Український державний
університет
імені Михайла Драгоманова

Факультет математики,
інформатики та фізики

Кафедра методики навчання математики

В. О. ШВЕЦЬ

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ У НОВІЙ УКРАЇНСЬКІЙ ШКОЛІ.

МОНОГРАФІЯ



Київ 2026

УДК 373.5.016:519.651]:37.014.3НУШ
Ш 35

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
УДУ імені Михайла Драгоманова
(протокол № 11 від 30 квітня 2026 р.)

Рецензенти:
Лукашова Т. Д., доктор фізико-математичних наук, професор, Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка;
Хапко Р. С., доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський державний університет імені І. Я. Франка;
Пихтар М. П., кандидат педагогічних наук, доцент, Український державний університет імені Михайла Драгоманова.

Швець В. О.
Наближені обчислення у Новій українській школі. Монографія / В. О. Швець. – К.: Видавництво УДУ імені Михайла Драгоманова, 2026. 323 с.

ISBN 978-966-931-353-9

У монографії розкрито теоретичні основи і методичні рекомендації вивчення наближених обчислень у курсі математики в закладах загальної середньої освіти.

Для вчителів математики та здобувачів вищої освіти, які готуються до педагогічної діяльності, для викладачів методики навчання математики, аспірантів, які проводять наукові дослідження з теорії та методики навчання математики.

ISBN 978-966-931-353-9
© Швець В.О., 2026
© Український державний університет імені Михайла Драгоманова, 2026

ЗМІСТ

Передмова ……..... 6
Перелік умовних позначень ……... 10
Розділ І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ……..... 11
1.1. Короткий ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень у шкільному курсі математики ……..... 11
1.2. Сучасний стан вивчення наближених обчислень в школах України …… 29
1.3. Наближені обчислення: основні визначення, терміни, позначення і методи наближених обчислень 46
1.3.1. Основні визначення, терміни і позначення … 46
1.3.2. Методи наближених обчислень …….. 53
1.3.2.1. Метод меж …….. 53
1.3.2.2. Метод підрахунку цифр …… 61
1.3.2.3. Метод меж похибок ……... 64
1.4. Концептуальна модель вивчення наближених обчислень у Новій українській школі ……... 74
Розділ ІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗДОБУВАЧІВ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ ……... 85
2.1. Вивчення наближених обчислень у курсі математики 5–6-х класів ……... 85
2.1.1. Вимоги до математичної підготовки учнів та шляхи їх досягнення …….. 85
2.1.2. Подання навчального матеріалу з наближених обчислень …….. 91
2.2. Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 7–9-х класів ……. 121

2.2.1. Методичні особливості викладення навчального матеріалу з наближених обчислень у 7–9-х класах ……... 121
2.2.2. Розгортання навчального матеріалу з наближених обчислень та його дидактичне наповнення у 7–8-х класах ……... 132
2.2.3. Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 9 класу …….. 157
2.3. Дидактичні матеріали для практичного використання в базовій середній школі ……... 181
2.3.1. Логіко-дидактичні схеми ……. 181
2.3.2. Приклади розв'язування доцільних задач на наближені обчислення методом меж …….. 185
2.3.2.1. Віднімання наближених чисел ……. 185
2.3.2.2. Множення наближених чисел …….. 187
2.3.2.3. Ділення наближених чисел ……... 188
2.3.3. Добірки задач на наближені обчислення для формування обчислювальних вмінь і навичок ….... 190
2.3.4. Організаційна модель проєктної діяльності учнів базової середній школи під час вивчення наближених обчислень 206
2.3.5. Організаційна модель проведення гри «Хто найкращий вимірювач?» ……. 212
Розділ ІІІ. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗДОБУВАЧІВ ПРОФІЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ ……..... 219
3.1. Цілі і зміст вивчення наближених обчислень в профільній середній школі. Метод меж похибок …… 219
3.2. Наближені обчислення під час вивчення змістової лінії «Функції і їх графіки» ……... 221
3.2.1. Наближені обчислення значень функцій ….. 221

3.2.2. Обчислення значень виразів, що містять вказані в програмі з математики функції ……..... 229
3.3. Наближені обчислення під час вивчення рівнянь і нерівностей …… 255
3.4. Наближені обчислення під час вивчення похідної та інтеграла …….. 268
3.5. Наближені обчислення під час вивчення стереометрії ……. 279
3.6. Дидактичні матеріали для практичного використання в профільній середній школі ……..... 282
3.6.1. Розрахунково-графічні роботи ……..... 282
3.6.2. Практичні роботи на обчислення значень функцій, виразів ……. 288
3.6.3. Добірки задач і вправ для практичних занять з наближених обчислень …… 292
Післяслово ……... 312
Список використаних джерел ……..... 314

ПЕРЕДМОВА

Одним із пріоритетних завдань сучасної шкільної освіти, а також і математичної зокрема, є виховання особистості зі сформованими компетентностями, здатної застосовувати отримані знання у реальних життєвих умовах.

Однією з таких математичних компетентностей, яка насправді має стати **міжпредметною компетентністю**, є обчислювальна, нею окреслюється **готовність** і **здатність** учня виконувати обчислення, вручну чи за допомогою сучасних обчислювальних засобів, як з точними так і, що особливо важливо, з наближеними значеннями чисел і величин.

Сучасних інженерів, техніків, архітекторів, фахівців інших спеціальностей, математика цікавить, насамперед, як засіб розв'язування практичних та прикладних задач, що виникають у їхній професійній діяльності. Під час розв'язування таких задач використовуються різні математичні моделі.

Зазвичай явища, які при цьому описуються, є надто складними. Математична модель має охоплювати усі суттєві їх властивості. Якщо ж модель створена спрощено, то результати, що будуть отримані в процесі її застосування, матимуть низьку ступінь надійності, а в окремих випадках взагалі ненадійними.

Для уникнення зазначених проблем під час розв'язування практичних та прикладних задач застосовуються методи наближених обчислень, оскільки розв'язування реальної прикладної задачі передбачає, що не всі дані в умовах числові значення величин є точними, а взяті з певною точністю.

Під час виконання обчислень з наближеними даними величин та чисел виникає дві взаємо протилежних проблеми:

- якщо значення величин та чисел виражені наближеними числами, то як визначити точність отриманого результату обчислення;
- якщо вказується, що результат має бути з заданою наперед точністю, то з якою точністю слід брати дані для його знаходження.

Перша з проблем є актуальною і вирішується під час навчання математики в закладах загальної середньої освіти. Друга, за потреби, у закладах вищої освіти, під час підготови фахівців окремих спеціальностей.

У різний час шкільний курс математики містив у достатньому обсязі відомості з теорії наближених обчислень, проте нині питання вивчення наближених обчислень, у силу різних причин, втратило свою актуальність. Це негативно позначається на підготовці учнів не лише з математики, а й з суміжних навчальних дисциплін.

З метою з'ясувати стан оволодіння учнями і вчителями математики вміннями і навичками виконувати наближені обчислення нами упродовж 2012–2018 рр. у Чернівецькій області був проведений констатувальний педагогічний експеримент.

На початковому етапі експерименту анкетувалося понад 400 вчителів та близько 280 учнів, яким пропонувалася діагностична контрольна робота, яка містила завдання на виконання наближених обчислень. Результати виявилися вражаючими! Так, наприклад, **серед учителів** 28,2 % респондентів неправильно знайшли значення відносної похибки наближених чисел, 97 % не

використовують правила наближених обчислень під час виконання кількох дій над наближеними числами, 69 % формально розв'язували задачу прикладного змісту, дані в якій були наближеними значеннями величин. **Серед учнів** 58,5 % респондентів навіть не приступали до знаходження абсолютної та відносної похибок, 88,5 % неправильно знайшли значення числового виразу на три дії, 97,3 % не зуміли розв'язати прикладну задачу з урахуванням похибки вимірювань та обчислень.

Усе вище сказане вказує на те, що в сучасних програмах з математики для закладів загальної середньої освіти та в підручниках з математики наближені обчислення мають бути представлені як самостійна змістова лінія шкільного курсу математики, чого поки що немає.

До основних проблем, які має вирішувати впровадження навчання наближених обчислень у шкільний курс математики належать:

- визначення того, наскільки «точними» є наближені дані в умові задачі;
- як правильно виконувати дії над наближеними даними;
- який метод наближених обчислень доцільно обрати для обчислень у конкретній ситуації;
- як визначити, наскільки близьким до точного значення є отриманий результат;
- як навчити учнів виконувати наближені обчислення під час розв'язування практичних та прикладних задач.

Пропонована монографія якраз і містить теоретичні та методичні рекомендації щодо навчання наближених обчислень у Новій українській школі з урахуванням того, що такі обчислення повинні виконуватись з використанням

сучасних обчислювальних засобів (калькуляторів, комп'ютерів, тощо). В основу монографії покладено результати дисертаційних досліджень В. М. Кліндухової (2008 р.) та І. В. Жук (2015 р.), а також дослідження їх наукового керівника професора В. О. Швеця.

Буду вдячний за відгуки, поради щодо покращення монографії, конструктивну критику, які прошу надсилати на адресу: 01601, *м. Київ, вул. Пирогова*, 9. *УДУ імені Михайла Драгоманова, кафедра методики навчання математики.*

З повагою, В. О. Швець

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

НУШ	Нова українська школа
ЗЗСО	заклад загальної середньої освіти
НО	наближені обчислення
ППРЦ	правило підрахунку правильних цифр
МПЦ	метод підрахунку цифр
ММ	метод меж
ММП	метод меж похибок
МК	мікрокалькулятор
ПК	персональний комп’ютер
ШКМ	шкільний курс математики
ІКТ	інформаційно комунікаційні технології
$\boldsymbol{a}$	точне значення деякої величини, числа
$\boldsymbol{b}$	наближене значення деякої величини, числа
$\boldsymbol{\Delta b}$	абсолютна похибка наближеного числа b
$\boldsymbol{h_b}$	межа абсолютної похибки наближеного числа b
$\boldsymbol{НМ_a}$	нижня межа проміжку, якому належить число a
$\boldsymbol{ВМ_a}$	верхня межа проміжку, якому належить число a
$\boldsymbol{\delta_b}$	відносна похибка наближеного числа b
$\boldsymbol{\varepsilon_b}$	межа відносної похибки наближеного числа b
$\boldsymbol{\tau}$	точність наближення числа b до числа a

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

1.1 Короткий ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень у шкільному курсі математики

За словами відомого німецького математика Г. В. Лейбніца той, хто хоче обмежитись нинішнім, без знання минулого, ніколи його не зрозуміє. **Наближені обчислення** (надалі НО) вивчаються в школі давно. Аналізуючи навчальну, науково-методичну літературу, періодичні видання, а також програми з математики різних років, робимо висновок, що на різних історичних етапах їх представлення в **шкільному курсі математики** (надалі ШКМ) різне. Під різним представленням ми розуміємо зміни, які стосувалися місця в програмі, мети вивчення та змісту НО, які знаходили своє відображення в ШКМ. Такі зміни були невипадковими. В основному вони ініціювалися станом розвитку обчислювальної техніки, вимогами суспільства до математичної підготовки підростаючого покоління, а також традиціями, які в той чи інший період панували у методиці навчання математики в школі.

Комплексний вплив названих факторів був і причиною, і рушійною силою перебудови вивчення НО в ШКМ як складової реформування шкільної математичної освіти. Саме з огляду на загальновідомі витки реформування шкільного курсу математики нами і був проведений короткий ретроспективний аналіз проблеми вивчення НО в школі. В результаті було виділено чотири етапи її розвитку.

Перший – **етап фрагментарних згадок** про НО в шкільному курсі математики до початку 1960-х років.

Другий – **етап реформування шкільної математичної освіти напочатку 1960-х років.**

Третій – **етап реформування шкільної математичної освіти наприкінці 1960-х і напочатку 1970-х років.**

Четвертий – **етап реформування шкільної математичної освіти наприкінці 1970-х і напочатку 1990-х років**.

Зупинимось детальніше на аналізі всіх вищеназваних етапів. Його основною метою буде виявлення причин та наслідків, переваг та недоліків, досягнень та «глухих кутів», які супроводжували вивчення НО в ШКМ. З'ясування цих принципових питань допоможе, по-перше, запобігти помилок минулого, а по-друге, трансформувати певні досягнення минулого в сучасний навчальний процес відповідно до вимог сьогодення.

Початком першого етапу можна вважати середину XIX ст., тобто час, коли почали з'являтись думки про те, що НО можуть і повинні стати складовою математичної освіти. На це вказують публікації в наукових виданнях, а також навчальні посібники, які вийшли в світ у цей період. Згадка про них, їх зміст та аналіз наведено у роботах В. М. Брадіса, І. Б. Лобанова та О. П. Долгушина. Зокрема йдеться про статті «Теория численних приближений» В. І. Бернса (1857 р.); «Вычисления по приближению» Ф. Сімашко (1857 р.); «Приближенные вычисления» А. А. Леве (1884 р.) а також «Два правила приближеннях вичислений» В. Л. Єрмакова (1894 р.). Що ж стосується навчальних посібників того часу, то вони мали різний рівень доступності навчального матеріалу. Одні з них, зокрема «Краткий очерк теории приближенных вычислений, поясненний примерами и задачами из геометрии» Н. Желеховського (1880 р.) та «Лекции о приближенных вычислениях» О. М. Крилова (1911 р.), відзначалися строгістю подання матеріалу і були розраховані на математично підготовлених читачів. Інші – призначалися

для середніх навчальних закладів та самоосвіти вчителів. Вони містили спрощений виклад теоретичного та практичного матеріалу, який супроводжувався нестрогими обґрунтуваннями та численними прикладами. До останніх можна віднести «Приближеные вычисления» В. Н. Єрмакова (1894 р.) та П. М. Гончарова (1905 р.); «Вычисление формул по данному приближению» Н. С. Соколова (1898 р.); «Теория и практика элементарных приближенных вычислений» В. М. Філіпова (1909 р.) та «Практические вычисления» С. Придатко (1915 р.). Аналізуючи перші три з них і порівнюючи з аналогічними зарубіжними виданнями, П. О. Долгушин вказував що вони були недосконалими як в науковому, так і в методичному плані, містили ряд істотних помилок та хибних висновків. У своїй роботі він намагається уникнути вказаних недоліків, зокрема, узагальнюючи власний десятирічний досвід викладання НО, а також презентує розроблену ним теорію приросту, яка є дуже близькою до сучасного методу меж.

Відомий підручник арифметики того періоду А. П. Кисельова також містив відомості з НО. Уперше він був опублікований у 1884 р. і вже, починаючи з четвертого видання, містив параграф «Наближені обчислення». Запропоновані в ньому правила, на думку В. М. Брадіса, виявилися надто громіздкими, через що і «не прижилися на практиці». У подальших перевиданнях книги тема «Наближені обчислення» не була представлена.

На початку XX ст. публікуються роботи П. О. Долгушина «Вычисления по приближению» (1908 р.) та Н. М. Абрамова «Краткие сведения о приближенных вычислениях» (1909 р.). Що стосується навчальних програм, то НО окремими темами містяться у програмах 1908 р. та 1918 р., а також у програмах педагогічно-експериментальних періодів 1920-х років.

У роботах дослідників часто згадується про відображення НО в програмах з математики, які складено на основі так званої «схеми ГУСа» (Государственного ученого совета Наркомпроса). У програми з математики, які прийшли на зміну програмам ГУСа, НО не були включеними. У публікаціях того часу (30-ті рр. XX ст.), присвячених критичним оглядам нових програм, можна знайти зауваження і щодо відсутності в них НО. Так, на науково-методичній нараді вчителів математики середньої школи, яка проводилась у 1935 році, одна із доповідей була присвячена обговоренню питання про те, чи необхідно питання про НО розглядати як окремий розділ і в якому класі це слід робити.

Аналізуючи причини вилучення НО із ШКМ на даному історичному етапі, дослідники констатували наявність різних точок зору з цього приводу. На думку одних – НО є недоступними для розуміння учнів, а розробка методики їх вивчення в школі є проблемою, яка принципово не може бути вирішеною. Інші вважали, що вивчення НО в школі є вкрай бажаним, але неможливим через брак часу та перевантаження навчальних програм (зокрема, такої думки дотримувались автори «Методики викладання математики» за редакцією С. Є. Ляпіна та С. В. Філічєва). І. М. Кавун та А. В. Суткова вважали, що основною причиною вилучень НО із ШКМ стала недостатня кількість методичної літератури, а також формальний підхід під час складання програм того часу. Брадіс В. М. заперечує цю думку. Натомість висуває гіпотезу про так звану «силу традицій», згідно якої НО «не вписувались» у шкільну програму з математики. На це вказує і досить великий перелік навчально-методичної літератури та публікацій того часу з НО. Зокрема дослідники згадують статті П. О. Долгушина (1925 р.), В. С. Галицького (1926 р.), В. Балаліна (1928 р.), К. Вольвевра (1929 р.), В. І. Грибанова (1938 р.), а також

роботи А. Д. Фандер Фліта (1922 р.), Д. Селіванова (1922 р.), Е. А. Ремеза (1923 р.), А. П. Рудіна (1924 р.), І. Н. Богословського (1925 р.), Я. С. Безиковича та А. Фрідмана (1925, 1941 р.р.), М. І. Щетініна (1926 р.), І. Н. Овчиннікова (1928 р.), А. Є. Міловідова (1931 р.), Б. А. Тулінова та Я. Ф. Чєкмарьова (1940 р.). Деякі роботи того періоду збереглися і до нині.

Робота І. М. Кавуна [62] вважається дослідниками найбільш повним та систематизованим курсом НО того часу. Посилання на неї можна зустріти майже в кожному дослідженні з НО і нині. Особливої уваги заслуговують роботи В. М. Брадіса, які почали виходити починаючи з 1924 року та були розраховані як на студентство, так на учнів різного віку. Детальний аналіз робіт В. М. Брадіса наводиться ним самим [54], [55] а також у дисертаційному дослідженні І. В. Лобанова.

Роблячи висновок зазначимо, що по завершенню першого етапу, який хронологічно об'єднує період з середини XIX ст. до середини XX ст., **так і не було створено цілісної, науково обґрунтованої методичної системи вивчення НО у ШКМ.** Але епізодичні спроби викладання відомостей з НО у різних навчальних закладах, науково-дослідницька робота відомих вчених, а також їх опубліковані роботи поклали початок і стали першоосновою подальшого розвитку НО як складової ШКМ.

Початком другого етапу можна вважати публікацію відомої статті П. С. Александрова та А. М. Колмогорова [80] у 1941 році. Вона являла собою один із розділів майбутнього шкільного підручника з алгебри і містила розробку введення усіх трьох основних методів НО. Через трагічні події повоєнного періоду повернутися до розглядання проблеми вивчення НО у ШКМ стало можливим лише на початку 1950-х рр. У цей період

відбувається два послідовні витки реформування математичної освіти: перший у середині 1950-х років, а другий – напочатку 1960-х років.

У статтях, які були опубліковані до 1954 року (тобто до початку першого реформування), автори, констатуючи невирішеність проблеми визначення місця, обсягу та методичного забезпечення НО в школі, пропонували власні методичні розробки. Спільною рисою таких розробок була прихильність виключно до методів нестрогого врахування похибок, а також критика «круглих відповідей», які домінували в шкільних підручниках та задачниках.

Питання знаходження навчального часу на вивчення НО кожен з авторів вирішував по-своєму. Так С. В. Філічєв пропонував використовувати час, що вивільниться за рахунок перенесення певної частини матеріалу із 5-го у 6-й клас (мова йде про 1946–1947 н.р.). М. Г. Васильєв у серії своїх статей пропонував систему бесід, які мають супроводжувати програмовий матеріал. В. І. Грибанов [59] тему «Наближені обчислення» (15-20 год) планував реалізувати за рахунок супутніх тем 5-го класу, а також економії часу, яка, на його думку, обов'язково повинна відбутися під час подальшої раціоналізації обчислень.

Усі вищеназвані автори вказували на непідготовленість учителів до викладання НО. До їх думки приєднується також і А. В. Суткова, присвячуючи детальному аналізу цього питання один із параграфів свого дисертаційного дослідження [44]. На цій проблемі наголошував також В. М. Брадіс. Він пропонував для її вирішення програму з елементарної математики для І курсу студентів фізико-математичних факультетів, яка містила розділ «Теорія і практика обчислень», а для вчителів-практиків методичні посібники власного авторства. У першому з них увага приділялася виключно методиці введення **правил підрахунку правильних цифр** (надалі ППРЦ) (звісно

окрім методики введення основних понять), а вже в другому – висвітлені усі три основні методи НО: ПППЦ; метод меж; метод меж похибок.

Нова програма з математики 1954 року не передбачала введення НО. Саме тому провідною ідеєю публікацій післяреформеного періоду стала думка про те, що впровадження політехнічного навчання є неможливим без НО, а їх відсутність в ШКМ є прямим порушенням вимог нової програми щодо посилення взаємозв'язків теорії з практикою. Аналогічними ідеями були пронизані й дисертаційні дослідження цього періоду, зокрема ті з них, які частково або повністю присвячувалися проблемам вивчення НО в ШКМ (В. І. Грибанов, В. М. Брадіс, О. С. Дубинчук [48], І. Б. Лобанов [52]).

Методична література міжреформеного періоду (після реформи 1954 р. і до початку 1960 р.) представлена роботами О. В .Грошева, Б. Є. Дворкіна, Б. М. Брєдіхіна, В. Г. Соболєвої та І. К. Шевченка. У своїх роботах ці автори розглядають провідні поняття, а також пропонують розподіл матеріалу з НО, починаючи з п'ятого класу. Термінологія, яку використовують автори, значною мірою різниться, як власне і методи НО, які вони пропонують для вивчення. Так В. Г. Соболєва та І. К. Шевченко пропонували обмежитися вивченням лише методів з нестрогим врахуванням похибок. О. В. Грошев окрім цього допускає також вивчення методу меж у старших класах. Б. М. Брєдіхін та Б. Є. Дворкін розглядають у своїх роботах методи зі строгим врахуванням похибок (метод меж та метод меж похибок відповідно), а вже базуючись на них, пропонують ПППЦ, які вони як і деякі інші дослідники того часу називають практичними правилами НО.

У 1959-1960 рр. відбувається публікація проекту шкільної програми з математики, а також і самої програми. У них розділом «Наближені обчислення» розпочиналося

вивчення математики у 6 класі. Згідно проекту для цього відводилось 12 год, а вже згідно остаточної програми – 16 год. Основним і єдиним методом НО пропонувались ППЦ.

Публікація зазначених нормативних документів супроводжувалась широким дискусійним обговоренням на сторінках періодичних видань. Майже половина статей містила позитивні відгуки щодо введення НО в ШКМ, інші – взагалі не торкалися цієї проблеми. У вказаних позитивних відгуках мали місце і певні зауваження. Зокрема йшлося про недостатню конкретику у вказівках та вимогах програми щодо поступового та систематичного ознайомлення учнів із НО протягом навчання в основній та старшій школах, а також під час розкриття джерел отримання наближених значень. Ряд інших публікацій були відображенням роботи передових вчителів та методистів. У них автори, зокрема Ф. О. Горбушин, К. І. Нєшков, М. В. Парцхаладзе, В. І. Бєляєв та інші висвітлювали свій досвід викладання НО в школі та вносили конкретні методичні пропозиції. Щодо розподілу навчального матеріалу з НО за роками навчання, то в статтях, які передували офіційному плануванню, він є авторським і значною мірою різниться. А вже після публікації нової програми з математики автори повністю узгоджують власне планування матеріалу з офіційними вимогами.

