорія ймовірностей — це галузь математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ. У її розвиток значний доробок внесли французькі математики Абрахам де Муавр, Пьер Лаплас, російські математики Віктор Буняковський, Пануфтій Чебишов, Андрій Марков, Олександр Хінчин, Андрій Колмогоров, українські математики Анатолій Скороход, Володимир Королюк, Михайло Ядренко та інші.





THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION,
Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

By A. DE MOIVRE,
Fellow of the Royal Society, and Member of the Royal Academies of Sciences of Berlin and Paris.

LONDON:
Printed for A. MILLAR, in the *Strand*.
MDCCLVI.



Абрахам де Муавр (фр. Abraham de Moivre; 26.05.1667 — 27.11.1754) — англійський математик французького походження. Відомий переважно через формулу Муавра, працями на теми нормального розподілу та теорії ймовірностей. Член Лондонського королівського товариства з 1697 року, Паризької (1754) та Берлінської (1735) академій наук. У 1718 р. де Муавр видав свою головну працю з теорії ймовірностей. Книга під назвою «The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play» в наукових колах викликала велику зацікавленість та витримала три видання.

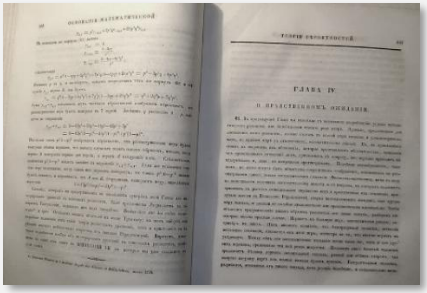
П'єр-Сімо́н Лапла́с (фр. Pierre-Simon Laplace; 23.03.1749 — 5.03.1827) — французький математик і астроном; відомий своїми працями в галузі диференціальних рівнянь, один із творців теорії ймовірностей. Лаплас розширив та систематизував математичний фундамент теорії ймовірностей. Перша книга «Аналітичної теорії ймовірностей» присвячена її математичним основам. Власне теорія ймовірностей починається у другій книзі, в застосуванні до дискретних випадкових величин. Там подано доведення граничних теорем Муавра — Лапласа та додатки до математичної обробки спостережень, статистики народонаселення та «моральних наук».



Буняко́вський Ві́ктор Я́кович (3(15).12.1804 — 30.11(12.12) 1889 — російський математик українського походження, член Петербурської Академії Наук та її віце-президент (1864—1889). Діяльність вченого склала 168 праць з математичного аналізу, теорії чисел, геометрії, теорії ймовірностей та її застосування до демографії, статистики, страхової справи, теорії похибок тощо.

Особливе місце у науковій спадщині Буняковського займають праці з теорії ймовірностей. Праця «Основи математичної теорії ймовірностей» (1846) є цінним вкладом у науку. У ній йдеться про виникнення та розвиток цієї науки, наведено приклади її застосування в страхуванні, демографії.


ОСНОВАНІЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ
ВѢРОЯТНОСТЕЙ.



Олександр Якович Хінчин (7.07.1894 — 18.11.1959) — радянський математик, професор МДУ, один з найвизначніших вчених у радянській школі теорії ймовірностей. Застосував методи метричної теорії функцій до задач теорії ймовірностей та теорії чисел. Ним отримані важливі результати в галузі граничних теорем, відкрито закон повторного логарифму.

Одним із значних результатів, які принесли Хінчину світову славу видатного математика, є формула Леві — Хінчина для характеристичної функції процесу теорії стохастичних процесів Леві.

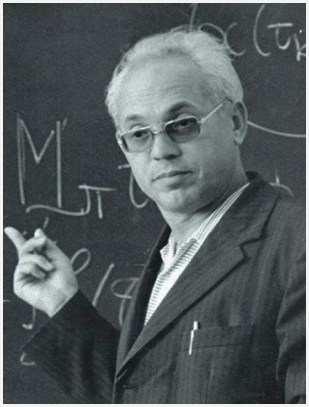


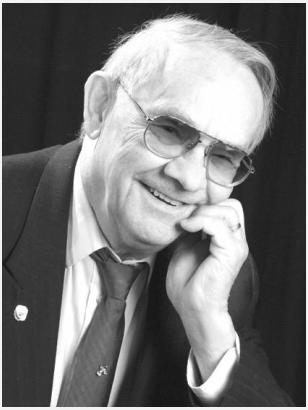


Колмого́ров Андрі́й Микола́йович (12(25).04.1903 — 20.10.1987) — російський радянський математик. Заняття теорією множин і тригонометричними рядами пробудили у Колмогорова інтерес до теорії ймовірностей.
Його книга «Основні поняття теорії ймовірностей» (1936), де була побудована аксіоматика теорії ймовірностей, належить до класичних праць в цій галузі науки. Був одним із творців теорії випадкових процесів. Брав активну участь розробці питань математичної освіти в школі і університетах, зробив величезний внесок у розвиток освіти.

Анато́лій Володи́мирович Скорохо́д (10.09.1930 — 3.01.2011) — український математик. Доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України, член Американської академії мистецтв і наук.

Автор понад 450 наукових праць, серед яких 23 монографії (більшість із них перекладені та видані за кордоном), понад 300 статей у провідних наукових журналах, підручники.
Головний редактор наукового журналу «Теорія ймовірностей та математична статистика».





Володи́мир Семе́нович Королю́к (19.08.1925 — 4.04.2020) — український математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України. Основні праці з теорії ймовірностей та математичної статистики, методів програмування, уточнення граничних теорем для задач випадкових блукань з границями. Автор понад 350 наукових праць, серед яких понад 20 монографій. Був членом редколегій «Українського математичного журналу», часописів «Кібернетика та системний аналіз», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Theory of Stochastic Processes», «Applied Stochastic Models and Data Analysis»



Миха́йло Йо́сипович Ядре́нко (16.04.1932 — 28.09.2004) — український математик, професор, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України. Завідував кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики КНУ імені Тараса Шевченка.

Як науковець, знаний у світі своїми роботами з теорії випадкових полів та стохастичного аналізу. Він опублікував понад 200 наукових праць у цій області, значна частина яких перевидана англійською мовою в США та інших країнах.

Багато сил та енергії віддавав для розвитку шкільної математичної освіти, організації математичних олімпіад, виданню сучасних посібників з елементарної математики та комбінаторики, а також збірників задач з математичних олімпіад.

Теорія ймовірностей вчить передбачувати перебіг подій, незважаючи на випадковий характер явищ, які вивчаються. Звичайно, *окремі випадковості неможливо передбачити. Але, повторюючись багаторазово, вони підпорядковуються певним законам.*

Уявімо, що ми підкидаємо монету, на одній стороні якої герб, а на другій цифра, і спостерігаємо, якою стороною догори впаде монета. Зрозуміло, що передбачити наперед, як упаде монета, догори гербом чи цифрою, неможливо. Але якщо монету підкидати багато разів, то можна помітити певну закономірність: поява герба для стандартної монети відбувається приблизно в половині випадків. Так, у XVIII столітті, французький вчений-натураліст Жорж Бюффон (1707 — 1788) підкинув монету 4040 раз — герб випав 2048 раз, американський математик Карл Пірсон (1857 — 1936) на початку XX ст. повторив цей експеримент, підкинувши монету 24000 раз. Герб випав 12012 раз. Ці експерименти показують, що випадковість проявляється якось закономірно, тому є можливість цю закономірність досліджувати і

використовувати в своїх інтересах.

Під час нашого уявного спостереження та експериментів Бюффона й Пірсона діяла одна із закономірностей, яким підпорядковуються випадкові явища: *для кожного окремого випадку результат може бути непередбаченим, а при масовому повторенні таких випадковостей кінцевий (узагальнений) результат часто можна досить точно передбачити з деякою мірою впевненості.*

У навколишньому світі безліч явищ і процесів, прояви і перебіг яких непередбачувані, випадкові.

3.1.1. Випадковий експеримент і випробування

Для того, щоб вивчати закономірності відбування випадкових явищ, будують так звані *ймовірнісні моделі* — математичні моделі відбування цих явищ. Теорія ймовірностей допомагає будувати і досліджувати такі ймовірнісні моделі.

Для вивчення закономірностей відбування випадкових явищ дослідники проводять спеціально організовані експерименти (спостереження або досліди), метою яких є отримання певного результату. Проте результати таких експериментів можна лише прогнозувати з певною мірою впененості.

Експерименти, точні результати (наслідки) яких передбачити неможливо, будемо називати випадковими або стохастичними (від грецького слова στοχαστικός — той, хто вміє вгадувати, stocoz — ціль, угадати).

Кожне конкретне (окреме) проведення стохастичного експерименту називають випробуванням.

Кожен стохастичний експеримент визначається незмінними умовами. Одна з таких визначальних умов — випробування (проведення експерименту) можна повторювати

і при цьому результати (наслідки) попередніх випробувань не впливають на результати наступних. Наприклад, результати підкидання монети, проведені Бюффоном, ніяк не впливали на результати аналогічного підкидання, проведеного Пірсоном. Особливістю кожного стохастичного експерименту є і те, що його можна проводити реально (безпосередньо досліджуючи явища, які відбуваються) або подумки (не обов'язково контактуючи з предметами). При цьому такий експеримент називають *реальним* або *мисленневим* відповідно.

3.1.2. Елементарні події та простір елементарних подій

Хоча ми не можемо передбачити точний наслідок кожного окремого випробування, проте дослідним шляхом і розмірковуваннями можемо визначити всі можливі результати (наслідки) даного стохастичного експерименту. Ці наслідки (результати) утворюють непорожню множину, яку позначають буквою Ω (читається «омега»).

Розглянемо кілька прикладів стохастичних експериментів, для кожного з яких випробування можна проводити реально або подумки.

Приклад 1. Експеримент полягає у підкиданні монети один раз і фіксації гербом чи цифрою монета впаде догори.



Множина всіх можливих результатів такого експерименту складається з двох елементів: «монета падає догори гербом» і «монета падає догори цифрою». Це можна записати так: $\Omega = \{г,\ ц\}$. Буквою $г$ позначений наслідок — поява герба, а буквою $ц$ — наслідок — поява цифри.

Приклад 2. Експеримент полягає в тому, що підкидається гральний кубик, на гранях якого нанесені позначки (очки) (рис. 23), і фіксується кількість очок на грані, яка випаде догори.

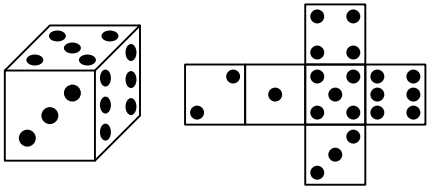


Рис. 23

Множиною можливих наслідків експерименту може бути множина $\Omega = \{$  $\}$ або Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Приклад 3. Експеримент полягає в тому, що підкидається гральний кубик (рис. 23), але фіксується лише те, парна чи непарна кількість очок випадає на грані, якою кубик впаде догори. Множиною Ω може бути множина {«парна»; «непарна»}, або {*п*; *н*}, або {0; 1}.

Приклад 4. Кубик, у якого одна грань пофарбована у білий колір, а інші п'ять – у синій, підкидають і фіксують, який колір випадає на верхній грані. Множиною можливих наслідків Ω може бути множина {«білий»; «синій»}, або {*б*; *с*}.

Кожний можливий наслідок стохастичного експерименту називають елементарною подією.

Елементарну подію (як елемент множини) можна позначати різними символами, наприклад маленькими латинськими буквами (можливе позначення буквами з індексами). Кожне окреме випробування (проведення експерименту) закінчується єдиним наслідком — відбувається одна елементарна подія з множини Ω, що відповідає даному експерименту, при цьому різні елементарні події не можуть відбутися одночасно.

Множину Ω всіх можливих наслідків стохастичного експерименту називають простором елементарних подій.

Простір Ω може містити скінченну або нескінченну кількість елементарних подій.

Наведемо ще приклади просторів елементарних подій.

Приклад 5. У фіналі музичного конкурсу беруть участь два юнаки і дві дівчини. Експеримент полягає в тому, що порядок виступу визначається жеребкуванням. Потрібно встановити можливі наслідки такого жеребкування та їх кількість.

Символ $Ю_1$ присвоїмо одному з юнаків, символ $Ю_2$ — іншому, $Д_1$ — одній дівчині, а $Д_2$ — іншій. Тоді можливі наслідки жеребкування будуть такими:

($Ю_1$, $Ю_2$, $Д_1$, $Д_2$); ($Ю_1$, $Ю_2$, $Д_2$, $Д_1$); ($Ю_2$, $Ю_1$, $Д_1$, $Д_2$); ($Ю_2$, $Ю_1$, $Д_2$, $Д_1$); …; ($Д_2$, $Д_1$, $Ю_2$, $Ю_1$).

Поглянемо на ці четвірки впорядкованих символів інакше. Є множина символів {$Ю_1$, $Ю_2$, $Д_1$, $Д_2$}. Тоді кожен результат жеребкування є перестановкою цих символів. Тому їх кількість — це $P_4 = 4! = 24$.

Отже, можливих наслідків експерименту буде 24. Кожна упорядкована четвірка — елементарна подія. Простір елементарних подій Ω міститиме 24 елементарні події.

Приклад 6. Експеримент полягає в тому, що стрілець у тирі стріляє в мішень до першого промаху (можна вважати, що кількість патроні у нього необмежена). Які можуть бути наслідки такої стрільби і скільки їх буде?

Якщо промах по мішені позначити символом «–», а влучення — «+», то легко бачити, що наслідки стрільби можуть бути такими:

e_1 = (–) — промах при першому пострілі;

e_2 = (+ –) — промах при другому пострілі;

e_3 = (+ + –) — промах при третьому пострілі;

e_3 = (+ + + –) — промах при четвертому пострілі

і т. д.

Зрозуміло, що за умовою цей експеримент має нескінченну кількість результатів. Отже, множина Ω можливих наслідків експерименту, тобто простір елементарних подій буде нескінченною множиною

Ω = {(–); (+ –); (+ + –); (+ + + –); …} = {e_1; e_2; e_3; e_4; …}. Елементи даної нескінченної множини занумеровані всіма натуральними числами.

Приклад 7. Експеримент полягає у виборі навмання числа з відрізка $[a; b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, і його фіксації.

Очевидно, що елементарними подіями тут будуть усі числа з вказаного відрізка. Отже, і в цьому випадку простір елементарних подій Ω буде нескінченою множиною та збігатися з даним проміжком: $\Omega = [a; b]$. Елементи цієї множини не можна занумерувати. У такому випадку кажуть, що множина Ω незлічена.

На підставі наведених прикладів зробимо деякі висновки:

1. Кожен стохастичний експеримент має свої результати (наслідки), які називають *елементарними подіями*. У результаті проведення експерименту відбувається лише одна елементарна подія. Різні елементарні події не можуть відбутися одночасно. Множину всіх елементарних подій називають *простором елементарних подій* і позначають Ω.

2. Елементи простору елементарних подій Ω відрізняються один від одного і можуть позначатися різними способами (так, як це зручно тому, хто проводить експеримент).

3. Простір елементарних подій Ω може бути *скінченним* (елементарні події можна занумерувати першими n натуральними числами), або *нескінченним* і *зліченним* (усі натуральні числа використано для нумерації елементарних подій), або *нескінченним* і *незліченним* (елементарні події неможливо занумерувати).

4. Кожне випробування можна тлумачити як випадковий вибір елемента з простору елементарних подій Ω.

5. Поняття стохастичного експерименту, елементарної події та простору елементарних подій є основними поняттями теорії ймовірностей подібними до того як точка, пряма, площина в геометрії та число, множина в алгебрі.

3.2. Поняття випадкової події. Вірогідна, неможлива події. Рівні події

3.2.1. Випадкова подія та елементарні події, що сприяють їй

Нехай Ω — простір елементарних подій, який відповідає даному експерименту. З цих елементарних подій можна утворювати різні підмножини простору Ω. *Деякі з цих підмножин називають випадковими подіями (або просто подіями).*

Візьмемо Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, що відповідає експерименту в прикладі 2. Підмножинами цієї множини можуть бути, наприклад, $A = \{2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$, порожня множина ∅, сама множина Ω тощо.

Отже, *кожна випадкова подія є деякою сукупністю певних наслідків експерименту, тобто підмножиною простору* Ω. Проте обернене твердження правильне не завжди. Які саме підмножини простору Ω доцільно вважати подіями, залежить від потреб та домовленостей. Разом з тим ці домовленості повинні задовольняти певні умови. Однією з таких умов є те, що *порожня множина ∅ і сама множина* Ω *завжди вважаються подіями.* Інші умови будуть розглянуті пізніше.

Події (як множини) позначають великими латинськими буквами *A, B, C* тощо. Оскільки кожна подія є деякою множиною, то її можна задати переліком її елементів — елементарних подій, або словесно — описанням характеристичної властивості її елементів.

Наприклад, подію $B = \{2, 4, 6\}$, наведену вище, можна також задати так: *B* — «випадає парне число очок».

Кожну елементарну подію e, з яких складається подія A, називають елементарною подією, що сприяє події A і позначають $e \in A$. Усі інші *елементарні події e* вважаються такими, що *не сприяють події A* і позначають $e \notin A$.

Так в експерименті з прикладу 2 події $B = \{2, 4, 6\}$ («випала парна кількість очок») сприяє три елементарних події: 2, 4 і 6, а 1, 3 і 5 не сприяють події A. Події Ω («випало не більше, ніж 6 очок») сприяють всі шість елементарних подій: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Події $\varnothing$ («випало більше, ніж 6 очок») не сприяє жодна елементарна подія з простору Ω.

Якщо в результаті випробування відбулася елементарна подія e, що сприяє події A ($e \in A$), то кажуть, що в результаті цього випробування *подія A відбулася*; якщо в результаті випробування не відбулася жодна елементарна подія $e \in A$, то кажуть, що в результаті цього випробування *подія A не відбулася*.

Простір Ω елементарних подій можна вважати *початковою математичною моделлю стохастичного експерименту*.

Проведення експерименту (випробування) в рамках цієї моделі означає вибір навмання елементарної події e з простору Ω, а відбування події A означає, що ця елементарна подія $e \in A$, тобто сприяє події A. Геометрично простір елементарних подій Ω зображають у вигляді прямокутника, а події — частинами цього прямокутника, наприклад кругами (рис. 24).

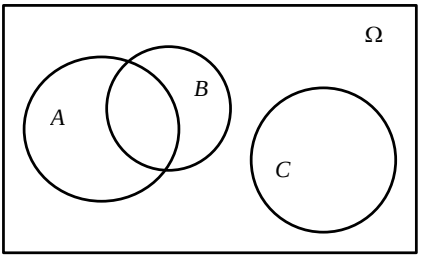


Рис. 24

3.2.2. Вірогідна та неможлива події

Оскільки Ω — множина усіх можливих наслідків експерименту, то в результаті кожного випробування, тобто кожного проведення даного експерименту подія Ω обов'язково відбудеться. Тому *подію* Ω *називають* ***вірогідною*** *(або достовірною).*

Отже, *вірогідною є подія, яка відбувається в результаті кожного випробування, пов'язаного з даним стохастичним експериментом*.

Подія ∅ не містить жодної елементарної події e з множини Ω, тому вона ніколи не може відбутися в результаті проведення експерименту. *Подію* ∅ *називають* ***неможливою***.

Отже, *неможливою є подія, яка не може відбутися в результаті будь-якого випробування, пов'язаного з даним стохастичним експериментом*.

3.2.3. Відношення спричинюванності та рівності подій

Нехай деякі підмножини A і B множини Ω є подіями. Спостерігаючи випадкові події можна помітити певний зв'язок між їх відбуванням.

Якщо подія B відбувається завжди, коли відбувається подія A, то пишуть $A \subset B$ і кажуть, подія B спричинюється подією A або подія A спричинює подію B.

Це означає, що кожна елементарна подія $e \in \Omega$, що сприяє події A ($e \in A$), сприяє також і події B ($e \in B$) (рис. 25).

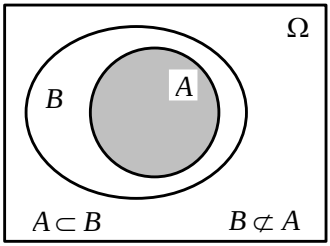


Рис. 25

Якщо подія A спричинює подію B і подія B спричинює подію A ($A \subset B$ і $B \subset A$), то події A і B називають рівними і записують $A = B$.

