МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ У С С Р

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени А.М.Горького

А.Н.ЛОМАКОВИЧ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

/01.003 - дифференциальные и интегральные уравнения/

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев - 1969

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова



100313391

Диссертация выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент Н.Я.ЛЯЩЕНКО.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.А.РЯБОВ,

кандидат физико-математических наук, доцент А.Ф.КАЛАЙДА.

Ведущее предприятие – / научно-исследовательское учреждение/: институт математики АН УССР.

Автореферат разослан 18 января 1970 г.

Защита диссертации состоится _____ 19___ г.

на заседании Ученого совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького /Киев, 30, Бульвар Шевченко, 22/24/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Многочисленные задачи механики, математической физики, оптики и техники [2,5, 6 I3-I5] сводятся к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений/и.-д.у./ типа Вольтерра, как правило, неразрешимым в конечном виде. Поэтому большое значение приобрели методы приближенного решения этих уравнений. Особенно возросла потребность в разработке таких методов их приближенного решения, которые допускали бы удобную реализацию на быстродействующих электронно-вычислительных машинах /ЭВМ/.

Настоящая работа посвящена приближенному решению нелинейных интегральных уравнений и задачи Коши для некоторых типов и.-д.у. типа Вольтерра численным методом высокого порядка точности, предотавляющего собой модификацию хорошо известного в теории дифференциальных уравнений метода Рунге-Кутта.

Идея применения метода вида Рунге-Кутта к численному решению нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра впервые высказана В.И.Крыловым [4] , а первыми работами, посвященными применению метода Рунге-Кутта к численному решению указанного уравнения были работы Апара [I6] , Пузе [I8] , Бельтюкова [I] и других.

Работа состоит из введения, четырех глав и списка цитированной литературы.

Во введении содержится обзор работ, посвященных приближенному решению нелинейных интегральных уравнений, а также приближенному решению задачи Коши для линейных и нелинейных и.-д.у. типа Вольтерра методом Рунге-Кутта. Кроме того, рассматриваются некоторые работы, посвященные приближенному решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта,

тесно примыкающие к исследованиям данной работы, а также кратко реферируется содержание диссертации.

В первой главе строятся формулы вида Рунге-Кутта, позволяющие вычислять в первой узловой точке приближенное значение решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$, $O(h^{m+6})$ (h - шаг интегрирования, $m = 0, 1, \ldots, 8$) . Здесь же построен алгоритм приближенного решения этой системы методом вида Рунге-Кутта, который дает возможность находить приближенное решение в любой узловой точке промежутка интегрирования.

Суть построения формул вида Рунге-Кутта состоит в следующем. Исходная система нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра при помощи преобразований, подобных преобразованиям, использованных фельбергом [I7] при построении формул вида Рунге-Кутта высокого порядка точности для дифференциальных уравнений, сводится к новой системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Особенностью новой системы является то, что производные от ее решения до некоторого порядка в начальной точке промежутка интегрирования обращаются в нуль. Это обстоятельство используется при построении формул вида Рунге-Кутта высокого порядка точности для нахождения приближенного решения новой системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Само же построение расчетных формул осуществляется в полном соответствии с построением известных классических формул Рунге-Кутта.

В §§ I, 2 построены формулы вида Рунге-Кутта, позволяющие находить приближенное значение решения одного нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра в первой узловой точке промежутка интегрирования с погрешностью порядка $O(h^{i})$.

В §§ 3,4 строятся формулы вида Рунге-Кутта с локальной погрешностью порядка $O(h^{m+5})(m=0,1,\dots,8)$ для системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра /записанной в векторной форме/ вида

$$\tau(x)=\int_{x_0}^{x} H[x,s,\tau(s)]\,ds, \qquad /I/$$

позволяющие находить приближенное значение ее решения в первой узловой точке с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$.

В уравнении /I/ непрерывная вектор-функция своих аргументов $H[x,s,\tau(s)]$ в области $\mathcal{D}_3$, определяемой неравенствами:

$$x_0 \le x \le x_0+L \quad (L>0),$$
$$x_0 \le s \le x,$$
$$\|\tau\| \le b \quad (b>0),$$

непрерывно дифференцируема до $m+4$ -го порядка включительно и, кроме того, имеет непрерывную частную производную $m+5$ -го порядка по первому аргументу.