Аналогічна тематика відображена і на сторінках методичних посібників того часу. Зокрема у роботах В. М. Брадіса та В. І. Грибанова після ППЦ розглядається також і метод меж для його викладання у старших класах у зв'язку з темою «Нерівності», як це і передбачається програмою. Окрім цього, у роботі В. І. Грибанова наводиться порівняльний аналіз термінології та збірник задач з НО. Методичний інтерес являє собою також книга І. К. Андронова та В. М. Брадіса «Арифметика». За задумом авторів вона була призначена в якості підручника для

середньої школи. Однак враховуючи розбіжності її змісту з програмою, книга отримала статус посібника для вчителів. Методичні пошуки цього періоду представлені також роботами Н. П. Лещьової, В. Г. Прочухаєва та В. М. Брадіса, а також дисертаційними дослідженнями Ш. Н. Асанідзе, Р. А. Хабіба, А. В. Суткової, Н. Я. Прайсмана, Л. О. Бобильова, Н. Б. Єлізавєтіної. В них значна увага приділяється історії введення НО в ШКМ, аналізу термінології та навчально-методичної літератури. Якщо в роботах В. Г. Прочухаєва та В. М. Брадіса представлені усі три основні методи НО, то думки авторів дисертаційних досліджень з цього приводу різняться. Більшість з них, узгоджуючись з вимогами програми, займалися пошуками методологічних шляхів удосконалення їх впровадження. Наприклад, Р. А. Хабіб пропонував систематично використовувати практичні роботи на уроках математики, а також приділяти значну увагу «навчальним джерелам НО». Інші дослідники висловлювались або із різким запереченням введення в ШКМ методів зі строгим врахуванням похибок у межах восьмирічної школи (зокрема, Л. О. Бобильов), або, навпаки, вважали, що саме вони (точніше метод меж) повинні відігравати провідну роль в ШКМ (зокрема, Н. В. Єлизавєтіна).

Підсумовуючи зазначимо, що по завершенню другого етапу, який ми пов’язуємо з реформуваннями 1954 р. та 1960 р., було **досягнуто офіційного визнання і впровадження НО у ШКМ.** Однак при цьому проблема добору змісту НО в ШКМ, а відповідно і інших елементів системи навчання залишилася відкритою. Над її вирішенням продовжували активно працювати як вчені-методисти, так і вчителі-практики.

Своєрідним каталізатором модернізації шкільної математичної освіти (зокрема стосовно наявності в ній НО), а відповідно й початком третього етапу, стало ще напочатку

1960-х рр. оприлюднення результатів науково-методичних пошуків фахівців (наприклад Р. І. Матюгіна, Н. Я. Прайсман), а також результатів їх практичного впровадження та інші). Після невеликої перерви несміливі зауваження щодо проблемних моментів вивчення НО в ШКМ, набувають в 1964 р. масштабів всесоюзної дискусії, де висловлювалися діаметрально протилежні точки зору.

Зокрема, щодо змісту НО в ШКМ, то одні фахівці вважали, що ППТЦ є цілком науково та методично обґрунтованими і наполягали на його збереженні у шкільній математиці. Інші критикували імовірнісний характер ППТЦ, вважали його вивчення у ШКМ науково та методично недоцільним. Замість ППТЦ вони пропонували основним методом НО у ШКМ обрати метод меж.

Стосовно місця НО в ШКМ, то невдале їх засвоєння на початку 6-го класу одні з фахівців пов'язували з віковими особливостями учнів, інші – з недоліками методики введення теми. Саме тому перші з них пропонували перенести НО в 7-8 класи, а другі вважали можливим розпочинати вивчення цього розділу в 5 класі, але за певного методичного удосконалення.

Не дивлячись на розбіжність поглядів по вищенаведеним питанням учасники дискусії дійшли таких висновків. По-перше, на їх думку, учні не отримували достатньої пропедевтичної підготовки, що призводило до формування хибних стереотипів, а також ускладнювало вивчення теми в подальшому. По-друге, вони вважали, що необхідно внести ряд істотних змін, спрямованих на раціональніший добір та розміщення відповідного програмового навчального матеріалу: засуджувалася концентрація теоретичних відомостей у межах одного розділу, а також його розміщення напочатку навчального року. По-третє, за висновками дослідників, програми та навчальні посібники того часу не розкривали шляхів

подальшого застосування НО. Алегорично фахівці називали останній факт «відсутністю естафетної палички», за допомогою якої навички з НО починали б працювати.

У проєкті програми з математики 1967 р., а також у самій програмі 1968 р. було враховано перші два з вищенаведених зауважень: спроба пропедевтичної роботи відбувалася на початку основної школи; основний матеріал з НО певним чином розподілявся по 7 та 8 класах; вивчення НО відбувалося всередині навчального року; пропонувалося вивчення усіх трьох основних методів НО (метод меж у 7 класі, метод меж похибок та ПППЦ у 8 класі); на передові позиції виходили методи строгого врахування похибок, уособлюючи в собі як зміст навчання, так і засіб для доведення ПППЦ.

Публікація проєкту програми та самої програми з математики супроводжувалася жвавими обговореннями на сторінках періодичних видань, але цього разу в жодній зі статей не зустрічаємо матеріалу, який би стосувався НО, що пов’язано із поступовістю переходу на нові програми та підручники. Однією з основних задач реформування шкільної математики (у тому числі і НО) поставало встановлення відповідності ШКМ рівню наукових знань того часу і водночас усунення перевантажень школярів навчальними заняттями. У зв’язку з дим особлива увага під час навчання математики зверталася на більш наочне та елементарне введення понять, а також на необхідність збільшення кількості вправ на закріплення матеріалу.

Реформування шкільної математичної освіти кінця 1960-х початку 1970-х рр., так само, як і реформування попереднього періоду, гальмувалося так званою «кадровою проблемою». Більшість учителів виявилися неготовими працювати за новими програмами. Впровадження нового змісту навчання з НО вимагало від них певного рівня математичної підготовки. Для майбутніх учителів

математики, тобто студентів педагогічних вузів, ця проблема розв'язувалася внесенням відповідних змін у навчальні плани. Так, за дослідженнями Ш. Н. Асанидзе, в курсі елементарної математики педвузів цілий семестр почав відводитися на вивчення НО. Що ж стосувалося вчителів-практиків, вищезгадану проблему планувалось вирішити за рахунок їх активної самоосвіти. Для цього на сторінках періодичних видань публікувалися фрагменти нових підручників, тематичне планування матеріалу з математики та приклади контрольних робіт. Відбувалося поновлення навчально-методичної літератури, яке на базі уже існуючих робіт та дисертаційних досліджень спрямовувалося на подолання численних труднощів, що виникали під час вивчення НО в ШКМ.

Так, у 1971 р. та 1977 р. виходять посібники з методики викладання математики Г. П. Бевза. У першому з них основна увага приділяється методу меж, а також робиться порівняльна характеристика вивчення НО за новими (1968 р.) та старими (1960 р.) програмами. У наступному виданні автор приділяє увагу усім трьом основними методам НО, підкріплюючи викладення прикладами та зауваженнями. Особливий інтерес становлять роботи А. Н. Бекарєвича, С. П. Пулькіна та В. Г. Прочухаєва, які на нашу думку є своєрідним узагальненням практичного досвіду та науково-методичних досліджень цього періоду. Питання фрагментарної пропедевтики НО у 4 класі розглядаються у посібнику О. С. Дубинчук, назва якого співзвучна з дисертаційним дослідженням автора. Цінний досвід являють собою також методичні посібники авторів, дисертаційні дослідження яких ми розглядали раніше, зокрема Н. В. Єлизавєтіної, А. В. Суткової та Н. Я. Прайсмана. Що ж стосується дисертаційних досліджень цього періоду, зокрема С. А. Аллабергенова, Р. А. Мусаеляна, І. Г. Адішева, то їх провідною думкою

була спроба вирішення проблеми прикладної орієнтації вивчення НО.

Підбиваючи підсумки зазначимо, що по завершенню третього етапу, який ми пов'язуємо із модернізацією шкільної математичної освіти наприкінці 1960-х років, **вважалося вирішеним питання пропедевтики, обрання та розміщення змісту НО в ШКМ.** Однак актуальними залишилися проблеми подальшої розробки та удосконалення методики вивчення НО. Першочерговими з них виявилися забезпечення доступності вивчення НО в ШКМ, а також взаємозв'язок НО зі містом загального курсу математики та інших дисциплін.

Черговому реформуванню математичної освіти, а відповідно і **четвертому етапу**, було покладено початок у зв'язку з постановою Ради Міністрів СРСР (від 31 січня 1978 р., № 59) «Про подальше удосконалення навчання, виховання учнів загальноосвітніх шкіл та підготовки їх до праці». У ній наголошувалося на існуванні двох основних недоліків середньої освіти того часу: перевантаженість та відсутність необхідної трудової підготовки. У зв'язку з цим було вирішено організувати більш ефективне трудове навчання (збільшивши вдвічі кількість годин на його вивчення), а також скоротити зміст навчального матеріалу з інших дисциплін (у тому числі й математики).

Що стосується математичних дисциплін, то об'єктивною передумовою такого стану речей, на думку Н. Я. Віленкіна, виявилося порушення принципів наочності та доступності навчання. Зокрема він вказував, що строгість подання матеріалу, яка пов'язана із загальносвітовими тенденціями за «осучаснення шкільної математики та зближення її з досягненнями математичних наук», перетворилася із засобу в самоціль, що істотно вплинуло, як на зміст, так і на стиль побудови ШКМ.

Іншої думки щодо причин поспішного реформування шкільної математики, дотримувалися Р. С. Черкасов та Г. Д. Глейзер. Зокрема вони пов'язували його з певними політичними моментами. Саме у зв'язку з ними, на сторінках періодичних видань було організоване широке псевдогромадське засудження нових програм з математики. Прогресивна математична спільнота виступала за те, щоб певний час апробувати нові програми, з'ясувати та ліквідувати конкретні її недоліки. Але рішення високих інстанцій того часу, яке засуджувало модерністський курс математичної реформи, не підлягало перегляду. Усі постреформістські дії в наступні роки стали іменуватись «удосконаленням шкільних програм та підручників», методисти ж їх називали «діями по згортанню реформ у галузі викладання математики». Зокрема, на думку Р. С. Черкасова та інших фахівців, вони не тільки призупинили прогресивні тенденції розвитку, але й здебільшого відкинули назад шкільну математичну освіту країни.

Окрім політично-ідеологічного тиску, фахівці виділяють також більш глибинні причини, які негативно вплинули на впровадження програми з математики 1968 року. Першою причиною був так званий «принцип єдиності школи», тобто, говорячи мовою сучасної методики, – відсутність профільної та рівневої диференціації. Другою причиною методисти називають «невідповідність кадрового ресурсу» високому рівню оновленої математичної освіти. Зокрема вони зазначали, що спроба «стрибкоподібно» модернізувати зміст ШКМ, повідомивши при цьому більшості вчителів мінімальний обсяг окремих знань із нових розділів програми, була приречена на неуспіх: і вчителі, й учні вчилися одночасно.

Зупинимось детальніше на відображенні відомостей з НО в ШКМ того часу. Після публікації на сторінках

періодичних фахових видань вищевказаної постанови, майже одразу з'являються проєкти нових програм з математики. На відміну від реформувань шкільної математики попередніх періодів, таких проєктів було три. З'явилися вони майже одночасно у 1978-1979 рр., тому при подальшому обговоренні ці проєкти отримали назви: проєкт 1, проєкт 2 та проєкт 3. В них були відображено найрізноманітніші ставлення щодо вивчення НО в ШКМ. У контексті аналізу подій цього періоду, можна припустити, що провідним принципом, яким керувалися укладачі проєктів програм з математики у виборі пріоритетності методів НО в ШКМ, було таке: обрати і, в деяких випадках обґрунтувати будь-які комбінації методів НО, при цьому в жодному разі не повторюючи програми з математики 1968 року. При обговорені цих проєктів проблеми вивчення НО в ШКМ майже не підіймалися.

Перед публікацією вищевказаних проєктів програм з математики в чинній програмі того часу було зроблено низку змін. Зокрема, рекомендовано спочатку часткове скорочення, а потім і остаточне вилучення відомостей про НО із курсу алгебри 8 класу. Часткове скорочення планувалось за рахунок вилучення із теми «Наближені обчислення» питання «Оцінка похибок результатів дій», а також вивчення дій з наближеними даними за ППРЦ без посилань на теореми про границі похибок. А вже через місяць було вирішено повністю сконцентрувати матеріал з НО в курсі алгебри 7 класу у вигляді окремого розділу. В ньому залишилося лише два методи НО: метод меж і ППРЦ. Їх наявність вважалась цілком достатньою для створення можливості виконання НО під час розв'язування відповідних задач у курсі математики та суміжних дисциплін. Вилучення із програми методу врахування меж похибок коментувалося його невідповідністю віковим можливостям семикласників. Саме в такому вигляді з

певними незначними корективами НО продовжили своє існування у ШКМ до середини 1980-х років. Причому корективи вносились щорічно у вигляді методичних листів, які публікувались на сторінках журналу «Математика в школі» і мали термін дії – один навчальний рік.

Однією з причин цих коректив було впровадження у шкільний навчальний процес мікрокалькуляторів (надалі МК (*початок 1980-х років*) та комп'ютерів (*середина 1980-х років*). На цьому особливо наголошували Н. Я. Віленкін та Ю. М. Колягін. Питання використання МК під час вивчення НО частково розглядатися в роботах А. К. Корієвої [42], Н. В. Єлизаветиної [51] та інших вчених, а також відображалися в шкільних програмах з математики 1985 року та нормативних документах. Однак на практиці питання співіснування НО та МК в ШКМ фактично залишалося відкритим.

Вищезгадана програма з математики 1985 року потребує окремої уваги. Її впровадження відбувалося ще більш нетрадиційно, ніж попереднє реформування. По-перше, була опублікована одразу програма з математики, а не її проєкт, так як це робилося традиційно. По-друге, чітко вказувалась дата переходу на ці нові програми 1986-1987 н.р. (тобто вже наступний навчальний рік), що робило, на думку методистів, безглуздим сам факт її обговорення. По-третє, опубліковане тематичне планування навчального матеріалу з математики, дата якого збігалася як з виходом самої програми, так і з датою переходу на ці програми, ніяким чином не узгоджувалася з новою програмою 1985 року. Навіть структурою, представлення НО в них є різним. Згідно програми воно має бути окремою темою, а згідно реального тематичного планування, навчальний матеріал розподілено по різних класах (згідно чергової редакції чинних підручників).

Аналогічний розподіл матеріалу з НО в різних класах та залежність від чинних альтернативних (варіативних) підручників для 5 та 6 класів спостерігається і в програмах 1989 р. та 1992 р. Така сама залежність, але ще більш виражена властива і програмі з математики 1996 р. (три підручники для 5 та 6 класів; два підручники для 7, 8 та 9 класів).

Характерною рисою цих програм є невизначеність щодо методів НО, які повинні вивчатися у ШКМ. Так у програмах 1989 року спостерігається чітка вказівка щодо вивчення ППППЦ. Що ж стосується методу меж, то про його наявність в програмах можна судити лише за непрямими вказівками. Аналогічна ситуація з методом меж спостерігається і в програмах 1992 року, але при цьому відсутні вказівки про ППППЦ. Звернення до методичної літератури того часу також не дає однозначної відповіді на ці питання. Так, у роботі Г. П. Бевза згадується, що на прикінці 8 класу з учнями розглядаються ППППЦ, а О. С. Дубинчук констатує їх вивчення напочатку 7 класу і наводить відповідні розробки уроків. Що стосується методу меж, то про нього не йдеться в жодній з цих робіт.

Згідно сучасної методичної літератури до 1991-1992 н.р. школи України працювали за програмами, затвердженими Міністерством освіти СРСР, які у 1986 році було розроблено з урахуванням потреб модернізації ШКМ і досвіду впровадження попередніх програм. У 1991 році, спираючись на чинну програму, в Україні запропонували перехідну програму, розраховану на найближчу перспективу. Програма передбачала скорочення часу на вивчення математики у 5–9-х класах, а також вивчення окремих тем курсу з різним ступенем повноти. Майже весь матеріал з НО ***стає не обов'язковим*** для вивчення всіма учнями (теми записано у квадратних дужках). Цьому передують методичні рекомендації фахівців щодо

розвантаження програми за рахунок оглядового вивчення теми «Наближені обчислення», зокрема шляхом відмови від вироблення навичок знаходження абсолютної та відносної похибок, а також виконання дій над наближеними значеннями.

Публікації на сторінках періодичних видань, що супроводжували етап реформування шкільної математичної освіти кінця 1970-х – початку 1990-х рр., в основному стосувалися тематичного планування навчального матеріалу з урахуванням щорічних коректив до програми та особливостей викладання за новими підручниками, які перевидавалися в цей період тричі. Зустрічалися також і статті іншого характеру, наприклад, з методичними розробками та дидактичними матеріалами до окремих питань НО; з ілюстрацією взаємозв'язків навчального матеріалу старшої школи з вивченням НО, а також використання НО в геометрії.

Щодо навчально-методичної літератури цього періоду, то проблема вивчення НО в ШКМ ґрунтовно розглядалася в роботах вчених, які в недалекому минулому присвятили їм свої дисертаційні дослідження.

Враховуючи усе вищезазначене робимо **висновок** про те, що по завершенню четвертого етапу, який охопив кінець 1970-х – початок 1990-х рр., **виникла потреба чергового перегляду питання формулювання цілей та обрання змісту навчання НО**. Однак в силу того, що вказаний період супроводжувався процесами глобальних перебудов у суспільному житті та освіті, **такого перегляду не відбулося**. В результаті, згідно методичної літератури того часу, програм та інших нормативних документів, НО набули в ШКМ ***невизначеного статусу***. Зокрема йдеться про наявність чітких коментарів щодо відправних моментів побудови методичної системи навчання НО. Наслідком такої ситуації помітний спад відповідних науково-

методичних пошуків. З часом **ці процеси**, посилюючись та поглиблюючись, **призвели до методично-інформаційного вакууму навколо НО**, який має місце й нині.

Проаналізувавши досвід вивчення НО в ШКМ ми дійшли висновків, що вони були складовою загальноосвітньої математичної підготовки школярів. Це підтверджується і часом, і результатами численних досліджень. Понад півсторіччя велися науково-теоретичні, методичні та практичні пошуки спрямовані на досягнення офіційного впровадження НО в ШКМ. Наступні півсторіччя розв'язувалися питання побудови відповідної методичної системи вивчення НО в ШКМ. Обидва ці періоди супроводжувалися реформами шкільної освіти, зокрема і математичної, та неодноразовою зміною освітніх пріоритетів.

Ретроспективний аналіз проблеми вивчення НО в школі дав змогу виявити ключові моменти, які слід враховувати, створюючи відповідну методичну систему їх вивчення. Окремого дослідження потребують умови, в яких її доведеться реалізовувати на практиці. Тому розглянемо сучасний стан вивчення НО в школах України.

1.2. Сучасний стан вивчення наближених обчислень в школах України

Під сучасним періодом вивчення НО в школах України будемо розуміти 2000-2020 рр. Згідно з програмою з математики 2001 року вибрані питання НО традиційно вивчалися пропедевтично (5-6 класи) та під час вивчення теми «Нерівності» (9 клас). Основні відомості з НО зосереджувались у розділі «Елементи прикладної математики», який мав місце наприкінці вивчення алгебри в основній школі. На вивчення усього розділу відводилося 10 годин, а на вивчення безпосередньо НО, як свідчить шкільна практика, 2-3 години.

У цей час, після тривалої перерви, що була пов'язана з необхідністю розв'язування глобальних питань шкільної математики, до проблеми вивчення НО в ШКМ звернулися сучасні дидакти. Досліджуючи проблеми навчання математики в основній та старшій школах З. І. Слєпкань, В. Г. Бевз та інші зазначали, що загальний стан вивчення НО знаходиться на **неприпустимо низькому рівні, не задовольняє вимогам сьогодення, гальмує реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, процес формування навичок культури обчислень, а також розвиток загальної математичної культури**. У науково-методичній літературі питання НО висвітлюються недостатньо. Для переважної більшості вчителів та учнів, як зазначав один із дидактів, НО залишаються найнеприємнішим розділом.

У 2005-2006 н.р. почалося впровадження програми з математики для 12-ти річної школи. Її аналіз, що передував остаточному варіанту, показав, що проблема вивчення НО в ШКМ не залишилася поза увагою дидактів. У проєкті програми 2004 р. було запропоновано перенести теми «Наближені обчислення» з курсу алгебри 9 класу до пропедевтичного курсу математики 6 класу. Ознайомлюватися вперше з НО наприкінці основної школи насправді запізно. Володіння відповідними знаннями, вміннями та навичками потрібні значно раніше для засвоєння як курсу математики, так і інших суміжних шкільних дисциплін, зокрема фізики, хімії, інформатики. Але механічне, неадаптоване перенесення вивчення теми «Наближені обчислення» на три роки раніше, на думку укладачів програми, не стало вирішенням проблеми. В результаті із курсу алгебри 9 класу НО були вилучені. Що ж стосується їх включення до курсу математики 6 класу, то воно неоднозначне: у програмі яка вийшла в світ окремим виданням у 2005 році НО немає, а до програми, що була

надрукована на сторінках журналу «Математика в школі» їх не було. Вони містилися в розділі «Звичайні дроби», але при цьому вимог до загальноосвітньої підготовки учнів, які б стосувалися НО, не наводилися. Запропоноване перенесення вивчення НО на початок основної школи було відображено в окремих нових підручниках та впроваджено у деяких навчальних закладах з поглибленим вивченням математики. Одним із прикладів може слугувати програма поглибленого вивчення математики для проліцейних класів політехнічного ліцею Національного Технічного Університету «КПІ».

Відсутність окремо виділеної теми «Наближені обчислення» у програмі 12-ти річної школи не означало відсутність самих НО у ШКМ, а тим більше не означало необхідності в розробці методики їх вивчення. За словами М. І. Кавуна НО є природним та неминучим явищем в шкільній математиці [62 с. 105]. Вони є невід'ємною складовою загальної обчислювальної культури та прикладної спрямованості навчання математики, що об'єктивно пов'язує їх з багатьма традиційними темами ШКМ. Як зазначалося дослідниками минулих років, вивчення НО в межах відокремленої теми не дає бажаних результатів навчання. **З ними треба ознайомлюватися поступово, постійно, систематично, використовуючи широкі можливості міжпредметних та внутрішньопредметних зв'язків.** Одним з перших цей тезис було висунуто В. А. Крогіусом на Першому Всеросійському з'їзді викладачів математики, після чого він згадувався та підтримувався в усіх подальших роботах, присвячених дослідженням проблеми вивчення НО в ШКМ. Зокрема вказувалось, що ознайомлення з НО слід починати якомога раніше і проводити потім, поступово розвиваючи, через увесь курс шкільної математики, звертаючи особливу

увагу при цьому на їх роль під час опрацювання дослідних даних.

Витоки незадовільного стану вивчення НО на сучасному етапі, з метою їх оцінки та врахування, слід шукати в самій структурі математичної діяльності учнів із засвоєння провідних понять та методів НО. За А. Столяром та Л. Фрідманом, математичну діяльність школярів можна представити як активну пізнавальну діяльність у процесі вивчення математики, що охоплює наступні етапи: математична організація емпіричного матеріалу; логічна організація математичного матеріалу, накопиченого в результаті першого етапу; застосування математичної теорії на практиці. Проаналізуємо названі етапи, доповнивши їх етапом мотивації навчального матеріалу.

Основою нашого аналізу є результати анкетування вчителів, спілкування з ними, спостереження за навчальною діяльністю учнів, зрізи знань учнів, а також аналіз підручників. Підручники є основним засобом навчання математики в школі. В них викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою. З початку 2000-х років вивчення алгебри у 9 класі в основному ведеться за одним із кількох альтернативних підручників. Їх авторами є Г. П. Бевз, Г. М. Возняк, Г. М. Литвиненко, В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янченко (за редакцією З. І. Слєпкань) та інші.

Аналіз кожного з етапів математичної діяльності учнів доцільно провести за критеріями, що пов’язані із провідними поняттями НО. Зокрема звернемо увагу на особливостях викладення навчального матеріалу та формуванні уявлень учнів про наближені значення, про числові характеристики наближених значень та методи наближених обчислень.

Психологи вказують, що початковим моментом будь-якої діяльності, в тому числі і математичної, є мотивація, тобто сукупність потреб, які спонукають до діяльності. Дидактами, авторами підручників підкреслюється важливість мотивації навчального матеріалу вже починаючи з 5 класу. Також наявність засобів мотивації учіння є однією з дидактичних вимог до наукової системи підручника математики.