Це означає, що кожна елементарна подія $e \in \Omega$, що сприяє події A ($e \in A$), сприяє також і події B ($e \in B$), та навпаки, кожна елементарна подія $e \in \Omega$, що сприяє події B ($e \in B$), сприяє також і події A ($e \in A$) (рис. 26).

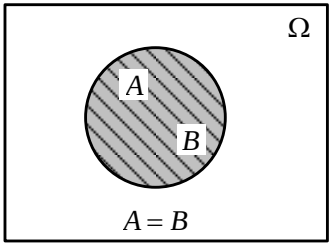


Рис. 26

Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно відбуваються або не відбуваються.

Наприклад, якщо при підкиданні грального кубика $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ подія $A = \{2\}$ — випадання 2-х очок спричинює подію $B = \{2, 4, 6\}$ — випадання парної кількості очок, та дорівнює події C — випадання кількості очок, більшої за 1 і не більшої за 2.

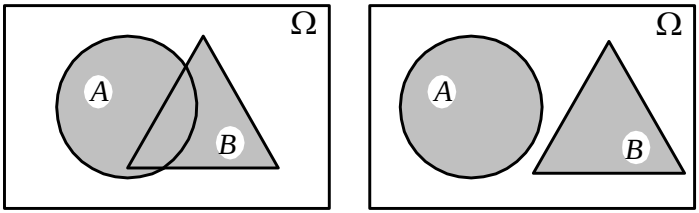
3.3. Операції над подіями. Простір подій

Нехай Ω — простір елементарних подій для певного експерименту і $A \subset \Omega$ та $B \subset \Omega$ — події.

3.3.1. Сума подій

Сумою $A + B$ подій A та B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A або B.

Це означає, що кожна елементарна подія e, яка сприяє події C ($e \in C$), сприяє принаймні одній з подій A або B ($e \in A$ або $e \in B$), і навпаки, якщо e сприяє A ($e \in A$) або e сприяє B ($e \in B$), то e сприяє події C ($e \in C$). Тому сума подій $A + B$ є об'єднанням множин A та B, тобто $A + B = A \cup B$. Щоб отримати суму подій $A + B$, треба до елементарних подій, що сприяють одній з них, приєднати ті елементарні події, що сприяють іншій і не сприяють першій. Геометричну ілюстрацію суми подій зображено на рис. 27 а), б).



а) $A + B$ б) $A + B$

Рис. 27

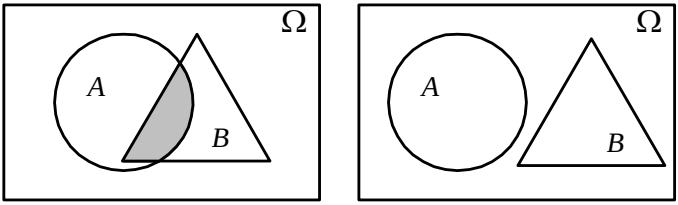
Аналогічно, якщо $A_i \subset \Omega$, де $i = 1, 2, ...$, то *сумою подій A_i називають таку подію $C = \sum_i A_i$ ($C = \bigcup_i A_i$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_i*. У випадку, коли $i = 1,2,\dots,n$, суму подій A_i позначають $\sum_{i=1}^{n} A_i$ або $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, а коли $i \in \mathbb{N}$, то відповідну суму позначають $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ або $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Наприклад, нехай подія A полягає в тому, що при підкиданні грального кубика випало парне число очок, а подія B — випало число очок, яке менше за 5. Знайдемо суму подій $A + B$. Оскільки $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, то за означенням $A + B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

3.3.2. Добуток подій та несумісність подій

Добутком $A \cdot B$ подій A та B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.

Це означає, що кожна елементарна подія e, яка сприяє події C ($e \in C$), сприяє також обом подіям A та B ($e \in A$ і $e \in B$), і навпаки, якщо e сприяє A ($e \in A$) і e сприяє B ($e \in B$), то e сприяє події C ($e \in C$). Тому добуток подій $A \cdot B$ є перерізом множин A та B, тобто $A \cdot B = A \cap B$. Щоб отримати добуток подій $A \cdot B$, треба взяти всі ті елементарні події, які одночасно сприяють обом подіям A та B. Геометричну ілюстрацію добутку подій зображено на рис. 28 а) б).



а) $A \cdot B$ б) $A \cdot B = \varnothing$

Рис. 28

Аналогічно, якщо $A_i \subset \Omega$, де $i = 1, 2, ...$, то *добутком подій A_i називають таку подію* $C = \prod_i A_i$ або $C = \bigcap_i A_i$, *яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається кожна з подій A_i.* У випадку, коли $i = 1,2,\ldots,n$, добуток подій A_i

позначають $\prod_{i=1}^{n} A_i$ або $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, а коли $i \in \mathbb{N}$, то відповідний добуток позначають $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ або $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Наприклад, для подій $A = \{2, 4, 6\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4\}$ їх добуток $A \cdot B = \{2, 4\}$.

Події A та B називають несумісними, якщо $A \cdot B = \varnothing$.

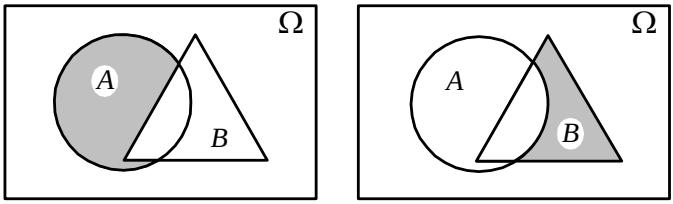
Несумісні події не можуть відбутися одночасно в одному і тому самому випробуванні, оскільки немає жодної елементарної події, яка б їм обом сприяла.

Наприклад, при підкиданні однієї монетки не може одночасно випасти і герб і цифра; при підкиданні грального кубика — число очок менших за 3 і більших за 5.

3.3.3. Різниця подій

Різницею $A - B$ подій A та B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B.

Це означає, що кожна елементарна подія, яка сприяє події C ($e \in C$), сприяє також події A і не сприяє події B ($e \in A$ і $e \notin B$), і навпаки, якщо e сприяє A ($e \in A$) і e не сприяє B ($e \notin B$), то e сприяє події C ($e \in C$). Тому різниця $A - B$ є різницею множин A та B, тобто $A - B = A \setminus B$. Щоб отримати різницю $A - B$ треба із множини елементарних подій, які сприяють події A, вилучити ті елементарні події, що сприяють події B. Аналогічно, щоб отримати різницю $B - A$, треба із множини елементарних подій, які сприяють події B, вилучити ті елементарні події, що сприяють події A. Геометричну ілюстрацію різниці подій зображено на рис. 29 а), б).



а) $A-B$ б) $B-A$

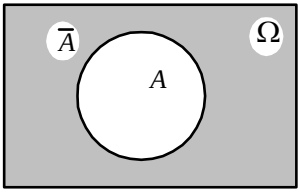
Рис. 29

Наприклад, для подій $A = \{2, 4, 6\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4\}$ різниця $A - B = \{6\}$, а різниця $B - A = \{1, 3\}$.

3.3.4. Взаємно протилежні події

Різницю $\Omega \setminus A$ називають подією, протилежною до події A і позначають $\overline{A}$.

Це означає, що подія $\overline{A}$, протилежна до події A, відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A. Очевидно, що події A і $\overline{A}$ несумісні. Геометричну ілюстрацію протилежної події зображено на рис. 30.



$\Omega - A = \overline{A}$

Рис. 30

Наприклад, протилежною до події «на грані кубика випало парне число» є подія «на грані кубика випало непарне число».

Зрозуміло, що протилежною до події $\overline{A}$ є сама подія A ($\overline{A} = A$). Тому *події A* і $\overline{A}$ називають *взаємно протилежними*.

3.3.5. Уточнення поняття випадкової події

У пункті 3.2.1 йшлося про те, що *деякі* підмножини простору Ω називають подіями або випадковими подіями. Уточнимо, які саме підмножини простору Ω можна називати подіями. Таке уточнення потрібне і для того, щоб бути впевненим в існуванні суми, добутку та різниці подій. Адже відомо, що лише саме означення якоїсь операції не гарантує можливість її виконання.

Означення. *Випадковими подіями або просто подіями називають такі підмножини простору* Ω*, які утворюють деяку сукупність* S*, що задовольняє три основні умови*:

1s. $\Omega \in S$ (*вірогідна подія завжди належить цій сукупності*);

2s. *Якщо* $A \in S$*, то* $\overline{A} \in S$ (*кожна подія належить цій сукупності разом зі своєю протилежною подією*);

3s. *Якщо* $A_i \in S, i \in N$*, то* $\sum_i A_i \in S$ (*для будь-яких подій, що належать даній сукупності, їх сума також належить цій сукупності*).

Таку сукупність S називають *простором подій*. Кожну підмножину $A \subset \Omega$, що входить до S, вважають подією, а всі інші підмножини Ω не вважають подіями.

Умова **1s** гарантує, що існує принаймні одна подія $A \subset \Omega$. Такою є, наприклад, вірогідна подія Ω.

Умова **2s** гарантує існування протилежної події $\bar{A}$ для будь-якої події A з S. Зокрема, ця умова гарантує, що неможлива подія завжди входить до сукупності S, оскільки $\emptyset = \overline{\Omega}$. Тому простір S містить щонайменше дві події: вірогідну і неможливу. До речі, простір подій може містити лише дві події і тоді його позначають $S_* = \{\Omega, \emptyset\}$.

Умова **3**S гарантує, що сума $\sum_i A_i$ подій A_i завжди існує, тобто належить до S, коли A_i з S .

Сукупність S^*, утворена з усіх підмножин простору Ω, також задовольняє умови 1S – 3S. Вона називається *найширшим простором подій*, а сукупність $S_* = \{\Omega, \emptyset\}$ називається *найвужчим простором подій* (пов'язаних з даним простором Ω).

На практиці простір подій S можна утворювати багатьма способами. Вибір способу залежить від потреб. Головним при виборі будь-якого способу побудови простору подій є виконання основних властивостей подій 1S – 3S*, які можна назвати правилами побудови простору подій або правилами задання випадкових подій.*

Приклад 7. Експеримент полягає в тому, що два квитки на концерт потрібно розподілити між двома юнаками Ю$_1$, Ю$_2$, і двома дівчатами Д$_1$, Д$_2$. Необхідно, щоб простір S містив подію A — «квитки отримали юнак і дівчина». Чи обов'язково простір подій S є найширшим?

Визначимо спочатку простір елементарних подій, який відповідає експерименту. Маємо 4 особи, з яких потрібно вибрати двох. Такі вибірки, очевидно, невпорядковані. Їх буде стільки, скільки є комбінацій з чотирьох елементів по два елементи без повторень:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Вони утворять простір елементарних подій **Ω** = {(Ю$_1$, Ю$_2$); (Д$_1$, Д$_2$); (Ю$_1$, Д$_1$); (Ю$_1$, Д$_2$); (Ю$_2$, Д$_1$) (Ю$_2$, Д$_2$)}.

Подія A = {(Ю$_1$, Д$_1$); (Ю$_1$, Д$_2$); (Ю$_2$, Д$_1$) (Ю$_2$, Д$_2$)}.

У простір S повинні входити вірогідна подія Ω, неможлива подія ∅, подія A, подія, протилежна до події A. Очевидно, що $\bar{A} = \{(Ю_1, Ю_2); (Д_1, Д_2)\}$. Тепер легко переконатися, що сукупність {∅, Ω, {(Ю$_1$, Д$_1$); (Ю$_1$, Д$_2$); (Ю$_2$, Д$_1$) (Ю$_2$, Д$_2$)}, {(Ю$_1$, Ю$_2$); (Д$_1$, Д$_2$)}} можна вважати простором випадкових подій S і цей простір не є найширшим, тобто не всі підмножини простору Ω вважаються подіями.

Надалі, коли будемо говорити про події, завжди вважатимемо, що вони утворюють простір випадкових подій S за правилами 1_S – 3_S . Простір S разом з простором елементарних подій Ω можна вважати *уточненою моделлю даного випадкового експерименту*.

3.4. Відносна частота або статистична ймовірність події та її властивості

3.4.1. Поняття статистичної ймовірності

Розглянемо такий приклад.

Приклад 8. Нехай у нас є канцелярська кнопка. Будемо її підкидати (як підкидають монету) і фіксувати як вона впаде: вістрям вгору чи вістрям вниз (рис. 31). Зрозуміло, що такий експеримент може мати два наслідки (елементарні події): e_1 — кнопка впала вістрям догори; e_2 — кнопка впала вістрям вниз. Тобто $\Omega = \{e_1, e_2\}$.

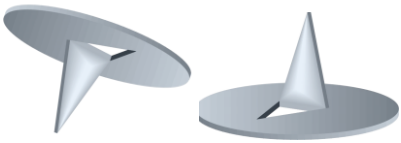


Рис. 31

Таке дослідження провели в 2000 р. 20 учнів однієї з харківських шкіл. Кожний з них 100 раз підкинув кнопку, тобто усього було проведено 2000 випробувань. При цьому елементарна подія e_1 відбулася 1091 раз, а e_2 — 909 раз. Розглянемо такий простір подій S: $S = \{\Omega, \varnothing, \{e_1\}, \{e_2\}\}$. Тоді $A = \{e_1\}$ — «кнопка впала вістрям догори» і $B = \{e_2\}$ — «кнопка впала вістрям вниз» є подіями, які відбулися 1091 і 909 раз відповідно.

Узагальнимо отримані результати. У експерименті, для якого побудовано простір елементарних подій Ω та простір подій *S*, проведено *n* випробувань, у яких фіксована випадкова подія $A \in S$ відбулася *m* разів, $0 \le m \le n$.

Число m випробувань, у яких відбулася подія A, називається її абсолютною частотою, а відношення $\frac{m}{n}$ *називається відносною частотою або статистичною ймовірністю події A в даній серії із n випробувань.*

Статистична ймовірність події *A* позначається $P_n^*(A)$, обчислюється за формулою $P_n^*(A) = \frac{m}{n}$ і характеризує *середню можливість відбування події A у кожному з n проведених випробувань.*

Для прикладу 8 статистична ймовірність події $A = \{e_1\}$ дорівнюватиме $P_{2000}^*(A) = \frac{1091}{2000}$, статистична ймовірність події $B = \{e_2\}$ — $P_{2000}^*(B) = \frac{909}{2000}$.

3.4.2. Статистична модель випадкового експерименту

Сукупність простору елементарних подій Ω, простору подій S і статистичної ймовірності $P_n^*(A)$, $A \in S$, *називають статистичною моделлю стохастичного експерименту і позначають* (Ω, S, P_n^*).

Якщо n досить велике, то часто виявляється, що $P_n^*(A)$ *достатньо добре характеризує середню можливість відбування події A у кожному випробуванні з довільної досліджуваної серії випробувань.*

Тому $P_n^*(A)$ дає можливість досить добре прогнозувати середню можливість відбування події *A* у майбутніх випробуваннях. У цьому випадку кажуть, що *статистична*

модель випадкового експерименту є адекватною або ефективною стосовно події A.

Приклад 9. Результати підкидання грального кубика подано в таблиці 19.

Таблиця 19

Кількість очок	1	2	3	4	5	6
Кількість випадань	2	4	7	4	6	5

Обчислимо статистичну ймовірність випадання парної кількості очок, тобто події $A = \{2,4,6\}$. Ця подія відбувається, коли відбуваються елементарні події, що їй сприяють. Оскільки елементарна подія e_2 — випало 2 очка — відбулася $m_2 = 4$ рази, елементарна подія e_4 — випало 4 очка — відбулася $m_4 = 4$ рази і елементарна подія e_6 — випало 2 очка — відбулася $m_6 = 5$ разів, то абсолютна частота події A дорівнює $m = m_2 + m_4 + m_6 = 13$. Отже, статистична ймовірність події A дорівнює $P_{28}^*(A) = \frac{13}{28}$.

(Якщо на практиці здійснити кілька серій по 28 (чи більше) підкидань грального кубика і підрахувати відповідні відносні частоти, то можна отримати (або не отримати) підстави вважати побудовану статистичну модель адекватною (пропонуємо це зробити самостійно).)

Якщо множина $\{e\}$ є подією з простору S, то тоді вважають, що *відносна частота або статистична ймовірність елементарної події e* дорівнює статистичній ймовірності події $\{e\}$і позначають $P_n^*(e) = P_n^*(\{e\})$.

Зауважимо, що наведене означення статистичної ймовірності є конструктивним, тобто надає спосіб обчислення $P_n^*(A)$ для довільної події A з будь-якого простору подій S. Тому для статистичної ймовірності можна вважати, що простір подій S є довільним, зокрема й найширшим.

Приклад 10. Нехай проведено $n = 20$ підкидань кубика, на гранях якого нанесені числа 1, 2, 3 і зафіксовано такі випадання чисел: 1, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 2. Побудувати простір подій S, який містить подію A — «випало непарне число» і визначити статистичні ймовірності кожної події побудованого простору.

Запишемо простір елементарних подій $\Omega = \{1,2,3\}$ і найвужчий простір подій S, який містить подію A — «випало непарне число»: $S = \{\varnothing, \Omega, \{1, 3\}, \{2\}\}$.

Події $A = \{1, 3\}$ сприяють елементарні події $e_1 = 1$ і $e_3 = 3$, які спостерігалися 7 і 6 разів відповідно. Отже, абсолютна частота події A є число $m = 13$. Тоді $P^*_{20}(A) = \frac{13}{20}$.

Події $\bar{A} = \{2\}$ сприяє елементарна подія $e_2 = 2$, яка спостерігалася 7 раз. Отже, $m = 7$ абсолютна частота події $\bar{A}$. Тому число $P^*_{20}(\bar{A}) = \frac{7}{20} = P^*_{20}(\{2\}) = P^*_{20}(2)$ є статистичною ймовірністю події $\bar{A} = \{2\}$ і елементарної події $e = 2$. Разом з тим говорити про статистичну ймовірність елементарних подій $e_1 = 1$ і $e_3 = 3$ не можна, оскільки $\{1\} \notin S$ і $\{3\} \notin S$.

Подія $\emptyset$ є неможливою. Оскільки вона не може відбутися в жодному випробуванні, то її абсолютна частота дорівнює 0. Тому $P^*_{20}(\emptyset) = \frac{0}{20} = 0$.

Подія Ω є вірогідною. Оскільки вона відбувається в кожному випробуванні, то її абсолютна частота дорівнює 20. Тому $P^*_{20}(\Omega) = \frac{20}{20} = 1$.

Зауважимо, що за наведеними результатами можна побудувати загальнішу статистичну модель (Ω, S^*, P^*_{20}), де подією буде будь-яка підмножина простору елементарних подій (пропонуємо переконатися в цьому самостійно).

3.4.3. Важливі властивості статистичної ймовірності

Безпосередньо з означення *статистичної ймовірності* випливають її *основні властивості*:

1. $P_n^*(A) \geq 0$ (*статистична ймовірність довільної події A невід'ємна*).

2. $P_n^*(\Omega) = 1$ (*статистична ймовірність вірогідної події дорівнює* 1).

3. $P_n^*(\sum_k A_k) = \sum_k P_n^*(A_k)$, коли $A_k \in S, k \in \mathbb{N}$ і $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ (*статистична ймовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій*).

Властивості 1–3 називають основними, оскільки з них випливають багато інших властивостей статистичної ймовірності.

Сформулюємо і доведемо деякі з них.

4. $P_n^*(\bar{A}) = 1 - P_n^*(A)$ (*статистична ймовірність події, протилежної даній, дорівнює різниці* 1 *і статистичної ймовірності даної події*).

Оскільки, $A \cdot \overline{A} = \emptyset$ і $A + \bar{A} = \Omega$, то за основними властивостями 2 і 3 маємо $P_n^*\left(A + \overline{A}\right) = P_n^*(A) + P_n^*\left(\overline{A}\right) = P_n^*(\Omega) = 1$.

5. $P_n^*(\emptyset) = 0$ (*статистична ймовірність неможливої події дорівнює нулю*).