Здесь и в последующем изложении под нормой некоторой вектор-функции $f=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, ограниченной на замкнутом множестве E, содержащимся в области ее определения, и со значениями в n -мерном векторном пространстве R^n, понимается

$$\|f\|=\sup_E |f|, \quad |f|=\max_{1\le i\le n}|f_i|.$$

Сначала / § 3 / посредством преобразования

$$\tau(x)=w(x,y)\equiv y(x)+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{\partial^{k-1}\Phi_0(x,s)}{\partial s^{k-1}}\right]_{s=x_0} \qquad /2/$$

от уравнения /I/ переходим к новому интегральному уравнению

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f[x, s, y(s)]\,ds, \qquad /3/$$

в котором вектор-функции $y(x)$, $f[x, s, y(s)]$ удовлетворяют соответственно условиям:

$$y(x_0)=\tau(x_0), \qquad /4/$$

$$y^{(k)}(x_0)=0 \ (k=1, 2, \ldots, m+1), \qquad /5/$$

$$\frac{\partial^{p+t} f(x, x_0, y_0)}{\partial x^p \partial s^t}=0 \ (p+t=0, 1, \ldots, m+5;\ t=0, 1, \ldots, m,\ p=0, 1, \ldots, m+5), \qquad /6/$$

где

$$f[x, s, y(s)]=H[x, s, w(s, y)]-\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(s-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\left[\frac{\partial^{k-1}\Phi_0(x, s)}{\partial s^{k-1}}\right]_{s=x_0}, \qquad /7/$$

$$\Phi_0(x, s)=H[x, s, \tau(s)]. \qquad /8/$$

Приближение для $y(x)$ в точке $x=x_0+h$ /§ 4/ ищется в виде:

$$y_{03}(x_0+h)=h\sum_{k=1}^{3} A_{3k} f[x_0+h, x_0+d_k h, y_{0k-1}(x_0+d_k h)], \qquad /9/$$

где

$$\left.\begin{aligned} &y_{00}=y_0 \ (y_0=0), \\ &y_{0p}(x_0+d_{p-1}h)=h\sum_{k=1}^{p} A_{pk} f[x_0+d_{p-1}h, x_0+d_k h, y_{0k-1}(x_0+d_k h)] \ (p=1,2). \end{aligned}\right\} \qquad /10/$$

В соотношениях /9/, /10/ A_{3k}, d_k, A_{pk} – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Для их отыскания требуется, чтобы разложения искомого решения $y(x_0+h)$ и его приближения $y_{03}(x_0+h)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора совпадали до членов, содержащих h^{m+4} включительно. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в этих разложениях и принимая во внимание условия /5/, /6/, для определения неизвестных коэффи-

циентов получаем систему нелинейных алгебраических уравнений. Для $m=0,1,\dots,8$ значения A_{3k}, d_k $(k=1,2,3)$, A_{11}, A_{21}, A_{22} приведены в таблице I.

Вычисленное по формуле /9/ значение $y_{03}(x_0+h)$ с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$ подставляется в /2/ вместо $y(x)$ при $x=x_0+h$. Это дает приближенное значение для $\tau(x_0+h)$ также с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$.

§ 5 посвящен выводу формул вида Рунге-Кутта, имеющих локальную погрешность порядка $O(h^{m+6})$. Полученные таким путем формулы, кроме того, что они имеют порядок локальной погрешности на единицу выше, используются еще для контроля вычислений. Указанный контроль осуществляется аналогично тому, как это делается в теории дифференциальных уравнений [17].

В § 6 строятся формулы вида Рунге-Кутта с локальной погрешностью того же порядка малости, что и формулы § 4, однако коэффициенты формул § 6, кроме того, удовлетворяют условиям минимизации остаточного члена. Поэтому применение последних формул позволяет получить лучшие результаты по сравнению с результатами, полученными по формулам § 4.

§ 7 носит реферативный характер [18], результаты которого используются в дальнейших исследованиях.

Для интегрального уравнения типа Вольтерра вида /I/ алгоритм нахождения приближения в первой узловой точке нельзя автоматически применить к нахождению приближений в остальных узловых точках промежутка интегрирования. Поэтому в § 8 построен алгоритм приближенного решения уравнения /I/ методом вида

Т А Б Л И Ц А I

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
d_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$
d_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$
d_3	I	I	I	I	I	I	I	I
A_{11}	2	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{32}{11}$	$\frac{32}{7}$	$\frac{128}{17}$	$\frac{64}{5}$	$\frac{7825}{13072}$
A_{21}	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{75}{18}$	$-\frac{225}{32}$	$-\frac{4375}{384}$	$-\frac{9375}{464}$	$-\frac{42875}{11008}$	$-\frac{7825}{1024}$	$-\frac{32805}{12032}$
A_{22}	$\frac{5}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{6875}{6144}$	$\frac{65625}{59392}$	$\frac{796875}{704512}$	$\frac{7825}{65536}$	$\frac{3359232}{3677875}$
A_{31}	$\frac{25}{48}$	$\frac{125}{288}$	$\frac{125}{288}$	$\frac{625}{1344}$	$\frac{15625}{32256}$	$\frac{7825}{193536}$	0	$\frac{2187}{28160}$
A_{32}	$\frac{25}{96}$	$\frac{125}{384}$	$\frac{125}{384}$	$\frac{6875}{21504}$	$\frac{15625}{49152}$	$-\frac{328125}{4128768}$	$\frac{953125}{5898240}$	$\frac{1119744}{4296875}$
A_{33}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{29}{504}$	$\frac{43}{756}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{47}{990}$