Найбільш природною мотивацією ознайомлення учнів з наближеними значеннями є наголос на об'єктивності їх існування та з'ясування причин їх наближеності. Дослідниками неодноразово наводилася й доводилася думка про те, що чим більше і прискіпливіше приділятиметься увага формуванню в учнів уявлень про наближені значення (зокрема, джерела їх отримання), тим успішніше відбуватиметься оволодіння усіма іншими поняттями, правилами та методами НО. Тому ознайомлення учнів з наближеними значеннями набуває непересічної важливості. Однак систематизованих відомостей відносно усіх трьох традиційних джерел (деякі результати лічби, результати практичних вимірювань та округлень) одержання наближених значень у жодному підручнику не наводиться. Їх введення частіше відбувається за допомогою одного-двох прикладів, які не відображають об'єктивність існування наближених значень. Домінування випадкових відокремлених відомостей, які не завжди узагальнюються, а також конкретно-індуктивних методів, суперечить пізнавальним мотивам старших підлітків. Відомо, що їм властивий низький рівень розвиненості здатності до узагальнень. Водночас спостерігається пік динаміки у напрямку збільшення інтересу до закономірностей, порівняно з інтересом до окремих фактів. За такої мотивації (точніше її відсутності) введення поняття про наближені значення в учнів формуються уявлення, що звернення до

них відбувається або для спрощення викладок, або із міркувань певної доцільності, або взагалі з невідомих причин.

Друге місце у переліку провідних понять НО посідають числові характеристики наближених значень. Відомо, що наближення, яке задане лише своїм числовим значенням, не має практичного змісту. Невідомою є ступінь довіри до нього, яка асоціюється зі ступінню близькості наближеного значення до істинного. Основний мотив введення числових характеристик наближених значень – дати уявлення про цю близькість. Загальні мотиви введення числових характеристик наближених значень величин у підручниках не висвітлюються. Традиційно в підручниках мотивується введення лише окремих числових характеристик. Розглянемо їх.

Основним мотивом для введення поняття «точність» або «границя абсолютної похибки», або «межа абсолютної похибки» є незнання точного значення величини, що автоматично унеможливлює знаходження абсолютної похибки. В одних підручниках зазначена мотивація відбувається виключно за допомогою теоретичних вказівок, в інших – виключно за допомогою прикладів та доцільних задач, пов'язаних з обчислювальною та вимірювальною практикою.

Аналогічно в деяких підручниках вводиться і поняття «відносна точність» або «межа відносної похибки». Вони наводяться як об'єктивні характеристики якості наближення. У багатьох підручниках – або взагалі не вводяться поняття про якісні числові характеристики, або вводиться у додатковому матеріалі у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше» і мотивується лише в дуже вузькій якості призначення, а саме як засіб для порівняння якості вимірювань однорідних величин різного порядку.

Методи наближених обчислень позиціонуються в ШКМ як правила виконання дій над наближеними значеннями. Мотивація їх введення полягає у відповіді на запитання: «Чому над наближеними значеннями величин треба виконувати дії якось по-особливому?». У підручниках мотивів для введення методів НО не наводиться. Спостерігаються лише деякі пов'язані з ними твердження некатегоричного характеру. Останні в уяві учнів ставлять під сумнів правомірність та доцільність НО, породжують підозру в їх надуманості та сумніви щодо подальшого застосування.

Як вказувалось вище, першим етапом математичної діяльності учнів є математична організація емпіричного матеріалу. Вона полягає в накопиченні учнями фактів, що прямо чи опосередковано пов'язані з НО. Відбуватися цей процес може в ході спостережень, індивідуального навчального досвіду, ознайомлення з навчальною та довідковою літературою. Під час вивчення НО етап математичної організації емпіричного матеріалу охоплює період навчання в початковій школі та майже у всій основній школі. В цей час має відбуватися тривалий процес формування інтуїтивного підґрунтя для подальшого засвоєння формально-логічної теорії НО, який в методиці навчання математики називають **попереднім досвідом**. Його складовими є життєвий та навчальний досвід. За дослідженнями сучасних дидактів вплив попереднього досвіду на засвоєння знань може мати як позитивний так і негативний характер. Позитивний вплив попереднього досвіду є своєрідною пропедевтикою НО. А негативний – може виражатись у безпідставному переносі попереднього досвіду в нові умови, а також конфліктах нових знань з уже набутими.

Перші кроки по формуванню відповідного попереднього досвіду робляться вже напочатку 5 класу:

вводяться знак та поняття наближеної рівності; вперше вживаються поняття: «наближений результат», «наближення», «наближене значення». Залишаючись без активного вживання, зазначена термінологія починає знову зрідка зустрічатись у 6 класі під час ознайомлення та використання числа π; у 8 класі під час вивчення розділу «Квадратні корені. Дійсні числа» та теми «Стандартний вигляд числа».

Протягом вивчення математики в основній школі із трьох основних джерел наближених значень у якості їх представників найбільше позиціонуються результати округлення. З ними учні зустрічаються як у відповідних темах 5 класу («Порівняння і округлення натуральних чисел», «Порівняння і округлення десяткових дробів»), так і дидактичному матеріалі інших тем.

Окрім округлення до традиційних джерел наближених значень величин відносять також лічбу та практичні вимірювання.

Існує кілька традиційних прикладів, за допомогою яких у навчальній та науково-методичній літературі впроваджувалася думка про наближений характер деяких підрахунків: приклади про вік старовинної вази; про кількість дерев у лісі та про населення міста. У підручниках з математики для 5, 6 класів не наводиться жодних міркувань з приводу наближеності результатів деяких підрахунків, але зрідка можна зустріти «відголоси» вищезазначених традиційних прикладів.

Стосовно вимірювальної практики, то в традиційному курсі математики 5-6-х класів вона представлена була цілими блоками завдань. При цьому про наближеність практичних вимірювань у жодному з підручників зауважень не наводиться. У вищевказаних завданнях вимірювання слід виконувати або за готовими рисунками, або за рисунками чи моделями, які пропонується виконати

самостійно. В останньому випадку відповіді до завдань не наводяться. Це принципово неможливо зробити, оскільки учнями виконуються різні рисунки. Відповіді не наводяться також і до завдань, що пов'язані з готовими рисунками. З приводу останнього можна висунути гіпотезу, що, з одного боку, автори не можуть навести результати вимірювань у вигляді точних значень величин, з іншого – вони і не можуть навести їх у вигляді наближених значень, оскільки відповідних теоретичних зауважень не робиться. Але на сторінках підручників можна зустріти «аргумент», який суперечить висунутій гіпотезі: авторами наводяться розв'язання задач, в яких і результат вимірювань, і результат дій над ними виражається точними значеннями. Такий стан речей формує уявлення, що в перспективі конфліктуватимуть з категоричними твердженнями про те, що результати практичних вимірювань – завжди наближені. Нехтування наближеним характером практичних вимірювань, призводить не лише до перспективних, а й до внутрішньотематичних конфліктів. Виникають вони між теоретичними твердженнями та практично отриманими результатами вимірювань, коли такі результати мають принциповий характер. Такі конфлікти не слід недооцінювати оскільки вони можуть призвести до підсвідомого фіксування у зоровій та дійовій пам'яті хибних математичних уявлень.

Пізніше, під час вивчення теми «Масштаб», результати вимірювань у задачах необхідно не лише знаходити, а й застосовувати. Автори одних підручників продовжують при цьому нехтувати наближеним характером практичних вимірювань, що є логічним продовженням їх початкової позиції. Автори інших – не створюючи відповідного теоретичного підґрунтя, починають їх опрацьовувати як наближені значення.

Ще Р. А. Хабіб наголошував на тому, що розуміння причин наближеності чисел та величин базується на підсвідомих, інтуїтивних уявленнях про похибки (мається на увазі на понятті про числові характеристики наближених значень). Тому в процесі методично грамотно побудованому вивченні основних джерел наближених значень величин в учнів підсвідомо формується уявлення і про їхні похибки.

Спроба врахування таких внутрішньотематичних зв'язків має місце в підручниках наступного покоління. Нажаль вона пов'язана лише з одним джерелом наближених значень, про яке згадується в основній школі. Йдеться про результати округлень. Точніше про ілюстрацію доцільності округлення з доповненням шляхом знаходження та порівняння похибок округлення. У деяких підручниках для 5 класу вводиться поняття «похибка», що багатьма дослідниками вважається доцільним та педагогічно виправданим. Ознайомлення учнів лише з округленням (а не з усіма основними джерелами наближених значень) призводить до відповідної обмеженості і в уявленнях про числові характеристики наближених значень. Вона пов'язана з тим, що серед широкого спектру похибок, які виникають з різних причин, лише похибка округлення є керованою та усувною. Мається на увазі, що, по-перше, округлювати можна з різною точністю. По-друге – часто можна взагалі не округлювати, а залишати точні дані, наприклад $\frac{1}{7}$, $\sqrt{7}$, …. За такого підходу автоматично залишається поза увагою об'єктивний характер виникнення похибок, що є неприпустимим. Одним із шляхів розв'язування цієї проблемної ситуації є доповнення навчального матеріалу відомостями про інші джерела наближених значень (лічбу та практичні вимірювання).

У альтернативних підручниках зустрічаються задачі, які можна розглядати, як пропедевтичні кроки з

формування понять про відносну похибку та точність. Термін «точність» починає активно вживатись у курсі алгебри 7-8-х класів: на зміну висловленню «округлити до десятих» пропонується – «округлити (або обчислити, або знайти) з точністю до десятих (або до 0,1)». Його використання має формальний характер і не формує перспективних зв'язків, тобто уявлень про точність як якість, що відображає близькість результатів до істинного значення. Учні не звертають на нього уваги. Зустрічаючи в теоретичних міркуваннях словосполучення «точніше», «більша точність» тощо, вони асоціюють їх із уявленнями про правильність, обчислювальну «охайність», тобто послуговуються небагатим життєвим досвідом з цього приводу.

У курсі математики закладів базової середньої освіти зрідка зустрічаються відокремлені відомості і про методи НО. Так, у 5-6-х класах їх можна зустріти у вигляді задач, в яких наводяться наближені математичні моделі або провідною думкою яких є неможливість прямого вимірювання доступними засобами. Останні можуть бути пов'язані або з готовими малюнками, або із самостійно створеними моделями. Там же, а також у курсі алгебри 8 класу, зустрічаються завдання з формування початкових уявлень про виконання дій над наближеними значеннями за ПППЦ, зокрема, використання правила попереднього округлення, яке, до речі, не вводиться під час вивчення ПППЦ у 9 класі. В курсі алгебри 7-8-х класів учні зустрічаються з такими наближеними методами, як графічний спосіб розв'язування рівнянь та графічний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь. У підручниках одних авторів ці методи не пов'язуються з уявленнями про НО. Інші автори навпаки: неодноразово наголошують, що графічним способом знаходять наближені розв'язки, які можуть випадково виявитися і точними.

Відомо, що наближений характер можуть мати і отримані результати, і проміжні значення результатів, і вхідні дані задачі. В останніх двох випадках їх розв'язування вимагає залучення методів НО. Але реалізувати це виявляється неможливим із-за вивчення НО аж наприкінці 9 класу. Наближеним характером числових даних у цих задачах доводиться просто нехтувати. Створений таким чином тривалий досвід призводить до конфлікту, який виникає під час вивчення основного матеріалу з НО наприкінці 9 класу. Він полягає в тому, що учні не розуміють чому задачі, які ними раніше розв'язувалися без врахування наближеного характеру даних, тепер (під час вивчення теми «Наближені обчислення») раптом треба розв'язувати якимись особливими методами.

У більшості вищезгаданих задач наближений характер вхідних даних або випливає із фабули, або явно підкреслюється авторами. Відповіді до них у підручниках або не наводяться взагалі, або наводяться за допомогою знаку наближеної рівності, або навіть і без нього.

Наведення відповідей із використанням знака «≈» має на меті згладжувати потенційне виникнення конфлікту між тривалим нехтуванням наближеного характеру відповідних чисел і величин та необхідністю його врахування під час розв'язування задач, а також сприяти виникненню позитивного навчального досвіду. Нажаль цього не відбувається через нечасте відображення такого підходу на сторінках підручників. У більшості випадків відповіді до таких задач взагалі не наводяться, що не формує правильних уявлень про результати дій над наближеними значеннями величин, але і не формує неправильних. Таке замовчування суперечить одній із основних вимог до математичної підготовки учнів, яке полягає в знанні учнями правил подання відповідей до прикладних задач. Іноді воно

набуває і не зовсім зрозумілих масштабів, коли в навчальних посібниках з алгебри для 9 класу повністю відсутні відповіді до розділу «Наближені обчислення». «Приємним виключенням» є підручники з математики для 5, 6 класів, які розраховані на навчання за програмою з математики 12-ти річної школи. В них автори пропонують для розв'язання значну кількість задач із наближеними даними, а відповіді до них наводять із використанням знака «≈».

Найнебажанішою є ситуація, коли відповідь до задачі наводиться без знака наближеної рівності, тобто в якості відповіді наводяться точні значення. Так відбувається активне формування в учнів хибних уявлень, що є неприпустимим.

Чергова спроба створення позитивного навчального досвіду відбувається під час ознайомлення учнів з числом π. Автори підручників наводять приклади розв'язування завдань з його використанням для знаходження довжини кола, площі круга, тощо. У своїх міркуваннях вони використовують знак «≈» або записують наближене значення числа π у вигляді подвійної нерівності. Так формуються уявлення учнів про те, що результат дій над наближеними значеннями чисел також є наближеним. Якихось тверджень або пояснень при цьому не наводиться, а культура використання знака «≈», а також форма запису остаточної відповіді у різних авторів є різною.

Другим етапом математичної діяльності школярів є логічна організація математичного матеріалу. Вона полягає у виділені із накопиченого емпіричного математичного матеріалу первісних понять та основних тверджень, які є основою для дедуктивної побудови теорії. Більшість тем ШКМ зосереджується навколо основних змістових ліній і таким чином концентрично розвиваються. **Стосовно НО такого поступового розвитку не відбувається.** Майже

весь матеріал з НО, який передбачено програмою, зосереджується в межах 1-3 годин наприкінці навчального року (9 клас) за умов необхідності підготовки до державної атестації. Завелика концентрація відомостей з НО, її відокремленість від традиційних питань ШКМ призводять до понятійного перевантаження теми, що ускладнює та формалізує її засвоєння учнями. Ускладнює ситуацію також те, що перелік провідних питань з НО, а також термінологія та символіка, що застосовується для їх позначення, в чинних підручниках значною мірою різниться.

Зупинимося детальніше на логічній організації математичного матеріалу, що пов'язаний із провідними поняттями НО.

Лише в одному з чинних підручників з алгебри для 9 класу системно наводяться усі три основні джерела виникнення наближених значень. Однак при цьому не робиться акцент на тому, що результатом практичних вимірювань завжди є наближені значення. Також висвітлюючи тезу про те, що наближені значення можуть бути одержані під час підрахунку предметів, спостерігається певна обмеженість причин наближеності. В учнів формуються уявлення, що вони полягають виключно в суб'єктивізмі людських відчуттів, а також пов'язані виключно з великою кількістю предметів. В інших підручниках не спостерігається жодних спроб щодо узагальнення чи схематизації основних джерел виникнення наближених значень. В одному з них через гіпотетичний приклад із практики вимірювань виводяться основні поняття НО, в тому числі і наближені значення. При цьому акцентується увага лише на одному з трьох джерел одержання наближених значень – вимірюваннях. В іншому – конкретно-індуктивним методом наводяться лише деякі зауваження некатегоричного характеру.

Щодо числових характеристик наближених значень, то вони в діючих підручниках представлені під різними назвами. При цьому для їх понятійного об'єднання використовується така термінологія: «оцінки точності наближення»; «поняття, що характеризують наближені значення чисел і величин». У методичній літературі згадані числові характеристики поділяють на якісні та кількісні. У прикладній діяльності, що пов'язана з реальними предметами та явищами, і якісні, і кількісні числові характеристики знаходять рівноправне відображення. У шкільній же практиці традиційно якісним числовим характеристикам приділяється незаслужено менша увага порівняно з кількісними. Лише в одному з трьох чинних підручників якісні числові характеристики розглядаються разом з кількісними. В інших вони або взагалі не згадуються, або наводяться у додатковому матеріалі. Термінологія, символіка та представленість числових характеристик наближених значень різна. Різним є також і представлення логічних зв'язків між ними, яке пропонуються авторами підручників у символьній формі.

Комплексний аналіз змісту програми, чинних підручників та шкільної практики дозволяє зробити ***висновок****:* фактично в ШКМ було представлено два методи НО: метод меж та метод підрахунку цифр. Але змістовий акцент та відповідне дидактичне наповнення при цьому робиться на останньому. Такий підхід традиційно зберігся ще за часів позиціонування ППЦ як ефективного засобу раціоналізації обчислень. Чітко про розподіл основних методів НО «на виконання дій з точним урахуванням похибок і без точного урахування похибок» (термінологія автора підручника) йдеться лише в одному з підручників. В інших – вищезгаданий розподіл можна зрозуміти із контексту. ППЦ пропонується як основний метод НО. В одних підручниках його називають правилом підрахунку

цифр, в інших відповідної назви не вводиться. Стосовно методу меж, то його аналітична сторона детально розглядається в розділі «Нерівності» як застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразів. Ні термінологія, ні практичні завдання запропонованого матеріалу не пов'язуються з НО. При викладенні основного матеріалу з НО в розділі «Елементи прикладної математики» метод меж фігурує неявно. Відповідна термінологія не наводиться. У випадках, коли про метод меж йдеться у підручниках, він подається учням як приклад методів зі строгим урахуванням похибок, як альтернатива ППЦ у «найбільш відповідальних обчисленнях», а також «там, де потрібна висока точність» (терміни та вирази авторів підручників). В одному з підручників, хоча і наводиться термін «метод меж», однак його представлення робиться виключно за допомогою розв'язаного прикладу, який міститься навіть не в пункті «Дії над наближеними значеннями величин». У самому ж пункті робиться лише зауваження.

Завершальним етапом математичної діяльності учнів є застосування математичної теорії. Її важливість підкреслювалась, А. Н. Менчинською, А. А. Столяром, З. І. Слєпкань та іншими дидактами. Зокрема ними вказувалось, що саме уміння застосовувати поняття вважається показником їх засвоєння. Недостатня увага до застосування набутих знань вважається традиційним недоліком сучасного навчання математики і навчання НО не є винятком. На думку З. І. Слєпкань, саме недостатня увага до застосування НО приводить до їх формального вивчення в ШКМ.

Дидакти по різному трактують поняття «застосування знань». В основному його розглядають на внутрішньопредметному та міжпредметному рівнях. Про внутрішньопредметне застосування НО частково йшлося

раніше, коли розглядалися питання, пов'язані з математичною організацією емпіричного матеріалу. Що ж до застосування НО після логічної організації математичного матеріалу, то воно принципово унеможливлюється у зв'язку із особливостями розміщення теми «Наближені обчислення» (кінець 9 класу).

Підсумовуючи виконаний нами аналіз стану вивчення НО в ШКМ з 2000 по 2020 рік доходимо **таких висновків**:

1. Мотивація навчального матеріалу з НО є ***недостатньою***. Твердження, які мають на меті спонукати до опанування відомостей з НО, вирізняються не категоричністю, нечіткістю та мають випадковий характер. Наслідком цього є те, що учні по-справжньому не включаються у навчальний процес, а оволодіння відповідним матеріалом не набуває для них значущості.

2. Відокремлені відомості з НО, які зустрічаються на рівні базової середньої освіти здебільшого носять обмежений, суперечливий та конфліктний характер, що створює скоріше негативний ніж позитивний навчальний досвід. Відповідний навчальний матеріал є не систематизованим та не структурованим, що значною мірою ускладнює його усвідомлене сприйняття та застосування, а також призводить до формального вивчення учнями НО. В учнів не вистачає ні життєвого досвіду, ні необхідних базових знань для його сприйняття.

3. Логічній організації математичного матеріалу з НО властивою є логічна незавершеність та понятійна перевантаженість. Вони є наслідками невдалого вибору змісту навчального матеріалу та його розміщення. Останнє випливає не лише із результатів наших досліджень, а й підтверджується провідними дидактами, зокрема З. І. Слєпкань.

4. Вищезазначені суперечності математичної діяльності учнів по опануванню відомостей з НО в жодному разі не

можна розцінювати як недоліки підручників або недоліки роботи вчителів-практиків. Не слід забувати, що їх основне завдання забезпечувати можливість оволодіння учнями навчальним предметом відповідно до програмових вимог. Тобто така ситуація зумовлена ***вимогами програми***. Тому і вирішення вона вимагає шляхом створення оновленої методичної системи вивчення НО в основній школі та здійснення відповідних коректив у програмі з математики. Їх відправними моментами є визначення цілей, а також методологічних основ обрання та структурування змісту вивчення НО в основній школі, які б відповідали сучасним освітнім пріоритетам, рівню розвитку інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) та віковим особливостям учнів.

1.3. Наближені обчислення: основні визначення, терміни, позначення і методи наближених обчислень

1.3.1. Основні визначення, терміни і позначення

Щоб успішно вивчати НО в закладах загальної середньої освіти (надалі ЗЗСО), потрібно чітко визначитись з основними поняттями теорії, методами обчислень. Зупинимося на них.

Нехай задана числова пряма Ox (рис. 1) з одиничним відрізком e. Розглянемо два числа a і b. Відстань між ними дорівнює $|a-b|$. Якщо відстань між числами a і b мала, то b називають наближеним до a **(можна говорити також, що число a наближене до числа b)**. (*В українській мові дієприкметник наближений означає той, що близько стоїть до когось, чогось, став подібним, набув схожості з чимось , з кимось*.)

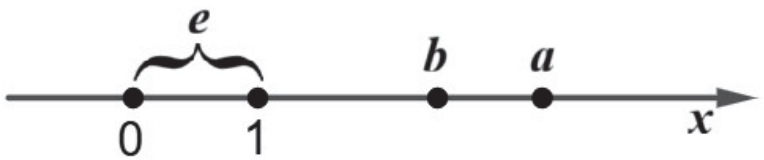


Рис. 1

Наприклад, візьмемо число π і число 3,14. На числовій прямій вони розміщені близько один до одного. Тому число 3,14 називають *наближеним* до числа π або *наближеним значенням* числа π. Як відомо, число $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ – ірраціональне, виражається нескінченним неперіодичним десятким дробом. Число $3{,}14$ – скінчений десятковий дріб. Воно схоже з числом π тим, що в обох однакова ціла частина, однакова кількість одиниць в розряді десятих, в розряді сотих. Із-за такої близькості в розрахунках замість числа π використовують наближене до нього число 3,14.

Якщо відомо, що $b < a$, то число b називають наближеним значенням числа a *з недостачею*, а якщо, навпаки, $b > a$, то число b називають наближеним значенням числа a *з надлишком.*

Близькість чисел a і b характеризується різницею $|a - b|$. Цей модуль різниці називають *абсолютною похибкою* наближеного числа b і позначають $\Delta_b = |a - b|$. (*В українській мові слово похибка трактується як неточність, відхилення від еталону, норми, помилка, промах*.)

Означення 1. Величина $\Delta_b = |a - b|$ називається *абсолютною похибкою* наближеного числа b (пояснення $-$ b наближається до a, а тому Δ_b – його відхилення від числа a).

Означення 2. Величина $\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|}$ називається *відносною похибкою* наближеного числа b.

На практиці частіше відоме лише наближене значення, а точне число a – невідоме. Тоді для абсолютної похибки Δ_b вказують межу, яку вона не перевищує. Тобто,

вибирають таке число h_b, щоб $\Delta_b < h_b$. Число h_b називають *межею абсолютної похибки*. Значення числа a знаходиться в інтервалі $b - h_b < a < b + h_b$ записують $a = b \pm h_b$. Число $(b - h_b)$ називають *нижньою межею*, а число $(b + h_b)$ називають *верхньою межею* проміжка числа a. Позначають $HM_a = b - h_b$, $BM_a = b + h_b$.