Справді, оскільки, $\emptyset = \overline{\Omega}$, то за властивостями 4 і 2 маємо: $P_n^*(\emptyset) = 1 - P_n^*(\Omega) = 1 - 1 = 0$. (У цьому можна переконатися і безпосередньо за допомогою означення: в n випробуваннях неможлива подія $\emptyset$ відбудеться $m = 0$ разів. Тому $P_n^*(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$.)

6. $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$ для довільних подій $A \subset \Omega$ та $B \subset \Omega$ (*статистична ймовірність суми двох подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій без статистичної ймовірності їх добутку*).

З рисунка 32 бачимо, що

$$A + B = A + (B - AB) \text{ і } A \cdot (B - AB) = \emptyset$$

(на рис. 32 заштрихована частина – AB). Тому за властивістю 3:

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B - AB). \qquad (*)$$

З того ж рисунка: $B = AB + (B - AB)$ і $AB \cdot (B - AB) = \emptyset$.

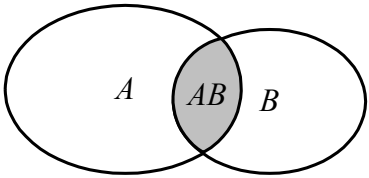


Рис.32

Отже, $P_n^*(B) = P_n^*(AB) + P_n^*(B - AB)$. Звідси визначаємо $P_n^*(B - AB) = P_n^*(B) - P_n^*(AB)$ і підставляємо у рівність (*).

7. Якщо $A \subset B$, то $P_n^*(A) \leq P_n^*(B)$ (*статистична ймовірність події A, яка спричинює подію B, не більша за статистичну ймовірність події B*), а також

$$P_n^*(B - A) = P_n^*(B) - P_n^*(A).$$

З рисунка 33 бачимо, що $B = A + (B - A)$ і $A \cdot (B - A) = \emptyset$ (на рис. 33 заштрихована частина – це $B - A$).

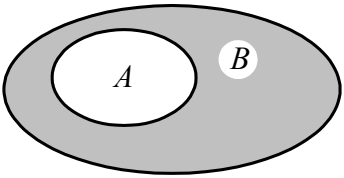


Рис. 33

Тому за основними властивостями 1 і 3 маємо: $P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B - A) \geq P_n^*(A)$.

Наслідок. Для будь-якої події A $P_n^*(A) \leq 1$ (*статистична ймовірність події не більша за* 1).

Справді, оскільки $A \subset \Omega$, то, за властивостями 6 і 2 $P_n^*(A) \leq P_n^*(\Omega) = 1$.

8. $0 \leq P_n^*(A) \leq 1$ (*статистична ймовірність будь-якої події може набувати значень лише з відрізка* [0; 1]).

3.4.4. Ряд розподілу статистичних ймовірностей

Оскільки статистична ймовірність є відносною частотою, обчисленою за даною вибіркою спостережених елементарних подій, то згідно з пунктами 2.2 – 2.4 для кожної такої вибірки можна утворити ряд розподілу (дискретний або інтервальний) та побудувати відповідний полігон або гістограму. Приклади таких рядів розподілу – це розв'язання завдань 10 і 12 для самостійного розв'язування в розділі II.

3.5. Ймовірність події та її властивості. Способи задання ймовірності

Визначаючи статистичну ймовірністю події, ми враховуємо кількість випробувань n, і, зрозуміло, що коли змінюється кількість випробувань, то може змінюватися і статистична ймовірність. Виникає запитання — на скільки суттєві такі зміни?

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 11. У таблиці 20 подано результати експерименту з підкиданням монети, який проводив Дж. Е. Керріх. Ним було проведено 10 серій з 1000 підкидань:

Таблиця 20

№ серії	1	2	3	4	5
Кількість випадань герба	502	511	497	529	504
Відносна частота	0,502	0.511	0,497	0,529	0,504
№ серії	6	7	8	9	10
Кількість випадань герба	476	507	528	504	529
Відносна частота	0,476	0,507	0,528	0,504	0,529

Приклад 12. Досліди з монетою проводили і інші дослідники (табл. 21):

Таблиця 21

	Кількість підкидань	Кількість випадань герба	Відносна частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
О. Де Морган	4092	2048	0,5005
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
В. Феллер	10000	4979	0,4979
К. Пірсон	24000	12012	0,5005
У. Джевонс	20480	10379	0,5068
В.І.Романовський	80640	40151	0,4979

Приклад 13. Кількість народжених за статтю по регіонах у 2021 році

Таблиця 22

	Кількість народжених			Відносна частота	
	Обидві статі	Хлопчики	Дівчатка	Хлопчики	Дівчатка
Україна	273 771	141 117	132 654	0,515	0,485
Автономна Республіка Крим	…	…	…	…	…
Області					
Вінницька	10 605	5396	5209	0,509	0,491
Волинська	9890	5141	4749	0,520	0,480
Дніпропетровська	19 687	10 102	9585	0,513	0,487

Продовження таблиці 22

	Кількість народжених			Відносна частота	
	Обидві статі	Хлопчики	Дівчатка	Хлопчики	Дівчатка
Донецька	10 213	5307	4906	0,520	0,480
Житомирська	8605	4402	4203	0,512	0,488
Закарпатська	12 747	6593	6154	0,517	0,483
Запорізька	9645	4966	4679	0,515	0,485
Івано-Франківська	10 595	5521	5074	0,521	0,479
Київська	12 698	6628	6070	0,522	0,478
Кіровоградська	5566	2832	2734	0,509	0,491
Луганська	3372	1725	1647	0,512	0,488
Львівська	19 547	10 057	9490	0,515	0,485
Миколаївська	7074	3569	3505	0,505	0,495
Одеська	19 437	10 101	9336	0,520	0,480
Полтавська	8110	4100	4010	0,506	0,494
Рівненська	11 774	6123	5651	0,520	0,480
Сумська	5519	2827	2692	0,512	0,488
Тернопільська	7312	3701	3611	0,506	0,494
Харківська	15 581	7919	7662	0,508	0,492
Херсонська	7161	3681	3480	0,514	0,486
Хмельницька	8734	4484	4250	0,513	0,487
Черкаська	6878	3639	3239	0,529	0,471
Чернівецька	7874	4055	3819	0,515	0,485
Чернігівська	5379	2700	2679	0,502	0,498
м.Київ	29 768	15 548	14 220	0,522	0,478
Севастополь (міськрада)	…	…	…	…	…

Приклад 14. Порівняння народжуваності хлопчиків і дівчаток (табл. 23).

Таблиця 23

	Кількість народжених			Відносна частота		
Рік	Країна	Хлопчики	Дівчатка	Разом	Хлопчики	Дівчатка
2005	Словенія	9355	8802	18157	0,515228	0,484772
2006	Болгарія	38108	35870	73978	0,515126	0,484874
2007	Австралія	146456	138757	285213	0,513497	0,486503
	Україна	243241	229419	472660	0,514622	0,485378
	Фінляндія	30243	28484	58727	0,514976	0,485024

Приклад 15. Народжуваність у м. Києві (табл. 24).

Таблиця 24

Рік	Кількість народжених			Відносна частота	
	Обидві статі	Хлопчики	Дівчатка	Хлопчики	Дівчатка
2016	36569	18869	17700	0,516	0,484
2017	35359	18430	16929	0,521	0,479
2018	34742	17854	16888	0,514	0,486
2020	30829	16056	14773	0,521	0,479
2021	29768	15548	14220	0,522	0,478
2023	19966	10174	9792	0,510	0,490

Приклади 11 і 12 показують, що хоча відносна частота випадання герба змінюється, вона мало відрізняються від числа 0,5. Приклади 13—15 показують, що відносна частота народження хлопчиків мало відрізняється від числа 0,515. Можна навести ще чимало дослідів, у яких при досить великій кількості випробувань статистична ймовірність $P_n^*(\mathrm{A})$ кожної фіксованої події A з даного простору подій S досить мало відрізняється від деякого числа $P(A)$, яке не залежить від кількості випробувань.

Це число часто називають *ймовірністю події A***.**

3.5.1. Поняття ймовірності та її основні властивості

Припустимо, що для заданого експерименту побудовано простір елементарних подій Ω і простір подій *S*.

При цьому число $P(A)$, $A \in S$, визначають так, щоб вони *задовольняли такі властивості:*

1_p. $P(A) \geq 0$ *для довільної події* $A \in S$.

2_p. $P(\Omega) = 1$.

3_p. $P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)$*для довільних попарно несумісних подій* A_k.

Нехай кожній події $A \in S$ *поставлено у відповідність єдине число* $P(A)$ *і ці числа задовольняють умови* 1_p—3_p *та характеризують можливість відбування подій у кожному випробуванні. Тоді кажуть, що на просторі подій S визначено ймовірність P і для кожної події A число* $P(A)$ *називають ймовірністю події A.*

Історична довідка.

З першого листа від Б.Паскаля до П.Ферма, Париж, Фобур Сен-Мішель, 28 жовтня 1654 р.

Гнітюча невпевненість, про яку я говорив вище, коріниться в загальному марновірстві; а саме, якщо хтось не знає чогось із цілковитою впевненістю (і справді, ми рідко володіємо цілковитою впевненістю), людина схильна вважати, що вона взагалі не має про це жодних знань. Відправною точкою моїх міркувань є твердження про те, що це помилкове переконання. Часткове знання є також знанням, а неповна впевненість має певну цінність, особливо якщо людина усвідомлює ступінь упевненості свого знання. «Чому, — тут хтось може заперечити, — можна виміряти ступінь знання; як це виразити числом?» «Звичайно, — відповів я, — це можна виміряти, і це саме те, що роблять люди, які грають в азартні ігри». Якщо гравець кидає кубик, він не може заздалегідь знати результат кидка, але він все одно знає дещо, а саме, що всі

шість чисел мають однаковий шанс. Якщо ми візьмемо всю достовірність за одиницю, то випливає, що конкретне одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 *буде викинуто зі ступенем достовірності* 1/6.

Якщо для події шанси на настання та ненастання рівні (як, наприклад, у випадку підкидання монети, шанси на те, що випаде «орел» або «решка»), можна сказати, що ступінь достовірності настання події дорівнює рівно 1/2. *Така сама й ступінь упевненості в ненастанні цієї події.*

Тут я хотів би зауважити, що ступінь достовірності події я назвав «імовірністю». Я довго розмірковував над правильним вибором терміну, і врешті вибрав цей, оскільки він найвиразніший. Крім того, це позначення повністю відповідає повсякденному вжитку. Звичайно, у народній мові ми говоримо про випадкову подію лише те, що вона є «найімовірнішою» або «неймовірною», або ж, що одна подія більш імовірна, ніж інша. Я, однак, обрав постулат моєї теорії, що кожній події, чия поява не визначена, але й не виключена, чия поява залежить від випадковості (тобто кожній випадковій події), можна призначити певне число від 0 до 1 як її ймовірність. Імовірність події, яку в повсякденній мові називають «імовірною», близька до 1, тобто близька до ймовірності повної впевненості, тоді як ймовірності подій, які в повсякденній мові називаються «неймовірними», близькі до 0, тобто до ймовірності неможливої події. [21, С.15,16]

З четвертого листа від Б.Паскаля до П.Ферма, Париж, 19 листопада 1654 р.

Світом керує випадковість, і саме тому існують порядок і закон, які виникають з океану випадкових подій згідно з правилами ймовірності. Ось чому я вважаю розуміння поняття ймовірності завданням найвищої важливості, і тому я так пристрасно займаюся цими проблемами. Однак я не маю надто турбуватися, щоб пояснити вам це, оскільки ви добре усвідомлювали з першої хвилини нашого листування, що ми маємо справу з чимось набагато важливішим, ніж проста гра в кості. [21, С.52]

Сукупність простору елементарних подій Ω, простору подій S та ймовірності $P(\mathrm{A})$, $\boldsymbol{A \in S}$, позначають (Ω, S, P) і називають *імовірнісною моделлю даного стохастичного експерименту або ймовірнісним простором.*

Зауваження. Основні властивості ймовірності $\mathbf{1}_p$—$\mathbf{3}_p$ схожі на основні властивості площі, об'єму, довжини, маси. Числові значення цих величин мають узагальнену назву – *міра*. На практиці ймовірність $P(\mathrm{A})$ намагаються задавати так, щоб вона гарно характеризувала середню можливість відбування події A у даній серії випробувань. Тому *ймовірність – це міра можливості відбування випадкової події*. Ця міра, на відміну від інших, більшою за одиницю не буває. Тому кажуть, що вона нормована одиницею.

Теорія ймовірностей дає змогу будувати і досліджувати імовірнісні моделі різних реальних випадкових явищ, відокремлюючи лише окремі спільні їх характеристики (три властивості подій і три властивості ймовірності) і нехтуючи багатьма специфічними властивостями цих явищ.

Такі ймовірнісні моделі завжди дають наближені уявлення про можливість відбування випадкових явищ. Наскільки гарні ці наближення, наскільки вдало побудована ймовірнісна модель дозволяє прогнозувати, передбачати можливість відбування тієї чи іншої випадкової події — вирішує практика.

Надалі ми будемо або будувати ймовірнісні моделі певних випадкових експериментів або досліджувати їх, вважаючи, що вони побудовані.

3.5.2. Важливі властивості ймовірності

Враховуючи, що багато важливих властивостей статистичної ймовірності випливають з її основних властивостей, а вони такі самі як і основні властивості ймовірності, одержуємо правильність багатьох властивостей ймовірності (табл. 25).

Таблиця 25

Основні властивості ймовірності

1. $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$.
2. $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$.
3. $\boldsymbol{P(\sum_k A_k) = \sum_k P(A_k)}$, якщо події $A_k \in S, k \in N$, попарно несумісні).
Деякі інші важливі властивості ймовірності:
4. $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$.
5. $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$.
6. $\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$,
для довільних подій A і B.
7. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$ і
$P(B - A) = P(B) - P(A)$.
8. $0 \leq P(A) \leq 1$.

3.5.3. Як можна задавати ймовірності подій з даного простору *S*

Якщо події простору S суто теоретичні, то їх імовірності можна задавати довільно, аби тільки вони задовольняли властивості 1_p—3_p . Якщо події реальні (пов'язані з практикою), то окрім властивостей 1_p—3_p слід задовольнити ще вимогу адекватності побудованої ймовірнісної моделі. Розглянемо приклад.

Приклад 16. Стохастичний експеримент полягає в тому, що підкидають монету і фіксують якою гранню вона впаде догори. Простором елементарних подій у цьому експерименті (див. 3.1) буде множина $\Omega = \{г, ц\}$. Нехай простір випадкових подій $S = \{\Omega, \varnothing, \{г\}, \{ц\}\}$. Суто теоретично ймовірності подій цього простору можна задавати багатьма способами, в кожному з яких лише події Ω і $\varnothing$ мають одну й ту саму ймовірність: $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$. Стосовно подій $\{г\}$ і $\{ц\}$ можна вважати, що $P(\{г\}) = p$, а $P(\{ц\}) = 1 - p$, де p – довільне число з проміжку [0; 1].

3.5.4. Деякі способи задання ймовірностей

Наведене вище загальне означення ймовірності не є конструктивним, оскільки не конкретизує способу вибору чисел $P(A)$. Таких способів безліч. Розглянемо деякі з них.

Оскільки *статистична ймовірність* задовольняє властивості $\mathbf{1}_p$—$\mathbf{3}_p$, то вона *є ймовірністю*. Тому *перший спосіб задання ймовірності* полягає у тому, що проводять одну досить велику серію з n випробувань і покладають

$$P(A) = P_n^*(A),\ A \in S.$$

Другий спосіб задання ймовірності, який часто використовують, полягає у тому, що проводять кілька, наприклад m, серій з n_i випробувань кожна, обчислюють статистичні ймовірності $P_{n_i}^*(A)$ події A, $A \in S$, у кожній серії і покладають

$$P(A) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_{n_i}^*(A).$$

Задача 1. Підприємець Хитрунко налагодив у своєму кафе швидкого харчування автоматичний розлив кави. Першого дня 65 зі 100 відвідувачів зауважили, що отримали напівпорожні склянки з кавою. Наступного дня тільки кожний третій відвідувач був задоволений наповненням склянки. Третього дня до кафе завітав 51 клієнт, з яких 33 стали вимагати повернення грошей за недолиту каву. Яка ймовірність того, що працівник центру захисту споживачів, зайшовши у кафе для перевірки, отримає з автомата повну склянку кави?

Розв'язання. Експеримент полягає у наливанні кави у склянку і визначенні наповненості склянки. Вважаємо, що коли клієнт задоволений наповненням склянки, відбулася подія A — «склянка повна». За даними умови проведено три серії випробувань, пов'язаних з цим експериментом. Для цих серій статистичні ймовірності події A дорівнюють числам $\frac{35}{100}$,

$\frac{1}{3}$ і $\frac{18}{51}$ відповідно. Можна вважати, що ймовірність отримання з автомата повної склянки кави дорівнює $P(A) = \frac{\frac{35}{100}+\frac{1}{3}+\frac{18}{51}}{3} = \frac{1057}{3060} \approx 0{,}345$.

Скоріше за все, Хитрунку доведеться сплатити штраф і відремонтувати автомат.

Відповідь. 0,345.

Третій спосіб задання ймовірності є зручним для розв'язування багатьох практичних задач, коли простір елементарних подій Ω скінченний. Тоді аналізують статистичні ймовірності усіх елементарних подій e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, а кожну множину $\{e_i\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ вважають подією. Якщо статистичні ймовірності $P_n^*(\{e_i\})$ мало відрізняються одна від одної, то доходять висновку, що для кожної події $\{e_i\}$, доцільно вважати їх імовірності рівними між собою, тобто $P(\{e_i\}) = p$.

Оскільки $\sum_{i=1}^{m}\{e_i\} = \Omega$ і $\{e_i\} \cap \{e_j\} = \emptyset$, коли $i \neq j$, то за властивостями 2_p і 3_p матимемо:

$1 = P(\Omega) = P(\sum_{i=1}^{m}\{e_i\}) = \sum_{i=1}^{m} P(\{e_i\}) = \sum_{i=1}^{m} p = p \cdot m$,

тобто

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{m}.$$

У цьому випадку кажуть, що *прийнятна гіпотеза (домовленість, умова) про рівноймовірність або рівноможливість* результатів експерименту (елементарних подій). Тоді для будь-якої події $A \subset \Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ маємо:

$$A = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\} = \sum_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\}.$$

А за властивістю 3_p одержуємо

$P(A) = P\left(\sum_{j=1}^{k}\{e_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\{e_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{m} = \frac{k}{m}$,

де k – кількість елементарних подій, що сприяють події A.

Отже, *за умови рівноможливості елементарних подій* e_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, *які утворюють простір* Ω, *ймовірність будь-якої події* $A \subset \Omega$ *обчислюється за формулою*

$$P(A) = \frac{k}{m},$$

де k *– кількість елементарних подій, що сприяють події* A, m *– кількість усіх елементарних подій простору* Ω.

Обчислення ймовірностей за вказаним правилом називають *обчисленням ймовірності події* за *класичною схемою*.

Задача 2. Підкидають правильний тетраедр, три грані якого пофарбовано в синій колір, а одна в зелений. Умови експерименту такі, що тетраедр падає на одну з граней. Яка ймовірність того, що тетраедр впаде на синю грань, зелену грань?

Розв'язання. Позначимо грані тетраедра: $С_1$, $С_2$, $С_3$ — сині грані, З — зелена грань. Зрозуміло, що простором елементарних подій у цьому експерименті буде множина Ω = {$С_1$, $С_2$, $С_3$, З}. Події A — «тетраедр упав на синю граню» — сприяє три елементарні події $С_1$, $С_2$, $С_3$, тобто A = {$С_1$, $С_2$, $С_3$}. Події B — «тетраедр упав на зелену граню» — сприяє одна елементарна подія З, тобто B = {З}. Оскільки тетраедр правильний, то природно вважати, що жодна з граней не має переваг перед іншими в тому, щоб тетраедр впав саме на неї. Отже, можна вважати, що елементарні події $С_1$, $С_2$, $С_3$, З — рівно можливі.

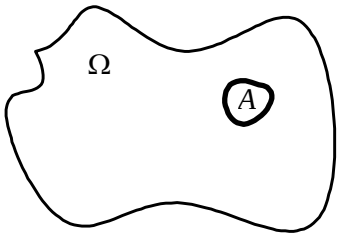
За класичною схемою обчислення ймовірності події матимемо:

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$.