$m = 8$

d_1	d_2	d_3	A_{11}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	I	$\frac{1953125}{3145728}$	$-\frac{19683}{5120}$	$\frac{10077696}{9765625}$	0	$\frac{30233088}{10742187}$	$\frac{1}{32}$

Рунге-Кутта высокого порядка точности, позволяющий получить приближенное значение решения этого уравнения в любой узловой точке промежутка интегрирования. Для этого, используя идею подвижного начала, от уравнения /I/ с началом в точке $x=x_0$ переходят к интегральному уравнению с началом в точке $x=x_n\,(n\geq 1)$. Затем, используя подстановку, подобную /2/, интегральное уравнение с новым началом преобразуется в интегральное уравнение, решение которого удовлетворяет условиям вида /4/, /5/ в точке $x=x_n$. Для нахождения приближенного значения решения преобразованного уравнения в точке $x=x_{n+1}$ с погрешностью порядка $O(h^{m+1})$ уже можно использовать формулы вида Рунге-Кутта, построенные в § 4.

Ниже приводятся формулы § 8, позволяющие вычислить приближенное значение $\bar{\tau}(x)$ решения $\tau(x)$ уравнения /I/ для любого $x\in\mathcal{J}_L[x_0;\,x_0+L]$:

$$\bar{\tau}(x)=\begin{cases}\bar{\mu}_n(x)+w(x,y_n^*) & \text{для } x\in[x_n;x_{n+1})\,(n=0,1,\dots,l-1;\ x_l=x_0+L)\\ \bar{\mu}_{n+1}(x_{n+1}) & \text{для } x=x_{n+1},\ x_{n+1}=x_0+(n+1)h,\end{cases} \qquad /II/$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_n(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{\sigma}_k(x),\\ \bar{\mu}_{n+1}(x_{n+1})&=\sum_{k=0}^{n}\bar{\sigma}_k(x_{n+1}),\end{aligned}\right\} \qquad /I2/$$

$$\tau_n^*(x)=w(x,y_n^*)\equiv y_n^*(x)+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{(x-x_n)^i}{i!}\left[\frac{\partial^{i-1}\mathcal{F}_n^*(x,s)}{\partial s^{i-1}}\right]_{s=x_n}. \qquad /I3/$$

Величина $\bar{\sigma}_k(x)$, входящая в /I2/, является приближением величины $\sigma_k^*(x)$

$$\sigma_k^*(x)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}H[x,s,\bar{\mu}_k(s)+\tau_k^*(s)]\,ds \qquad /I4/$$

и определяется посредством соотношения

$$\bar{\sigma}_k(x)=\bar{\varphi}_k(x)+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{h^i}{i!}\left[\frac{\partial^{i-1}\mathcal{F}_k^*(x,s)}{\partial s^{i-1}}\right]_{s=x_k} \qquad /I5/$$

В равенстве /I5/ величина $\bar{\varphi}_k(x)$ является приближением величины

$$\varphi_k^*(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k[x, s, \bar{\mu}_k(s) + y_k^*(s)]\,ds \qquad /I6/$$

и вычисляется с погрешностью порядка $O(h^{m+s})$ при фиксированном значении $x \in \gamma_k$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varphi}_k(x) = h\sum_{\mu=1}^{3} A_{3\mu} f_k[x, x_k + d_\mu h, y_{k\mu-1}(x_k + d_\mu h)], \\ &y_{k0}(x_k + d_1 h) = 0, \\ &y_{k\mu-1}(x_k + d_\mu h) = h\sum_{\tau=1}^{\mu-1} A_{\mu-1,\tau} f_k[x_k + d_\mu h, x_k + d_\tau h, y_{k\tau-1}(x_k + d_\tau h)]. \end{aligned}\right\} \qquad /I7/$$

В соотношении /I3/ $\tau_n^*(x)$, $y_n^*(x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\tau_n^*(x) = \int_{x_n}^{x} H[x, s, \bar{\mu}_n(s) + \tau_n^*(s)]\,ds,$$

$$y_n^*(x) = \int_{x_n}^{x} f_n[x, s, \bar{\mu}_n(s) + y_n^*(s)]\,ds,$$

а $\mathcal{H}_n^*(x,s)$ имеет вид:

$$\mathcal{H}_n^*(x,s) = H[x, s, \bar{\mu}_n(s) + \tau_n^*(s)]. \qquad /I8/$$

Заметим, что при $n = 0$ $\mathcal{H}_0^*(x,s)$ совпадает с $\mathcal{H}_0(x,s)$ /8/, поскольку в этом случае $\bar{\mu}_0(s) = 0$ и $\tau_0^*(s) \equiv \tau(s)$.