Величина $\varepsilon_b = \frac{h_b}{|b|}$ називається *межею відносної похибки* числа b. Її часто виражають у відсотках.

Наближені значення чисел записують так, щоб межа абсолютної похибки не перевищувала половини одиниці (іноді цілої одиниці) останнього розряду, який зберігається в записі.

Для наближених значень чисел, величин вживають такі терміни, як *значуща цифра, правильна цифра, точність наближення*. З'ясуємо зміст цих термінів. Нехай дано, наприклад, число $a = 21{,}432$.

Число $a = 21{,}432$ у десятковій системі числення можна записати:

$21{,}432 = 2$ десятки $+ 1$ одиниця $+ 4$ десятих $+$
$+ 3$ сотих $+ 2$ тисячних.

Цифри 2, 1, 4, 3, 2 – називаються ***значущими*** у записі цього числа. Вони вказують відповідно (значать) скільки одиниць міститься в кожному із розрядів. Виключення стосується лише числа 0).

Наприклад, $a = 0{,}00125$. Запис цього числа в десятковій системі числення буде: $0{,}00125 = 1$ сота $+$
$+ 2$ тисячних $+ 5$ десятичних.

Нулями заповнені місця порожніх розрядів і вони ***нічого «не значать»***. Отже, значущими цифрами будуть 1, 2, 5. **Нулі, які стоять в записі на початку числа, не є значущими цифрами**.

Означення 3. Перша зліва, відмінна від 0 цифра даного числа і всі розміщені справа від неї називаються значущими цифрами в записі наближеного числа.

Якщо цифра 0, яка стоїть в записі останньою, то вона може бути значущою або й ні.

Наприклад, десяти кілограмовою гирею зважують вантаж і одержують число трохи більше від 130 кг. Тут 130 кг = 1 центнер + 3 десятки кг, а скільки було точно одиниць кг вказати неможливо. Тому цифра 0 не є значущою в цьому числі, воно містить дві значущі цифри 1 і 3. У цьому випадку нулем заповнили розряд одиниць і він не є значущою цифрою.

Ще приклад. Виміряли міліметровою лінійкою довжину відрізка і встановили, що вона дорівнює 120 мм. Тут всі цифри значущі і нуль також. Бо тут цифра 0 показує, шо цілих міліметрів не було (знаків). Значущим чи ні є 0, який стоїть вкінці запису числа, ***слід встановлювати виходячи із ситуації, коли його одержували***.

Означення 4. Цифра a_k у десятковому записі наближеного числа b називається правильною, якщо $\Delta_b \leq 10^k$, де k – індекс розряду, в якому ця цифра стоїть.

У випадку, коли замість Δ_b обрано межу абсолютної похибки h_b, то замість нерівності $\Delta_b \leq 10^k$ застосовують нерівність $h_b \leq 10^k$.

Наприклад, $b = 12{,}343 \pm 0{,}05$. Тут або $\Delta_b = 0{,}05$, або $h_b = 0{,}05$. Оскільки $10 > 0{,}05$, то цифра 1 – правильна, $1 > 0{,}05$, то 2 – цифра правильна, $0{,}1 > 0{,}05$, то цифра 3 – правильна: $0{,}01 < 0{,}05$, то цифра 4 неправильна.

Наближені числа записують наближеною рівністю, залишаючи в записі лише правильні цифри. Тому наближене число b можна записувати або умовною

рівністю $b = 12{,}343 \pm 0{,}05$, або наближеною рівністю $b \approx 12{,}3$.

Означення 5. Якщо число записане наближеною рівністю, то точністю наближення числа b називають одиницю розряду останньої цифри справа, на якій обривається запис даного наближеного числа і позначають τ.

Наприклад, $\pi \approx 3{,}14$. Запис обривається на розряді сотих, тому кажуть, що число π взяте з точністю до сотих. Тут $\tau = 0{,}01$. У попередньому прикладі число $b \approx 12{,}3$, точність наближення $\tau = 0{,}1$.

Часто запис $b = 12{,}343 \pm 0{,}05$ читають як число b дорівнює 12,243 з точністю до 0,5.

Означення 6. Стандартним виглядом числа a називають запис виду $a = \alpha \cdot 10^n$, де $1 \leq \alpha < 10$, n – ціле число.

Число n називають порядком числа a, α – його основою. Основу α записують так, щоб усі цифри в ній були значущими.

Наприклад, $a = 4\,350\,000\,000 = 4{,}35 \cdot 10^9$;
$b = 0{,}000\,000\,508 = 5{,}08 \cdot 10^{-7}$.

Вправи на закріплення теоретичних знань

1. Округліть числа 17,26; 12,034; 8,654 до десятих і знайдіть абсолютну похибку кожного з наближених значень.

2. Знайдіть абсолютну похибку наближеного значення, яке дістали в результаті округлення:

а) числа 9,87 до одиниць;
б) числа 124 до десятків;
в) числа 0,453 до десятих;
г) числа 0,198 до сотих.

3. Знайдіть абсолютну похибку наближеного значення, користуючись наближеною рівністю:

а) 2,8413 ≈ 2,84; в) 0,0569 ≈ 0,057;

б) 31,192 ≈ 31,2; г) 487,81 ≈ 488.

4. Подайте число $\frac{1}{3}$ у вигляді десяткового дробу й округліть цей дріб до десятих, до сотих, до тисячних. У кожному випадку знайдіть абсолютну похибку наближеного значення.

5. Знайдіть за допомогою графіка функції $y = x^2$ наближені значення y, якщо $x = 0{,}9;\ 1{,}5;\ 2{,}3$. Обчисліть абсолютну похибку кожного з наближених значень (графік побудуйте на міліметровому папері).

6. Накресліть гострий кут і виміряйте його за допомогою транспортира. Яка точність знайденого результату?

7. Вимірюючи стрижень, користувалися лінійкою з міліметровими поділками, штангенциркулем (ціна поділки 0,1 мм) і мікрометром (ціна поділки 0,01 мм). При цьому отримали результати: 17,9, 18, 17,86 мм. Яким інструментом виконане кожне із зазначених вимірювань і яку точність дає кожний інструмент?

8. За допомогою терезів і гир установили, що маса кавуна більша за 5 кг і менша за 6 кг. За наближене значення маси взяли середнє арифметичне 5 кг і 6 кг. З якою точністю взято це наближення?

9. Покажіть, що кожне з чисел 0,16 і 0,17 є наближеним значенням числа $\frac{1}{6}$ з точністю до 0,01. Яке з них є наближеним значенням числа $\frac{1}{6}$ з точністю до 0,001?

10. Вольтметром вимірили напругу та отримали $u = 210 \pm 0{,}5$ В. Доведіть, що відносна похибка не перевищує 0,3 %.

11. Виконуючи лабораторну роботу з визначення густини алюмінію, учень отримав результат 2600 кг/м^3. Оцініть відносну похибку експериментального результату, якщо табличне значення густини алюмінію 2700 кг/м^3.

12. Порівняйте якість вимірювань товщини d людського волосся та відстані l від Землі до Місяця, якщо $d = 0{,}15 \pm 0{,}01$ мм і $l = 384\,400 \pm 500$ км.

13. Під час вимірювання встановлено, що швидкість світла у вакуумі дорівнює $2{,}998 \cdot 10^5$ км/с. Оцініть відносну похибку цього наближеного значення.

14. Число π виражається нескінченним десятковим неперіодичним дробом. Електронно-обчислювальні прилади дозволяють рахувати велику кількість десяткових знаків числа π. Якої досягли точності, якщо вирахували:
а) 7 знаків; б) 20 знаків; в) 707 знаків.

15. Укажіть точність наближеного значення числа p, якщо p дорівнюватиме:
а) $2{,}6 \cdot 10^2$; б) $9{,}12 \cdot 10$; в) $5{,}20 \cdot 10^3$;
г) $6{,}0 \cdot 10^2$; д) $1{,}7 \cdot 10^{-2}$; е) $5 \cdot 10^{-3}$.

16. У довіднику зазначається: маса Сонця дорівнює $1{,}990 \cdot 10^{30}$ кг, маса Землі дорівнює $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг. Яку точність мають ці наближенні значення?

17. Маса електрона дорівнює $0{,}91 \cdot 10^{-27}$кг. У числі 0,91 всі цифри правильні. Вкажіть точність наближеного значення $0{,}91 \cdot 10^{-2}$.

18. Назвіть порядок числа, записаного у стандартному вигляді:
а) $1{,}2 \cdot 10^9$; б) $3{,}6 \cdot 10^3$; в) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$;
г) $6{,}3 \cdot 10^{-1}$; д) $4{,}42 \cdot 10^5$; е) $9{,}28 \cdot 10^{-4}$.

19. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 52 000 000; б) 2 180 000; в) 675 000 000;
г) 40,44; д) 0,00281; е) 0,0000035.

20. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 1 024 000; б) 6 000 000; в) 31,56;

г) 0,85; д) 0,000004; е) 0,000282.

21. Округліть число до третьої зліва значущої цифри та отриманий результат запишіть у стандартному вигляді:

а) 70126,333407; б) 0,0267891234;

в) 65063838345; г) 0,00091620004.

22. Маса Землі дорівнює

6 000 000 000 000 000 000 000 т,

а маса атому водню –

0,000 000 000 000 000 000 017 г.

Запишіть у стандартному вигляді масу Землі та масу атому водню.

23. Виразіть:

а) $2{,}85 \cdot 10^8$ (см) у (км); б) $6{,}75 \cdot 10^{15}$ (г) у (т);

в) $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ (м) у (мм); г) $1{,}9 \cdot 10^{-2}$ (т) у (кг).

24. Виконайте множення:

а) $(3{,}25 \cdot 10^2) \cdot (1{,}4 \cdot 10^3)$; б) $(6{,}5 \cdot 10) \cdot (3{,}8 \cdot 10^4)$;

в) $(1{,}6 \cdot 10^{-2}) \cdot (6{,}7 \cdot 10^{-3})$; г) $(4{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5{,}2 \cdot 10^4)$.

25. Виконайте ділення:

а) $(8{,}7 \cdot 10^4) : (3 \cdot 10^2)$; б) $(9{,}9 \cdot 10^2) : (1{,}2 \cdot 10^{-1})$;

в) $(4{,}5 \cdot 10^3) : (2{,}5 \cdot 10)$; г) $(1{,}23 \cdot 10^{-3}) : (4{,}8 \cdot 10^{-2})$.

1.3.2. Методи наближених обчислень

1.3.2.1. Метод меж

Одним із методів, яким послуговуються під час виконання обчислень з наближеними значеннями чисел і величин є **метод меж** (надалі ММ). Його ще називають **метод із строгим урахуванням похибок** або **методом подвійних обчислень**. Така назва пов'язана з тим, що усі обчислення під час його застосування доводиться проводити двічі – як для нижніх меж наближених даних, так і для верхніх.

Оцінка дій за методом меж базується на правилах виконання дій над нерівностями: додавання, множення і похідних від них – віднімання і ділення:

а) якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$;

б) якщо $a > b$ і $c > d$ і $a,\ b,\ c,\ d -$ додатні, то $a \cdot c > b \cdot d$;

в) якщо $a > b$ і $c > d$, то $a - d > b - c$;

г) якщо $a > b$ і $c > d$ і $a,\ b,\ c,\ d -$ додатні, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Нехай дано два наближені числа a і b, відповідно з межами HM_a, BM_a, HM_b, BM_b.

Тоді, $HM_a < a < BM_a$, $HM_b < b < BM_b$.

Правила виконання дій над наближеними значеннями чисел такі.

Правило 1 (правило суми)**. Нижня межа суми дорівнює сумі нижніх меж доданків; верхня межа суми дорівнює сумі верхніх меж доданків.**

За допомогою числових нерівностей правило можна записати у вигляді схеми.

$$\begin{array}{l} HM_a < a < BM_a \\ + \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ HM_b < b < BM_b \\ \hline HM_a + HM_b < a + b < BM_a + BM_b \end{array}$$

Проілюструємо зазначене правило на прикладі.

Приклад 1. Оцінити значення периметра прямокутника, знаючи межі, в яких знаходяться довжини його сторін, виражені в см:

$$7{,}6 < x < 8{,}2,\ 4{,}2 < y < 4{,}8.$$

Розв'язання

1 спосіб (не використовуючи правил виконання дій над нерівностями).

Запишемо межі довжин сторін прямокутника:

$HM_a = 7{,}6,\ BM_a = 8{,}2,\ HM_b = 4{,}2,\ BM_a = 4{,}8.$

	HM	BM
x	7,6 ↓	8,2 ↓
y	4,2 ↓	4,8 ↓
$x + y$	11,8	13,0
$2(x + y)$	23,6	26,0

Отже, $HM_{(x+y)} = 23{,}6,$ а $BM_{(x+y)} = 26{,}0.$ Як бачимо, цифри верхньої і нижньої межі різняться вже у розряді одиниць тому розряд десятих не впливає на точність отриманого результату: $HM_{(x+y)} = 23, BM_{(x+y)} = 26.$

***Зауваження**. Слід зазначити, що під час виконання дій над наближеними числами за методом меж нижня межа завжди округлюється з недостачею, а верхня – з надлишком.*

Знаходимо наближене значення периметра і межу абсолютної похибки:

$P = 2(x + y) = \frac{26+23}{2} \pm \frac{26}{2},$

$P = 2(x + y) = 24{,}5 \pm 1{,}5.$

Знайдена межа абсолютної похибки (1,5) означає, що в наближеному значенні периметра (24,5) правильною є лише цифра (2). Тому у відповіді можна залишити лише правильні цифри або, при потребі, ще одну запасну − сумнівну. Тобто, $P = 20 \pm 1{,}5$ (см) або $P = 24 \pm 1{,}5$ (см). Інший запис: $p \approx 20$ см або $P \approx 24$ см.

2 спосіб. Застосуємо правила виконання дій над нерівностями:

$$\begin{array}{l} 7{,}6 < x < 8{,}2 \\ + \quad \downarrow \qquad \downarrow \\ \underline{4{,}2 < y < 4{,}8} \\ 11{,}8 < x + y < 13{,}0 \\ 23{,}6 < 2(x + y) < 26{,}0 \end{array}$$

Міркуючи аналогічно до 1 способу розв'язання цієї задачі, отримуємо кінцевий результат: $P = 20 \pm 1{,}5$ (см) або $P = 24 \pm 1{,}5$ (см).

Правило 2 (правило різниці)**. Нижня межа різниці дорівнює різниці нижньої межі зменшуваного і верхньої межі від'ємника; верхня межа різниці дорівнює різниці верхньої межі зменшуваного і нижньої межі від'ємника.**

За допомогою числових нерівностей правило можна подати у вигляді схеми.

$$HM_a < a < BM_a$$

$$=$$

$$HM_b < b < BM_b$$

$$HM_a - BM_b < a - b < BM_a - HM_b$$

Проілюструємо зазначене правило на прикладі.

Приклад 2. Оцінити значення різниці $x - y$, якщо: $7{,}4 < x < 8{,}2$, $4{,}2 < y < 4{,}8$.

Розв'язання

1 спосіб (не використовуючи правил виконання дій над нерівностями).

Запишемо межі даних:

$HM_x = 7{,}4,\ BM_x = 8{,}2,\ HM_y = 4{,}2,\ BM_y = 4{,}8.$

	HM	BM
x	7,4	8,2
y	4,2	4,8
$x - y$	2,6	4,0

Отже, $HM_{(x-y)} = 2{,}6$, а $BM_{(x-y)} = 4{,}0$. Як бачимо, цифри верхньої і нижньої межі різняться вже у розряді

цілих. Тому це може впливати на точність отриманого результату.

Знаходимо наближене значення і межу абсолютної похибки.

$x - y = \frac{4,0+2,6}{2} \pm \frac{4,0-2,6}{2}$,

$x - y = 3,3 \pm 0,7$.

Знайдена межа абсолютної похибки (0,7) означає, що в наближеному значення різниці (3,3) правильною є лише перша цифра (3). Тому у відповіді можна залишити лише правильні цифри або, при потребі, ще одну запасну − сумнівну. Тобто

$x - y = 3,3 \pm 0,7$ або $x - y = 3 \pm 0,7$.

Отже, $x - y = 3,3 \pm 0,7$ або $x - y = 3 \pm 0,7$.

2 спосіб. Застосуємо правила виконання дій над нерівностями:

$$7,4 < x < 8,2$$

$$-4,8 < -y < -4,2$$

$$2,6 < x - y < 4,0$$

Міркуючи аналогічно до 1 способу розв'язання цієї задачі, отримуємо кінцевий результат: $x - y = 3,3 \pm 0,7$ або $x - y = 3 \pm 0,7$.

Правило 3 (правило добутку)**. Нижня межа добутку дорівнює добутку нижніх меж множників, за умови, що вони додатні; верхня межа добутку дорівнює добутку верхніх меж множників, за умови, що вони додатні.**

За допомогою числових нерівностей правило може бути записано у вигляді схеми:

$$HM_a < a < BM_b$$
$$\otimes \downarrow \qquad \downarrow$$
$$HM_a < b < BM_b$$
$$_____$$
$$HM_b \cdot HM_b < a \cdot b < BM_a \cdot BM_b$$

Проілюструємо зазначене правило на прикладі.

Приклад 3. Оцінити значення площі прямокутника, знаючи межі, в яких знаходяться довжини його сторін, виражені в см: $7{,}6 < x < 8{,}2$, $4{,}2 < y < 4{,}8$.

Розв'язання

1 спосіб (не використовуючи правил виконання дій над нерівностями). Запишемо межі довжин сторін прямокутника: $HM_x = 7{,}6,\ BM_x = 8{,}2,\ HM_y = 4{,}2,\ BM_y = 4{,}8$.

	HM	BM
x	7,6 ↓	8,2 ↓
y	4,2 ↓	4,8 ↓
$x \cdot y$	31,92	39,36

Отже, $HM_{(xy)} = 31{,}92$, а $BM_{(xy)} = 39{,}36$. Як бачимо, цифри верхньої і нижньої межі різняться у розряді одиниць. Тому розряд сотих не може впливати на точність отриманого результату: $HM_{(xy)} = 31{,}9, BM_{(xy)} = 39{,}4$. Знаходимо наближене значення площі і межу її абсолютної похибки.

$$x \cdot y = \frac{31{,}9+39{,}4}{2} \pm \frac{39{,}9-39{,}4}{2},$$
$$x \cdot y = 35{,}65 \pm 0{,}25.$$

Як бачимо, знайдена межа абсолютної похибки (0,25) означає, що в наближеному значення різниці (35,65)

правильними є лише перші цифри 3 і 5. Тому у відповіді можна залишити лише правильні цифри або ще одну запасну − сумнівну.

Тобто $x \cdot y = 35{,}7 \pm 0{,}25$ або $x \cdot y = 36 \pm 0{,}25$.

Отже, $S = 35{,}7 \pm 0{,}25$ см^2 або $S = 36 \pm 0{,}25$ см^2.

2 спосіб. Застосуємо правила виконання дій над нерівностями:

$$\begin{array}{l} 7{,}6 < x < 8{,}2 \\ \otimes \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ 4{,}2 < y < 4{,}8 \\ \hline 31{,}92 < x \cdot y < 39{,}36 \end{array}$$

Міркуючи аналогічно до 1 способу розв'язання цієї задачі, отримуємо кінцевий результат: $S = 35{,}7 \pm 0{,}25$ см^2 або $S = 36 \pm 0{,}25$ см^2.

Правило 4 (правило частки)**. Нижня межа частки дорівнює частці нижньої межі діленого і верхньої межі дільника, за умови, що вони додатні; верхня межа частки дорівнює частці верхньої меж діленого і нижньої межі дільника, за умови, що вони додатні.**

За допомогою числових нерівностей правило можна подати у вигляді схеми:

$$\begin{array}{l} HM_x < x < BM_x \\ \div \quad \nearrow\!\!\!\times\!\!\!\searrow \\ HM_y < y < BM_y \\ \hline \dfrac{HM_x}{BM_y} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{BM_y}{HM_x} \end{array}$$

Проілюструємо зазначене правило на прикладі.

Приклад 4. Знайти густину речовини, якщо в результаті вимірювань отримали дані: маса речовини $m = 148{,}0 \pm 0{,}5$ г, об'єм речовини $V = 34{,}0 \pm 0{,}5$ см^3.

Розв'язання

Знаходимо густину речовини за формулою: $\rho = \frac{m}{V}$, причому

$$147{,}5 < m < 148{,}5$$
$$\oplus$$
$$33{,}5 < V < 34{,}5$$
$$\frac{147{,}5}{34{,}5} < \frac{m}{V} < \frac{148{,}5}{33{,}5}$$
$$4{,}27536 < \frac{m}{V} < 4{,}43283$$

Як бачимо, у нижньої та верхньої межі збігається лише перша цифра $-$ 4, вона є правильною. Перевіримо, чи буде правильною наступна за нею цифра: округлюємо нижню межу з недостачею, а верхню $-$ з надлишком. Маємо:

$$4{,}2 < \frac{m}{V} < 4{,}5$$
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4{,}5+4{,}2}{2} \pm \frac{4{,}5-4{,}2}{2}$$
$$\rho = 4{,}35 \pm 0{,}15$$

Отже, абсолютна похибка більше за одиницю розряду десятих, то 3 $-$ цифра сумнівна. Тоді, $\rho = 4{,}4 \pm 0{,}2$ $^{\text{г}}/_{\text{см}^3}$.

Відповідь: $\rho = 4{,}4 \pm 0{,}2$ $^{\text{г}}/_{\text{см}^3}$.

Аналогічно дії слід виконувати й у випадку розв'язування задачі, коли явно не використовуються правила виконання дій над нерівностями:

$$HM_m = 147{,}5, BM_m = 148{,}5,$$
$$HM_V = 33{,}5,\ BM_V = 34{,}5.$$

	HM	BM
m, г	147,5	148,5
V, $см^3$	33,5	34,5
$\frac{m}{V}\left(\frac{г}{см^3}\right)$	4,27536 …	4,43283 …

Міркування, викладені у розв'язанні задачі попереднім способом, приводять до висновку, що:

$S = \rho = 4{,}35 \pm 0{,}15\ {}^{г}/_{см^3}$.

Зауваження. *Межі округлюють до розряду, починаючи з якого з'являється розбіжність у цифрах верхньої та нижньої меж. У тому випадку, коли виконувана дія є проміжною, залишають одну, іноді дві запасні цифри. У відповіді залишають лише правильні цифри.*

1.3.2.2. Метод підрахунку цифр

Якщо під час виконання обчислень з наближеними значенням чисел чи величин питання строгого врахування похибок не є актуальним, то часто послуговуються **методом підрахунку цифр** (надалі коротко МПЦ).

Його суть: коли виконуються дії додавання чи віднімання то беруть до уваги десяткові знаки в записі наближених даних, а якщо виконуються дії множення чи ділення, то значущі цифри, дотримуючись наступних правил.

Правило 1. У сумі і різниці наближених значень зберігають стільки десяткових знаків, скільки їх міститься в тому з наближених даних, яке має найменше десяткових знаків.

Приклад 1. Відомо, що $a \approx 8{,}1956$ і $b \approx 2{,}3$. Знайти суму і різницю цих чисел.

Розв'язання

Згідно правила $a + b = 8{,}1956 + 2{,}3 = 10{,}4956$. Округлюємо цю суму до десятих, оскільки в наближеному значення числа b один десятковий знак, а в наближеному значенні a десяткових знаків більше.

Отже, $a + b \approx 10{,}5$.

Аналогічно знаходимо, що

$$a - b = 8{,}1956 - 2{,}3 = 5{,}8956 \approx 5{,}9.$$

Правило 2. У добутку і частці наближених значень зберігають стільки значущих цифр, скільки їх міститься в тому з наближених даних, в якому менше значущих цифр.

Приклад 2. Дано $a \approx 4{,}17$ і $b \approx 1{,}6$. Знайти добуток і частку цих чисел.

Розв'язання

Згідно правила $a \cdot b = 4{,}17 \cdot 1{,}6 = 6{,}672$. Оскільки в наближеному значення b міститься дві значущі цифри, а в наближеному значенні a їх більше, то округлення добутку здійснюємо до двох значущих цифр. Отже, $a \cdot b \approx 6{,}7$.