Наступний спосіб задання ймовірності називають геометричним. Для розкриття його суті розглянемо приклад.

Приклад 17. На військових навчаннях йде артобстріл ділянки Ω площею $S(\Omega)$ квадратних одиниць, на якій знаходиться деяка ціль A площею $S(A)$ квадратних одиниць (рис. 34), причому кожний снаряд влучає у цю ділянку, але не обов'язково у ціль. Експеримент полягає у неприцільному обстрілі ділянки Ω і фіксації точки, в яку влучить снаряд. Наслідками такого експерименту (елементарними подіями) будуть усі точки ділянки і, зрозуміло, їх нескінченна кількість. Простором елементарних подій Ω буде множина точок ділянки, а простором подій S — сукупність частин ділянки, кожна з яких має площу. Ціль A — фіксовану частину ділянки — ототожнюємо з подією, яка полягає в тому, що снаряд влучить у цю частину. Зрозуміло, що чим більша площа цілі, тим більше шансів, що снаряд може в неї влучити. Тому, враховуючи основні властивості ймовірності, доцільно покласти $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$. За властивостями площі $P(A)$ задовольняє властивості 1_p—3_p.

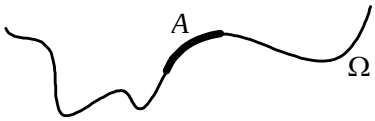


$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Рис. 34

Аналогічну задачу можна розглядати, коли ділянкою Ω є лінія довжиною $l(\Omega)$одиниць, а ціллю — її частинка $A \subset \Omega$ довжиною $l(A)$ одиниць (рис. 35). Навмання кидають точку на лінію з метою влучити у ціль. Використовуючи вище наведені

міркування можна дійти висновку, що $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}$. За властивостями довжини $P(A)$ задовольняє властивості 1_p—3_p.



$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}$$

Рис. 35

У загальному випадку маємо $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, де $\mu(\Omega)$ міра простору Ω, $\mu(A)$ міра частини простору, що ототожнюється з подією A.

Геометричний підхід до визначення ймовірності події не залежить від розмірності геометричного простору. Він може бути одновимірним, двовимірним, тривимірним. Важливим є те, щоб простір Ω усіх елементарних подій разом з певними своїми підмножинами утворював простір подій, для кожної з яких визначена міра μ, що задовольняє властивості 1_p—3_p.

Геометричний спосіб задання ймовірності дає можливість проілюструвати суттєву відмінність статистичної та/або «класичної» ймовірності від довільної. Статистична ймовірність, як і ймовірність задана класичним способом, набуває лише раціональних значень з множини $\{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$ і завжди може бути заданою на найширшому просторі подій, а довільна ймовірність може набувати будь-яких значень з проміжку [0; 1] (раціональних чи ірраціональних), а простір подій не завжди може бути найширшим з можливих оскільки існують обмежені геометричні фігури, що не мають довжини, площі чи об’єму.

Задача 3. Телефонна лінія, яка сполучає два пункти M і N, розміщені на відстані 2 км один від одного, обірвалася у невідомому місці. Яка ймовірність того, що обрив знаходиться не далі, ніж за 450 м від пункту M? Чи буде іншою ймовірність того, що обрив знаходиться не далі, ніж за 450 м від пункту N?

Розв'язання. Дамо геометричну ілюстрації до задачі (рис. 36)

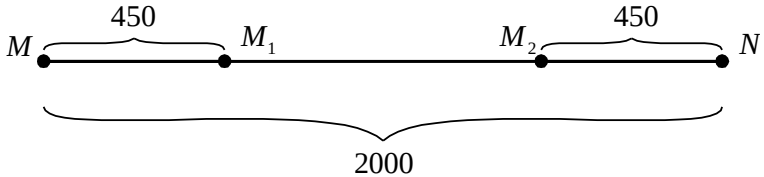


Рис. 36

Експеримент полягає у визначенні місця обриву — точки на відрізку MN. Тому $\Omega = MN$. Подія A — обрив відбувся у точці, що лежить на відрізку MM_1, довжина якого 450 м. Подія B — обрив відбувся у точці, що лежить на відрізку M_2N, довжина якого також 450 м. Взагалі подіями доцільно вважати будь-які частини відрізка MN, що мають довжину. Мірою μ є довжина. Тоді $\mu(\Omega) = 2000$ (м), $\mu(A) = 450$ (м), $\mu(B) = 450$ (м). Тому

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{450}{2000} = 0{,}225 = P(B).$$

Відповідь. $P(A) = P(B) = 0{,}225$.

Ми ознайомилися лише з кількома способами визначення ймовірностей. Виявляється, що ймовірності можна визначати нескінченною кількістю способів, але у кожному випадку повинні виконуватися три основні властивості ймовірності 1_p—3_p.

3.5.5. Розподіл ймовірностей

У пункті 3.4.4 для статистичної ймовірності введено поняття розподілу (дискретного, інтервального) та його

графічного подання (полігон, гістограма). Ці поняття узагальнюються на випадок імовірності, заданої довільним способом аби тільки виконувалися умови 1_s—3_s та 1_p—3_p. Про дискретний розподіл ймовірностей на просторі Ω кажуть тоді, коли існує скінченна або зліченна кількість елементарних подій $e_i \in \Omega$, для яких $\{e_i\}$ є подією з даного простору подій S, причому $P(e_i) = P(\{e_i\}) = p_i > 0$ і $\sum_i p_i = 1$. При побудові ймовірнісної моделі завжди можна досягти того, що елементарним подіям буде поставлено у відповідність деякі числа x_i, які можна впорядкувати за величиною, тобто $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, причому $P(x_i) = p_i > 0$ і $\sum_i p_i = 1$.

Про розподіл імовірностей докладніше йдеться в пункті 3.8* «Поняття про випадкові величини».

3.6. Умовна ймовірність і незалежні події. Імовірність добутку подій

Розглянемо таку задачу.

Задача 3. Малюк і Карлсон їдять цукерки і тістечка, беручи їх навмання з мішечка. Відомо, що на початку у мішечку було 5 тістечок і 15 цукерок. Карлсон першим навмання взяв одне з солодощів з мішечка і тут же його з'їв. Знайти ймовірність того, що після цього навмання взятий Малюком предмет виявиться тістечком.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі будемо міркувати так. Експеримент полягає у вийманні солодощів з мішечка. Вважаємо, що ймовірнісну модель побудовано так, що серед подій є події: H_1 — «Карлсон взяв (і з'їв) тістечко», H_2 — «Карлсон взяв (і з'їв) цукерку», A — «Малюк взяв тістечко». Очевидно, що $H_1 + H_2 = \Omega$. Подію A можна подати так:

$$A = \Omega \cdot A = (H_1 + H_2) \cdot A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A.$$

(*Порада*. Обґрунтування рівності $A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A$ можна провести так. Подія A відбудеться тоді і тільки тоді, коли відбудеться або подія «Карлсон взяв тістечко і Малюк

взяв тістечко», або подія «Карлсон взяв цукерку і Малюк взяв тістечко». Це й означає, що $A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A$.)

Тоді $P(A) = P(H_1 \cdot A + H_2 \cdot A)$. Оскільки події $H_1 \cdot A$ і $H_2 \cdot A$ несумісні, то $P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A)$. Отже, задача буде розв'язана, якщо ми знатимемо, як знайти ймовірність добутку двох подій.

3.6.1. Поняття умовної ймовірності

Розглянемо дві довільні події A та B з деякого ймовірнісного простору. Нехай при проведенні n випробувань подія B відбулася $k_B \neq 0$ разів. При цьому добуток подій AB відбувся k_{AB} разів. Тоді за першим способом задання ймовірності матимемо:

$$P(AB) = P_n^*(AB) = \frac{k_{AB}}{n} = \frac{k_{AB}}{k_B} \cdot \frac{k_B}{n} = \frac{k_{AB}}{k_B} \cdot P_n^*(B) = \frac{k_{AB}}{k_B} \cdot P(B).$$

Дріб $\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$ характеризує шанси відбування події A за умови, що відбулася подія B.

Ці шанси називають *умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B*, і позначають $P_B(A)$ або $P(A/B)$. Отже, *умовна ймовірність потрібна зокрема для обчислення ймовірності добутку подій*.

Якщо $P(B) \neq 0$, то умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називають відношення ймовірності добутку подій A і B до ймовірності події B:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \left(P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}\right). \qquad (1)$$

Якщо $P(B) = 0$, то зручно вважати, що за означенням $P_B(A) = P(A)$.

Геометрично умовна ймовірність $P_B(A)$ характеризує, яка частина елементарних подій, що сприяють події B, сприяє також події A (рис. 37)

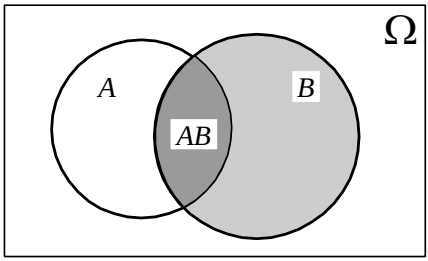


Рис. 37

Механічно умовна ймовірність $P_B(A)$ характеризує, яка частина маси тіла B припадає на тіло A.

Аналогічно означається умовна ймовірність події B, за умови, що подія A відбулася:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ якщо } P(A) \neq 0. \qquad (2)$$

$$\text{і } P_A(B) = P(B), \text{ коли } P(A) = 0.$$

Зауваження. Якщо $B = \Omega$, то $P_B(A) = P_\Omega(A) = \frac{P(A\Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$ і цю звичайну ймовірність $P(A) = P_\Omega(A)$ називають *безумовною*.

Для фіксованої події B умовна ймовірність $\mathrm{P}_B(A)$, $A \in S$, задовольняє всі основні властивості ймовірності 1_p—3_p. Тому ця умовна ймовірність задає нову ймовірнісну модель відповідного експерименту.

З означення умовних імовірностей випливає, що

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \qquad (3)$$

3.6.2. Ймовірність добутку подій

Правило 1. *Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події, за умови, що перша подія відбулася.*

Закінчимо тепер розв'язування нашої задачі. З рівності (3) отримуємо:

$P(H_1 \cdot A) = P(H_1)P_{H_1}(A)$, $P(H_2 \cdot A) = P(H_2)P_{H_2}(A)$.

З умови задачі випливає, що $P(H_1) = \frac{5}{20}$, $P(H_2) = \frac{15}{20}$.

Якщо відбулася подія H_1 — «Карлсон взяв (і з'їв) тістечко», то у мішечку залишилося 4 тістечка і 15 цукерок, а тому природно вважати, що шанси Малюка взяти тістечко — це $P_{H_1}(A) = \frac{4}{19}$. Аналогічно, $P_{H_2}(A) = \frac{5}{19}$. Тому

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) =$$
$$= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) =$$
$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{19} + \frac{15}{19}\right) = \frac{1}{4}.$$

За допомогою формули (3) індуктивно легко довести формули для обчислення ймовірності добутку трьох, чотирьох і взагалі довільної кількості подій. Для трьох подій *A*, *B* і *C* матимемо:

$$P(ABC) = P\big((AB)C\big) = P(AB)P_{AB}(C) =$$
$$= P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Для чотирьох подій:

$$P(ABCD) = P\big((ABC)D\big) = P(ABC)P_{ABC}(D) =$$
$$= P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D).$$

і т. д.

3.6.3. Незалежність подій

У зв'язку з правилом 1 і формулою (3) виникає запитання: коли $P(AB)=P(A)P(B)$?

Події A та B називаються незалежними, якщо

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (4)$$

В іншому випадку події *A* та *B* називають *залежними*.

Правило 2. *Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.*

Порівнюючи рівності (3) і (4), бачимо, що події A та B незалежні тоді і тільки тоді, коли

$$P_A(B) = P(B) \text{ або } P_B(A) = P(A).$$

При цьому виконання однієї рівності гарантує виконання іншої. У розглядуваній задачі $P_{H_1}(A) \neq P(A) \neq P_{H_2}(A)$. Тому події A і H_1, A і H_2 є залежними.

Легко бачити, що коли події A та B незалежні, то незалежними будуть також події $\bar{A}$ та B, A та $\bar{B}$, $\bar{A}$ та $\bar{B}$. Справді, якщо $P_B(A) = P(A)$, то, враховуючи властивості подій та ймовірностей, матимемо:

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P\big((\Omega - A)B\big)}{P(B)} = \frac{P(B - AB)}{P(B)} =$$
$$= \frac{P(B)-P(AB)}{P(B)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\bar{A}),$$

тобто події $\bar{A}$ та B незалежні. Таким чином, якщо події A та B незалежні, то

$$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B) \text{ і } P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) = P(A),$$

тобто, образно кажучи, «шанси відбування кожної з двох незалежних подій не залежать від того відбулася чи ні інша з цих двох подій».

3.6.4. Узагальнення поняття незалежності подій

Окрім попарної незалежності подій A_i , і = 1, 2, 3, …, n, можна ввести поняття незалежності в сукупності цих подій.

Три події A, B і C називаються незалежними, якщо будь-які дві з них незалежні і $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

Чотири події A, B, C і D називаються незалежними, якщо будь-які три з них незалежні і $P(ABCD) = P(A)P(B)P(C)P(D)$ і т. д.

Виявляється, що незалежність подій в сукупності гарантує їх попарну незалежність, проте не навпаки.

3.6.5. Формула повної ймовірності

Розв'язуючи задачу 3, ми застосували формулу

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A),$$

яка є частинним випадком так званої *формули повної ймовірності*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A), \qquad (5)$$

за умови, що події H_1, H_2, …, H_n *попарно несумісні і в сумі утворюють простір елементарних подій* Ω.

При цьому події H_1, H_2, …, H_n називають *гіпотезами*.

3.6.6. Формула Байєса

Внесемо у задачу про Карлсона і Малюка такі зміни: відомо, що Малюк взяв з мішечка тістечко. Яка ймовірність того, що перед цим Карлсон з'їв цукерку?

За такої умови відомо, що подія A «Малюк взяв тістечко» відбулася. Тепер необхідно визначити умовну ймовірність гіпотези H_2 за умови, що подія A відбулася. За формулою (2) маємо:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2A)}{P(A)}.$$

Застосувавши правило обчислення ймовірності добутку подій, матимемо:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}. \qquad (6)$$

Підставивши відповідні числові значення, одержуємо:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{19}}{\frac{1}{4}} = \frac{15}{19} \approx 0{,}79.$$

Як бачимо, умовна ймовірність того, що Карлсон з'їв цукерку перед тим, як Малюк взяв тістечко, є більшою у порівнянні з відповідною безумовною ймовірністю. Отже,

умовна ймовірність дозволяє аналізувати, за яких умов (у порівнянні з іншими) дана подія може відбуватися частіше. На практиці це дозволяє оцінювати ризики небажаних подій: за одних умов ці ризики менші, за інших — більші.

Рівність (6) є частинним випадком так званої *формули Байєса*:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)} = \frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{P(A)}, \qquad (7)$$

за умови, що $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *гіпотези і* $P(A) \neq 0$.

Формула (7) застосовується, коли необхідно визначити умовні ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, за умови, що подія A відбулася і порівняти їх з безумовними чи з іншими умовними ймовірностями.

3.7*. Повторні незалежні випробування з двома наслідками. Поняття про закон великих чисел

Розв'яжемо таку задачу.

Задача 4. Благодійну лотерею організовано так, що ймовірність виграшу за кожним придбаним білетом лотереї дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з чотирьох придбаних білетів два виявляться виграшними?

Розв'язання. Експеримент полягає в тому, що послідовно перевіряються 4 білети, тобто проводиться 4 повторних випробування, результат кожного з яких не залежить від результатів інших. Кожне випробування має два наслідки: білет виграв або білет не виграв. Ймовірність виграшу кожного разу одна й та сама. Будемо вважати ймовірнісну модель побудованою так, що серед подій є незалежні у сукупності події A_i — «i-й білет виграшний», $i = 1, 2, 3, 4$. Тоді серед подій буде і подія B — «серед чотирьох білетів два виграшних», причому

$$B = A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 + \\ + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4.$$

Враховуючи попарну несумісність доданків і незалежність співмножників, маємо:

$$P(B) = P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 + \\ + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4 = 6 \cdot (0{,}2)^2(1-0{,}2)^2 = 0{,}1536.$$

Відповідь. 0,1536.

Постає запитання: якщо у розглянутій задачі придбаних білетів буде 8 або 10, а знайти потрібно ймовірність того, 5 або 6 з них виявляться виграшними, то що зміниться у наведеному вище розв'язанні? Як можна узагальнити задачу 4?

3.7.1. Формула Бернуллі та біноміальні ймовірності

Щоб відповісти на поставлені запитання розглянемо подію A з деякого, вже побудованого ймовірнісного простору (Ω, S, P).

Як знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно m разів при проведенні n послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю $p \in (0; 1)$ або не відбутися з ймовірністю $1 - p$?

Побудуємо нову ймовірнісну модель $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$ так, щоб серед подій простору $\tilde{S}$ були події A_i — «подія A відбулася в i-му випробуванні», $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді серед подій буде і подія $B_{n,\,m}$ — «подія A відбулася m разів при проведенні n випробувань». При цьому $\tilde{P}(A_i) = p$, а незалежність випробувань означає незалежність подій A_i (стосовно ймовірності $\tilde{P}$).

Подію $B_{n,\,m}$ можна записати як суму добутків незалежних подій, кожен з яких складається з m подій A_i та з $n - m$ подій $\overline{A}_j$, де індекси i та j відповідають номеру випробування:

$$B_{n,m} = A_1A_2\ldots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2}\ldots\bar{A}_n + \\ + \bar{A}_1A_2\ldots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2}\ldots\bar{A}_{n-1}A_n + \ldots + \\ + \bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_{n-m}A_{n-m+1}A_{n-m+2}\ldots A_n.$$

Усіх доданків-добутків стільки, скільки можна з n елементів (випробувань) вибрати m елементів (випробувань, у

яких відбулася подія A). А саме їх — $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Для кожного доданку-добутку, враховуючи незалежність співмножників, маємо:

$$\tilde{P}(A_1A_2\dots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2}\dots\bar{A}_n) =$$
$$= \tilde{P}(\bar{A}_1A_2\dots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2}\dots\bar{A}_{n-1}A_n) = \dots =$$
$$= \tilde{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\dots\bar{A}_{n-m}A_{n-m+1}A_{n-m+2}\dots A_n) = p^m(1-p)^{n-m}.$$

Отже, $\tilde{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$. Знайдену ймовірність часто позначають $P_n(m)$ або $p_{n,m}$.

Таким чином,

ймовірність того, що подія A відбудеться рівно m разів при проведенні n незалежних випробувань позначається $P_n(m)$ або $p_{n,m}$ і обчислюється за формулою

$$P_n(m) = p_{n,m} = C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ m = 0,1,2,\dots n, \quad (1)$$

де $p \in (0;1)$ — ймовірність настання події A у кожному випробуванні.

Ця формула називається *формулою Бернуллі*, а *ймовірності* $P_n(m) = p_{n,m}$ називають *біноміальними*. Така назва обумовлена тим, що числа $P_n(m) = p_{n,m}$ є членами розкладу бінома $\big(p + (1-p)\big)^n$ за степенями p та $(1-p)$:

$$1 = \big(p + (1-p)\big)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m(1-p)^{n-m} =$$
$$= \textstyle\sum_{m=0}^{n} P_n(m). \qquad (2)$$

Про вищезгадані незалежні *випробування* кажуть, що вони *задовольняють схемі Бернуллі*.

Зауваження. Подія A пов'язана з однією ймовірнісною моделлю (Ω, S, P), а події A_i — «відбування події A в i-му випробуванні», $i = 1,2,\dots,n$, та $B_{n,m}$ — «відбування події A m разів при проведенні n випробувань» пов'язані зовсім з іншою імовірнісною моделлю $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$.

Приклад 18. Ймовірність відмови кожного приладу під час випробування дорівнює 0,4. Що ймовірніше: відмова двох приладів при випробуванні чотирьох чи відмова трьох приладів при випробуванні шести, якщо прилади випробуються незалежно один від одного.