В уравнении /I6/ вектор-функция $f_k[x, s, \bar{\mu}_k(s) + y_k^*(s)]$ определяется равенством

$$f_k[x, s, \bar{\mu}_k(s) + y_k^*(s)] = H[x, s, \bar{\mu}_k(s) + w(s, y_k^*)] - \sum_{\tau=1}^{m+1} \frac{(s - x_k)^{\tau-1}}{(\tau-1)!} \cdot \left[\frac{\partial^{\tau-1} \mathcal{H}_k^*(x,s)}{\partial s^{\tau-1}}\right]_{s = x_k}. \qquad /I9/$$

Преобразование /I3/ можно построить только в том случае, если известны формулы для вычисления значения производных $\left[\frac{\partial^{\tau-1} \mathcal{H}_n^*(x,s)}{\partial s^{\tau-1}}\right]_{s = x_n}$ $(\tau = 1, 2, \ldots, m+1)$. Последние получают-

ся путем дифференцирования по s соотношения /I8/ r $(r=1,2,\dots,m)$ раз. Эти производные содержат в себе величины $\frac{d^p \bar{u}_n(s)}{ds^p}$ $(p=1,2,\dots,m)$. Поэтому в § 8 дается способ вычисления $\frac{d^p \bar{u}_n(s)}{ds^p}$ для $s \in \mathcal{T}_1$ с помощью формул вида Рунге-Кутта, локальная погрешность которых порядка $O(h^{m+5})$.

Известно, что малость погрешности приближенного решения, полученного каким-либо методом на одном шаге промежутка интегрирования, вообще говоря, не гарантирует того, что после выполнения конечного числа шагов мы получим приближенное значение решения того же порядка малости, что и на первом шаге. Поэтому, важно получить оценку полной погрешности метода.

Последняя задача решается во второй главе, где рассматриваются вопросы оценки локальной и полной погрешности метода вида Рунге-Кутта высокого порядка точности на конечном промежутке интегрирования.

В § I выводится оценка локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта, а в § 2 – оценка полной погрешности метода вида Рунге-Кутта на конечном промежутке интегрирования. Основные результаты содержатся в теоремах.

ТЕОРЕМА 2.I.I. Если :

I. непрерывная вектор-функция своих аргументов $H[x,s,z(s)]$ уравнения /I/ является в области $\mathcal{D}_3$ непрерывно дифференцируемой до $m+4$ -го порядка включительно и, кроме того, имеет непрерывную частную производную $m+5$ -го порядка по первому аргументу;

2. $\bar{\tau}(x)$, вычисленная по формуле /II/ с привлечением формул вида Рунге-Кутта, имеющих локальную погрешность порядка $O(h^{m+5})$,удовлетворяет неравенству

$$\|\bar{\tau}(x)\| \le \mathcal{C} ;$$

3. вектор-функции $f_\kappa[x, s, \bar{u}_\kappa(s), y_\kappa^*(s)] (\kappa = 0, 1, \dots, l-1)$, которые даются соотношением /I9/, определены в области $\mathcal{D}_3$; тогда для $x \in \mathcal{J}_L(x_0, x_k)$ справедливо неравенство

$$\|\varepsilon_\kappa(x)\| = \|\sigma_\kappa^*(x) - \bar{\sigma}_\kappa(x)\| = \|\varphi_\kappa^*(x) - \bar{\varphi}_\kappa(x)\| \le h^{m+5} M_{m0}, \qquad /20/$$

где $\sigma_\kappa^*(x)$, $\bar{\sigma}_\kappa(x)$, $\varphi_\kappa^*(x)$, $\bar{\varphi}_\kappa(x)$ определяются формулами /I4/ - /I7/ соответственно, а M_{m0} - положительная константа, выражающаяся через известные величины.

Для производных p -го порядка от $\varepsilon_\kappa(x)$ справедливы неравенства:

$$\left\| \frac{d^p \varepsilon_\kappa(x)}{dx^p} \right\| \le h^{m+5} M_{mp} \quad (p = 1, 2, \dots, m),$$

где M_{mp} - некоторые положительные константы.