Аналогічно знаходимо, що

$a : b = 4{,}17 : 1{,}6 = 2{,}60625 \approx 2{,}6$.

Зауваження. *Для спрощення обчислень методом підрахунку цифр іноді спочатку округлюють наближені значення, залишивши в кожному з них відповідну кількість десяткових знаків чи значущих цифр, а потім знаходять результат.*

Приклад 3. Знайти наближене значення суми x, y, z, якщо $x \approx 3{,}1416,\ y \approx 1{,}7,\ S \approx 7{,}45$.

Розв'язання

Найменша кількість десяткових знаків після коми у наближеному значенні y – один, тому в сумі потрібно зберегти один десятковий знак після коми.

Для спрощення обчислень округлимо до десятих 3,1416 і 7,45, а потім виконаємо додавання:

$3{,}1416 \approx 3{,}1$; $7{,}45 \approx 7{,}5$.

Тоді $3{,}1 + 7{,}5 + 1{,}7 = 12{,}3$. Отже, $x + y + z \approx 12{,}3$.

Приклад 4. Знайти наближене значення добутку x і y, якщо якщо $x \approx 7{,}3$, і $y \approx 5{,}267$.

Розв'язання

У числі 7,3 дві значущі цифри, а в числі 5,267 їх чотири. Тому у добутку потрібно зберегти дві значущі цифри. Округлимо число 5,267 до двох значущих цифр, виконаємо множення і округлимо результат.

Маємо: $5{,}267 \cdot 7{,}3 \approx 5{,}3 \cdot 7{,}3 = 38{,}69 \approx 39$.

Отже, $x \cdot y \approx 39$.

Вправи на закріплення вивчених правил

1. Знайдіть наближене значення суми x і y, якщо:

а) $x \approx 12{,}4$ і $y \approx 3{,}1678$; в) $x \approx 3{,}67$ і $y \approx 2{,}134$;

б) $x \approx 45{,}116$ і $y \approx 22{,}3$; г) $x \approx 15{,}6$ і $y \approx 19$.

2. Знайдіть наближене значення суми a і b, якщо:

а) $a \approx 5{,}64$ і $b \approx 1{,}2316$; в) $a \approx 16{,}20$ і $b \approx 8{,}563$;

б) $a \approx 31{,}6423$ і $b \approx 12{,}6$; г) $a \approx 6{,}385$ і $b \approx 0{,}29$.

3. Відомо, що $a \approx 26{,}1042$, $b \approx 8{,}98$ і $c \approx 3{,}65$. Знайдіть наближене значення виразу:

а) $a + b + c$; б) $a + b - c$; в) $a - b + c$; г) $a - b - c$.

4. Маса пляшки з олією 1,63 кг, маса порожньої пляшки 0,706 кг. Знайдіть масу олії.

5. Маса легкого автомобіля 0,95 т, маса шофера 75 кг, а пасажира 68 кг. Яка маса автомобіля з людьми.

6. Електричне коло складається з трьох послідовно з'єднаних провідників, опори яких $R_1 \approx 5{,}25$ Ом, $R_2 \approx 3{,}815$ Ом і $R_3 \approx 4{,}70$ Ом. Обчисліть опір всього кола R (в Ом) за формулою $R = R_1 + R_2 + R_3$.

7. Маса Землі $5{,}976 \cdot 10^{21}$ т, маса Венери $4{,}88 \cdot 10^{21}$ т. На скільки тон маса Землі більша за масу Венери?

8. Знайдіть наближене значення суми p і q, якщо:

а) $p \approx 46{,}5$ і $q \approx 0{,}72$; в) $p \approx 15{,}94$ і $q \approx 0{,}85$;

б) $p \approx 0{,}0638$ і $q \approx 18{,}4$; г) $p \approx 0{,}43$ і $q \approx 72{,}845$.

9. Обчислити наближене значення частки x і y, якщо:

а) $x \approx 18{,}28$ і $y \approx 0{,}54$; в) $x \approx 731{,}8$ і $y \approx 12{,}5$;

б) $x \approx 0{,}36$ і $y \approx 0{,}0238$; г) $x \approx 0{,}816$ і $y \approx 0{,}5$.

10. Обчислити наближене значення добутку a і b, якщо:

а) $a \approx 2{,}2 \cdot 10^3$ і $b \approx 3{,}41 \cdot 10^4$;

б) $a \approx 1{,}154 \cdot 10^8$ і $b \approx 6{,}9 \cdot 10^{-5}$;

в) $a \approx 8{,}42 \cdot 10^{-4}$ і $b \approx 9{,}81 \cdot 10^5$;

г) $a \approx 7{,}605 \cdot 10^{-2}$ і $b \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}$.

11. Обчислити наближене значення частки x і y, якщо:

а) $x \approx 8{,}75 \cdot 10^6$ і $y \approx 5{,}4 \cdot 10^4$;

б) $x \approx 4{,}3 \cdot 10^5$ і $y \approx 6{,}95 \cdot 10^2$.

12. Спостерігач почув грім через 4,7 с після того, як побачив спалах блискавки. На якій відстані від спостерігача відбувся розряд (швидкість звуку в повітрі наближено дорівнює 332 м/с).

13. Маса мідної пластинки 325 г, густина міді 8,9 г/см^3. Знайдіть об'єм пластинки.

14. На прямокутній ділянці розміром 112 м $\times$ 348 м, посаджено картоплю. Передбачають, що врожай картоплі становитиме 18 т з гектара. Скільки картоплі планують зібрати з цієї ділянки?

1.3.2.3. Метод меж похибок

Метод меж вважають найбільш строгим, але незручним, бо доводиться виконувати обчислення двічі, що збільшує час на виконання завдання. Метод підрахунку цифр менш часовитратний, проте є не надто строгим, оскільки призводить до розширення проміжку, в якому знаходяться шуканий результат обчислення.

Тому часто застосовують ще один метод наближених обчислень – **метод меж похибок** (надалі коротко ММП).

Цей метод дає змогу визначити цілком конкретні значення похибок наближених результатів і зручний на практиці. У цьому його переваги від двох інших.

Методом меж похибок користуються для оцінювання точності результатів дій з наближеними значенням величин за допомогою таких теорем.

Теорема 1. Межа абсолютної похибки суми наближених значень величин дорівнює сумі меж: абсолютних похибок доданків.

Доведення

Нехай наближені значення величин x і y такі, що $x = a \pm h_a, y = b \pm h_b$.

Доведемо, що $h_{a+b} = h_a + h_b$.

Запишемо x і y у вигляді подвійних нерівностей і почленно їх додамо.

$$\begin{gathered} a - h_a \le x \le a + h_a, \\ + \\ b - h_b \le y \le b + h_b, \\ \hline a - h_a + b - h_b \le x + y \le a + h_a + b + h_b, \\ a + b - (h_a + h_b) \le x + y \le a + b + (h_a + h_b), \\ |(x + y) - (a + b)| \le h_a + h_b. \end{gathered}$$

Отже, згідно з означенням межі абсолютної похибки маємо: $h_{a+b} = h_a + h_b$, що й треба було довести. Очевидно, що ця теорема також має місце і для кількох доданків: $h_{a+b+c+d} = h_a + h_b + h_c + h_d$. Знайдемо межу відносної похибки суми двох наближених значень величин. Тоді $\varepsilon_{a+b} = \frac{h_{a+b}}{|a+b|} = \frac{h_a+h_b}{|a+b|}$.

Приклад 1. Знайдіть значення виразу $S = x + y + z$, якщо $x = 3{,}7 \pm 0{,}1, y = 2{,}28 \pm 0{,}001, \quad z = 5{,}324 \pm 0{,}001$. Оцініть абсолютну та відносну похибки результату.

Розв'язання

Знаходимо наближене значення суми:

$x + y + z = 3{,}7 + 2{,}28 + 5{,}324 = 11{,}304.$

Межа абсолютної похибки суми $h = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}111.$

Тоді $S = 11{,}304 \pm 0{,}111.$

Правильними є лише перші дві цифри, тоді результат округлюємо до одиниць $S = 11{,}304 \pm 0{,}111$ або $S \approx 11$. Межа відносної похибки

$$\varepsilon = \frac{h}{|x+y+z|} = \frac{0{,}111}{11{,}304} = 0{,}0098 \ldots = 0{,}01 = 1\ \%.$$

Приклад 2. Знайдіть значення суми $\sqrt{5} + \sqrt{7}$, узявши наближені значення коренів з точністю до тисячних. Оцініть межі абсолютної та відносної похибок результату.

Розв'язання

$\sqrt{5} = 2{,}2360679 \ldots \approx 2{,}236,$

$\sqrt{7} = 2{,}6457513 \ldots \approx 2{,}646.$

Межа абсолютної похибки кожного із наближених значень коренів дорівнює 0,001.

Тоді, $x + y = \sqrt{5} + \sqrt{7} = (2{,}236 \pm 0{,}001) + (2{,}646 \pm \pm 0{,}001) = 4{,}882 \pm 0{,}002$ або $x \approx 4{,}88$.

Межа відносної похибки суми

$$\varepsilon = \frac{0{,}002}{4{,}882} = 0{,}0004096 \ldots \approx 0{,}0004 = 0{,}4\ \%.$$

Теорема 2. Межа абсолютної похибки різниці наближених значень величин дорівнює сумі меж абсолютних похибок зменшуваного і різниці.

Доведення

Нехай наближені значення величин x і y такі, що

$x = a \pm h_a$, $y = b \pm h_b$. Доведемо, що $h_{a-b} = h_a + h_b$. Запишемо x і y у вигляді подвійних нерівностей і віднімемо їх за відомим правилом.

$$a - h_a \le x \le a + h_a,$$
$$-$$
$$b - h_b \le y \le b + h_b,$$
$$_____$$
$$a - h_a - (b + h_b) \le x - y \le a + h_a - (b - h_{b)},$$
$$a - b - (h_a + h_b) \le x - y \le a - b + (h_a + h_b),$$
$$|(x - y) - (a - b)| \le h_a + h_b.$$

Отже, згідно з означенням межі абсолютної похибки маємо: $h_{a-b} = h_a + h_b$, що й треба було довести. Знайдемо межу відносної похибки різниці двох наближених значень величин.

$$\varepsilon_{a-b} = \frac{h_{a-b}}{|a-b|} = \frac{h_a + h_b}{|a-b|}$$

Отже, з перших двох теорем випливає ***висновок*: *межа абсолютної похибки суми і різниці двох наближених значень величин дорівнює сумі меж абсолютних похибок вихідних даних.***

Приклад 3. Знайдіть значення різниці $\sqrt{85} - \sqrt{7}$, взявши наближені значення коренів з точністю до сотих. Оцініть межі абсолютної та відносної похибки результату.

Розв'язання

$\sqrt{85} = 9{,}22195444 \ldots$, $\sqrt{7} = 2{,}6457513 \ldots \approx 2{,}65$.

Межа абсолютної похибки кожного із наближених значень коренів дорівнює 0,01.

$x = \sqrt{85} - \sqrt{7} = (9{,}22 \pm 0{,}01) - (2{,}65 \pm 0{,}01) =$

$= 6{,}57 \pm 0{,}02$ або $x \approx 6{,}6$.

Межа відносної похибки різниці

$\varepsilon = \frac{0{,}02}{6{,}57} = 0{,}003044 \ldots \approx 0{,}003 = 3\ \%$.

Теорема 3. Межа відносної похибки добутку двох наближених значень додатних величин дорівнює сумі меж: відносних похибок множників.

Доведення

Нехай наближені значення величин x і y такі, що $x = a \pm h_a$, $y = b \pm h_b$ причому $a \pm h_a > 0, b \pm h_b > 0$. Доведемо, що $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$.

Згідно означення межі абсолютної похибки маємо:

$$a - h_a \le x \le a + h_a,$$
$$\times$$
$$b - h_b \le y \le b + h_b.$$

$$(a - h_a)(b - h_b) \le x \cdot y \le (a + h_a)(b + h_b)$$
$$ab - bh_a - ah_b + h_a h_b \le x \cdot y \le ab + bh_a + ah_b + h_a h_b.$$

Враховуючи, що числа h_a і h_b досить малі в порівнянні з числами a і b, то їх добутком можна знехтувати:

$ab - (bh_a + ah_b) \le x \cdot y \le ab + (bh_a + ah_b)$,

$|x \cdot y - a \cdot b| \le bh_a + ah_b$.

Згідно з означенням межі абсолютної похибки маємо:

$|x \cdot y - a \cdot b| \le h_{ab}$.

Отже з цього робимо висновок, що $h_{ab} = bh_a + ah_b$. Межа відносної похибки добутку

$$\varepsilon_{ab} = \frac{h_{ab}}{|ab|} = \frac{bh_a + ah_b}{|ab|} = \frac{h_{ab}}{|ab|} = \frac{bh_a}{|ab|} + \frac{h_{ab}}{|ab|} =$$
$$= \frac{bh_a}{ab} + \frac{bh_b}{ab} = \frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} = \frac{h_a}{|a|} + \frac{h_b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b,$$

що треба було довести.

Отже, для добутку двох наближених значень маємо формули (1) і (2) для обчислення меж абсолютної та відносної похибок:

$$h_{ab} = bh_a + ah_b \qquad (1)$$
$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \qquad (2)$$

Зауваження. *З отриманих рівностей легко вивести формули для знаходження меж похибок квадрата наближеного значення деякої величини.*

Якщо $x = a \pm h_a$, то $h_a = 2ah_b$, *а межа відносної похибки* $\varepsilon_{ab} = 2\varepsilon_a = \frac{2h_a}{|a|}$.

Приклад 4. Знайдіть масу фарби, потрібної для фарбування підлоги в кімнаті площа якої 40,3 м^2, якщо на 1 м^2 підлоги витрачається 0,17 кг фарби. Вкажіть межі абсолютної та відносної похибки результату.

Розв'язання

Масу фарби обчислюємо як добуток наближених значень площі підлоги та витрат фарби на квадратний метр $M = 40{,}3 \cdot 0{,}17 = 6{,}851$ кг. Враховуючи запис наближених значень величин в умові задачі, маємо, що площа підлоги кімнати $S = 40{,}3 \pm 0{,}1$ м^2, а витрати фарби $m = 0{,}17 \pm \pm 0{,}01$ кг на квадратний метр.

Межа абсолютної похибки

$h = 40{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}17 \cdot 0{,}1 = 0{,}403 + 0{,}017 = 0{,}42$ (формула 1).

Тоді $M = 6{,}851 \pm 0{,}42$ кг.

Запис результату дає змогу зробити висновок, що цифра 6 є правильною, 8 − сумнівною, а решта цифри − неправильні. Отже, $M = 6{,}9 \pm 0{,}42$ кг. Межа відносної похибка обчислень $\varepsilon = \frac{0{,}42}{6{,}9} \cdot 100\% = 6{,}086 \ldots \% \approx 7\ \%$ (формула 2).

Теорема 4. Межа відносної похибки частки двох наближених значень додатних величин дорівнює сумі меж: відносних похибок діленого і дільника.

Доведення

Нехай наближені значення величин x і y такі, що $x = a \pm h_a$, $y = b \pm h_b$, причому $a \pm h_a > 0, b \pm h_b > 0$. Доведемо, що $\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$.

Згідно означення межі абсолютної похибки маємо:

$$a - h_a \le x \le a + h_a,$$
$$\div$$
$$b - h_b \le y \le b + h_b.$$

$$\frac{a - h_a}{b + h_b} \le \frac{x}{y} \le \frac{a + h_a}{b - h_b}$$

Додамо почленно до кожної частини нерівності вираз $-\frac{a}{b}$.

$\frac{a-h_a}{b+h_b} - \frac{a}{b} \le \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \le \frac{a+h_a}{b-h_b} - \frac{a}{b}$,

$\frac{-ah_b-bh_a}{b(b+h_b)} \le \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \le \frac{ah_b+bh_a}{b(b-h_b)}$,

$\frac{-(ah_b+bh_a)}{b(b+h_b)} \le \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \le \frac{ah_b+bh_a}{b(b-h_b)}$.

Враховуючи, що число h_b досить мале в порівнянні з числом b, то ним можна знехтувати:

$-\frac{ah_b+bh_a}{b^2} \le \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \le \frac{ah_b+bh_a}{b^2}$,

$\left|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right| \le \frac{bh_a+ah_b}{b^2}$.

Згідно з означенням межі абсолютної похибки маємо: $\left|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right| \le h_{\frac{a}{b}}$.

Отже з цього робимо висновок, що $h_{\frac{a}{b}} = \frac{bh_a+ah_b}{b^2}$.

Межа відносної похибки добутку:

$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \frac{h_{\frac{a}{b}}}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{|b|(bh_a+ah_b)}{b^2|a|} = \frac{bh_a}{|ab|} + \frac{ah_b}{|ab|} = \frac{bh_a}{ab} + \frac{bh_b}{ab} = \frac{h_a}{a} +$

$+ \frac{h_b}{b} = \frac{h_a}{|a|} + \frac{h_b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$, що треба було довести.

Таким чином, для частки двох наближених значень маємо формули (3) і (4) для обчислення меж абсолютної та відносної похибок:

$$h_{\frac{a}{b}} = \frac{bh_a+ah_b}{b^2} \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{\frac{a}{b}} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \qquad (4)$$

Приклад 5. Знайдіть значення частки $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$, взявши наближені значення коренів з точністю до сотих. Вкажіть межі абсолютної та відносної похибки результату.

Розв'язання

$\sqrt{5} = 2{,}2360679 \ldots \approx 2{,}24, \quad \sqrt{7} = 2{,}6457513 \ldots \approx 2{,}65.$
Межа абсолютної похибки кожного із наближених значень коренів дорівнює 0,01.

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2{,}24 \pm 0{,}01}{2{,}65 \pm 0{,}01} = \frac{2{,}24}{2{,}65} \pm \frac{2{,}65 \cdot 0{,}01 + 2{,}24 \cdot 0{,}01}{2{,}65^2} = \frac{2{,}24}{2{,}65} \pm$$
$$\pm \frac{0{,}0265 \pm 0{,}0224}{7{,}0225} = 0{,}8452 \ldots \pm 0{,}00696 \ldots \approx 0{,}845 \pm 0{,}007.$$

Межа відносної похибки частки

$$\varepsilon = \frac{0{,}01}{2{,}24} \cdot 100\% + \frac{0{,}01}{2{,}65} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{224} + \frac{1}{265}\right) \cdot 100\% =$$
$$= 0{,}00823 \ldots \cdot 100\% \approx 0{,}82\ \%.$$

Приклад 6. Знайдіть значення різниці: а) $\sqrt{5} - \sqrt{7}$,

б) $\sqrt{11} - \sqrt{10}$, взявши наближені значення коренів з точністю до сотих. Укажіть межі абсолютної та відносної похибки результату.

Розв'язання

а) $\sqrt{5} = 2{,}2360679 \ldots \approx 2{,}24, \sqrt{7} = 2{,}6457513 \ldots \approx 2{,}65.$

Межа абсолютної похибки кожного із наближених значень коренів дорівнює 0,01.

$$x = \sqrt{5} - \sqrt{7} = (2{,}24 \pm 0{,}01) - (2{,}65 \pm 0{,}01) =$$
$= -0{,}41 \pm 0{,}02$ або $x \approx 0{,}4$.

Межа відносної похибки різниці є

$$\varepsilon = \frac{0{,}02}{0{,}41} = 0{,}04878 \ldots \approx 0{,}049 = 4{,}9\ \%.$$

б) $\sqrt{11} = 3{,}3166 \ldots \approx 3{,}32, \quad \sqrt{10} = 3{,}1622 \ldots \approx 3{,}16.$

$$x = \sqrt{11} - \sqrt{10} = (3{,}32 \pm 0{,}01) - (3{,}16 \pm 0{,}01) =$$
$= -0{,}16 \pm 0{,}02$ або $x \approx 0{,}4$.

Межа відносної похибки різниці є:

$$\varepsilon = \frac{0{,}02}{0{,}16} = 0{,}125 = 12{,}5\ \%.$$

Як видно з наведеного прикладу, похибка обчислення достатньо велика, що говорить про малоефективний метод обчислення. Це пов'язано з тим, що в даному прикладі знаходилася різниця чисел, які мало відрізняються. Чим менше числа будуть відрізнятися, тим більшою буде відносна похибка обчислень.

Тому в цій ситуації доцільним буде застосувати інший метод знаходження різниці.

Для цього позбудемося ірраціональності в чисельнику заданого виразу:

$$\sqrt{11} - \sqrt{10} = \frac{11-10}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}} =$$
$$= \frac{1}{(3{,}32\pm0{,}01)+(3{,}16\pm0{,}01)} = \frac{1}{6{,}48\pm0{,}02} \approx 0{,}154320\ \ldots$$

Тоді

$$h_{\frac{a}{b}} = \frac{bh_a+ah_b}{b^2} = \frac{6{,}48\cdot0+1\cdot0{,}02}{6{,}48^2} = \frac{0{,}02}{41{,}9904} = 0{,}000476\ \ldots \approx$$
$$\approx 0{,}0005.$$

Отже, $\sqrt{11} - \sqrt{10} = 0{,}154320\ \ldots \pm 0{,}0005 =$
$= 0{,}1543 \pm 0{,}0005.$

Межа відносної похибки різниці є:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0 + \frac{0{,}02}{6{,}48} = \frac{2}{648} = 0{,}00308\ \ldots \approx 0{,}3\ \%.$$

Таким чином, межа відносної похибки дозволяє зробити висновок про достатньо точне обчислення різниці величин.

Вправи для закріплення вивчених правил

1. Знайдіть наближене значення поданого виразу за МПЦ:

а) $x = \left(\frac{257 \cdot 640}{304}\right)^2$; б) $x = \frac{\sqrt[3]{4,45} \cdot \sqrt{4,2} \cdot 2,324^2}{4,125 \cdot 0,0063}$;

в) $x = \frac{3,25 \cdot 12,3^2 \cdot \sqrt{3,26}}{3,94^2 \cdot \sqrt{13,2}}$;

г) $z = \sqrt[3]{\frac{3x^2 \cdot \sqrt{tgx}}{5y^2 \cdot lgy}}$, якщо $x \approx 0,25$, $y \approx 1,25$.

2. Знайдіть значення виразу методом ММ:

а) $x = 6 \cdot (a - b)$, якщо $21,65 < a < 22,35$, $25,47 < b < 26,34$;

б) $x = ab + cn$, якщо $2,35 < a < 2,45$, $3,21 < b < 3,43$, $4,26 < c < 4,41$, $6,33 < n < 6,56$.

3. Знайдіть за ММ та ММП площу прямокутника із сторонами $x = 3,45 \pm 0,01$ см, $y = 4,4 \pm 0,05$ см. Обчисліть межу відносної похибки. Порівняйте отримані результати.

4. Обчисліть за ММП об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами, якщо $a = 4,48 \pm 0,005$ см, $b = 5,80 \pm 0,005$ см, $c = 6,72 \pm 0,005$ см. Знайдіть межу відносної похибки обчислення.

5. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: $a = 56,7$ см, $b = 42,2$ см. Скільки правильних значущих цифр містить число, що виражає довжину гіпотенузи? Вважайте, що у вихідних даних усі цифри – правильні.

1.4 Концептуальна модель вивчення наближених обчислень у Новій українській школі

Обчислювати, так само як писати і читати, повинні вміти всі. Завдання сформувати уміння і навички виконувати обчислення покладається, насамперед, на шкільну навчальну дисципліну – математика. Оскільки розвиток поняття про число, числові множини, вивчення дій над числами відбувається від п'ятого і до випускного класу ЗЗСО, то можна стверджувати, що формування обчислювальної компетентності учнів має проходити **систематично, неперервно, впродовж всього періоду навчання**. А факт, що уміння грамотно і вправно проводити обчислення під час розв'язування задач з суміжних з математикою навчальних дисциплін (фізики, хімії, технологій, інформатики і т. д.), в побуті, прикладних задач свідчить про те, що **обчислювальна компетентність учня є міжпредметною**. Числа, як відомо, можуть бути точними і наближеними. У більшості випадків, на практиці, доводиться виконувати обчислення з наближеними числами. Цілком логічно вважати, що має існувати організаційно-структурована модель вивчення наближених обчислень.