Очевидно, що необхідно порівняти ймовірності $P_4(2)$ і $P_6(3)$ коли $p = 0{,}4$. За формулою Бернуллі матимемо:

$P_4(2) = \mathrm{C}_4^2 0{,}4^2(1-0{,}4)^2 = 6 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456,$

$P_6(3) = \mathrm{C}_6^3 0{,}4^3(1-0{,}4)^3 = 20 \cdot 0{,}064 \cdot 0{,}216 = 0{,}27648.$

Отже, ймовірнішою є відмова двох приладів при випробуванні чотирьох.

3.7.2. Деякі наслідки з формули Бернуллі

Розглянемо наступну задачу.

Задача 5. Імовірність виграшу за кожним придбаним білетом благодійної лотереї дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з шести придбаних білетів виявляться виграшними не менше двох і не більше чотирьох білетів?

Запитання задачі 5 є частинним випадком загального запитання.

Як знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менше m_1 *разів і не більше* m_2 *разів при проведенні n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю* $p \in (0;1)$ *або не відбутися з ймовірністю* $1 - p$*?*

Зрозуміло, що можна скористатися біноміальними ймовірностями, які дають змогу знайти ймовірності подій $B_{n,m}$ — «подія A відбулася m разів при проведенні n випробувань» для кожного $m = 0,1,2,\ldots,n$.

Нам потрібна ймовірність події B — «подія A відбулася не менше m_1 разів і не більше m_2 разів при проведенні n незалежних випробувань». Як пов'язана подія B з подіями

$B_{n,m}$? Зрозуміло, що B є сумою подій $B_{n,m}$, $m_1 \le m \le m_2$, які до того ж є попарно несумісними. Отже, $B = \sum_{m=m_1}^{m_2} B_{n,m}$.

Тому, застосовуючи властивість ймовірності суми попарно несумісних подій і формулу (1), матимемо відповідь на поставлене запитання:

$$\tilde{P}(B) = \tilde{P}\left(\sum_{m=m_1}^{m_2} B_{n,m}\right) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \tilde{P}\left(B_{n,m}\right) =$$
$$= \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Отримана відповідь дає змогу сформулювати такий наслідок.

Наслідок 1. *Імовірність того, що подія A при проведенні n незалежних випробувань відбудеться не менше m_1 разів і не більше m_2 разів позначається $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ і обчислюється за формулою*

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) =$$
$$= \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad (3)$$

де $p \in (0;1)$ — ймовірність настання події A у кожному випробуванні.

Зокрема, враховуючи (2)*, отримуємо*

$$P_n(0 \le m \le n) = 1.$$

Повернемося тепер до розв'язання задачі 5. За формулою (3) маємо:

$$P_6(2 \le m \le 4) = \sum_{m=4}^{4} P_6(m) = \sum_{m=2}^{4} C_6^m p^m (1-p)^{6-m} =$$
$$= \sum_{m=2}^{4} C_6^m (0{,}2)^m (1-0{,}2)^{6-m} = C_6^2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^4 +$$
$$+ C_6^3 (0{,}2)^3 (0{,}8)^3 + C_6^4 (0{,}2)^4 (0{,}8)^2 = 0{,}34304.$$

Зауваження. Формули (1) і (3) застосовуються у випадках, коли кількість незалежних випробувань *n* невелика. Для великих значень *n* таке застосування вимагає громіздких обчислень. У таких випадках застосовують інші ймовірнісні моделі.

Задача 6. Імовірність виграшу за кожним придбаним білетом благодійної лотереї дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з шести придбаних білетів хоча б один виявиться виграшним?

Знову спробуємо знайти відповідь на загальне запитання.

Як знайти ймовірність того, що подія A відбудеться хоча б один раз при проведенні n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю $p \in (0;1)$ *або не відбутися з ймовірністю* 1 *— p?*

Очевидно, що подія B, яка полягає у тому, що подія A відбудеться хоча б один раз при проведенні n незалежних випробувань є протилежною до події $\bar{B} = B_{n,0}$ — «подія A жодного разу не відбудеться при проведенні n незалежних випробувань». Тому за відомою властивістю ймовірності

$$\tilde{P}(B) = 1 - \tilde{P}(\bar{B}) = 1 - \tilde{P}\left(B_{n,0}\right) = 1 - P_n(0) =$$
$$= 1 - C_n^0 p^0 (1-p)^n = 1 - (1-p)^n.$$

Знайдену ймовірність позначають $P_n(m \geq 1)$. Отже, можемо сформулювати наступний наслідок з формули Бернуллі.

Наслідок 2. *Імовірність того, що подія A відбудеться хоча б один раз при проведенні n незалежних випробувань, позначається* $P_n(m \geq 1)$ *і обчислюється за формулою*

$$P_n(m \geq 1) = 1 - (1-p)^n, \qquad (4)$$

де $p \in (0;1)$ *— ймовірність настання події A у кожному випробуванні.*

Закінчимо тепер розв'язання задачі 6. За формулою (4) маємо:

$$P_6(m \geq 1) = 1 - (1-0{,}2)^6 = 1 - (0{,}8)^6 \approx 0{,}738$$

3.7.3. Найімовірніша кількість відбувань події А в серії незалежних випробувань

Задача 7. Імовірність виграшу за кожним придбаним білетом благодійної лотереї дорівнює 0,2. Куплено 10 білетів. Якою є найімовірніша кількість виграшних білетів серед куплених?

Запитання задачі 7 є частинним випадком загального запитання.

Як знайти найбільш імовірну кількість m відбувань події A при проведенні n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю $p \in (0;1)$ *або не відбутися з ймовірністю* $1 - p$*?* Інакше кажучи, при якому m_0 біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$ буде найбільшою серед усіх $P_n(m)$, $m = 0,1,\dots,n$?

Щоб знайти m_0, порівняємо числа $P_n(m)$ і $P_n(m-1)$. Для цього розглянемо їх різницю. Використовуючи формулу (1), матимемо:

$$P_n(m) - P_n(m-1) =$$
$$= C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1} =$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m (1-p)^{n-m} -$$
$$- \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \cdot p^{m-1} (1-p)^{n-m+1} =$$
$$= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot p^{m-1} (1-p)^{n-m} \left(\frac{p}{m} - \frac{1-p}{n-m+1} \right).$$

Звідси випливає, що $P_n(m) < P_n(m-1)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{p}{m} - \frac{1-p}{n-m+1} < 0.$$

Розв'язавши останню нерівність відносно m, матимемо:

$$m > (n+1)p.$$

Аналогічно одержуємо, що $P_n(m) > P_n(m-1)$ тоді і тільки тоді, коли

$$1 \le m < (n+1)p.$$

Таким чином, коли m зростає і залишається на проміжку $[1;(n+1)p)$, то $\mathrm{P}_n(m)$ також зростає, а коли m зростає і залишається на проміжку $((n+1)p;n]$, то $\mathrm{P}_n(m)$ спадає. Звідси випливає, що коли $(n+1)p$ не є цілим числом, то шуканий номер $m_0=[(n+1)p]$ — ціла частина $(n+1)p$. У випадку цілого $(n+1)p$ шуканий номер дорівнює або $(n+1)p$, або $(n+1)p-1$.

Отже, завжди $(n+1)p-1\le m_0\le(n+1)p$, тобто доведено наступний наслідок.

Наслідок 3. *Найімовірніше значення m_0 кількості відбувань події A при проведенні n незалежних випробувань обчислюється за формулою*

$$np-(1-p)\le m_0\le np+p, \qquad (5)$$

де $p\in(0;1)$ — ймовірність настання події A у кожному випробуванні.

Закінчимо розв'язання задачі 7. За формулою (5) маємо:

$10\cdot 0{,}2-(1-0{,}2)\le m_0\le 10\cdot 0{,}2+0{,}2,$

$1{,}2\le m_0\le 2{,}2.$

Оскільки число m_0 натуральне, то воно дорівнює 2.

Ми знаємо, що ймовірність події тісно пов'язана з її статистичною ймовірністю (часто вони навіть дорівнюють одна одній). Формула (1) допомагає розкрити цей зв'язок. Справді, число m у формулі (1) по суті є можливою абсолютною частотою відбування події A при проведенні n випробувань. Тому формулу (1) можна записати так:

$$P_n(m)=\tilde{P}\left(P_n^*(A)=\frac{m}{n}\right)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},$$

тобто, біноміальні ймовірності характеризують імовірності набуття статистичною ймовірністю кожного із своїх можливих значень $\frac{m}{n}$, $m=0,1,\dots,n$. Знайдене за формулою (5) число m_0 визначає найімовірніше значення $\frac{m_0}{n}$ серед усіх значень

статистичної ймовірності $P_n^*(A)$. Саме це значення заслуговує на те, щоб його вибрали для побудови ймовірнісної (статистичної) моделі (Ω, S, P_n^*). Щоб переконатися у цьому, перепишемо формулу (5) у такому вигляді:

$$p - \frac{1-p}{n} \le \frac{m_0}{n} \le p + \frac{p}{n}.$$

З цієї нерівності випливає такий висновок.

Серед усіх можливих значень $P_n^*(A)$ статистичної ймовірності події A найімовірнішим (стосовно ймовірностей $P_n(m)$)є значення $\frac{m_0}{n}$, яке при великих n мало відрізняється від імовірності $p = P(A)$ події A.

3.7.4. Поняття про закон великих чисел

Останнє твердження є найпростішою формою *закону великих чисел*. Уточнену форму цього закону також можна отримати за допомогою біноміальних імовірностей:

$$\tilde{P}(|P_n^*(A) - P(A)| \le \varepsilon) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \approx 1, \quad (6)$$

де $\varepsilon > 0$, а цілочисельний проміжок $\overline{m_1, m_2}$ складається з тих цілих чисел m, для яких $\left|\frac{m}{n} - p\right| = |P_n^*(A) - P(A)| \le \varepsilon$. При цьому, збільшуючи n, похибку наближення (6) можна зробити як завгодно малою. Зрозуміло, що всі числа m з проміжку $\overline{m_1, m_2}$ є досить близькими до найімовірнішого числа m_0.

Закон великих чисел у вигляді нерівності (6) стверджує, що *число p можна вважати ймовірністю P(A) події A лише тоді, коли для досить великої кількості n послідовних випробувань практично всі значення статистичної ймовірності $P^*(A)$ події A дуже мало відрізняються від цього числа p = P(A).*

Цей закон розкриває сутність адекватності ймовірнісної моделі (Ω, S, P).

Проілюструвати закон великих чисел можна на прикладі біноміальних ймовірностей, обчислених для випадку, коли n = 10, $P(A) = p = \frac{1}{2}$ (таблиця 26).

Таблиця 26

$\frac{m}{n}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1
$p_{n,m}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{105}{512}$	$\frac{63}{256}$	$\frac{105}{512}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{1}{1024}$

З цієї таблиці випливає, що

$$\tilde{P}(|P_n^*(A) - P(A)| \le 0{,}1) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = \\ = \frac{105}{512} + \frac{126}{512} + \frac{105}{512} \ge 0{,}656.$$

Закон великих чисел є основою для так званої індуктивної статистики, твердження якої допомагають за спостереженими значеннями певної ознаки у вибірці робити висновки для генеральної сукупності. Він підказує емпіричний спосіб визначення імовірності даної події:

1) задати число ε > 0 (наприклад ε = 0,1);

2) провести кілька (наприклад r) серій по n випробувань;

3) для кожної серії обчислити відповідну статистичну ймовірність події A;

4) вияснити, чи існує таке число $p \in [0; 1]$, в ε-околі якого лежать більшість із знайдених статистичних ймовірностей;

5) якщо таке p існує, вважати, що $P(A) = p$ з точністю до ε і перейти до пункту 7;

6) якщо такого числа p не існує, то, коли є можливість, перейти до пункту 2, збільшивши значення r і n, інакше вважати, що ймовірність $P(A)$ не знайдена;

7) закінчити пошук числа $P(A)$.

3.8*. Поняття про випадкові величини

3.8.1. Поняття дискретної випадкової величини та її розподілу

Розглянемо приклад. Експеримент полягає у двох підкиданнях однієї монети і фіксації пари зображень, що випали. Імовірнісну модель побудовано так, що простором елементарних подій є $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, а множини $\{ГГ\}$, $\{ГЦ\}$, $\{ЦГ\}$, $\{ЦЦ\}$ є подіями. Кожній елементарній події $e \in \Omega$ можемо поставити у відповідність число $X(e)$ — кількість цифр, що випали. Тоді елементарній події *ГГ* відповідає число 0, елементарним подіям *ГЦ* і *ЦГ* — 1, а *ЦЦ* — 2. Іншими словами, на множині Ω можна задати функцію $X(e)$, $e \in \Omega$, яка кожній елементарній події e ставить у відповідність певне число.

Постає запитання: чи можна в рамках імовірнісної моделі (Ω, S, P) знайти ймовірність того, що функція $X(e)$, набуде довільного фіксованого значення a? Для відповіді на це запитання потрібно розглянути множину розв'язків рівняння $X(e) = a$, де a — відоме значення, а елемент e — невідомий. Зрозуміло, що коли $a = 0$, то цією множиною є множина $\{ГГ\}$, коли $a = 1$, то — $\{ГЦ, ЦГ\}$, коли $a = 2$, то — $\{ЦЦ\}$, коли a відмінне від 0, 1 і 2, то шукана множина є порожньою. Отже, для знаходження потрібних ймовірностей необхідно, щоб множини розв'язків рівняння були подіями. Інакше потрібні ймовірності знайти неможливо.

Оскільки імовірнісну модель (Ω, S, P) побудовано так, що ймовірності подій $\{ГГ\}$, $\{ГЦ, ЦГ\}$, $\{ЦЦ\}$ відомі, тому можна знайти ймовірність того, що функція $X(e)$, $e \in \Omega$, набуде довільного фіксованого значення:

$$P(\{e \in \Omega: X(e) = 0\}) = P(\{ГГ\}) = p_0 = \frac{1}{4},$$

$$P(\{e \in \Omega: X(e) = 1\}) = P(\{ГЦ, ЦГ\}) = p_1 = \frac{1}{2},$$

$$P(\{e \in \Omega: X(e) = 2\}) = P(\{ЦЦ\}) = p_2 = \frac{1}{4}.$$

Нехай задано імовірнісний простір (Ω, S, P).

Означення. *Числову функцію $X = X(e)$, визначену на просторі елементарних подій Ω, називають дискретною випадковою величиною, якщо*:

1) *множина значень цієї функції $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ є дискретною;*

2) *для кожного значення a множина розв'язків рівняння $X(e) = a$ є подією.*

Дискретну випадкову величину називають простою, якщо множина її значень скінченна.

Прикладами дискретних випадкових величин, що набувають різних числових значень під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:

а) кількість очок, яка випадає на верхній грані за одне кидання грального кубика;

б) кількість бракованих виробів серед n навмання вибраних;

в) кількість кидань монети до першої появи герба;

г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом деякого проміжку часу.

Дискретна випадкова величина $X = X(e)$, $e \in \Omega$, вважається визначеною, коли відомі всі її значення $x_1, x_2, \ldots$ і відповідні їм імовірності $p_1, p_2, \ldots$. При цьому обов'язково всі числа $p_i \geq 0$ і $\Sigma\, p_i = 1$.

Відповідність між можливими значеннями дискретної випадкової величини та їх ймовірностями називають *дискретним розподілом імовірностей на множині значень даної випадкової величини.*

Для простої випадкової величини з множиною значень $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *де* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ відповідний розподіл ймовірностей можна задати таблицею, яку називають *рядом розподілу імовірностей* на множині значень випадкової величини (таблиця 27).

Таблиця 27

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P_X(x_i) = p_i$	p_1	p_2		p_n

Тут $p_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і $\Sigma\, p_i = 1$

Якщо на координатній площині на осі Ox позначити значення x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ простої випадкової величини X, на осі Oy — відповідні ймовірності p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, а точки з координатами (x_i, p_i) сполучити відрізками, то утвориться ламана, яку називають *полігоном імовірностей* або *многокутником розподілу ймовірностей* (рис.

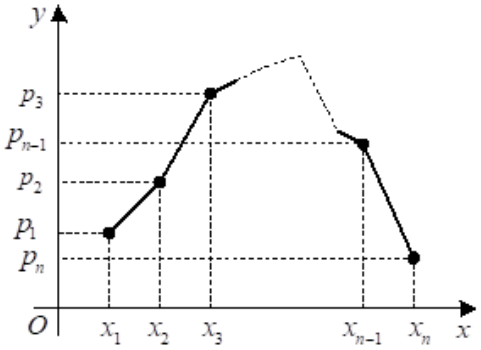


Рис. 38

3.8.2. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Розглянемо наступний приклад. Нехай імовірності вибивання певного числа очок при стрільбі двома спортсменами мають такі ряди розподілу (таблиця 28).

Таблиця 28

x_i	8	9	10
$P(x_i)$	0,4	0,1	0,5

y_i	8	9	10
$P(y_i)$	0,1	0,6	0,3

Який зі спортсменів стріляє краще?

Лише за зовнішнім виглядом рядів розподілу на це запитання важко відповісти. Потрібні інші числові характеристики, які б дали змогу оцінити якість стрільби спортсменів. Деякими числовими характеристиками ряду розподілу ймовірностей є математичне сподівання і дисперсія.

Математичним сподіванням *(середнім значенням, центром розсіювання) випадкової величини X називають суму добутків її значень на відповідні ймовірності:*

$$MX = \Sigma x_i P(x_i)$$

Дисперсією *(розсіюванням) дискретного розподілу ймовірностей називають число:*

$$DX = \Sigma(x_i - MX)^2 P(x_i)$$

Поняття математичного сподівання було введено в науку у XVII ст. під назвою “справедлива ціна шансу”. Це поняття широко застосовується в економіці для визначення середніх витрат, середнього прибутку, середніх цін тощо.

Математичне сподівання (середнє значення, центр розсіювання) це число, яке характеризує значення, навколо якого зосереджуються спостережені значення, причому, воно може бути нерівним жодному з спостережених значень.

Дисперсія (розсіювання) характеризує скупченість (розсіювання) спостережуваних значень навколо середнього значення (центра розсіювання). Чим менша дисперсія, тим точнішим, вірогіднішим, надійнішим є середнє значення при достатньо великій кількості спостережень.

Повернемося до прикладу.

x_i	8	9	10
$P(x_i)$	0,4	0,1	0,5

y_i	8	9	10
$P(y_i)$	0,1	0,6	0,3

Для першого спортсмена

$MX = 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5 = 9{,}1,$

$DX = (8 - 9{,}1)^2 \cdot 0{,}4 + (9 - 9{,}1)^2 \cdot 0{,}1 +.$

Для другого спортсмена

$MY = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}3 = 9{,}2,$

$DY = (8 - 9{,}2)^2 \cdot 0{,}1 + (9 - 9{,}2)^2 \cdot 0{,}6 + (10 - 9{,}2)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}36.$

То якого висновку можна дійти щодо якості стрільби спортсменів? (Дайте відповідь самостійно.)

Властивості математичного сподівання

Математичне сподівання сталої *c* дорівнює самій сталій:

$$\boldsymbol{Mc = c}$$

Математичне сподівання добутку випадкової величини на довільну сталу дорівнює добутку сталої на математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$\boldsymbol{M(cX) = cMX}$$

Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$\boldsymbol{M(X + Y) = MX + MУ}$$

Для вище розглянутого прикладу знайдемо:

1) скільки в середньому очок отримає перший спортсмен, якщо виконає 5 пострілів;

2) на яку середню кількість очок можна сподіватися, якщо перший спортсмен зробить 3 постріли, а другий – 4.

Застосовуючи властивості математичного сподівання матимемо:

1) $M(5X) = 5 \cdot MX = 5 \cdot 9{,}1 = 45{,}5$;

2) $M(3X + 4Y) = 3 \cdot MX + 4 \cdot MY = 3 \cdot 9{,}1 + 4 \cdot 9{,}2 = 64{,}1$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Для даного експерименту записати простір Ω елементарних подій:

1) підкидання один раз одночасно двох однакових монеток і фіксація зображень, що випали;

2) підкидання однієї монетки двічі і фіксація пари зображень, що випали;

3) витягування карти з повної колоди і фіксація масті;

4) розміщення трьох однакових предметів на двох різних поличках.