ТЕОРЕМА 2.2.I. Если:

I. промежуток $\mathcal{J}_L[x_0; x_0+L]$ разделен на l равных частей длины h так, что выполняется неравенство

$$1 - B_m(h) \mathcal{K} > 0, \quad B_m(h) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{h^k}{k!}$$

и при $h \to 0$ $l \to +\infty$ таким образом, что $l \cdot h = L$;

2. вектор-функция $\mathcal{F}_\kappa(x,s) = H[x,s,\mu_\kappa(s)+\tau_\kappa(s)]$, $\mathcal{F}^*_\kappa(x,s) = H[x,s,\tilde{\mu}_\kappa(s)+\tau^*_\kappa(s)]$ и производные $\dfrac{\partial^{p+i}\mathcal{F}_\kappa(x,s)}{\partial x^p \partial s^i}$, $\dfrac{\partial^{p+i}\mathcal{F}^*_\kappa(x,s)}{\partial x^p \partial s^i}$

в области $\mathcal{D}_3$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial^{p+i}\mathcal{F}_\kappa(x,s)}{\partial x^p \partial s^i} - \frac{\partial^{p+i}\mathcal{F}^*_\kappa(x,s)}{\partial x^p \partial s^i}\right| \le \mathcal{K}_{pi}(x,s)\left|\mu_\kappa(s)+\tau_\kappa(s) - \tilde{\mu}_\kappa(s)-\tau^*_\kappa(s)\right| \quad (p,i=0,1,\dots,m;\ m=0,1,\dots,\delta;\ \kappa=0,1,\dots,\ell-1); \quad /21/$$

3. вектор-функции $f_\kappa[x,s,\tilde{\mu}_\kappa(s)+y^*_\kappa(s)]$ /19/ определены в области $\mathcal{D}_3$ $(\kappa=0,1,\dots,\ell-1)$;

4. для $\dfrac{d^p\varepsilon_\kappa(x)}{dx^p}$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{d^p\varepsilon_\kappa(x)}{dx^p}\right\| \le h^{m+s}M_{mp} \le h^{m+s}M_m;\ M_m = \max_{0\le p\le m} M_{mp};\ M_m < \infty \left(h\in(0;h_0],\ h_0>0,\ x\in\mathcal{I}_L\right);$$

тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|\dfrac{d^p\mu_\ell(x)}{dx^p} - \dfrac{d^p\tilde{\mu}_\ell(x)}{dx^p}\right\|}{h^{m+\nu}} \le \frac{M_m}{2\mathcal{K}}\left(e^{2\mathcal{K}P}-1\right);\ P=\mathcal{K}B_1,\ \sum_{\kappa=1}^{m+1}\frac{h^{\kappa-1}}{\kappa!} \le B_1,$$

где

$$\frac{d^p\mu_\ell(x)}{dx^p} = \sum_{\kappa=0}^{\ell-1}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}}\frac{\partial^p H[x,s,\tau(s)]}{\partial x^p}\,ds,$$

$$\frac{d^p\tilde{\mu}_\ell(x)}{dx^p} = \sum_{\kappa=0}^{\ell-1}\left[h\sum_{i=1}^{j}A_{ji}\frac{\partial^p f_\kappa[x,x_{\kappa i},\tilde{\mu}_\kappa(x_{\kappa i})+y_{\kappa i-1}(x_{\kappa i})]}{\partial x^p} + \sum_{t=1}^{m+1}\frac{h^t}{t!}\left[\frac{\partial^{p+t-1}\mathcal{F}^*_\kappa(x,s)}{\partial x^p \partial s^{t-1}}\right]_{s=x_\kappa}\right],\ x_{\kappa i} = x_\kappa + d_i h, \quad /22/$$

$$\mathcal{K} = \max_{0\le p,i\le m}\left\{\bar{\mathcal{K}}_p;\ \mathcal{K}_{pi}\right\},\ \mathcal{K}_{pi} = \left\|\mathcal{K}_{pi}(x,s)\right\|, \qquad \bar{\mathcal{K}}_p = \left\|\bar{\mathcal{K}}_p(x,s)\right\|\ (x,s\in\mathcal{I}_L) \quad \Big\} \quad /23/$$

и $\bar{\mathcal{K}}_p(x,s)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial^p f_k[x,s,y_1(s)]}{\partial x^p} - \frac{\partial^p f_k[x,s,y_2(s)]}{\partial x^p}\right| \le \bar{\mathcal{K}}_p(x,s)\,|y_1(s)-y_2(s)| \quad (p=0,1,\dots,m). \qquad /24/$$

В соотношениях /2I/, /23/, /24/ $\mathcal{K}_{pi}(x,s)$, $\bar{\mathcal{K}}_p(x,s)$ $(x_0 \le s \le x \le x_0+l)$ - положительные, ограниченные вектор-функции. Производная $\frac{\partial^p f_k}{\partial x^k}$ в формулах /22/, /24/ определяется путем дифференцирования p раз по x равенства /I9/, а $y_{k,i-1}(x_{ki})$ в /22/ вычисляются по второй и третьей формулам соотношения /I7/.