Пропонуємо в НУШ дотримуватись концептуальної моделі, яка була предметом наших досліджень і отримала схвалення серед освітянської спільноти, і розглянемо детально зміст і цілі вивчення наближених обчислень на кожному з етапів. (див. таблицю 1).

Таблиця 1

Рівень освіти	Етап навчання	Клас, предмет	Зміст, освітній компонент	
			Безпосереднє вивчення	**Фоновий режим**
Базова середня освіта	**І. Пропедевтичний**	**5 – 6 Математика**	Ознака наближеного числа чи величини, джерела наближених значень чисел і величини, запис наближених чисел у вигляді: - проміжку; - нерівності; - умовної рівності. Похибки. Знайомство з методом меж. Обчислення значень числових виразів за методом меж вручну і за допомогою калькулятора	Природознавство, практико-орієнтовані завдання
	ІІ. Систематичного вивчення	**7 – 8 Алгебра**	Обчислення значень алгебраїчних виразів, значень функцій. Графічне розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Розв'язування прикладних задач, дані в яких є наближеними числами. Числові характеристики наближених чисел: - похибка (абсолютна, відносна); - межа похибки (відносної похибки); - точність наближення. Стандартний вид числа	Фізика, хімія, технології
	ІІІ. Активного застосування	**9 Алгебра, геометрія**	Правильні, сумнівні і значущі цифри наближеного числа. Метод підрахунку цифр. Обчислення значень виразів різними методами, розв'язування прикладних задач алгебри і геометрії з наближеними даними. Наближені обчислення під час виконання проєктів	

Продовження таблиці 1

Рівень освіти	Етап навчання	Клас, предмет	Зміст, освітній компонент	
			Безпосереднє вивчення	Фоновий режим
Профільна середня освіта	III. Активного застосування	10 – 12 Алгебра і початки аналізу, стереометрія	Узагальнення, систематизація знань про наближені обчислення. Знайомство з методом меж похибок. Розв'язування вправ. Знаходження значень степеневої, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій для точного і наближеного значення аргументу. Графічне розв'язування ірраціональних, тригонометричних, показникових і логарифмічних рівнянь та нерівностей. Розв'язування прикладних задач моделями яких є степенева та тригонометричні, показникові і логарифмічні функції. Наближені обчислення під час вивчення похідної та інтеграла	Фізика, хімія, інформатика

1) Загальні пояснення до запропонованої концептуальної моделі.

Загальна мета і завдання. Метою вивчення наближених обчислень у ЗЗСО є сприяння загальному і повноцінному розвитку особистості учнів та їх математичної підготовки.

Розвивальною складовою вивчення наближених обчислень є формування різнобічно розвиненої особистості. За умов домінування активного навчання, діяльнісного підходу, посиленої уваги до дослідницьких

методів розвивальні можливості наближених обчислень можуть і повинні бути реалізовані.

Наближені обчислення є невід'ємним елементом обчислювальної та вимірювальної культури учнів, а також передумовою прикладної спрямованості навчання математики, що є одним із ключових завдань і зумовлює загальноосвітню складову їх вивчення. Ігнорування наближених обчислень створює негативний навчальний досвід, гальмує усвідомлений підхід до них, спричинює «обчислювальну безпорадність» учнів.

В основі формування вимірювальної культури учнів лежить розуміння різниці між поняттями про теоретичні та практичні вимірювання. Йдеться про те, що будь-яка величина має визначений розмір. Він існує об'єктивно, незалежно від наших знань про нього. Значення, яке ідеально відображає розмір величини (наприклад, у результаті теоретичного дослідження), прийнято називати істинним значенням вимірюваної величини, або результатом теоретичних вимірювань. Дії з результатами теоретичних вимірювань виконуються за правилами та властивостями точних обчислень. Дійсним же значенням вимірюваної величини, або результатом практичних вимірювань, називають значення величини, яке знаходять за допомогою вимірювальних приладів. Це числове значення величини є наближеним і залежить від багатьох чинників, що визначають його точність. Дії з результатами практичних вимірювань виконуються за правилами наближених обчислень.

Вибір методу наближених обчислень буде виправданим лише тоді, коли цей метод, як мінімум, матиме потенціал для органічного поєднання з традиційним навчальним матеріалом, як максимум – підсилить його можливості у розв'язуванні загальних проблем математичної освіти. Таким вимогам відповідає **метод меж.**

Об’єктивний зв’язок методу меж з теорією нерівностей робить його природнішим у шкільному курсі математики. Не виникає необхідності введення додаткового понятійного апарату, потрібно лише переструктурувати логіко-математичні зв’язки та перенести відповідні смислові акценти. Раннє та поступове оволодіння учнями **методом меж можна вважати пропедевтикою теорії нерівностей.**

На перших етапах (у курсі математики 5–6-х класів) теоретичною основою методу меж є відомості про порівняння чисел, властивості арифметичних операцій, інтуїтивні уявлення та відчуття учнів. На наступних етапах (у курсах алгебри та геометрії 7–8-х класів) в учнів поступово формуються відповідні уміння і навички під час розв'язування задач, пов’язаних з традиційним навчальним матеріалом. А вже в 9-му класі метод меж отримує строге математичне доведення та обґрунтування на основі властивостей нерівностей. Обрання цього методу провідним методом наближених обчислень дає змогу по-новому сприймати теорію нерівностей і закріплювати її на доступній для учнів прикладній основі.

Організація навчально-виховного процесу. Вивчення учнями наближених обчислень відбувається на уроках і в позаурочний час. Основну увагу слід приділяти навчально-дослідницькій, проєктній та ігровій діяльності учнів. Зокрема, залучати учнів до розв’язування практико-орієнтованих завдань, прикладних задач, виконання лабораторних та практичних робіт, створення та презентації проєктів.

Мотивом і одночасно засобом забезпечення ефективності вивчення наближених обчислень є цілеспрямовано створена система задач, які ілюструють міжпредметні та внутрішньопредметні зв’язки, а їх розв’язування потребує систематичного застосування

наближених обчислень, звернення до відповідного математичного апарату, формул і методів.

У процесі відповідної діяльності можна використовувати парні та групові форми організації навчання учнів, а також широко застосовувати інформаційно-комунікаційні технології. Вони є і засобом ілюстративного супроводу навчального матеріалу, й ефективним засобом формування графічної культури учнів, уможливлюють створення динамічних моделей та проведення обчислювальних експериментів.

Методологічними основами організації навчання наближених обчислень є ідеї раннього, поступового та систематичного вивчення відповідного навчального матеріалу, принципи концентризму та фузіонізму, а також принцип логічно завершеної математичної діяльності учнів. Засобами реалізації цих принципів є дидактичне адаптування навчального матеріалу до вікових можливостей сприйняття підлітків, юнаків, а також його вивчення як в активному, так і у фоновому режимах.

Етапи вивчення наближених обчислень.

У курсі математики для гімназій, відповідно до вікових особливостей учнів та структури традиційного програмного матеріалу, вивчення наближених обчислень доцільно проводити у три етапи: ***перший (пропедевтичний)*** — у пропедевтичному курсі математики 5–6-х класів; ***другий (систематичного вивчення)*** — у систематичних курсах алгебри та геометрії 7–8-х класів; ***третій (активного застосування)*** — під час завершення вивчення систематичних курсів алгебри і геометрії у 9-му класі;

у курсі математики для ліцеїв – під час вивчення алгебри та початків аналізу і стереометрії в 10–12 класах, суміжних з математикою навчальних дисциплін.

2) Цілі вивчення наближених обчислень.

5—6 класи

- Ознайомлення та систематичний і послідовний розвиток понять про точні та наближені значення з широким залученням елементарних відомостей про числові нерівності.
- Формування уявлень про ступінь близькості наближеного значення до точного (усно та за допомогою координатного променя і координатної прямої.
- Вироблення вмінь виконувати письмово арифметичні дії над наближеними значеннями, а також переводити практичні завдання (зокрема, прикладні задачі з простими математичними моделями) на мову математики.
- Підготовка учнів до вивчення числових характеристик наближених значень, а також до методу меж у систематичному курсі алгебри.

Навчання базується на індуктивній основі із залученням дедуктивних міркувань, а також навчально-дослідницької діяльності учнів. Оволодіння учнями теоретичним матеріалом в основному відбувається на наочно-інтуїтивному та наочно-оперативному рівнях. Математичні методи і закони формулюються у вигляді правил. Формується навчальний досвід учнів із залученням та корекцією їх життєвого досвіду, прикладів із довкілля тощо.

Під час вивчення наближених обчислень учні отримують уявлення про основні джерела наближених значень, оволодівають навичками їх запису в різних формах, мовленнєвого відтворення та зображення на координатній прямій (промені). Учні продовжують ознайомлення з геометричними поняттями, отримують початкові уявлення про теоретичні та практичні вимірювання величин; оволодівають навичками усного й письмового виконання додавання і множення наближених

значень; навчаються виконувати письмово віднімання та ділення наближених значень чисел; роблять спроби застосування опанованих знань на простих математичних моделях.

7—8 класи

- Систематизація і розширення відомостей про основні джерела наближених значень та форми їх запису, якими учні оволоділи під час вивчення наближених обчислень у 5—6-х класах.
- Ознайомлення та систематичний і послідовний розвиток поняття про числові характеристики наближених значень; формування вмінь їх знаходження і взаємопереходу.
- Доповнення уявлень про математичні операції над наближеними значеннями, зокрема піднесення до степеня з натуральним та цілим показниками.
- Застосування вмінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями під час розв'язування завдань прикладного змісту та задач, пов'язаних із традиційним програмним матеріалом.
- Підготовка учнів до вивчення методу меж та його використання на внутрішньопредметному і міжпредметному рівнях у завершальному курсі алгебри.

Вивчення наближених обчислень характеризується поступовим підвищенням теоретичного рівня. При цьому не знижується увага до навчально-дослідницької діяльності учнів, до оволодіння ними теоретичним матеріалом на наочно-оперативному рівні. Наочно-образний рівень сприйняття відомостей переростає в наочно-символьний, а наочно-оперативні вміння — у формально-оперативні. Знання учнів доповнюються і розширюються завдяки відомостям про числові нерівності. Посилюється прикладна та практична спрямованість вивчення наближених

обчислень, зумовлена цілеспрямованим розвитком відповідного математичного апарату.

Під час вивчення наближених обчислень учні отримують уявлення про точність і відносну точність наближених значень та їх окремі випадки — абсолютну і відносну похибки, а також оволодівають навичками їх знаходження, розпізнавання, аналізу та оцінки, навчаються оперувати відповідною символікою. В учнів формуються вміння переходити від кількісних числових характеристик до якісних і навпаки, розвиваються вміння виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями завдяки їх активному застосуванню, розширюються та поглиблюються уявлення про них.

9 клас

- Доповнення та узагальнення відомостей про числові характеристики наближених значень, якими учні оволоділи у 7—8-х класах.
- Доповнення уявлень про форми запису наближених значень, їх аналіз, оцінка та подальше застосування.
- Формування уявлень про правила підрахунку правильних цифр як один із методів наближених обчислень.
- Формування вмінь виконувати наближені обчислення за правилами підрахунку цифр.
- Вироблення вмінь упевнено використовувати наближені обчислення на внутрішньопредметному та прикладному рівнях.
- Підготовка учнів до використання наближених обчислень у подальшому вивченні математики та інших навчальних предметів.

Навчання наближених обчислень характеризується посиленням ролі абстрактно-теоретичних узагальнень та обґрунтувань. Удосконалюються формально-оперативні алгебраїчні вміння, які допомагають упевнено використовувати наближені обчислення в математиці та

інших предметах. Ознайомлення учнів із теорією нерівностей, відсотковими розрахунками, початковими елементарними поняттями теорії ймовірностей і статистики розкриває нові можливості для посилення прикладної та практичної спрямованості вивчення наближених обчислень.

Під час навчання учні отримують уявлення про прикидку точності наближених значень, записаних правильними числами; ознайомлюються з відповідною термінологією; удосконалюють уміння аналізу та оцінки наближених значень з метою або їх подальшого використання в межах задачі або з метою остаточного усвідомлення.

10—12 класи

- Ознайомлення з методом меж похибок під час виконання наближених обчислень, з його перевагами і недоліками, сферою застосувань.
- Формування вмінь виконувати наближені обчислення доцільним методом (методом меж, підрахунку цифр, методом меж похибок) під час розв'язування прикладних задач, виконання лабораторних та практичних робіт з суміжних з математикою предметів, під час виконання навчальних проєктів.
- Удосконалення обчислювальних умінь і навичок наближених обчислень під час знаходження числових значень виразів, функцій, розв'язування рівнянь, нерівностей, геометричних задач.
- Формування уявлення про якісну математичну модель розв'язання прикладних задач.

3) Програми і засоби вивчення наближених обчислень.

Наближені обчислення, як змістова лінія шкільного курсу математики, має бути відображена в навчальних програмах з математики для гімназій і ліцеїв. У них

наближені обчислення мають становити органічну частину змісту майже кожної теми з алгебри, геометрії, алгебри і початків аналізу, стереометрії. Крім того, мають бути чітко описані навчальні досягнення учнів у вигляді готовності і здатності виконувати наближені обчислення відповідно до вивченої теми.

Для реалізації названої лінії «Наближені обчислення» в навчальному процесі нові шкільні підручники з математики для 5–12 класів мають містити в достатній кількості практико-орієнтовані, практичні та прикладні задачі, задачі на міжпредметну тематику, в яких наближені обчислення виконуються безпосередньо або опосередковано. Методичні рекомендації щодо формування обчислювальної компетентності школярів подані в наступних розділах монографії.

РОЗДІЛ ІІ. НАВЧАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗДОБУВАЧІВ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

2.1. Вивчення наближених обчислень у курсі математики 5–6-х класів

2.1.1. Вимоги до математичної підготовки учнів та шляхи їх досягнення

Перший етап вивчення НО є досить відповідальним. На цьому етапі треба забезпечувати реалізацію принципу наступності між початковою школою та гімназією, сприяти адаптації дітей до навчання в базовій середній школі гімназії і, водночас, враховувати перспективи навчання в 7–9-х класах. Усе зазначене має бути відображене у цілях та змісті вивчення НО в 5–6-х класах. З цього випливає, що на першому етапі має відбуватись, насамперед, ознайомлення з усіма провідними поняттями НО. Від того наскільки воно буде методично та науково коректним, доступним і цікавим залежить ефективність вивчення НО на наступних етапах.

Проведене нами дослідження підтвердило думку про те, що уявлення, які стосуються провідних понять НО, мають формуватися на різних рівнях. Ці рівні мають відповідати запропонованій концептуальній моделі вивчення НО в гімназії, а також основним вимогам до математичної підготовки учнів, які мають бути зазначені в програмі з математики. Тому найбільш ґрунтовний характер повинні мати уявлення учнів про наближенні значення. Здебільшого інтуїтивний характер повинні мати уявлення учнів про числові характеристики наближених значень. Випереджальний характер повинні мати також уявлення учнів про методи НО. Вони обумовлюються формуванням на наочно-оперативному рівні навичок

виконання чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями чисел.

Формування усіх зазначених уявлень, а також відповідних їм умінь і навичок, повинно відбуватись у 5–6-х класах шляхом концентричного розвитку. Вони поступово мають розширюватися та залучатись у нові зв'язки. Відбуватися це повинно як за рахунок розгортання самої змістової лінії НО, так і за рахунок традиційного програмового матеріалу, зокрема, розширення уявлень учнів 5–6-х класів про числові множини. Йдеться про поступове опанування школярами уявлень про раціональні числа та дії над ними: натуральні, дробові (звичайні та десяткові) та від'ємні числа.

Відомо, що планування результатів навчання учнів неможливе поза їх зв'язком із передбачуваними шляхами досягнення, а саме обранням методів, організаційних форм та засобів навчання. Тому в основу організації проведеного нами експериментального навчання були покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики, які підтвердили свою педагогічну доцільність і під час вивчення НО в 5–6-х класах за пропонованою методикою.

Зокрема ефективним виявилося використання конкретно-індуктивного та пояснювально-ілюстративного методів, а також методу доцільних задач. Під час їх застосування основний акцент робився на наочності, інтуїції, а також навчальному та практичному досвіді учнів, зокрема тому, що отриманий у початковій школі.

Враховуючи інформаційну насиченість змісту НО у 5–6-х класах, а також специфіку провідних ідей, в основу навчальної діяльності учнів було доцільно покласти навчально-дослідницьку діяльність. Під час експериментального навчання було з'ясовано, що саме вона здатна забезпечити гармонійне «вплітання» НО у

традиційний програмовий матеріал, не приводячи при цьому до його понятійної перевантаженості. Важливо, щоб перехід до нового кола ідей, якими є для математики 5–6-х класів НО, було здійснено мотивованим, зрозумілим та доступним для учнів способом. Таким способом є навчально-дослідницька діяльність. Роблячи на ній основний акцент, ми керувалися відомою думкою про те, що пізнавальні мотиви частіше і легше за все виникають і ефективно реалізуються в спеціально створених проблемних ситуаціях, коли учні мають застосовувати нові і вже засвоєні знання та способи дій у практичній діяльності. Під час експериментального навчання навчально-дослідницька діяльність учнів мала здебільшого активний предметний характер через вікові особливості мислення та сприйняття учнів, а іноді проходила й у вигляді імітаційних експериментів. При цьому відбувалося звернення до навчального та життєво-практичного досвіду учнів, враховувався інтерес молодших підлітків до нових фактів і явищ, а також їх зв'язків із навчальним матеріалом.

Із курсу методики навчання математики відомо, що вивчення математики в 5–6-х класах ведеться на індуктивній основі лише із не частим використанням дедуктивних міркувань. Тому під час ознайомлення учнів з теоретичним матеріалом НО в основному відбувається на наочно-інтуїтивному та наочно-оперативному рівнях. Поняття доцільно вводити описово та індуктивним методом. Математичні методи і закони мають формулюватися у вигляді правил, алгоритмічних приписів та схем-орієнтирів.

Враховуючи педагогічну ефективність у цьому віці методу доцільних задач, а також зважаючи на неможливість строгого теоретичного подання матеріалу НО, як засіб розкриття відповідних понять найкраще використовувати задачі. Ефективність такого підходу була підтверджена у

ході дослідження і цілком відповідає методичним ідеям про те, що задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Під час експериментального навчання ми в основному орієнтувались на синтетичний метод розв'язування задач (міркування учнів відбуваються від умови, виводячи певні наслідки, до шуканого). Через специфіку навчального матеріалу з НО відповідна діяльність учнів відбувалась ніби «навпомацки». Ставилося за мету виховання в учнів «навчальної сміливості»: учні не повинні боятися помилитись, або висунути хибну гіпотезу.

Розробляючи методику вивчення будь-якої теми, в тому числі і НО, завжди постає питання вибору таких організаційних форм навчальної діяльності учнів та засобів навчання, які б підсилювали обрані методи та прийоми навчання, відповідали віковим особливостям учнів та психолого-педагогічним особливостям навчального матеріалу.

Під час експериментального навчання найбільшу ефективність показала фронтальна робота та деякі види групової діяльності; менш ефективною виявилась індивідуальна навчальна діяльність учнів. У ході дослідження підтвердилась думка про те, що різні форми фронтальної роботи надають можливість колективного розв'язування дослідницьких та проблемних задач, які ми здебільшого і використовували при ознайомленні учнів з НО. Саме під час фронтальної роботи відбувається колективне обговорення проблем, які стосуються матеріалу НО, а також висунення гіпотез з їх розв'язування. Такий підхід виявив найбільшу педагогічну доцільність. Лише у такий спосіб, лише в результаті «живого» спілкування вдається сформувати в учнів заплановані уявлення, а також перевірити їх сформованість. Під спілкуванням ми маємо на увазі не лише вербальні відносини, а і спільну предметну діяльність, зокрема виконання фронтальних

демонстраційних, лабораторних та практичних робіт. Зазначені підходи дозволили нам за обмежену кількість часу (що є особливо актуальним) донести запланований інформаційний ресурс до значної кількості дітей. Також вони сприяли створенню ситуацій, які допомагали учням 5–6-х класів проявити ініціативу, «мати право» на помилку, на власну думку, а також брати участь у спільній діяльності.

У методиці навчання математики виділяється цілий ряд недоліків фронтальної роботи. Ми також з ними зіткнулися під час пошукового експерименту. Так при вивченні НО іноді спостерігалося самоусунення учнів від участі в спільній роботі. Причиною цього виявився вибраний однаковий темп просування у навчальному матеріалі: слабші учні не встигали опановувати матеріал, а сильніші, навпаки, бачили на декілька кроків уперед та відверто нудьгували. Під час експериментального навчання ми компенсували зазначені недоліки за рахунок залучення у навчальний процес дидактичних та рольових ігор, а також деяких видів групової діяльності, зокрема парної та сумісно-розподільної. Їх ефективність була підтверджена в ході дослідження. Згадані види діяльності надали можливість учням оволодівати навчальним матеріалом з НО не лише з використанням підручника та за допомогою учителя, але й через спілкування між собою.

Аналізуючи недостатню ефективність індивідуальної навчальної діяльності учнів з опанування ними відомостей з НО, було з'ясовано, що учні 5–6-х класів ще мають загальні слабкі навички самостійної роботи. Працюючи самостійно вони швидко втомлюються, часто математично неграмотно виконують записи в зошитах, а також не володіють на достатньому рівні навичками роботи з підручником. Враховуючи це, а також специфічність навчального матеріалу з НО, у 5–6-х класах рекомендуємо рідко до неї звертатися, за виключенням випадків коли вона

нетривала, нескладна, а учні були до неї попередньо підготовлені.

Розвиток шкільної освіти потребує особливої уваги до засобів, що пов'язані з ІКТ. На думку сучасних вчених, зокрема М. І. Жалдака, П. А. Гевала, С. А. Ракова їх запровадження не повинно бути самоціллю. Їх використання має бути педагогічно виправданим, розглядатися перед усім з позицій педагогічних переваг порівняно з традиційною методикою навчання. Слід уникати надмірного захоплення, необдуманого використання комп'ютера і пам'ятати про ті негативні наслідки, які можливі внаслідок нераціонального використання засобів ІКТ. Саме таких принципів слід і дотримувались під час вивчення в 5–6-х класах НО.

Під час експериментального навчання широко використовувались засоби наочності. Зокрема виявилося ефективним використання засобів предметного моделювання, коли учні опрацьовували макети чи реальні об'єкти. Менш ефективним було використання засобів образного моделювання, коли учні мали подумки виконати осмислення та перетворення деяких об'єктів, що пов'язані з навчальним матеріалом НО. Їх використання обумовлене перш за все загально розвиваючими (зокрема поступовий розвиток абстрактного мислення), а вже потім загальноосвітніми цілями вивчення НО в гімназії. Окремі недоліки образного моделювання були компенсовані за рахунок широкого використання графічних засобів моделювання, а саме рисунків, схем, схем-орієнтирів, тощо. Їх використання показало не лише високу ефективність, але й педагогічну та методичну доцільність як основні засоби адаптації навчального матеріалу з НО до вікових особливостей сприйняття учнів 5–6-х класів. У ході експериментального навчання були виявлені деякі труднощі під час практичного впровадження таких

підходів. Зокрема учні не завжди на належному рівні сприймали знаки та символи, які використовувались у схемах орієнтирах. Спроба доповнити їх алгоритмічними приписами не в повній мірі вирішувала цю проблему через недостатнє володіння учнями навичками опрацювання навчальних текстів. Більш ефективним виявився вибір раціональних організаційних форм навчання, зокрема ігрової діяльності.

2.1.2. Подання навчального матеріалу з наближених обчислень

Навчальний матеріал 5 класу має пропедевтичних характер і щодо курсу математики 6 класу, і щодо систематичних курсів алгебри та геометрії 7–9-х класів. У першому семестрі в учнів 5 класу слід розпочати формування уявлень про усі провідні поняття НО. У методиці навчання математики цей крок трактують як виникнення відчуттів, що пов'язані із певними предметами та їх властивостями у процесі відповідної навчальної аналітико-синтетичної діяльності. Другим кроком є їх сприйняття. Цей крок доцільно планувати на другий семестр 5 класу та на весь 6 клас, де отримані початкові уявлення учнів з НО розширюються та поглиблюються.