2. На десяти картках написано числа від 1 до 10. Навмання беруть одну картку і фіксують записане на ній число. У яких з наступних відповідей вказано всі можливі наслідки випробувань:

а) {парне, непарне}; б) {просте, складене};

в) {парне, 1, 3, 5}; г) {не більше 3, не менше 4}?

3. На протилежних гранях кубика позначено цифри 1, 2, 3. Експеримент полягає у підкиданні один раз цього кубика і фіксації числа, що випало на верхній грані. Записати простір Ω елементарних подій і всі його можливі підмножини.

4. З'ясуйте, які з наступних подій можна вважати вірогідними; неможливими:

а) виграш за одним купленим білетом лотереї;

б) виймання з ящика зеленої кульки, якщо в ньому є тільки 3 червоних і 5 синіх кульок;

в) виймання з ящика кольорової кульки, якщо в ньому є 3 червоних і 5 синіх кульок;

г) виймання з ящика червоної кульки, якщо в ньому є 3 червоних і 5 синіх кульок;

5. Два гральних кубики підкидають один раз і фіксують суму очок, які при цьому випали. Назвати елементарні події, які сприяють даним подіям:

1) сума очок менша за 2;

2) сума очок є парним числом;

3) сума очок є непарним числом;

4) сума очок кратна 4;

5) сума очок більша за 1;

6) сума очок є простим числом;

7) сума очок ділиться на 2;

8) сума очок є складеним числом.

6. Які з подій завдання 5 є вірогідними? неможливими? Які з подій спричинюють одна іншу? Які є рівними? Відповідь обґрунтувати.

7. Указати загальну кількість елементарних подій даного експерименту і кількість елементарних подій, які сприяють даній події:

1) навмання називають натуральне двоцифрове число; подія A – назване число ділиться на 5;

2) навмання беруть і фіксують букву з розрізної абетки; подія C – взята буква називається одним голосним звуком;

3) картки з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 перемішують, розкладають у ряд і фіксують утворене число; подія A – утворилося парне число; подія B – утворилося число кратне 3; подія C – утворилося число кратне 9;

4) з карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5 навмання вибирають три картки, розкладають їх у ряд і фіксують утворене число; подія A – утворилося непарне число; подія B – утворилося число кратне 3; подія C – утворилося число кратне 9;

5) у класі навчається 17 дівчат і 13 хлопців; на чергування у їдальню навмання обирають 4-х учнів; подія A – на чергування потраплять тільки хлопці; подія B – на чергування потраплять тільки дівчата; подія C – на чергування потраплять два хлопці і дві дівчини; подія D – на чергування потраплять не більше двох дівчат.

8. Довести рівності:

1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A \cdot B = B \cdot A$; 4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

5) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

9. Чому дорівнюють $\Omega + A$, $\Omega + \overline{A}$, $\Omega + \varnothing$, $A + \overline{A}$, $A + \varnothing$,

$\Omega \cdot A$, $\Omega \cdot \overline{A}$, $\Omega \cdot \varnothing$, $A \cdot \overline{A}$, $A \cdot \varnothing$? Відповідь обґрунтувати.

10. Кидають гральний кубик. Визначити, які з наступних пар подій несумісні:

а) випало парне число очок; випало непарне число очок;

б) випало непарне число очок; випало число очок кратне 3;

в) випало просте число очок; випало парне число очок;

г) випало просте число очок; випало складене число очок?

11. Виконують два постріли у мішень і фіксують результати. Подія A — «влучення у мішень за першим пострілом», подія B — «влучення у мішень за другим пострілом».

1. Побудувати простір елементарних подій Ω і визначити, з яких елементарних подій складаються події A та B.

2. Визначити, у чому полягають події:

1) $\overline{A}$; 2) $\overline{B}$; 3) $A + B$; 4) $A \cdot B$;
5) $\overline{A} \cdot B$; 6) $A \cdot \overline{B}$; 7) $\overline{A} + \overline{B}$; 8) $\overline{A} \cdot \overline{B}$;
9) $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$?

3. Побудувати найвужчий простір подій S, що містить події A та B.

12. Робітник виготовив три деталі. Події A_1, A_2 і A_3 означають наявність дефекту відповідно у першої, другої і третьої деталей. Записати подію, яка полягає в тому, що:

1) усі деталі браковані;

2)жодна з деталей не має дефекту;

3) тільки одна деталь має дефект;

4) тільки дві деталі мають дефект;

5) хоча б одна деталь має дефект.

13. Гральний кубик підкидається один раз, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Яка з утворених сукупностей множин може бути простором подій S:

1) $\{\Omega, \{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\}\}$;

2) $\{\Omega, \varnothing, \{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{6\}\}$;

3) $\{\Omega, \varnothing, \{1, 3,\}, \{2, 4, 5, 6\}\}$;

4) {Ω, ∅, {1}, {6}, {1, 6}, {2, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5} };

14. Результати ста підкидань грального кубика зафіксовано в табл. 29.

Таблиця 29

Число очок	1	2	3	4	5	6
Кількість випадань	15	15	19	16	17	18

Визначити статистичну ймовірність відбування таких подій:

1) випало парне числа очок;

2) випало непарного числа очок;

3) випало числа очок, яке кратне 7;

4) випало числа очок, що менше за 7

5) випало числа очок кратного 2 або 3.

15. Проводиться серія випробувань з підкиданням грального кубика. Після кожного підкидання обчислюється статистична ймовірність події «випало парне число». Які з наступних послідовностей чисел можна при цьому одержати:

1) 1; 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$, …; 2) 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$, …;

3) 0; 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$, …; 4) 0; 0; 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; …?

16. При перевірці 1000 довільно вибраних деталей виявлено 4 браковані. Як можна наближено знайти кількість бракованих деталей у партії з 2400 штук?

17. По мішені зроблено 40 пострілів. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,85. Знайдіть кількість влучень у мішень.

18. Для перевірки якості було досліджено 200 деталей, серед яких 5 виявилися бракованими.

1) Знайти статистичну ймовірність того, що навмання взята деталь буде якісною; бракованою.

2) Побудувати статистичну модель відповідного стохастичного експерименту.

3) Скільки бракованих деталей виявиться в середньому в партії із 1500 деталей?

19. Які з чисел 0,5, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $-\frac{1}{9}$, $\frac{e}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ не можуть бути значеннями ймовірності деякої події?

20. Ймовірність виграти в деякій лотереї дорівнює 0,01. Яка ймовірність не виграти в цій лотереї?

21. Для певної особи ймовірність виграшу в шаховій партії проти комп'ютерної шахової програми дорівнює 0,05. Чи можна сказати, що ймовірність програшу дорівнює 0.95?

22. Порівняйте ймовірності подій A – «стрілець вибив 10 очок» і B – «стрілець вибив не менше 8 очок».

23. Нехай $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{3}$. Чи сумісні події A і B?

24. Нехай $P(AB)=\frac{1}{4}, P(\bar{A})=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{2}$.
Знайти $P(A+B)$.

25. У скарбничці є 200 монет, серед яких 25 монет 1992 року випуску. Яка ймовірність того, що навмання вибрана монета датована 1992 роком?

26. На донорський пункт прийшли 12 осіб, серед яких 5 мають першу групу крові, 3 – другу і останні – третю. Яка ймовірність того, що навмання вибрана з них людина має третю групу крові?

27. В круг радіуса R вміщено круг радіуса $\frac{R}{2}$. Яка ймовірність того, що навмання взята точка першого круга належати даному кругу радіуса $\frac{R}{2}$?

28. Взято прямокутний паралелепіпед з ребрами, довжини яких 5, 8 і 10 см. В середині нього розміщений куб з ребром 2 см і правильний тетраедр з ребром 3 см, який не має з кубом спільних точок. Що ймовірніше: довільним чином взята точка в середині цього паралелепіпеда опиниться в середині куба чи в середині тетраедра?

29. Власник банківської картки забув останні дві цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть

імовірність того, що з першої спроби він отримає доступ до системи.

30. У шаховому турнірі беруть участь 20 гравців, яких жеребкуванням ділять на дві команди по 10 гравців. Яка ймовірність того, що два найсильніших гравці гратимуть у різних командах?

31. Двоє учнів домовилися зустрітися у певному місці між 12 і 13 год. Той, хто прийде першим, чекатиме на другого не більше 15 хв., після чого залишить місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

32. Відділ контролю за якістю фабрики з пошиття верхнього одягу бракує готовий товар при виявленні пошкодження тканини або дефектів швацьких робіт. Імовірність пошкодження тканини дорівнює 0,05, дефекти шиття складають 9%, вироби з пошкодженням тканини і дефектами шиття – 0,45%. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб буде: а) відбракований; б) якісний?

33. З 33 карток з буквами українського алфавіту беруть навмання 5 карток. Яка імовірність того, що з п’яти букв у порядку вибору карток можна скласти слово «хвиля»?

34. У екзаменаційному білеті вступного іспиту з математики дві задачі: з алгебри і геометрії. Імовірність того, що навмання вибраний абітурієнт розв’яже задачу з алгебри дорівнює 0,7, з геометрії — 0,4. Яка імовірність того, що цей абітурієнт розв’яже обидві задачі?

35. До екзамену з фізики було запропоновано 34 білети. Учень вивчив 30 білетів. На екзамені дозволяється один раз «перетягнути» білет. Яка ймовірність того, що учень складе екзамен:

1) узявши один білет;

2) узявши два білети?

Який ризик не скласти екзамен?

36. Банк проводить дві фінансові операції для досягнення однієї і тієї самої мети, які мають ймовірності успіху 0,8 і 0,4 відповідно. Яка ймовірність досягнення мети?

37. В умовах попередньої задачі, після встановлення факту досягнення мети необхідно визначити, які ймовірності того, що успіх відбувся в результаті проведення:

а) саме першої операції;

б) саме другої операції?

38. У шкільній столовій після перерви залишилося 12 пиріжків з яблуками і 8 пиріжків з капустою, які поклали на одну тарілку. Тарас і Олена, які залишилися чергувати у столовій, вирішили взяти по пиріжку. Яка ймовірність того, що спочатку Тарас взяв пиріжок з яблуками, а потім Олена — з капустою, якщо вони брали пиріжки навмання?

39. У магазині мобільного зв'язку є стартові пакети операторів МТС, КИЇВСТАР і LIFE:) у кількості 20, 30 і 50 штук відповідно. Ймовірності покупки потенціальними покупцями цих стартових пакетів дорівнюють 0,7, 0,8 і 0,9 відповідно. До магазину заходить покупець. Яка ймовірність того, що він купить якійсь навмання вибраний стартовий пакет?

40. В умову попередньої задачі внесено такі зміни: відомо, що покупець придбав стартовий пакет. Яка ймовірність того, що це був пакет мобільного оператора LIFE:)?

41. Двоє друзів A і B, які відпочивають на канікулах далеко за межами рідного міста, надсилають SMS третьому другу C незалежно один від одного. Кожний з них надіслав по дві різні SMS. Ймовірність прийому другом C кожної SMS від A дорівнює 0,8, а від B – 0,6 і не залежить від прийому будь-яких інших повідомлень.

Знайти ймовірність того, що друг C прочитає:

а) дві SMS; б) три SMS; в) чотири SMS;

г) хоча б одну SMS; д) не менше від двох SMS.

42. Ймовірність отримати високий прибуток у деякій комерційній операції дорівнює 30%. Скільки треба провести таких операцій, щоб отримати цей прибуток з ймовірністю 90%?

43. У Києві є чотири університети, в яких можна здобути кваліфікацію вчителя математики. Для певного абітурієнта ймовірність вступу до кожного з них дорівнюють 0,4, 0,6, 0,7 і 0,8 відповідно. Абітурієнт подає документи до навмання вибраного одного з цих університетів. Яка ймовірність того, що він стане студентом?

44. Знайти найменшу кількість монет, які треба підкинути, щоб імовірність того, що випаде хоча б один «герб», перевищувала 0,999.

45. Ілля Муромець зупинився перед каменем на роздоріжжі трьох доріг. Напис на камені був такий: «Поїдеш наліво — загинеш з ймовірністю 0,5; направо — з ймовірністю 0,7; прямо — з ймовірністю 0,6. Підкинь монету двічі: випаде два герба — їдь наліво, дві цифри — направо, а якщо герб і цифра — прямо». Яка ймовірність того, що дочекаються Іллю його друзі — Добриня та Альоша?

46. Добриня і Альоша дочекалися свого друга. Знайти ймовірність того, що Іллі, як справжньому герою, випала найважча доля поїхати направо.

47. Перевірка знань учнів проводиться за допомогою тесту. Для отримання 7 балів необхідно дати правильну відповідь на 60% завдань. У тесті 10 завдань і для кожного з них є два варіанти відповіді, один з яких правильний. Яка ймовірність отримання 7 балів при простому відгадуванні правильної відповіді? А якщо варіантів відповіді буде чотири? Обчислення виконати з точністю до тисячних.

48. Та сама перевірка знань (задача 47). Для отримання неменше 7 балів необхідно дати правильну відповідь на неменше ніж на 60% завдань. У тесті 10 завдань і для кожного з них є два варіанти відповіді, один з яких правильний. Яка ймовірність отримання неменше 7 балів при простому відгадуванні правильної відповіді? А якщо варіантів відповіді буде чотири? Обчислення виконати з точністю до тисячних.

49. Та сама перевірка знань (задача 47). Щоб отримати хоча б один бал треба відповісти правильно хоча б на одне

завдання. У тесті 10 завдань і для кожного з них є два варіанти відповіді, один з яких правильний. Яка ймовірність отримання хоча б один бал при простому відгадуванні правильної відповіді? А якщо варіантів відповіді буде чотири? Обчислення виконати з точністю до тисячних.

50. Та сама перевірка знань (задача 47). Якою буде найімовірніша кількість вгаданих правильних відповідей, якщо у тесті 10 завдань і для кожного з них є два варіанти відповіді, один з яких правильний. А якщо варіантів відповіді буде чотири?

51. Для певного баскетболіста ймовірність влучити м'ячем в корзину дорівнює 0,8 для кожного кидка. Визначити:

1) ймовірність того, що виконуючи серію з 6 кидків, цей баскетболіст влучить у корзину 4 рази?

2) кількість кидків, яку йому слід виконати, щоб найімовірніша кількість влучень у корзину дорівнювала 6.

52. Актовий зал школи прикрасили сімома гірляндами, увімкнення кожної з яких не залежить від увімкнення інших. Ймовірність безвідмовної роботи кожної гірлянди протягом певного часу t дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що за цей час t :

1) не більше трьох гірлянд вийдуть з ладу?

2) безвідмовно працюватиме принаймні одна гірлянда?

53. Розподіл ймовірностей на множині значень деякої випадкової величини X задано таблицею 30.

Таблиця 30

x_i	0	1	2	3
p_i	0,6	?	0,15	0,05

Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення $x_2 = 1$.

54. Круглу мішень, що швидко обертається навколо осі, поділено на 7 рівних секторів, які пофарбовано у кольори веселки — червоний, помаранчевий, жовтий, зелений, блакитний, синій та фіолетовий. Той, хто влучає у червоний

сектор отримує 1 очко, у помаранчевий — 2 очки, …, у фіолетовий — 7 очок. Вважається, що промах неможливий. Побудувати відповідний ряд розподілу ймовірностей випадкової величини X — «кількість отриманих очок при виконанні одного пострілу».

55. З практики відомо, що найчастіше лампочки згорають при включенні. У світильнику три лампочки. Ймовірність перегоріти при включенні світильника для кожної лампочки дорівнює 0,2.

1) Побудувати відповідний ряд розподілу ймовірностей випадкової величини X — «кількість лампочок, які можуть перегоріти при включенні світильника».

2) Побудувати відповідний полігон ймовірностей.

56. Два стрільці виконують по одному пострілу в мішень. Ймовірність влучення для першого 0,5, для другого — 0,4. Побудувати ряд розподілу ймовірностей для випадкової величини X — кількості влучень у мішень і відповідний полігон.

57. Для миттєвої лотереї випущено 1000 білетів. Серед них 1 виграє 100 грн., 5 – 20 грн., 10 – 10 грн. і 100 білетів – 1 грн. Побудувати ряд розподілу ймовірностей випадкової величини X — «сума виграшу при купівлі одного білету лотереї».

58. Кругова мішень поділена на три однакові сектори. Вона встановлена так, що може обертатися навколо горизонтальної осі. При досить великій кутовій швидкості обертання стрілець не може бачити цифри, вписані в сектори. Тому він стріляє навмання. При будь-якому пострілі стрілець влучає в мішень. При влучанні в сектор 1 він виграє 5 грн., у сектор 2 – 10 грн., у сектор 3 – 20 грн. За можливість зробити один постріл стрілець платить 15 грн. Складіть ряд розподілу випадкової величини виграшу стрільця при:

а) одному пострілі; б) двох пострілах.

Чи вигідно брати участь у такій грі?

59. Їдучи вулицею автомобіль зустріне 4 світлофори, кожен з яких пропустить його з ймовірністю 0,5. Знайти

математичне сподівання числа зупинок машини під світлофором.

60. Нехай випущено 10000 білетів грошової лотереї, в якій розігруються 2 виграші по 500 грн., 8 – по 100 грн., 170 – по 10 грн., 350 – по 5 грн. і 750 виграшів – по 1 грн. Знайдіть "справедливу" ціну одного білета.

61. Імовірності влучання м'ячем у ворота при одному ударі для двох футболістів відповідно дорівнюють 0,7 і 0.8. Знайти середнє число влучень, якщо футболісти зробили: а) по одному удару; б) по 10 ударів.

62. Випадкові величини виграшу у двох лотереях, мають відповідно ряди розподілу а та б:

x_i	0	10	50	100
$P(x_i)$	0,9	0,06	0,03	0,01

а)

y_i	0	10	50	100
$P(y_i)$	0,85	0,12	0,02	0,01

б)

1) Якій з лотерей ви б віддали перевагу?

2) Знайдіть середній виграш для власника 10 білетів у першій лотереї.

3) Який середній виграш може мати особа, яка придбає два білети першої лотереї і три білети другої?

Відповіді та вказівки до розв'язування

1. 1) Ω = { *гг, цц, гц*}; 2) Ω = { *гг, цц, гц, цг*}; 3) Ω = {♣, ♦, ♥, ♠}; 4) Позначимо предмет розміщений на першій поличці – a_1, на другій – a_2. Тоді $\Omega = \{a_1a_1a_1, a_2a_2a_2, a_1a_1a_2, a_1a_2a_2\}$.

2. У результаті випробування може з'явитися будь-яке з чисел від 1 до 10, тому у випадках а) і г) описані всі можливі наслідки. У випадку б) не враховано появу числа 1, у випадку в) – чисел 7 і 9.

3. Для даного експерименту $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Підмножини простору Ω: {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, $\varnothing$, Ω.

4. Події: б) – неможлива, в) – вірогідна.

5. 1) Таких елементарних подій немає;

2) 2, 4, 6, 8, 10, 12;

3) 3, 5, 7, 9, 11;
4) 4, 8, 12;
5) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;
6) 2, 3, 5, 7, 11;
7) 2, 4, 6, 8, 10, 12;
8) 4, 6, 8, 9, 10, 12.