Из этой теоремы следует, что если на каждом шаге промежутка интегрирования при фиксированном значении $x \in \mathcal{J}_i$ вектор-функция $\bar{\varphi}_k(x)$ вычисляется по формулам вида Рунге-Кутта, имеющих локальную погрешность порядка $O(h^{m+5})$ /а, следовательно, и вектор-функция $\bar{\sigma}_k(x)$ в силу соотношения /I5/ с той же самой точностью/, то приближение $\bar{\tau}$ решения $\tau(x)$ уравнения /I/ в любой узловой точке промежутка интегрирования, кроме первой, вычисляется с погрешностью порядка $O(h^{m+4})$, а в первой узловой точке - с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$.

В § 3 дается другой подход к оценке локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта. Для этого используется идея Гурьянова [3], устанавливающая связь между методами вида Рунге-Кутта и Пикара. Это позволяет получить оценку локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта, в которой используется оценка погрешности формул численных квадратур. В этом же параграфе получена оценка локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта, независимая от оценки погрешности квадратурных формул, в предположении, что на подинтегральную вектор-функцию наложено ограничение,

обеспечивающее существование и единственность решения интегрального уравнения типа Вольтерра.

Справедливы такие предложения.

ТЕОРЕМА 2.3.I. Если вектор-функция $f[x,s,y(s)]$ уравнения/3/ непрерывна по всем своим аргументам в области $\mathcal{D}_3$: $x_0 \le x \le x_0+L$, $x_0 \le s \le x$, $\|y\| \le b$, а, значит, и ограничена, то есть

$$\|f[x,s,y(s)]\| \le \bar{N},$$

и, кроме того, удовлетворяет в $\mathcal{D}_3$ условию Липшица по третьему аргументу

$$|f[x,s,y_1(s)] - f[x,s,y_2(s)]| \le \bar{K}_0(x,s)|y_1(s)-y_2(s)|,$$

то существует единственное, непрерывное по s и непрерывно зависящее от x семейство вектор-функций $\psi(x,s)$, удовлетворяющих уравнению

$$\psi(x,s) = \int_{x_0}^{s} f[x,u,y(u)]du, \quad x \in \mathcal{I}_1, \; s \in [x_0; x_0+\bar{L}], \; \bar{L} = \min\left[L; \frac{b}{\bar{N}}\right], \qquad /25/$$

где

$$y(u) = \int_{x_0}^{u} f[u,t,y(t)]dt, \quad y(x_0) = 0 \qquad /26/$$

Доказательство существования $\psi(x,s)$ осуществлено методом последовательных приближений.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Если выполняется равенство

$$y_0(t) = y(x_0) = 0,$$

где $y_0(t)$ – нулевое приближение в методе Пикара, то решение уравнений /25/, /26/ методом вида Рунге-Кутта, имеющего

локальную погрешность порядка $O(h^{m+s})$,

$$\bar{\psi}(x, x_0+h) \equiv \bar{\psi}(x,s) = h\sum_{k=1}^{3} A_{3k} f[x, x_0+d_k h, y_{0k-1}(x_0+d_k h)], \qquad /27/$$

$$y_{03}(s) = h\sum_{k=1}^{3} A_{3k} f[s, x_0+d_k h, y_{0k-1}(x_0+d_k h)] \quad (h = s - x_0),$$

где

$$y_{00}(x_0+d_1 h) = 0,$$

$$y_{0k}(x_0+d_{k+1}h) = h\sum_{p=1}^{k} A_{kp} f[x_0+d_{k+1}h, x_0+d_p h, y_{0p-1}(x_0+d_p h)],$$

получается из решения тех же уравнений методом Пикара

$$\psi_3(x,s) = \int_{x_0}^{s} f[x, u, y_2(u)]\,du, \qquad /28/$$

$$y_3(u) = \int_{x_0}^{u} f[u, t, y_2(t)]\,dt \qquad /29/$$

путем последовательной замены интегралов в /28/, /29/ численными квадратурами полуоткрытого типа. /Здесь через $s = x_0 + h$ обозначена первая узловая точка промежутка $\mathcal{J}_L$, разделенного на ℓ_1 частей длины h /.

Принимая во внимание теоремы 2.3.I, 2.3.2 и предполагая, что $y_0(u) \neq y(x_0) = 0$, локальная погрешность метода вида Рунге-Кутта оценивается следующим образом:

$$\|\varepsilon(x,s)\| \le \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{K}h)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\lambda} \frac{(\mathcal{K}h)^i}{i!}\right] \|y_1 - y_0\| + \alpha, \qquad /30/$$

где α - погрешность формул численных квадратур, примененных в методе вида Рунге-Кутта,

$$y_1(u) = \int_{x_0}^{u} f[u, t, y_0(t)]\,dt.$$

Недостаток оценки /30/ заключается в наличии величины $\mathcal{L}$. В диссертаций получена и другая оценка локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта

$$\|\varepsilon(x,s)\| \le \left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mathcal{H}h)^i}{i!} - 1\right]\|y_1(u) - y_{03}(u)\| + \|\Psi_1 - \bar{\Psi}\| \qquad /3I/$$

в предположении, что подынтегральная вектор-функция $f[x,s,y(s)]$ уравнения /3/ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.I.