Аналіз навчально-методичної літератури та шкільна практика показали, що зміст навчального матеріалу з математики першого семестру 5 класу володіє і методичними, і змістовими передумовами для педагогічно виваженого впровадження НО. Так матеріал першої теми 5 класу «Натуральні числа. Геометричні фігури і величини» в достатній мірі вже відомий учням ще з початкової школи. Тому вчителю важко підтримувати пізнавальний інтерес учнів як на уроках, так і під час виконання ними домашніх завдань. Засобом забезпечення мотивації навчання та підвищення пізнавального інтересу у цій ситуації

вважається розв'язування задач практичного змісту (практично орієнтовані завдання), які безпосередньо пов'язані з НО. Узявши за основу цю думку під час експериментального навчання, ми виявили, що ознайомлення учнів із відомостями з НО вносить новизну у навчальний процес, а також викликає інтерес у п'ятикласників і своїм змістом, і шляхами його донесення. Зупинимось детальніше на відповідних методичних розробках.

За традиційною програмою з математики першою темою 5 класу є тема «Натуральні числа». Вона методично пов'язана з одним із джерел наближених значень, а саме із лічбою. Це випливає із твердження, яке описує поняття «натуральні числа». Нагадаємо його: «*Числа* 1, 2, 3, *..., що використовуються під час лічби предметів, дістали назву натуральних*». Під час вивчення вказаної теми, учні частково-пошуковим методом, а саме в ході евристичної бесіди, були підведені до висновків про те, що результати лічби можуть виражатись і точними, і наближеними значеннями, а причини наближеності можуть бути найрізноманітнішими. Точний результат можемо отримати лише при проведенні підрахунків у сприятливих умовах, наприклад, коли об'єкти лічби не рухаються, чітко визначені, їх добре можна розрізнити та охопити поглядом, тощо. Якщо ж умови не сприятливі, то зазвичай отримують наближений результат підрахунків. У ході експериментального навчання було з'ясовано, що пояснювально-ілюстративний метод під час викладення вищевказаних міркувань, навіть із залученням цікавих фактів, не виявляє достатньої ефективності. Тому для її підвищення, а також для з'ясування питання: «Як зрозуміти, коли в результаті лічби отримують точні, а коли наближені значення?», проводиться короткочасна фронтальна демонстраційна лабораторна робота (в основу її

розробки лягли ідеї Я. І. Грудьонова, Ю. М. Колягіна та ін.). Суть роботи полягала в тому, що учні мали, не роблячи графічних поміток, підрахувати кількість кругів на двох рисунках (див. рис. 2, 3).

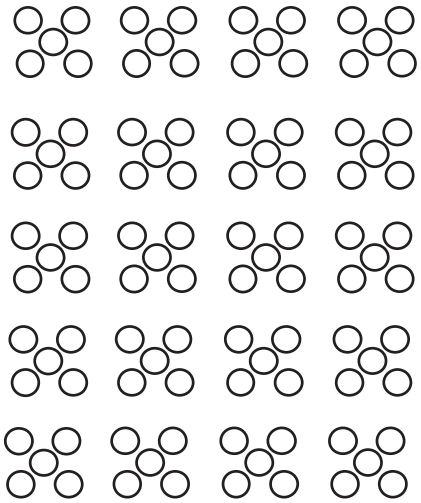


Рис. 2

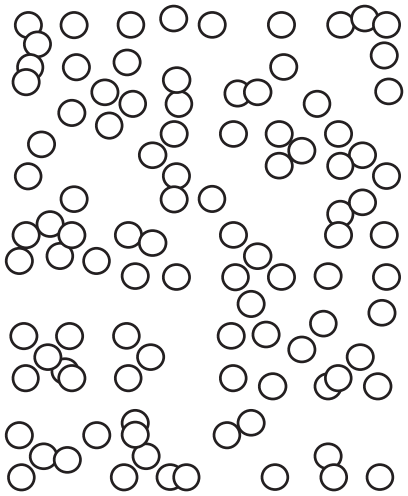


Рис. 3

Для першого рисунка усі учні одразу отримали однакову відповідь: 100 кругів. Для другого – різні: 96, 98 , …, 102, 103. Підсумовуючи результати дій учнів, вчитель ознайомлює їх із достатньою ознакою наближеності результатів підрахунків, яка звучить так: «*Результат підрахунків є наближеним, якщо при повторних підрахунках отримують різні відповіді. Тому результатом підрахунку кругів на першому рисунку є точне значення, а на другому – наближене*». В учнів виникає запитання: «*Як записувати наближені значення*?». Учитель повідомляє, що серед отриманих результатів обирають найменше значення 96, його домовились називати нижньою межею наближеного значення, та найбільше 104 – його домовились називати верхньою межею наближеного значення. Невідоме точне значення для зручності позначають буквою, наприклад x, після чого записують подвійну нерівність: $96 \leq x \leq 103$. Учням також повідомляється, що існують й інші форми запису

наближених значень. Наприклад побутовою мовою відповідь до вищенаведеної задачі може звучати так: «Рисунок 2 містить приблизно 96–103 круги, або *від* 96 *до* 103 кругів*»*. Ознайомлення ж з усіма іншими формами запису відбувається пізніше.

По завершенню виконання вказаної роботи, вчитель має ініціювати ведення евристичної бесіди про підрахунок великої кількості предметів. Поштовхом для її проведення у нашому дослідженні слугувало таке запитання: «*Розв'язуючи приклади з підручника, ми оперуємо дуже великими числами, що мають розряди мільйонів, мільярдів, сотень мільярдів… Як можна полічити таку велику кількість предметів? Адже щоб полічити лише до мільйона потрібно багато часу, а помилитись можна і підраховуючи навіть набагато меншу кількість предметів...*». Анонсуючи розв'язування цих питань на наступному уроці, вчитель пропонує для виконання учням домашнє завдання у вигляді практичної роботи.

Підсумовуючи результати практичної роботи, вчитель формує не лише попередні уявлення учнів про виконання дій над наближеними значеннями, а й уявлення про ймовірнісні наближення, які пізніше під час вивчення учнями елементів теорії ймовірностей та математичної статистики ляжуть в основу їх уявлень про вибірковий метод. Вони мають вигляд такого правила-орієнтира: «*Щоб полічити велику кількість предметів, слід розділити їх на кілька рівних (або умовно рівних) частин. Полічити в одній з них кількість предметів. Помножити кількість предметів в одній частині на кількість частин*». Важливо акцентувати увагу учнів на тому, що в таких підрахунках ми можемо отримати в результаті як точні, так і наближені значення. Прикладом цього слугує завдання про кульки. Наближені значення отримують, якщо частини є лише

приблизно рівними або якщо кількість предметів в одній частині можна визначити лише наближено.

Для закріплення отриманих уявлень під час експериментального навчання учням для розв'язування пропонувалися задачі. Наведемо приклад однієї з них.

Задача. Онуки приїхали до бабусі на літні канікули. Вона доручила їм порахувати курей, які бігали по подвір'ю. Маринка налічила 22 курки, Микола – 25, Петрик – 26, а дідусь, який вийшов допомогти онукам, налічив 24 курки. Скільки приблизно курей знаходилась на подвір'ї?

Коментарі до розв'язування задачі. Учні, володіючи уявлення про запис наближених значень через вказування їх меж, записують відповідь на мові математики: $22 \leq x \leq 26$, де x – кількість курей на подвір'ї; та на побутовій мові: на подвір'ї знаходиться десь $22-26$ курки. Такі задачі мають на меті сприяти формуванню в учнів елементарних умінь з «перекладу» практичних задач на мову математики та навпаки – адаптуванню отриманих математичних результатів відповідно до запитання задачі. Вони стають складовою інтуїтивного знайомства учнів із етапами математичного моделювання, яке передбачається методичними рекомендаціями до вивчення математики в 5 класі 12-ти річної школи.

Під час експериментального навчання вивчення наступної теми «Вимірювання і побудова відрізків» розпочинається ознайомленням учнів із практичними вимірюваннями як із другим джерелом наближених значень. Згідно традиційної методики в цей час мають формуватись уявлення учнів лише про теоретичні вимірювання. Наша мета – доповнити їх відомостями і про практичні вимірювання.

Мотивом для виникнення в учнів відчуття та подальшого сприйняття основних ідей, що пов'язані з практичними вимірюваннями, має бути активна предметна

діяльність навчально-дослідницького характеру. В ході експериментального навчання вона організовувалась так: під час вивчення тем «Відрізки. Ламані та їх довжини» або «Відрізок. Довжина відрізка» учням було запропоновано за допомогою лінійки з поділками відміряти та відрізати 33 см мотузки. Отримані таким чином «відрізки» (частини мотузки) у різних учнів у більшості випадків не збігалися при накладанні, що і підштовхнуло учнів дізнатися причину таких «дивних» результатів своєї діяльності.

До аналогічної навчально-дослідницької діяльності учні залучались і під час вивчення теми «Вимірювання та побудова кутів». Так після формування основних компетентностей, передбачених чинною програмою, учні повинні були розширити свої уявлення про наближений характер вимірювань. Тобто усвідомити те, що наближений характер мають не лише вимірювання лінійних розмірів, але і вимірювання кутів. Зокрема учням було запропоновано побудувати кут 127°, відкласти на його сторонах відрізки по 10 см, починаючи від вершини кута, сполучити їх кінці та вирізати отриманий таким чином трикутник. Виконуючи вищезазначене завдання доречно використовувати папір різного кольору. Як і у випадку з мотузкою, при накладанні «кути» здебільшого не збігалися.

Привернувши у такий спосіб увагу учнів, вчитель, не вживаючи відповідної термінології та будь-яких означень, має поясними учням різницю між результатами теоретичних та практичних вимірювань. На окремому аспекті цієї проблеми акцентується увага в сучасній методичній літературі. Зокрема дидакти вважають важливим, щоб учні розуміли, що точка і відрізок є поняттями абстрактними. У природі немає ні точок, ні відрізків, а є об’єкти, які умовно вважаються точками і відрізками. Адаптуючи цю думку до конкретного прикладу, можна сказати, що справді, будь-які відрізки довжиною

33 см є рівними між собою, а довжина кожного з них є точним значенням, яке дорівнює 33 см. Що ж стосується реальних об'єктів, побудованих за допомогою вимірювальних засобів, то їх рівність є наближеною. Тому говорять, що довжина кожного з них лише наближено дорівнює 33 см і пишуть $AB \approx 33$ см. Тому розв'язуючи задачі, в яких довжини відрізків є заданими за умовою, їх вважають точними значеннями і виконують відповідним чином арифметичні дії над ними. А результати практичних вимірювань є наближеними значеннями, тому необхідно з'ясувати, як їх слід записувати та виконувати арифметичні дії над ними.

Передумовою вирішення цих питань є наочна та різнобічна ілюстрація наближеного характеру практичних вимірювань. Частково це вже було зроблено на прикладі з відрізуванням мотузки. Таким чином відбулось унаочнення наближеного характеру вимірювань, тобто відтворення заданих розмірів, зокрема побудови відрізка заданої довжини.

Змістовими та методичними передумовами для унаочнення наближеного характеру вимірювань володіє наступна програмова тема «Координатні промені і шкали». Під час експериментального вивчення цієї теми учням було запропоноване домашнє завдання практичного характеру. Учні повинні були виготовити із паперу для заклеювання вікон «кравецький метр». Тобто нанести на папір шкалу з ціною поділки 1 см. На наступному уроці учні отримали завдання виміряти ним довжину парти. У переважній більшості результатом вимірювань виявилося не ціле число сантиметрів. З цього було зроблено висновок про те, що результати таких вимірювань є наближеними, а відповідно остаточний результат було записано у вигляді подвійної нерівності, про які учні вже отримали уявлення раніше. Визначення верхньої та нижньої межі результату

вимірювань відрізнялось від аналогічного процесу під час лічби, тому на цьому слід акцентувати увагу учнів та контролювати зроблені ними записи у робочих зошитах. Згадана різниця полягає в тому, що результати лічби записувались учнями у вигляді подвійних нерівностей, а під час запису результатів практичних вимірювань учні повинні ознайомитися також із формою запису наближених значень із використанням знаку наближеної рівності.

У якості наближеного значення обирають одну з його меж. Керуючись бажанням зробити найменшу помилку обирають ту, яка знаходиться ближче до справжнього значення довжини парти. На розумінні зазначених міркувань доцільно особливо акцентувати увагу учнів, оскільки саме вони повинні стати основою їх сприйняття поняття про точність наближених значень у 7 класі, а у найближчій перспективі – сприяти формуванню уявлень про округлення.

У ході експериментального навчання було з'ясовано, що така фронтальна практична робота не переконує учнів остаточно у наближеному характері будь-яких вимірювань. Доповнення її бесідою про джерела можливих похибок, які виникають під час практичних вимірювань, виявило більшу, але все ж таки недостатню ефективність. Зокрема сумніви одних учнів базувались на тому, що результатом їх вимірювання було ціле число сантиметрів, чому тоді його слід вважати наближеним? Інші учні виказували думку про те, що коли збільшити точність виготовленої ними вимірювальної стрічки (тобто нанести ще й міліметрові поділки), то вони б отримали точне значення.

Учителю важливо активізувати міркування учнів з цього приводу, а вже після цього робити зауваження про те, що навіть за таких умов ми все одно отримуємо не точні, а лише точніші значення. Засобом підтвердження зазначеного слугувала наступна практична робота. Її суть

полягала в тому, що кожен з учнів по-черзі вимірював ширину стола вчителя своєю лінійкою. Результати вимірювань записувались у заздалегідь підготовлену таблицю. Отримані учнями числові данні виявилися різними, хоча деякі і повторювалися. Створена таким чином ілюстративна аналогова модель, в основу якої була покладена достатня умова наближеності результатів, підтвердила думку про наближений характер результатів практичних вимірювань. Записавши остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності, аналогічно до того, як це робилось із результатами лічби, доцільно підсумувати отримані відомості про практичні вимірювання у вигляді бесіди.

Під час експериментального навчання було виявлено, що вказана практична робота не лише сприяє формуванню уявлень учнів про наближений характер практичних вимірювань, а й дозволяє приділити увагу багаторазовим практичним вимірюванням.

Під час вивчення програмової теми «Координатний промінь» уявлення учнів про наближені значення отримують подальшого розвитку, а з розв’язуванням задач, відбувається їх унаочнене відображення. Водночас до відповідної мислиневої діяльності долучається зорова та дієва пам’ять, що підвищує її ефективність.

За чинною програмою далі учні повинні розпочати вивчення теми «Додавання і віднімання натуральних чисел. Властивості додавання». Згідно принципу фузіонізму, який було обрано однією із методологічних основ розміщення навчального матеріалу з НО в основній школі, тут повинно відбуватись і ознайомлення учнів і з правилами додавання і віднімання наближених значень.

Фрагмент уроку «Додавання наближених значень чисел та величин»

1. Актуалізація опорних знань про точні та наближені значення величин та їх форми запису.

2. Мотивація розв'язування задачі.

Учитель: На минулих уроках ми з'ясовували як можна додавати та віднімати будь-які натуральні числа. А чи так можна виконувати ці дії і з наближеним значеннями? Для відповіді на це питання розглянемо таку задачу.

3. Постановка задачі (проблемна ситуація).

Задача. Дмитро та Павло вирішили полічити скільки птахів мешкає на двох ставках у міському зоопарку. Спостерігаючи за першим ставком, хлопці з'ясували, що їх не менше 30, але не більше 35. На другому ставку птахів було не менше 15, але не більше 17. Скільки птахів на обох ставках?

4. Розв'язування задачі.

Учитель: Запишемо наближені значення кількості птахів на ставках у вигляді подвійних нерівностей, увівши відповідні позначення. Наведемо приклади того скільки птахів може бути на першому ставку, на другому ставку та на обох ставках разом (див. таблицю 2).

Таблиця 2

Гіпотези щодо обчислення остаточного результату задачі

Кількість птахів											
Ставок 1	$30 \le x \le 35$	34	32	27	31	35	36	33	35	29	30
Ставок 2	$15 \le y \le 17$	16	17	15	14	18	15	17	15	19	16
Разом	$? \le x + y \le ?$	50	49	-	-	-	-	50	50	-	46

Учням пропонується перевірити правильність запропонованих прикладів. У разі наявності помилок, ці

приклади видаляються із схеми, а причина їх видалення пояснюється учнями або учителем.

Увага учнів зосереджується на тому, що лише за окремими значеннями кількості птахів на ставках не можна відповісти на запитання задачі. Необхідно перебрати усі можливі випадки. Пропонується зробити це за допомогою обчислювальної таблиці (рис. 4).

	30	31	32	33	34	35
15	45	46	47	48	49	50
16	46	47	48	49	50	51
17	47	48	49	50	51	52

Рис. 4

Заповнюючи її, учні можуть користуватися такою властивістю додавання: при збільшенні доданка на кілька одиниць, на стільки ж одиниць збільшується і сума.

Учитель: Виберемо в таблиці серед результатів додавання найменше та найбільше значення. Це й будуть межі наближеного значення, яке виражає кількість птахів на обох ставках. Запишемо відповідь: $45 \le x + y \le 52$.

Її можна також подати побутовою мовою: на обох ставках мешкає приблизно від 45 до 52 птахів або 45–52 птахів.

5. Аналіз отриманих результатів. *Учител*ь: Звернемо увагу на те, яким чином були отримані межі відповіді, тобто числа 45 та 52. Число 52 (найбільше значення відповіді, верхня її межа) є сумою верхніх меж наближених значень x та y, а 45 (найменше значення відповіді, нижня її межа) – нижніх меж. Запишемо це у вигляді схеми (рис. 5).

$$\begin{array}{c} 30 \le x \le 35 \\ \downarrow \quad + \quad \downarrow \\ 15 \le y \le 17 \\ \hline 45 \le x + y \le 52 \end{array}$$

Рис. 5

Отже виявляється, що для того, щоб додати два наближених значення, які записані у вигляді подвійних нерівностей, необов'язково додавати усі їх можливі значення, а після цього робити висновки. Слід додати лише їх відповідні межі, отримавши таким чином межі остаточного результату.

6. Узагальнення, висновки. *Учитель*: Замінимо у нашій схемі конкретні числа на букви. Отриману таким чином схему можна використовувати для додавання будь-яких наближених значень, записаних у вигляді подвійних нерівностей. Запишемо правило-орієнтир, яким при цьому треба керуватись (рис. 6).

Правило-орієнтир для виконання додавання наближених значень

1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей у стовпчик ***одне під одним***.

$$\begin{array}{c} a \le x \le b \\ \downarrow \quad + \quad \downarrow \\ c \le y \le d \\ \hline a + c \le x + y \le b + d \end{array}$$

2. Додайте нижні межі наближених значень (найменші їх значення). Отримане число є ***нижньою межею суми*** наближених значень.

3. Додайте верхні межі наближених значень (найбільші їх значення). Отримане число є ***верхньою межею суми*** наближених значень.

4. Запишіть ***остаточну відповідь*** у вигляді подвійної нерівності

Рис. 6.

Окремої уваги потребують випадки, коли один із доданків є точним значенням, а інший наближеним. Їх можна розглянути на цьому або на наступному уроці, також використовуючи метод доцільних задач.

Задача. Дідусь зібрав у саду повний кошик яблук, а його четверо онуків зірвали по одному яблуку. Скільки

всього яблук зібрали дідусь та його онуки, якщо в кошику може поміститись приблизно 25–30 яблук?

Обчислювальна таблиця та схема до розв'язування задачі

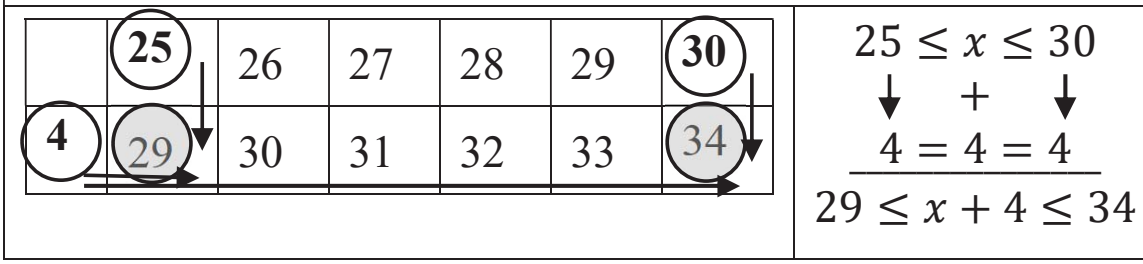


Рис. 7

Під час експериментального навчання нами робилась спроба введення для таких випадків (тобто коли один із доданків, співмножників, зменшуване або від'ємник, ділене або дільник є точними значеннями) окремих схем-орієнтирів та відповідних їм алгоритмічних приписів. Зокрема для наведеної задачі вони мали вигляд, який зображено на рисунку 8.

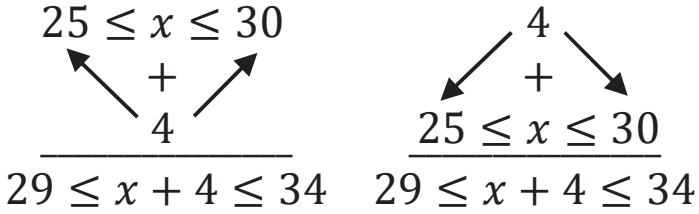


Рис. 8

Вказана спроба виявилася невдалою в силу особливостей мнемічної діяльності учнів, яка, як відомо, перебуває у молодших підлітків у стані перебудови.

Учні плутались у пропонованих схемах-орієнтирах та не запам'ятовували їх. Тому виявилося доцільним звести кількість пропонованих схем-орієнтирів до двох: одну для прямих (додавання та множення) операцій, в них стрілки

розташовані вертикально; другу для обернених (віднімання та ділення), в них стрілки розташовані «навхрест». Зрозуміло, що для останнього випадку стрілки можуть бути і вертикальними, і «навхрест» (рис. 9), але ми керувались тим, що для однієї арифметичної дії має бути одна схема-орієнтир.

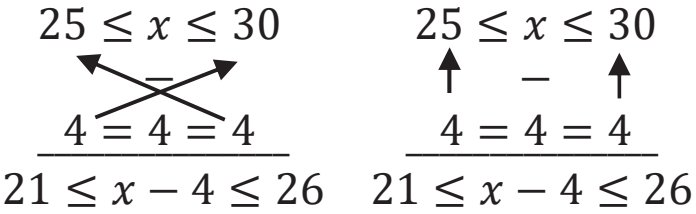


Рис. 9

Аналогічні задачі із виведенням відповідних схем-орієнтирів та алгоритмічних приписів пропонуються і для дій віднімання, множення та ділення під час подальшого вивчення відповідних тем діючої програми. Зрозуміло, що ступінь розгортання відповідних коментарів може бути різною. Під час експериментального навчання вона відповідала рівню навченості учнів кожного конкретного класу.

Для дії ділення відповідні схема-орієнтир та алгоритмічний припис лише повідомляються, оскільки обмеження лише натуральними числами під час його виведення виглядало штучно і не сприяло формуванню в учнів відповідних уявлень. Дослідження правильності пропонованих тверджень, які стосуються ділення наближених значень, відбувається пізніше, під час ознайомлення учнів із десятковими дробами та правилами їх округлення. На цьому етапі, добираючи числові дані до текстових задач, особливу увагу слід звертати на подільність відповідних числових значень. Під час вивчення наступного програмового навчального матеріалу

(зокрема таких тем, як «Прямокутник, квадрат та їх периметри», «Трикутник, його периметр. Види трикутників») відбувається формування в учнів умінь виконувати додавання та віднімання наближених значень у контексті вивчення геометричного матеріалу. Розв'язування завдань, на кшталт нищенаведеним, які містяться в сучасних підручниках математики для 5–6-х класів, хоча і спрямоване на формування вмінь виконувати практичні вимірювання та арифметичні дії над їх результатами, виявляється недостатньо ефективним.

Задача. Нарисуйте довільний трикутник; виміряйте його сторони та обчисліть периметр.