7. 1) 90 і 18; 2) 33 і 6 (це букви *а, о, у, и, і, е*);

3) усього $P_5 = 5! = 120$ елементарних подій. Події A сприяє поява числа, яке закінчується парною цифрою. Таких можна утворити $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ чисел. Отже, події A сприяє 48 елементарних подій; події B сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на три. Очевидно, що 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Тобто, будь-яке утворене число буде кратне 3. Отже, події B сприяють всі елементарні події даного експерименту; події C сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Оскільки ця сума дорівнює 15, то жодне утворене число не буде кратне 9. Отже, події C сприяють 0 елементарних події;

4) усього $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ елементарних подій. Події A сприяє поява числа, яке закінчується непарною цифрою. Таких можна утворити $3 \cdot A_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ чисел. Отже, події A сприяє 36 елементарних подій; події B сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на три. Серед даних цифр виберемо всі трійки таких, щоб їх сума ділилася на 3: 1, 2, 3, або 1, 3, 5, або 2, 3, 4, або 3, 4, 5. З кожної такої трійки цифр можна утворити $P_3 = 3! = 6$чисел, а всього чисел, які діляться на 3, буде $4 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$. Отже, події B сприяє 24 елементарні події; події C сприяє поява числа, сума цифр якого ділиться на 9. Для утворення таких чисел можна використати трійки цифр 1, 3, 5 або 2, 3, 4. Отже, для події C кількість елементарних подій, які їй сприяють, дорівнює $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 = 12$;

5) всього $C_{30}^4 = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = 27405$елементарних подій. Оскільки хлопців 13 і 4-х з них можна вибрати C_{13}^4 способами, то події A сприяє $C_{13}^4 = \frac{13!}{4! \cdot 9!} = 715$ елементарних подій; оскільки дівчат 17 і 4-х з них можна вибрати C_{17}^4 способами, то

події B сприяє $C_{17}^4 = \frac{17!}{4!\cdot 13!} = 2380$ елементарних подій; 2-х хлопців з 13 можна вибрати C_{13}^2 способами, 2-х дівчат з 17 — C_{17}^2 способами. Використовуючи комбінаторне правило множення отримуємо $C_{13}^2 \cdot C_{17}^2$варіантів вибору 2-х хлопців і 2-х дівчат для чергування. Отже, події C сприяє $C_{13}^2 \cdot C_{17}^2 = \frac{13!}{2!\cdot 11!} \cdot \frac{17!}{2!\cdot 15!} = 10608$ елементарних подій; для того, щоб відбулася подія D у групі чергових може не бути дівчат зовсім, або бути одна дівчина, або бути дві дівчини. Тобто, події D сприяє $C_{13}^4 + 17 \cdot C_{13}^3 + C_{13}^2 C_{17}^2 = 715 + 17 \cdot \frac{13!}{3!\cdot 10!} + 10608 = 16185$ елементарних подій.

8. Доведення спирається на означення суми та добутку подій. Можна використати графічну ілюстрацію.

10. а) і г) – пари несумісних подій; б) і в) – пари сумісних подій, тобто таких, що не є несумісними.

11. 1. $\Omega = \{вв, вп, пв, пп\}$, де *в* (*п*) – влучення (промах). Тоді $A = \{вв, вп\}$, $B = \{вв, пв,\}$,

2. 1) за першим пострілом у мішень не влучено; 2) за другим пострілом у мішень не влучено; 3) у мішені є хоча б одне влучення; 4) у мішень влучили двічі; 5) у мішень влучено тільки другий раз; 6) у мішень влучено тільки перший раз; 7) у мішень принаймні один раз не влучили; 8) жодного влучання; 9) тільки одне влучання.

3. $S = \{\Omega, \varnothing, \{вв, вп\}, \{вв, пв,\}, \{пв, пп\}, \{вп, пп\}, \{вв, вп, пв\}, \{пп\}, \{вв, вп, пп\}, \{пв\}, \{вв, пв, пп\}, \{вп\}, \{вп, пв\}, \{вв, пп\}, \{вп, пв, пп\}, \{вв\}\}$.

12. 1) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2)$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$;

3) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$;

4) $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$;

5) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, або $A_1 + A_2 + A_3$, або $\overline{\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3}$;

13. 3) і 4).

14. 1) 0,49; 2) 0,51; 3) 0; 4) 1; 5) 0,68.

15. 1), 2) і 4). Наприклад, послідовність 4) може утворитися коли при першому, другому, третьому підкиданнях парні числа не випадали, при четвертому випало парне число, при п'ятому – ні, при шостому – так.

16. 10. Нехай подія A – навмання витягнута деталь є бракованою. Тоді її статистична ймовірність $P_n^*(A) = P_{1000}^*(A) = \frac{4}{1000} = 0{,}004$. Вважаємо, що ця величина характеризує середню можливість бути бракованою кожної з 2400 деталей. З іншого боку, якщо серед 2400 деталей є x бракованих, то така середня можливість дорівнює $\frac{x}{2400}$. Тому можна вважати, що $\frac{x}{2400} \approx 0{,}004$. Отже $x \approx 10$.

17. 34.

18. 38. Нехай подія $A = \{\text{я}\}$ – взята навмання деталь є якісною, а подія $B = \bar{A} = \{\text{б}\}$– взята навмання деталь є бракованою. Тоді $P_n^*(A) = P_{200}^*(A) = \frac{200-5}{200} = 0{,}975$, а $P_{200}^*(\bar{A}) = P_{200}^*(\{\text{б}\}) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$. Вважаємо $\Omega = \{\text{я}, \text{б}\}$, $A = \{\text{я}\}$та $B = \{\text{б}\}$ – події, причому $P_n^*(A) = 0{,}975$, $P_n^*(B) = 0{,}025$. Цим самим побудовано статистичну модель даного експерименту. Якщо серед 1500 деталей є x бракованих, то в рамках побудованої моделі можна вважати, що $\frac{x}{1500} \approx 0{,}025$. Отже $x \approx 38$.

19. $-\frac{1}{9}$, $\frac{e}{2}$, $\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Ймовірність події завжди невід'ємна і не більша за 1.

20. 0,99. Ймовірність події протилежної даній дорівнює різниці між 1 і ймовірністю даної події

21. Ні. Програш у шаховій партії не є подією протилежною до виграшу. Існує ще нічия.

22. $P(B) \geq P(A)$, в силу властивості 7, враховуючи, що подія A спричинює подію B.

23. Припустимо, що дані події з одного простору подій і є несумісними. Тоді $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$,

чого бути не може. Отже припущення неправильне, і дані події є сумісними. Якщо події A та B з різних просторів подій, то порівнювати їх взагалі не можна.

24. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Оскільки $P(AB) \neq 0$, то події A і B сумісні, і

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}.$$

25. $\frac{1}{8}$. Експеримент полягає у вийманні зі скарбнички навмання однієї монети і фіксації її року випуску. При цьому вважатимемо, що жодна монета не має переваги над іншими бути вибраною. Тому наслідки експерименту вважаємо рівноможливими. Цим самим імовірнісну модель побудовано. Подія A – "вийнята монета 1992 року". Всього наслідків експерименту 200. Події A сприяють 25 наслідків, тому $P(A) = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$.

26. $\frac{1}{3}$.

27. $\frac{1}{4}$. Простір Ω – множина точок круга радіуса R. Подіями доцільно вважати частини круга, що мають площу. Подія A – «вибрана точка належить даному кругу радіуса $\frac{R}{2}$». Знайдемо площі кругів: $S(\Omega) = \pi R^2$, $S(A) = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \frac{R^2}{4}$.

Тоді за геометричною схемою обчислення ймовірності $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

28. Подія A більш імовірна, ніж подія B. Нехай Ω – множина точок даного прямокутного паралелепіпеда, подія A – «точка належить множині точок даного куба», подія B – «точка належить множині точок даного тетраедра». Подіями є будь-які частини даного паралелепіпеда, що мають об'єм.

Тоді $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$, $P(B) = \frac{V(B)}{V(\Omega)}$. Визначимо об'єми заданих многогранників:

$V(\Omega) = abc = 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$ (куб. од.),

$V(A) = a^3 = 2^3 = 8$ (куб. од.),

$V(B) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{27\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ (куб. од.).

Тоді $P(A) = \frac{8}{400} = 0{,}02$, $P(B) = \frac{\frac{9\sqrt{2}}{4}}{400} = \frac{9\sqrt{2}}{1600} \approx 0{,}008$.

29. $\frac{1}{90}$. Експеримент полягає у наборі навмання двох різних цифр і визначення правильності такого набору. Будуємо ймовірнісну модель, вважаючи що жодна пара цифр у порядку набору не має переваги над іншими парами бути набраною. Подія *A* – «цифри набрано правильно». Всього наслідків експерименту стільки, скільки можна утворити розміщень без повторень з 10 елементів по 2 елементи: $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$

Події *A* сприяє один наслідок. За класичною схемою обчислення ймовірності $P(A) = \frac{1}{90}$.

30. $\frac{10}{19}$. Експеримент полягає у виборі навмання 10 гравців для команди. Будуємо ймовірнісну модель, вважаючи що утворення жодної команди не має переваг над утворенням інших. Утворити команду з 10 гравців можна C_{20}^{10} способами. Отже, всіх наслідків експерименту є $C_{20}^{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184756$. Подія *A* – «два найсильніші гравці грають у різних командах» є рівною події «у команді грає лише один з двох найсильніших гравців». Визначимо, скільки таких команд можна утворити. Найсильнішого гравця для команди можна вибрати 2 способами. Інших 9 гравців для кожної такої команди можна вибрати C_{18}^{9} способами. Тоді створити команду з 10 гравців з одним найсильнішим гравцем можна $2C_{18}^{9}$ способами. Отже, події *A* сприяє $2C_{18}^{9} = \frac{2 \cdot 18!}{9! \cdot 9!} = 97240$ наслідків.

Тоді $P(A) = \frac{97240}{184756} = \frac{10}{19}$.

31. $\frac{7}{16}$. Кожен з учнів може прийти у будь-який момент часу між 12 і 13 год. Нехай перший учень приходить у момент часу x_1, другий – у момент часу x_2. Експеримент полягає у виборі навмання чисел x_1 і x_2, де $0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1$, і

фіксації пари $(x_1; x_2)$. Подія A – «друзі зустрілися». Вона відбудеться, якщо пара $(x_1; x_2)$ є розв'язком нерівності $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{4}$. Оскільки парі чисел можна поставити у відповідність точку на площині, то зробимо графічну ілюстрацію (рис. 38).

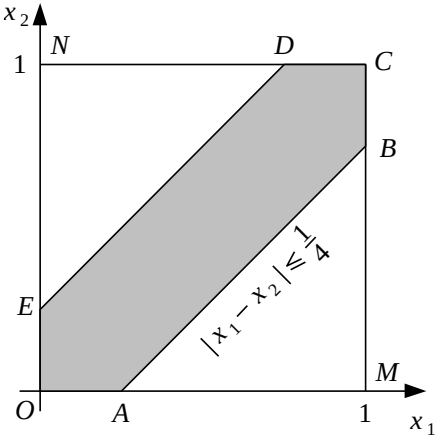


Рис. 38

Усі точки квадрата $OMCN$ є наслідками експерименту. Всі точки шестикутника $OABCDE$ є тими наслідками, що сприяють події A. При цьому подіями вважаємо всі частини квадрата, що мають площу. Тоді, за геометричною схемою обчислення ймовірності: $P(A) = \frac{S_{OABCDE}}{S_{OMCN}}$;

Оскільки $S_{OMCN} = 1$,

$S_{OABCDE} = S_{OMCN} - 2S_{\triangle AMB} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, то $P(A) = \frac{7}{16}$

32. а) 0,1355; б) 0,8645. Будемо вважати, що ймовірнісну модель побудовано і серед подій є подія A – «пошкодження тканини», подія B – «дефект шиття», подія $A \cdot B$ – «пошкодження тканини й дефект шиття». За умовою задачі $P(A) = 0{,}05$, $P(B) = 0{,}09$, $P(AB) = 0{,}0045$.

Подія C – «виріб відбракований» є сумою сумісних подій A і B. За формулою ймовірності суми двох подій маємо:

а) $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}05 + 0{,}09 - 0{,}0045 = 0{,}1355$;

Подія «виріб якісний» є протилежною до події *C*. За формулою ймовірності протилежної події маємо:

б) $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}1355 = 0{,}8645$.

33. $3{,}5 \cdot 10^{-8}$. Експеримент полягає у витягуванні навмання та розкладанні у рядок 5 карток з 30 і фіксації слова, що утворилося. Подія А – утворилося слово «хвиля». За умовою задачі є важливим порядок за яким з'являються букви при витягуванні карток, тому наслідками такого експерименту є розміщення з тридцяти елементів по п'ять елементів, кількість яких $\mathrm{A}_{33}^{5} = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 28480320$. Кожне таке розміщення вважаємо рівноможливим. Цим побудовано ймовірнісну модель експерименту. Появі слова «хвиля» сприяє тільки один наслідок. Отже, $P(A) = \frac{1}{28480320} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-8}$.

34. 0,28. Будемо вважати, що ймовірнісну модель побудовано і серед подій є події: *A* — «розв'язано задачу з алгебри», B — «розв'язано задачу з геометрії», *C* — «розв'язано обидві задачі». За умовою $\mathrm{P(A)} = 0{,}7$, $\mathrm{P(B)} = 0{,}4$. Подія *C* є добутком подій *A* та *B*. Природно вважати, що події *A* та *B* незалежні. Тому $P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$.

35. 1) $\frac{15}{17}$; 2) $\frac{20}{187}$. Ризик не скласти екзамен дорівнює $\frac{2}{187}$.

Будемо вважати, що ймовірнісну модель побудована так, що серед подій є події: *A* — «першим взято «вдалий» білет», *B* — «першим взято «невдалий» білет», *C* — «другим взято «вдалий» білет». *D* — «другим взято «невдалий» білет». Вибір кожного з наявних білетів вважатимемо рівноможливим.

1) Учень складе екзамен, узявши один білет, якщо відбудеться подія *A*. З побудованої моделі випливає, що $P(A) = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$.

2) Учень складе екзамен, узявши два білети, якщо відбудеться подія BC. За правилом 1: $P(BC) = P(B)P_B(C)$. З побудованої моделі випливає, що $P(B) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$. Якщо подія B відбулася, то серед 33-х білетів, що залишилися, є 30 «вдалих». Отже, $P_B(C) = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}$. Маємо: $P(BC) = \frac{2}{17} \cdot \frac{10}{11} = \frac{20}{187}$.

Учень не складе екзамен, якщо відбудеться подія BD. За тим самим правилом 1: $P(BD) = P(B)P_B(D)$. Міркуючи аналогічно розв'язанню 2) матимемо:

$P(B) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, $P_B(D) = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$, $P(BD) = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{187}$.

Зауваження. Подія BD — «учень не склав екзамен» є протилежною до події «учень склав екзамен», яка дорівнює події $A + BC$. Оскільки

$P(A + BC) = P(A) + P(BC) = \frac{15}{17} + \frac{20}{187} = \frac{185}{187}$, то $P(BD) = 1 - \frac{185}{187} = \frac{2}{187}$.

36. 0,88. Вважаємо, що ймовірнісну модель побудовано так, що подіями є події B_i — i-а операція пройшла успішно, i = 1, 2. Тоді серед подій обов'язково є події: $H_1 = B_1B_2$ — «обидві операції пройшли успішно», $H_2 = B_1\bar{B}_2$ — «перша операція пройшла успішно, друга — ні», $H_3 = \bar{B}_1B_2$ — «перша не принесла успіху, друга — пройшла успішно», $H_4 = \bar{B}_1\bar{B}_2$ — «жодна операція не принесла успіху», A — «мета досягнута». Очевидно, що події H_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ є гіпотезами. Обчислимо ймовірності гіпотез:

$P(H_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$, $P(H_2) = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$, $P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$, $P(H_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$

Зрозуміло, що $P_{H_1}(A) = 1$, $P_{H_2}(A) = 1$, $P_{H_3}(A) = 1$, $P_{H_4}(A) = 0$.

За формулою повної ймовірності, маємо:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) + \\ + P(H_4)P_{H_4}(A) =$$

$$= 0{,}32 \cdot 1 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 + 0{,}12 \cdot 0 = 0{,}88$$

37. а) 0,55; б) 0,09.

а) Необхідно обчислити ймовірність гіпотези H_2 за умови, що подія A відбулася. За формулою Байєса:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}88} \approx 0{,}55.$$

б) $P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}88} \approx 0{,}09.$

38. 0,253. Будемо вважати, що ймовірнісна модель побудована так, що серед подій є події: A — «спочатку Тарас взяв пиріжок з яблуком», B — «потім Оленка взяла пиріжок з капустою». Необхідно обчислити ймовірність події AB. За формулою (3):$P(AB) = P(A)P_A(B)$. З умови задачі випливає, що $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Якщо подія A відбулася, то серед 19-ти пиріжків, що залишилися, є 8 з капустою. Природно вважати рівноможливим взяти будь-який з 19-ти пиріжків, тому $P_A(B) = \frac{8}{19}$. Маємо: $P(AB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{19} = \frac{24}{95} \approx 0{,}253$.

39. 0,83. Вважаємо, що ймовірнісну модель побудовано і подіями є: H_1 — «взято стартовий пакет оператора МТС», H_2 — «взято стартовий пакет оператора КИЇВСТАР», H_3 — «взято стартовий пакет оператора LIFE:)», A — «покупець придбав стартовий пакет». Зрозуміло, що події H_1, H_2, H_3 є гіпотезами. За умовою задачі:

$P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}5$

$P_{H_1}(A) = 0{,}7$, $P_{H_2}(A) = 0{,}8$, $P_{H_3}(A) = 0{,}9$.

За формулою повної ймовірності знаходимо:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}83.$$

40. 0,54. З умови відомо, що покупець придбав стартовий пакет, тобто подія A відбулася. Тепер нам необхідно обчислити умовну ймовірність події H_3, за умови, що подія A відбулася. За формулою Байєса маємо:

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}83} \approx 0{,}54$$

41. а) 0,27; б) 0,42; в) 0,23; г) 0,99; д) 0,92.

Вважатимемо, що ймовірнісну модель побудовано так, що серед подій є події A_1 і A_2, які полягають у тому, що C прийме від A першу і другу SMS відповідно, події B_1 і B_2, які полягають в тому, що C прийме від B першу і другу SMS відповідно. За умовою задачі $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) = 0{,}8$, $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}6$.

а) Подія K — C прочитає дві SMS — відбудеться тоді, коли друг C з надісланих йому 4-х SMS прийме якісь дві і не прийме інші дві. Тому

$$K = A_1A_2\bar{B}_1\bar{B}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + A_1\bar{A}_2B_1\bar{B}_2 + \bar{A}_1A_2B_1\bar{B}_2 + \\ + A_1\bar{A}_2\bar{B}_1B_2 + \bar{A}_1A_2\bar{B}_1B_2.$$

За умовою задачі кожен доданок є добутком незалежних подій, а самі доданки попарно несумісні. Тому, враховуючи правила обчислення ймовірності суми та добутку подій, маємо:

$$P(K) = (0{,}8)^2 \cdot (0{,}4)^2 + (0{,}2)^2 \cdot (0{,}6)^2 + 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \\ \approx 0{,}27.$$

б) Подія M — C прочитає три SMS — відбудеться тоді, коли друг С з 4-х надісланих йому SMS прийме якісь три і не прийме четверту. Тому

$$M = A_1A_2B_1\overline{B_2} + A_1A_2\overline{B_1}B_2 + \overline{A_1}A_2B_1B_2 + A_1\overline{A_2}B_1B_2.$$

Враховуючи попарну несумісність доданків і незалежність співмножників, маємо:

$$P(M) = 2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot (0{,}6)^2 \approx 0{,}42.$$

в) Подія H — C прочитає чотири SMS — є добутком чотирьох незалежних подій. Тобто $H = A_1A_2B_1B_2$. Тому

$$P(H) = (0{,}8)^2 \cdot (0{,}6)^2 \approx 0{,}23.$$

г) Подія R — C прочитає хоча б одну SMS — є протилежною до події "C не прочитає жодної SMS". Тобто $(R = \overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2})$. Тому

$$P(R) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2) = 1 - (0{,}2)^2 \cdot (0{,}4)^2 \approx 0{,}99.$$

д) Подія Q — C прочитає не менше двох SMS — є сумою попарно несумісних подій K, M і H. Тому

$P(Q) = P(K + M + H) = P(K) + P(M) + P(H) = 0{,}27 + 0{,}42 + 0{,}23 = 0{,}92.$

42. 6. Нехай ймовірнісну модель побудовано так, що серед подій є незалежні події A_k — «високий прибуток отримано при проведенні k-ої операції», k = 1, 2, …, n. Тоді серед подій є і подія B — «високий прибуток отримано при проведенні принаймні однієї з n операцій». Тобто $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. За умовою задачі: $P(A_k) = 0{,}3$, k = 1, 2, …, n, $P(B) = 0{,}9$.