В неравенстве /3I/

$$y_1(u) = \int_{y_0}^{u} f[u,t,y_{03}(t)]dt,\quad \Psi_1(x,s) = \int_{y_0}^{s} f[x,u,y_{03}(u)]du,\quad y_0(t) = y_{03}(t),$$
$$u \in [x_0; s],\quad x \in \mathcal{Y}_L.$$

Оценка /3I/ не содержит в себе погрешности квадратурных формул $\mathcal{L}$.

В этом же параграфе определены условия, выполнение которых обеспечивает принадлежность $y_{03}(s)$, $\bar{\Psi}(x,s)$ некоторой области $\mathcal{D}_Y' \subset \mathcal{D}_Y$: $x_0 \le x \le x_0+L$, $x_0 \le s \le x_0+\bar{L}$, $\|\Psi(x,s)\| \le \mathcal{B}$.

Предполагая, что вектор-функция $H[x,s,\tau(s)]$ в области $\mathcal{D}_3$ непрерывно дифференцируема до $m+\gamma$-го порядка включительно и имеет непрерывную частную производную $m+\sigma$-го порядка по первому аргументу, далее показано, что порядок малости локальной погрешности метода вида Рунге-Кутта сохраняется, если пользоваться оценкой /3I/, то есть правая часть неравенства /3I/ представляется в виде произведения двух величин, где в роли одной выступает $h^{m+\sigma}$, в роли другой - некоторая константа $M_{m\sigma}$. Кроме того, установлено, что порядок малости погрешности метода вида Рунге-Кутта равен порядку малости погрешности метода последовательных приближений для случая, когда нулевое приближение совпадает со значением решения в начальной

точке промежутка интегрирования.

В третьей главе рассматриваются вопросы обоснования применения формул вида Рунге-Кутта с локальной погрешностью порядка $O(h^{m+5})$, предложенных фельбергом [I7] для приближенного решения задачи Коши для системы о-быкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, к приближенному решению системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра / эти формулы будем называть формулами Рунге-Кутта-фельберга/ .

В §§ I-3 показано, что, применяя соответствующим образом формулы Рунге-Кутта-Фельберга к приближенному решению векторного уравнения /I/, можно получить приближенное значение решения этого уравнения на первом шаге с погрешностью порядка $O(h^{m+5})$, а после конечного числа шагов - с погрешностью порядка $O(h^{m+4})$.

В § 4 дается алгоритм решения одного нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра методом вида Рунге-Кутта, локальная погрешность которого порядка $O(h^3)$ /это соответствует $m=2$ /, а также блок-схема этого алгоритма.

Эффективность построенных формул вида Рунге-Кутта высокого порядка точности иллюстрируется двумя примерами. Одним из примеров является задача о нелинейных колебаниях системы двух пружин, выведенной из состояния равновесия [6, I5] . Эта задача сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра, которое численно решалось на ЭВМ "Минск-I" с удвоенной точностью методом вида Рунге-Кутта, локальная погрешность которого имеет порядок $O(h^{m+5})$ для $m = 2,3$.

Это же уравнение решалось обычным методом Рунге-Кутта с локальной погрешностью порядка $O(h^{m+5})$, предложенным для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра Пузе [I8].

Установлено, что для достижения одинаковой точности приближенного решения в случае использования формул вида Рунге-Кутта с локальной погрешностью порядка $O(h^7)$, $O(h^6)$, предложенных в главе I, требуется затратить меньше машинного времени по сравнению со случаем, когда используются формулы Рунге-Кутта, предложенные Пузе [I8].

В четвертой главе методом вида Рунге-Кутта, имеющим локальную погрешность порядка $O(h^7)$, решается задача Коши для нелинейного и.-д.у. типа Вольтерра вида

$$z'(x) = \psi\left[x, z(x), \int_{x_0}^{x} g_1[x, s, z(s), z'(s)]\,ds\right] \qquad /32/$$

с начальным условием

$$z\big|_{x=x_0} = z_0 . \qquad /33/$$

В §§ I, 2 строятся формулы вида Рунге-Кутта, позволяющие получить приближенное решение задачи /32/, /33/ и его производной в первой узловой точке с погрешностью порядка $O(h^7)$.

§ 3 содержит вывод формул, с помощью которых ищутся приближенные значения решения и его производной в любой узловой точке промежутка интегрирования.