Очевидно, що подія B є протилежною до події $\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$ — «в жодній з n операцій не отримано високого прибутку». Тобто $B = \overline{\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n}$. Тому, за властивостями ймовірностей, враховуючи незалежність подій $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, …, $\bar{A}_n$, матимемо:

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) = 1 - (0{,}7)^n.$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження n:

$$1 - (0{,}7)^{\text{п}} = 0{,}9,\ (0{,}7)^{\text{п}} = 0{,}1,\ n = \frac{lg\ 0{,}1}{lg\ 0{,}7} \approx 6.$$

43. 0,625. Вважаємо, що ймовірнісну модель побудовано і подіями є: H_1 — «документи подано до першого університету», H_2 — «документи подано до другого університету», H_3 — «документи подано до третього університету», H_4 — «документи подано до четвертого університету», A — «абітурієнт став студентом». За умовою задачі події H_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, є гіпотезами, причому:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$P_{H_1}(A) = 0{,}4,\ P_{H_2}(A) = 0{,}6,\ P_{H_3}(A) = 0{,}7,\ P_{H_4}(A) = 0{,}8.$$

За формулою повної ймовірності знаходимо:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) + P(H_4)P_{H_4}(A) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 =$$

$$= 0{,}25(0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}8) = 0{,}25 \cdot 2{,}5 = 0{,}625.$$

44. 10. Нехай ймовірнісну модель побудовано так, що серед подій є незалежні події A_k — «при підкиданні на k-й

монеті випав герб», $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді серед подій є і подія B — «при підкиданні герб випав принаймні на одній з n монет». Тобто $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Вважатимемо ймовірність появи тієї чи іншої сторони монети однаковою і рівною $\frac{1}{2}$ для кожної монети та незалежною від результатів підкидання інших монет. Тому $P(A_k) = 0{,}5$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Також за умовою задачі $P(B) > 0{,}999$.

Очевидно, що подія B є протилежною до події «при підкиданні на жодній з n монет герб не випав».

Тобто $B = \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n}$.

Отже,

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) = 1 - (0{,}5)^n.$$

Звідси отримуємо нерівність для знаходження n:

$$1 - (0{,}5)^n > 0{,}999, \quad (0{,}5)^n < 0{,}001, \quad n > \frac{lg\ 0{,}001}{lg\ 0{,}5} \approx 9{,}97,$$

$n = 10$

45. 0,4. Нехай ймовірнісний простір побудовано так, що серед подій є події: H_1 — «Ілля поїхав наліво», H_2 — «Ілля поїхав направо», H_3 — «Ілля поїхав прямо», A — «Ілля залишився живий» (а тому друзі його дочекалися). Очевидно, що H_1, H_2, H_3 — гіпотези. З умови задачі випливає, що

$P(H_1) = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{1}{4}$, $P(H_3) = \frac{1}{2}$,

$P_{H_1}(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $P_{H_2}(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$,

$P_{H_3}(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

За формулою повної ймовірності, маємо:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 = 0{,}4$$

46. 0,1875. Необхідно обчислити ймовірність гіпотези H_2 за умови, що подія A відбулася. За формулою Байєса:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

47. 0,205; 0,016. Нехай ймовірнісну модель $(\tilde{\Omega},\ \tilde{S},\ \tilde{P})$ побудовано так, що серед подій є події A_i — «вгадано правильну відповідь у i-му завданні», $i = 1, 2, \ldots, 10$. Серед подій буде і подія $B_{10,6}$ — «вгадано правильну відповідь у $10 \cdot 0{,}6 = 6$ завданнях з 10 завдань». Вважатимемо, що вгадування відповіді у певному завданні не залежить від вгадування відповідей у інших завданнях, тобто вважаємо події $A_i, i = 1,2,\ldots,10$, незалежними.

З умови задачі випливає, що $\tilde{P}(A_i) = p = \frac{1}{2}$, $i = 1,2,\ldots,10$.

За формулою Бернуллі:

$$\tilde{P}\left(B_{10,6}\right) = P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4} = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^{10}} = \frac{210}{1024} \approx 0{,}205.$$

У другому випадку $\tilde{P}(A_i) = p = \frac{1}{4}$, $i = 1,2,\ldots,10$.

Тоді

$$\tilde{P}\left(B_{10,6}\right) = P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4} =$$

$$= C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot\frac{3^4}{4^{10}} \approx 0{,}016.$$

48. 0,377; 0,020. Для отримання неменше 7 балів треба дати правильну відповідь на від 6 до 10 завдань.

$$P_{10}(6 \le m \le 10) =$$

$$= P\left(B_{10,6}\right) + P\left(B_{10,7}\right) + P\left(B_{10,8}\right) + P\left(B_{10,9}\right) + P\left(B_{10,10}\right) =$$

$$= \left(C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}377$$

У другому випадку

$$P_{10}(6 \le m \le 10) =$$

$$= \left(3^4 C_{10}^{6} + 3^3 C_{10}^{7} + 3^2 C_{10}^{8} + 3C_{10}^{9} + C_{10}^{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0{,}0197277$$

$$\approx 0{,}020$$

49. 0,999; 0,944.

$P_{10}(m \geq 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}999$. У другому випадку $P_{10}(m \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}944$.

50. 5; 2.

Для першого випадку:

$10 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \leq m_0 \leq 10 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $4{,}5 \leq m_0 \leq 5{,}5$,

$m_0 = 5$;

для другого випадку:

$10 \cdot \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \leq m_0 \leq 10 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $1{,}75 \leq m_0 \leq 2{,}75$, $m_0 = 2$.

51. 1) 0,24576; 2) 7.

1) Нехай ймовірнісну модель $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$ побудовано так, що серед подій є події A_i — «влучення в корзину відбулося при i-у кидку», $i = 1{,}2, \ldots, 6$.Серед подій буде і подія $B_{6,4}$ — «влучення в корзину відбулося 4 рази при проведенні 6 кидків». Природно вважати результат окремого кидка незалежним від результатів інших кидків, а це і означає незалежність подій $A_i, i = 1{,}2, \ldots, 6$. За умовою задачі $\tilde{P}(A_i) = p = 0{,}8$, $i = 1{,}2, \ldots, 6$. Тому за формулою Бернуллі:

$\tilde{P}(B_{6,4}) = P_6(4) = C_6^4(0{,}8)^4(1 - 0{,}8)^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0{,}8)^4(0{,}2)^2 =$

$= \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}04 = 0{,}24576.$

2) Позначимо через *n* кількість кидків, яку слід виконати.

$0{,}8n - (1 - 0{,}8) \leq 6 \leq 0{,}8n + 0{,}8.$

Отримана нерівність рівносильна системі:

$\begin{cases} 0{,}8n - 0{,}2 \leq 6, \\ 0{,}8n + 0{,}8 \geq 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}8n \leq 6{,}2, \\ 0{,}8n \geq 5{,}2; \end{cases}$ $\begin{cases} n \leq 7{,}75, \\ n \geq 6{,}5. \end{cases}$

Оскільки кількість кидків може бути тільки цілим числом, то вона дорівнює 7.

52. 1) 0,997272; 1) 0,9999999.

1) Не більше трьох гірлянд вийдуть з ладу означає те, що не менше чотирьох гірлянд будуть безвідмовно працювати. Вважатимемо ймовірнісну модель $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$ побудованою так,

що серед подій є події A_i — «i-а гірлянда працює безвідмовно», $i = 1,2,\ldots,7$. Серед подій буде і подія B — «від чотирьох до семи гірлянд працюють безвідмовно». Оскільки увімкнення гірлянд незалежні, то незалежними будуть події A_i, $i = 1,2,\ldots,7$. За умовою задачі $\tilde{P}(A_i) = p = 0{,}9$, $i = 1,2,\ldots,7$. Тому

$$\tilde{P}(B) = P_7(4 \le m \le 7) = P_7(4) + P_7(5) + P_7(6) + P_7(7) =$$
$$= C_7^4(0{,}9)^4(0{,}1)^3 + C_7^5(0{,}9)^5(0{,}1)^2 + C_7^6(0{,}9)^6(0{,}1)^1$$
$$+ C_7^7(0{,}9)^7(0{,}1)^0 =$$
$$= 35 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}6561 + 21 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}59049 + 7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}531441 + 0{,}4782969 = 0{,}997272.$$

2) Розглядаючи ту саму ймовірнісну модель, можемо стверджувати, що серед подій буде подія С — «принаймні одна гірлянда працює». Матимемо:

$$\tilde{P}(C) = P_7(m \ge 1) = 1 - (1 - 0{,}9)^7 = 1 - (0{,}1)^7 = 0{,}9999999.$$

53. 0,2.

54. Ряд розподілу подано в таблиці 31.

Таблиця 31

x_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

Зауваження. Такий розподіл називається *рівномірним*.

55. 1) При включенні може жодна лампочка не перегоріти, можуть перегоріти будь-які одна або дві з трьох, можуть перегоріти всі три лампочки. Отже, випадкова величина X — «кількість лампочок, які можуть перегоріти при включенні світильника» може набувати таких значень: 0, 1, 2, 3.

Відповідні ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі (поясніть, чому?).

$P(X = 0) = 0{,}8^3 = 0{,}512,$

$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}64 = 0{,}384,$

$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8 = 0{,}096,$

$P(X = 3) = 0{,}2^3 = 0{,}008.$

Ряд розподілу подано в таблиці 32.

Таблиця 32

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Зауваження. Такий розподіл називається *біноміальним*.

2) Відповідний полігон ймовірностей зображено на рис. 39.

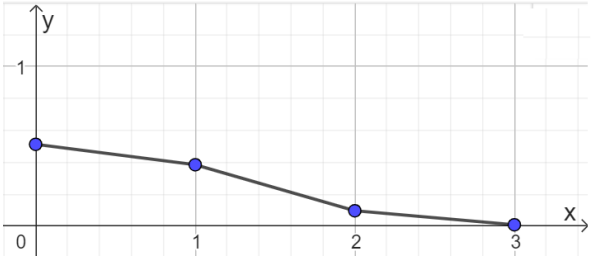


Рис. 39

56. З умови задачі випливає, що в мішень виконується два постріли. При цьому можливі такі наслідки: жоден стрілець не влучив, влучив лише один з них, обидва влучили. Тобто випадкова величина X — «кількість влучень у мішень» може набувати таких значень: 0, 1, 2. Тоді

$P(X = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3,$

$P(X = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}5,$

$P(X = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$

Ряд розподілу подано в таблиці 33.

Таблиця 33

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

Відповідний полігон ймовірностей зображено на рис. 40.

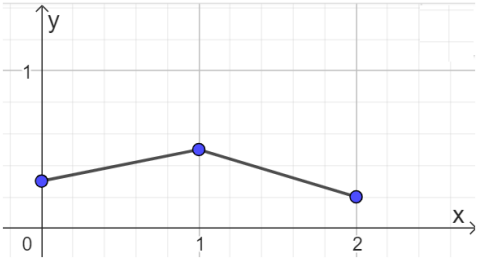


Рис. 40

57. Ряд розподілу подано в таблиці 34.

Таблиця 34

x_i	0	1	10	20	100
p_i	0,874	0,1	0,01	0,005	0,001

58. а) Ряд розподілу подано в таблиці 35.

Таблиця 35

x_i	5	10	20
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

а) Ряд розподілу подано в таблиці 36.

Таблиця 36

x_i	10	15	20	25	30	40
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Математичне сподівання виграшу у випадку а):

$MX = 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{35}{3} \approx 11{,}67$ (грн).

Математичне сподівання виграшу у випадку б):

$MX = 10 \cdot \frac{1}{9} + 15 \cdot \frac{2}{9} + 20 \cdot \frac{1}{9} + 25 \cdot \frac{2}{9} + 30 \cdot \frac{2}{9} + 40 \cdot \frac{1}{9} =$

$= \frac{210}{9} \approx 23{,}33$ (грн).

Як бачимо, в обох випадках математичне сподівання виграшу менше за вартість пострілів.

59. 2 зупинки.

Побудуємо ряд розподілу для випадкової величини X — «кількість зупинок автомобіля» (таблиця 37)

Таблиця 37

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$0{,}5^4$	$4 \cdot 0{,}5^4$	$6 \cdot 0{,}5^4$	$4 \cdot 0{,}5^4$	$0{,}5^4$

$MX = 0 \cdot 0{,}5^4 + 1 \cdot 4 \cdot 0{,}5^4 + 2 \cdot 6 \cdot 0{,}5^4 + 3 \cdot 4 \cdot 0{,}5^4 + 4 \cdot 0{,}5^4 = 2$.

60. 60 к. Обчисліть математичне сподівання величини виграшу.

61. а) 1,5; б) 15.

62. 1) $MX = 3{,}1$; $MY = 3{,}2$. Математичне сподівання величини виграшу для другої лотереї більше;

2) 31; 3) 15,8.

Література

1. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х. : Вид-во «Ранок», 2019. 240 с.

2. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – К. : Генеза, 2019. 416 с.

3. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на погл. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. 304 с.

4. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. 352 с.

5. *Бродський Я. С, Павлов О. Л.* Про викладання елементів теорії ймовірностей у школі // Математика, № 23—24, 2000.

6. *Вишенський В. А., Перестюк М. О.* Комбінаторика: перші кроки. — Камянець-Подільський: Аксіома, 2010. 324 с.

7. *Волков Ю.* Елементарна стохастика / Ю. Волков, Н. Войналович. // Математика в шк. — 2004. — № 3 - С.16-21

8. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: Вища школа, 1988. 438 с.

9. Державний стандарт базової і повної середньої освіти. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text (дата звернення: 15.08.2025).

10. *Жалдак М. І., Михалін Г. О.* Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів. — К.: Шкільний світ, 2006. 119 с.

11. *Захарійченко Ю.О., Школьний О.В.* Математика: збірник тестових завдань для абітурієнтів. — К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2006. — 230 с.

12. *Конет І.* Формула повної ймовірності. Теорема гіпотез // Математика в шк. — 2003. — № 10. — С. 33-35.

13. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях / Н. О. Вірченко. — К. : Вища школа, 1974. 272 с.

14. Методика навчання елементів стохастики учнів старшої школи / М. Жалдак, Г. Михалін, І. Соколовська // Математика в школі. – 2007. – № 9/10. – С. 9-14 ; Математика в школі. – 2007. – № 6/7/8 ; Математика в школі. – 2008. – № 1. – С. 6-10 ; Математика в школі. - 2008. – № 5. – С. 3-7 ; Математика в школі. – 2008. – № 6. – С. 9-12 ; Математика в школі. - 2008. – № 7/8. – С. 23-28

15. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 15.03.2025).

16. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 15.03.2025).

17. *Скороход А. В.* Вероятность вокруг нас. — К.: Наукова думка, 1980. 196 с.

18. *Слєпкань З. І.* Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. / З. І. Слєпкань — 2-ге вид., допов. і переробл. — К.: Вища школа, 2006. 582 с.

19. Статистика. Ймовірність. Комбінаторика : Навчальний посібник / Я. С. Бродський. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. 544 с.

20. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – вид. 2, перероб. і доп. / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, Г. О. Михалін. – Полтава : «Довкілля-К», 2009. 500 с.

21. Rényi, Alfréd (1972) *Letters on probability.* Akadémiai Kiadó, Budapest. URL: https://real-eod.mtak.hu/12598/1/AkademiaiKiado_004442.pdf (дата звернення: 10.02.2025).

ЗМІСТ

Передмова ……..... 3
Розділ І. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ……... 5
1.1. Правила комбінаторики …… 9
1.1.1. Правило суми ……. 9
1.1.2. Правило добутку …… 10
1.1.3. Узагальнені правила суми і добутку …… 12
1.2. Вибірки …….. 13
1.2.1. Перестановки ……. 14
1.2.2. Розміщення ……. 15
1.2.3. Комбінації ……... 15
1.3. Формули підрахунку кількості вибірок …….. 16
1.3.1. Кількість розміщень …….. 16
1.3.2. Кількість перестановок ……. 18
1.3.3. Кількість комбінацій ……. 18
1.4.* Вибірки з повтореннями, формули підрахунку їх кількості …… 20
1.4.1. Розміщення з повтореннями ……. 20
1.4.2. Перестановки з повтореннями ……. 21
1.4.3. Комбінації з повтореннями …….. 24
Вправи для самостійного розв'язування ……... 26
Відповіді та вказівки до розв'язування ……... 30
Розділ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ ……. 33
2.1. Статистика як наука …….. 33
2.2. Статистичне дослідження та його етапи …… 40
2.2.1. Вибіркове спостереження. Статистична вибірка …….. 43
2.3. Первинна обробка статистичних даних. Статистичні таблиці і графіки. Ряди розподілу …… 44
2.3.1. Методи і шляхи опрацювання статистичних даних ……. 44
2.3.2. Види групувальних ознак ……. 49

2.3.3. Статистичні ряди ……... 49
2.3.4. Дискретні та інтервальні ряди розподілів ... 50
2.3.5. Полігони і гістограми …… 53
2.4. Числові характеристики вибірки ……. 55
2.4.1. Мода вибірки …….. 55
2.4.2. Медіана вибірки ……. 56
2.4.3. Середнє значення вибірки ……. 58
2.5*. Показники варіації …….. 59
2.5.1*. Розмах вибірки ……. 59
2.5.2*. Дисперсія …….. 59
2.5.3*. Середнє квадратичне відхилення ……... 60
2.5.4*. Коефіцієнт варіації …….. 61
Вправи для самостійного розв'язування ……... 62
Відповіді та вказівки до розв'язування ……... 67
Розділ ІІІ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ …. 72
3.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій …….. 72
3.1.1. Випадковий експеримент і випробування ... 78
3.1.2. Елементарні події та простір елементарних подій …….. 79
3.2. Поняття випадкової події. Вірогідна, неможлива події. Рівні події ……... 83
3.2.1. Випадкова подія та елементарні події, що сприяють їй ……... 83
3.2.2. Вірогідна та неможлива події ……... 84
3.2.3. Відношення спричинюванності та рівності подій …….. 85
3.3. Операції над подіями. Простір подій …….. 87
3.3.1. Сума подій …….. 87
3.3.2. Добуток подій та несумісність подій …….. 88
3.3.3. Різниця подій …….. 89

3.3.4. Взаємно протилежні події ……. 90
3.3.5. Уточнення поняття випадкової події …….. 91
3.4. Відносна частота або статистична ймовірність події та її властивості …… 93
3.4.1. Поняття статистичної ймовірності …… 93
3.4.2. Статистична модель випадкового експерименту …… 94
3.4.3. Важливі властивості статистичної ймовірності ……... 97
3.4.4. Ряд розподілу статистичних ймовірностей . 99
3.5. Ймовірність події та її властивості. Способи задання ймовірності ……. 99
3.5.1. Поняття ймовірності та її основні властивості …… 103
3.5.2. Важливі властивості ймовірності ……. 105
3.5.3. Як можна задавати ймовірності подій з даного простору *S* …… 106
3.5.4. Деякі способи задання ймовірностей …….. 107
3.5.5. Розподіл ймовірностей …….. 112
3.6. Умовна ймовірність і незалежні події. Імовірність добутку подій ……... 113
3.6.1. Поняття умовної ймовірності ……... 114
3.6.2. Ймовірність добутку подій ……... 115
3.6.3. Незалежність подій …… 116
3.6.4. Узагальнення поняття незалежності подій .. 117
3.6.5. Формула повної ймовірності ……. 118
3.6.6. Формула Байєса …….. 118
3.7*. Повторні незалежні випробування з двома наслідками. Поняття про закон великих чисел ……. 119
3.7.1. Формула Бернуллі та біноміальні ймовірності ……... 120
3.7.2. Деякі наслідки з формули Бернуллі ……. 122

3.7.3. Найімовірніша кількість відбувань події *A* в серії незалежних випробувань ……. 125
3.7.4. Поняття про закон великих чисел …… 127
3.8*. Поняття про випадкові величини …….. 129
3.8.1. Поняття дискретної випадкової величини та її розподілу ……... 129
3.8.2. Числові характеристики дискретних випадкових величин …… 131
Вправи для самостійного розв'язування ……... 134
Відповіді та вказівки до розв'язування ……... 144
Література ……... 163

Науково-методичне видання

Швець *Василь Олександрович*
Соколовська *Ірина Степанівна*

Елементи комбінаторики, статистики та теорії ймовірностей в закладах загальної середньої освіти

ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені Михайла Драгоманова

Підписано до друку 09.06.2025 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Умов.друк.арк. 9,88. Облік.видав.арк. 5,89
Зам. № 049
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Українського державного університету
імені Михайла Драгоманова.
01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК 7896 від 25.07.2023.
(044) 239-30-26.