В § 4 рассматриваются вопросы оценок локальной и полной погрешности предлагаемого метода вида Рунге-Кутта. Доказано, что при определенных ограничениях, налагаемых на функции,

входящие в уравнение /32/, локальная погрешность приближенных значений решения и производной от решения, полученных с помощью формул вида Рунге-Кутта шестого порядка точности, по модулю не превышает величины $h^7 \cdot T$, где T - положительная константа, выражающаяся через известные величины. Здесь же доказано, что если на каждом шаге использовать формулы вида Рунге-Кутта, имеющие локальную погрешность порядка $O(h^7)$, то в любой узловой точке промежутка интегрирования, кроме первой, приближение для решения и производной от решения находится с погрешностью порядка $O(h^6)$, а в первой узловой точке - с погрешностью порядка $O(h^7)$.

В § 5 приводятся численные результаты решения задачи Коши для нелинейного и.-д.у. первого порядка предложенным методом вида Рунге-Кутта, имеющим локальную погрешность порядка $O(h^7)$.

Основные результаты диссертации изложены в работах [7-I2] и докладывались на IУ Республиканской научной конференции молодых математиков Украины /Институт математики АН УССР, Киев, I968 г./, на Республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям /Киевский государственный педагогический институт им.А.М.Горького, I967 г./, на научном семинаре кафедры вычислительной математики Московского авиационного института под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.К.Саульева, на научной конференции кафедр Киевского педагогического института им. А.М.Горького /I967/ ,

на Республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям /Одесский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени И.И.Мечникова, I8-2I сентября I968 г./.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. ВЕЛЬТИЩОВ В.А. - Аналог метода Рунге-Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, Дифференциальные уравнения, I, № 4, I965, 545-556.

2. БРИЛЛЮЭН Л. - Квантовая статистика. К-Х, ГНТИ, I934.

3. ГУРЬЯНОВ В.М. - Оценка погрешности метода Рунге-Кутта, Вычислительные методы и программирование для ЭВМ "Урал-2", "Урал-4", Сборник статей, Изд-во Саратовского ун-та, I968 г.

4. КРЫЛОВ В.И. - Приложение формулы Эйлера-Лапласа к приближенному решению интегральных уравнений типа Вольтерра, Труды математического института им.В.А.Стеклова АН СССР, т.XXУШ, I949, 33-72.

5. КАБУЛОВ В.К. - К исследованию колебания балок с помощью интегральных уравнений типа Вольтерра, ДАН УзССР, № II, I956, II-I6.

6. КОЛЛАТЦ Л. - Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., ИЛ, I953.

7. ЛОМАКОВИЧ А.Н., ВАСИЛЕНКО А.П. - Решение интегральных уравнений типа Вольтерра методом вида Рунге-Кутта, Дифференциальные уравнения, т.IУ, №II, 1968, 2094-2102.

8. ЛОМАКОВИЧ А.М. - Розв"язування інтегральних рівнянь типу Вольтерра методом Рунге-Кутта-Фельберга, ДАН УРСР, серія А, фіз.-техн. та матем. науки, № 4, 1969, 307-310.

9. ЛОМАКОВИЧ А.Н. - Решение интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом Рунге-Кутта-фельберга, Вычислительная и прикладная математика, вып.7, 1969, 64-76.

10. ЛОМАКОВИЧ А.М. - Розв"язування інтегральних рівнянь типу Вольтерра методом, що є модифікацією методу Рунге-Кутта, Четверта наукова конференція молодих математиків України, К., 1968, 269-270.

11. ЛОМАКОВИЧ А.Н. - Формулы высокого порядка точности вида Рунге-Кутта для приближенного решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, Материалы Республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям, Одесса, 1968, 194-196.

I2. ЛОМАКОВИЧ А.М. – Наближені методи розв"язування інтегральних рівнянь типу вольтерра, Звітно-наукова конференція кафедр інституту, тези доповідей, фізико-математичні науки, Київський державний педагогічний інститут им.О.М.Горького, К., I967, 54-55.

I3. МИКЕЛАДЗЕ Ш.Е. – Новые методы интегрирования дифференциальнных уравнений и их приложения к задачам теории упругости, М-Л, Гос.изд-во техн.теорет.лит., I95I .

I4. РОЗОВСКИЙ М.И. – Ползучесть и длительное разрушение материалов, Журнал технической физики, т.XXI, вып.П, I95I.

I5. СОКОЛОВ К.Д. – Метод осреднения функциональных поправок, К., Изд-во "Наукова думка", I967.

16. Sparo F. – Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Volterra di seconda specie, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, XXVI, 1959, 188-188.

17. Fehlberg E. – New High-Order Runge-Kutta Formulas with Step Size Control for Systems of First-and Second-Order, Z. angew. Math. und Mech., 44, 1964, S. T17-29.

18. Pouzet P. – Etude, en vue de leur traitement numerique des equations integrales de type Volterra, Chiffres, 6, 1963, 79-112.

БИ 00018. 2.II.70. Об"ем 1,5 печ.л. Зак. 2157 - 150
Книжная типография № 5. Киев, Репина, 4.