Задача. Виміряйте довжини сторін чотирикутника, який зображено на малюнку, і знайдіть його периметр.

Виконуючи вимірювання лінійкою з ціною поділки 1 мм, учні через особливості зору просто не бачать те, що кінець відрізка часто міститься між поділками. Під час пошукового експерименту з'ясувалося, що подібні завдання заплутують учнів. З одного боку, учні явно не вбачають наближеного характеру таких вимірювань, а відповідно і не володіють чіткою впевненістю щодо їх запису. З іншого – вивчений навчальний матеріал вимагає від них опрацьовувати результати практичних вимірювань як наближені значення. Нами досліджувався й інший методичний шлях. Він полягав у тому, що учням пропонувались для розв'язування задачі, в яких результати практичних вимірювань вже були задані за умовою у вигляді наближених значень. Такі задачі часто зустрічаються у сучасних підручниках з алгебри для 9 класу. Вони не викликали достатньої уваги та інтересу учнів. І, як показали подальші контролюючі заходи, не виконали покладеного на них завдання по формуванню та закріпленню відповідних вмінь.

Задача. Відомі межі довжини a і ширини b прямокутника (у см): $5{,}6 < a < 5{,}7$ і $4{,}8 < b < 4{,}9$. Оцініть:

а) периметр прямокутника; б) площу прямокутника.

Ефективнішим виявився інший підхід. Під час експериментального навчання учнів залучали до практичної групової діяльності, яка мала проєктивний характер. Вона полягала в тому, що учні об'єднувались у невеликі гетерогенні групи (3–4 учні) і отримували завдання: виміряти будь-яким вимірювальним засобом (або засобами) довжину і ширину класу та обчислити периметр прямокутника, яким наближено можна вважати підлогу кімнати. Для кожної групи було обране окреме приміщення. Учням повідомлялось, що на практиці під час таких вимірювань враховуються лише сантиметри, тобто отримавши значення довжини кімнати 5 м 76 см 4 мм учні записували результат наступним чином:

$$5 \text{ м } 76 \text{ см} < x < 5 \text{ м } 77 \text{ см}.$$

Отримані таким чином данні були включені і до умов інших задач, які пропонувались для розв'язування під час розгляду теми «Площа прямокутника. Площа квадрата». Зокрема учням пропонувалось визначити площу «свого» приміщення, попередньо записавши значення його довжини і ширини в сантиметрах. Під час вивчення тем, пов'язаних із вимірюванням кутів (у деяких підручниках вони мають назву «Кути трикутника і чотирикутника»), учні залучалися до навчально-дослідницької діяльності. Її мета – подальший розвиток уявлень про наближений характер практичних вимірювань, а також формування початкових уявлень про ступінь близькості наближених значень до істинних.

Так, під час експериментального навчання проводилася гра-лото «Найкращий вимірювач». Вона полягала в тому, що учням пропонувалось 10 трикутників різного кольору. Вони розрізались на три частини (див. рис. 10) так, як це

показано в одному з чинних підручників або на сторінках іншої навчально-методичної літератури.

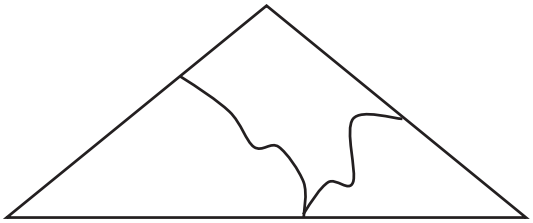


Рис. 10

Отримані різнокольорові «кути» перемішувались. Кожен з учнів отримував один такий «кут», вимірював його, записував на зворотному боці отриманий результат і своє прізвище після чого здавав ведучому гри. Учні отримували для заповнення таблицю (див. таблицю 3), яка після закінчення гри повинна бути вклеєна у зошит для проєктів (результатів проєктивної діяльності).

Таблиця 3

Результати практичних вимірювань учнів

Колір трикутника	Числові величини кутів трикутника			Сума отриманих значень	Величина похибки
	1	2	3		
Червоний	121°	19°	38°	178°	2°
…	…	…	…	…	…

Ведучий гри витягає по одному «кути», називає їх колір та числове значення величини кута. Учні записують їх у таблиці, а вчитель у аналогічну контрольну таблицю (доцільним є використання інтерактивної дошки). Учні підраховують суму значень усіх кутів трикутника і записують результат у відповідний стовпчик таблиці. Вони вже знають, що сума всіх кутів будь-якого трикутника має дорівнювати 180°, а також те, що коли виконуються

практичні вимірювання, то отримуються лише наближені результати. Тому школярі «бачать» величину відхилення результатів практичного вимірювання від дійсного значення величини (180°), безпомилково її обчислюють та записують у відповідний стовпчик.

Підсумовуючи хід гри, вчитель акцентує увагу учнів на тому, що хоча похибки і є цілком природним супроводженням будь-яких практичних вимірювань, проте слід прагнути, щоб вони були якомога меншими. Аналізуючи останній стовпчик таблиці, учні самі бачать переможців та призерів гри (учні, у яких вимірювання точніші). Остаточне ж їх виголошення та нагородження проводилось по закінченню гри. Проводячи таку гру окрім навчальної та розвивальної мети, ми переслідували і виховний її вплив. Він полягав у тому, що серед переможців гри часто опинялись учні із середнім і навіть низьким рівнем навченості, що сприяло підвищенню їх інтересу до математики.

Під час вивчення теми «Дробові числа» уявлення учнів про наближені значення розширюються разом із виконанням арифметичних дій над ними. Серед інших питань, які представлені в темі, є питання «Округлення десяткових дробів». Саме тут і повинно відбуватись ознайомлення з округленнями як із третім джерелом наближених значень. Воно продовжиться і у 6 класі під час вивчення теми «Десяткові наближення звичайного дробу».

Висвітлення відомостей про округлення вдало представлене у чинних підручниках, де чітко прослідковуються їх зв’язки з НО, зокрема із наближеними значеннями та уявленнями про їх точність. Під час експериментального навчання ми використовували цей навчальний матеріал та доповнювали його. Зупинимося на цьому детальніше.

Викладені міркування авторів підручників, що спрямовані на формування уявлень учнів про округлення, ми доповнювали відповідними унаочненнями на координатному промені. Метою зазначеного доповнення було те, щоб учні не лише прочитали або почули, що, наприклад, число 6,3 є ближчим до числа 6, а не до числа 7, а й побачили це на координатному промені, по-можливості попередньо побудувавши його та зробивши відповідні позначення. Таке залучення зорової та дієвої пам'яті сприяє активізації логічної пам'яті та відповідних розумових дій. Реалізуючи у навчальній практиці зазначений підхід, ми переслідували як перспективні цілі, так і цілі, пов'язані з вивченням навчального матеріалу 5 та 6 класів. Перспективні цілі полягали у пропедевтиці поняття про точність наближених значень, зокрема підсвідоме зорове фіксування уявлень про величину похибки. Що ж стосується безпосередніх цілей, то унаочнення міркувань про округлення сприяє глибшому розумінню учнями змісту дії округлення, що дозволяє їм не лише правильно округлювати числа, а й вміти пояснювати чому вони так роблять. Таке розуміння створює передумови для сприйняття учнями відомостей про те, що округлення з доповненням (тобто за правилом, яке наводиться у чинних підручниках) є не єдиним способом округлення, а найкращим з точки зору отриманої точності (тобто найточнішим із двох можливих). На практиці ж часто, враховуючи реальну ситуацію, цього правила не дотримуються, а виконують округлення з надлишком, або з недостачею. Відповідний навчальний матеріал вдало представлено у посібнику для 5 класу авторського колективу Г. М. Возняк, Г. М. Литвиненко, М. П. Маланюк, яким ми і користувались під час експериментального навчання. Зокрема основна увага в ньому приділяється текстовим задачам, розв'язування яких передбачає

обов’язкове виконання округлення. Таким чином відбувається мотивація вивчення округлення та анонс його подальшого використання. Наведемо приклади задач, якими ми доповнили задачі наявні у чинних підручниках. Під час їх складання ми використовували дослідження та методичні рекомендації А. В. Суткової [75].

Задача. Скільки потрібно ящиків для упакування 223 кг яблук, якщо місткість кожного ящика становить 20 кг?

Коментарі до розв’язування задачі. У даному випадку результат треба округлювати з надлишком

$$223 : 20 = 11{,}15 \approx 12,$$

бо коли взяти результат з недостачею (як цього вимагає правило округлення з доповненням), то залишаються не упаковані яблука.

Задача. 26 учням класу доручено посадити не менше ніж 63 дерева. Скільки дерев повинен посадити кожен учень, якщо вони вирішили посадити дерев порівну?

Коментарі до розв’язування задачі. У даному випадку результат треба округлювати з надлишком ($63 : 26 = 2{,}423... \approx 3$), бо коли округлювати з недостачею (як цього вимагає правило округлення з доповненням) то буде посаджено менше дерев чим вимагається умовою задачі.

Задача. Побудувати квадрат, периметр якого 9,3 см.

Задача. Розграфити аркуш паперу шириною 8,5 см на 6 колонок.

Коментарі до розв’язування задач. В обох випадках ми виконуємо округлення результату з доповненням, а розрядом округлення обираємо десяті, оскільки за допомогою лінійки з поділками ми можемо виконати вимірювання і відмірювання лише з точністю до 1 мм ($9{,}3 : 4 = 2{,}325 \approx 2{,}3$ (см); $8{,}5 : 6 = 1{,}4166... \approx 1{,}4$ (см)).

Як бачимо, і в наведених задачах, і в задачах, що представлені у посібнику, не вказується розряд округлення. Важливість та розвивальні можливості такого підходу

особливо підкреслювалась В. М. Брадісом. Цей підхід сприяє, зокрема формуванню в учнів навичок самостійного визначення ступені точності, яка підказується умовою задачі або практичною ситуацією.

Реалізуючи розвивальну мету вивчення НО, під час формування уявлень про округлення, деякі задачі ми спрямовували на формування в учнів специфічних (за термінологією Н. Ф. Талізіної) або конкретних (за термінологією О. І. Раєва) розумових дій. Зокрема йдеться про дію виведення наслідків, коли від факту належності об'єкта до певного поняття переходять до системи властивостей, які притаманні даному об'єкту.

Наступною темою чинної програми є «Додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів», під час вивчення якої продовжується у фоновому режимі формування в учнів вмінь округлювати десяткові дроби:

Задача. Скільки можна купити зошитів по 55 коп. на 2 грн 65 коп.?

Коментарі до розв'язування задачі. У даному випадку результат треба округлювати з недостачею (2,65 : 0,55 = = 4,8 ≈ 4), бо коли округлювати з надлишком (як цього вимагає правило округлення з доповненням), то для купівлі п'яти зошитів не вистачить 10 коп.

Тут же у фоновому режимі також ведеться формування в учнів умінь виконувати арифметичні операції над наближеними значеннями на прикладі десяткових дробів. Після формування в учнів основних компетентностей, передбачених програмою, доцільно розглянути задачі, які передбачають виконання дій із наближеними значеннями.

Оволодіння учнями матеріалу, що пов'язаний з округленням натуральних чисел та десяткових дробів, дозволяє розглянути питання про округлення меж наближених значень, яке набуває особливої актуальності саме під час вивчення питань про «Ділення десяткових

дробів». Воно має дві складові: по-перше, слід з'ясувати як робити округлення (за яким із правил) і, по-друге, до якого розряду. Зупинимось на них детальніше.

Пошук відповіді на питання: «*Як округлювати межі наближених значень*?» відбувався за допомогою наступних прикладів. Метою першого з них було підведення учнів до висновку про необхідність округлення з надлишком верхньої межі. А другого – округлення з недостачею нижньої межі.

Приклад 1. Для пошиття учнівських штанів потрібно приблизно від 0,72 м до 0,92 м тканини, тобто: $0{,}72 \text{ м} \le x \le 0{,}92$ м. З певних потреб необхідно округлити вказані данні до десятих. Округлюючи межі за правилом округлення з доповненням отримаємо: $0{,}7 \text{ м} \le x \le 0{,}9$ м. Але таке округлення не відповідає умові задачі: 0,9 м тканини може не вистачити для пошиття штанів.

Висновок: верхню межу наближеного значення не можна округлювати з недостачею, тобто відповідь слід записати так: $0{,}7 \text{ м} \le x \le 1{,}0$ м.

Приклад 2. Нехай потяг прибуває на станцію рівно о 20 год 17 хв. Пасажиру відомо, що його зупинка триває приблизно 10-20 хв. О котрій він повинен прийти на станцію, щоб встигнути на потяг? За умовою час відправлення потягу t приблизно дорівнює

$$20 \text{ год } 27 \text{ хв} \le t \le 20 \text{ год } 37 \text{ хв}.$$

Округлюючи межі за правилом округлення з доповненням до десятків хвилин отримаємо, що

$$20 \text{ год } 30 \text{ хв} \le t \le 20 \text{ год } 40 \text{ хв}.$$

Таке округлення не відповідає умові задачі: пасажир, прийшовши у 20 год 30 хв, може запізнитись на потяг, який цілком міг відправитись у 20 год 27 хв.

Висновок: нижню межу наближеного значення не можна округлювати з надлишком, тобто відповідь слід записати так: $20 \text{ год } 20 \text{ хв} \le t \le 20 \text{ год } 40 \text{ хв}$.

Розглянувши вищевказані приклади робимо висновок, що при округленні меж наближених значень слід керуватись наступним правилом: верхня межа наближених значень округлюється завжди з надлишком, а нижня з недостачею.

У результаті розгляду вищенаведених прикладів в учнів можуть сформуватись уявлення, що сформульоване правило є справедливим лише для деяких задач. Тому важливо проілюструвати його об'єктивний характер.

Узявши за основу відповідні дослідження З. М. Литовченко, Н. В. Єлизаветіної [51], покажемо це на координатному промені (див. рис. 11).

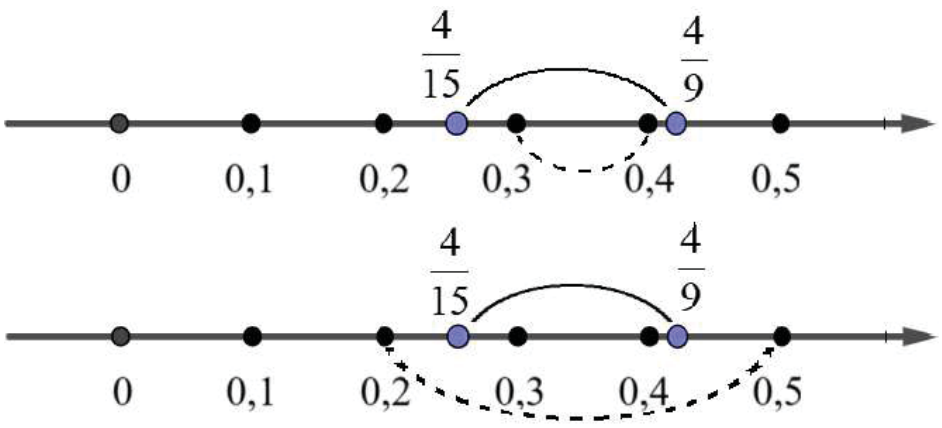


Рис. 11

Нехай маємо наближене значення $\frac{4}{15} \leq x \leq \frac{4}{9}$, виразивши його десятковими дробами отримуємо

$$0{,}266\ldots \leq x \leq 0{,}444\ldots.$$

Округлення меж з доповненням $0{,}3 \leq x \leq 0{,}4$, тобто дії всупереч наведеному правилу, звужують числовий проміжок, який описує множину наближених значень. Поза увагою залишається частина значень, серед яких цілком може опинись і справжнє значення. Натомість округлення меж за сформульованим правилом охоплює усі можливі випадки для наближеного значення x.

Повернемося до питання про розряд округлення. На першому етапі вивчення НО учням слід повідомити, що як правило, округлюють до того розряду, з якого починається розходження цифр однакових розрядів. Якщо ж дія, що виконується є проміжною, то межі результату округлюють із збереженням однієї або двох запасних цифр.

Детальніше це питання буде розглянуто на другому етапі вивчення НО, тобто у 7–8-х класах. Але вже на першому етапі під час розв'язування задач в учнів слід формувати уявлення про те, що коли немає гострої необхідності округлювати межі наближених значень, то цього можна і не робити.

Наступною темою програми є «Відсотки. Знаходження відсотків від даного числа. Знаходження числа за його відсотками». Під час її вивчення продовжується у фоновому режимі формування в учнів умінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями на прикладі десяткових дробів.

Наприклад після формування в учнів основних компетентностей, передбачених програмою, можна розглянути такі задачі.

Задача. За тиждень в їдальні витратили приблизно 63,5–64,3 кг цукру. З них 20–25 % було витрачено в понеділок. Скільки приблизно кілограм цукру було витрачено в понеділок?

Коментарі до розв'язування. Під час розв'язування учні «перекладають» дані з побутової мови на мову математики: $63{,}5 \text{ кг} \le x \le 64{,}3 \text{ кг}$, $20\ \% \le y \le 25\ \%$, де x – тижневі витрати цукру, y – виражені у відсотках витрати цукру в понеділок. Учням слід визначити, скільки кілограм становить 1 %

тижневих витрат цукру $\frac{x}{100}$, та обчислити витрати цукру в понеділок $\frac{x}{100} \cdot y$ (рис. 12).

Схеми для виконання обчислень під час розв'язування задачі

$63{,}5 \text{ кг} \le x \le 64{,}3 \text{ кг}$ $\div$ $100 = 100 = 100$ $0{,}635 \text{ кг} \le \frac{x}{100} \le 0{,}643 \text{ кг}$	$0{,}635 \text{ кг} \le \frac{x}{100} \le 0{,}643 \text{ кг}$ $\uparrow \quad \div \quad \uparrow$ $20\% \le y \le 25\%$ $12{,}700 \text{ кг} \le \frac{x}{100} \cdot y \le 16{,}075 \text{ кг}$

Рис. 12

Формулюючи остаточну відповідь, учні повинні висунути пропозиції щодо округлення меж отриманого результату. Під час експериментального навчання вони були різними. В основному, інтерпретуючи результат до умови задачі, учні пропонували відповідь – «прямий наслідок правила»: 12–17 кг цукру; або більш вільне його трактування: 12,7–16,1 кг цукру.

Окрім подібних задач під час експериментального навчання, пропонувались також і інші. Зокрема задачі, які мали на меті формування пропедевтичних уявлень учнів про відносну точність.

Задача. Число 0,857 округли до десятих і обчисли, на скільки відсотків утворене число більше за дане.

Тема «Масштаб», яка вивчається далі, має безпосередні логіко математичні та методичні зв'язки з НО. Під час вивчення цієї теми виявилось доцільним залучення учнів до проєктивної діяльності, в основу якої були покладені ідеї

М. А. Бугайової. Метою такої діяльності було визначення наближених площ територій європейських країн або областей України. В деяких експериментальних класах вона відбувалася із залученням ІКТ (з демонстраційною метою), в деяких – ні. В обох випадках відбувалося звернення до навчального досвіду учнів по володінню ними вмінь знаходити площу за допомогою палетки.

Навчальний матеріал 6 класу має узагальнюючий та уточнюючий характер, щодо курсу математики 5 класу, і в той самий час залишається пропедевтичним щодо систематичних курсів алгебри та геометрії 7–9-х класів. Ознайомлення з НО у 6 класі здебільшого відбувається у фоновому режимі.

Розпочинається вивчення математики 6 класу темою «Подільність чисел». В її межах повинно відбуватися повторення поняття про межі наближених значень, їх запис у формі подвійних нерівностей та зображення на координатному промені. Приклади задач, які доцільно розв'язувати на цьому етапі навчання НО, наведені у п. 2.3.

Під час вивчення наступної теми «Звичайні дроби» повинно продовжитись формування навичок виконання арифметичних дій з наближеними значеннями на прикладі звичайних дробів. Передумовою для цього є повторення схем-орієнтирів та відповідних їм алгоритмічних приписів, з якими учні ознайомились протягом навчання у 5 класі. Враховуючи вікові особливості сприйняття та мнемічної діяльності учнів, організація такого повторення під час експериментального навчання відбувалася в ігровій формі. Гра може бути пов'язана або із НО, або із будь-яким традиційним програмовим матеріалом (на розсуд вчителя), але у будь-якому випадку у ній мають брати участь дві команди. Мета гри – активізувати дієву та зорову пам'ять учнів у контексті вивчення НО. Ідея актуалізації відомостей з НО може бути реалізована вже на підготовчому етапі.

Полягає вона в тому, що учні класу об'єднуються у 10 гетерогенних груп. Кожна з них отримує завдання, основою якого є виконання певних дій над наближеними та точними значеннями величин. Під час аналізу виконання запропонованих завдань, з'ясовується, що перші чотири та інші шість команд користувалися «майже однаковими» схемами-орієнтирами. Відповідні групи об'єднують у дві команди, а їх емблемами обирають відповідні узагальнені схеми. Подальший хід гри проходить за обраною темою та метою.

Актуалізувавши таким чином уявлення учнів про виконання дій над наближеними значеннями, їм пропонуються завдання, які безпосередньо пов'язані з ними та із програмовою темою «Звичайні дроби».

У цій темі за традиційною програмою відбувається і розгляд питання про десяткове наближення звичайного дробу. Тут важливо підкреслити об'єктивність існування округлення як одного із джерел наближених значень, а також продовжити формування вмінь виконувати округлення із вказаною точністю. Під час експериментального навчання учнями розв'язувались завдання, де розряд округлення конкретно не вказувався, а випливав із умови задачі або інших практичних міркувань (приклади аналогічних задач для 5 класу наводились раніше). А також завдання, які мали на меті продовжити формування уявлень про близькість наближених та дійсних значень величин, наприклад:

Задача. Яке із десяткових наближень 0,3 чи 0,4 точніше відображає значення дробу $\frac{11}{34}$?

Наступною темою, що вивчалась у 6 класі за чинною програмою, була тема «Відношення і пропорції». Наведемо приклад однієї із задач, що пропонувались учням для розв'язування під час вивчення цієї теми. Приклади інших задач наведені у п. 2.3.

Задача. Необхідно з'ясувати кількість риб у ставку. Для цього у ставок випустили 100 мічених риб. Яка наближена кількість риб у ставку, якщо із 50 риб, що спіймали 3 виявились міченими?

Коментарі до розв'язування задачі. Нехай у ставку x риб, тоді:

у ставку 100 мічених риб – x риб у ставку;

усього спіймали 3 мічені риби – усього спіймали 50 риб.

Тому: $x \approx (100 \cdot 50) : 3 \approx 1666{,}66$ ...

Слід обов'язково звернути увагу учнів на культуру використання знаку наближеної рівності. Зокрема на те, що наближену відповідь ми отримуємо не через округлення, яке доведеться робити далі, а через наближений характер самих міркувань. Так актуалізуються уявлення учнів про імовірнісні наближення, що доцільно у зв'язку з ознайомленням учнів з елементами теорії ймовірностей. Окремої уваги потребує округлення результату. Під час експериментального навчання учням пропонувалося самостійно обрати розряд округлення та спробувати поясними свій вибір. При цьому учням повідомлялося, що до задачі може бути кілька правильних відповідей. Такий підхід підвищував розвивальні можливості навчального матеріалу з НО та інтерес учнів до нього, а також сприяв розвитку математичного мовлення та дивергентного мислення. Серед варіантів відповідей учнів до вказаної задачі були такі: 1700 риб; 1670 риб; 1667 риб.

Питання з геометрії, що містяться в темі «Коло. Довжина кола. Круг. Площа круга» мають безпосередні логіко-математичні зв'язки з НО через необхідність практичного використання числа π. У чинних підручниках та навчально-методичній літературі учням пропонується виконати практичну роботу із знаходження наближеного значення числа π, визначивши відношення довжини та

діаметра довільних кіл, зокрема кіл різних діаметрів та відповідних предметів побуту. Під час експериментального навчання ми також проводили аналогічну практичну роботу. Серед наближених значень числа π, що отримали учні, були обрані найбільше та найменше. Вони стали відповідно верхньою та нижньою межею наближеного значення числа π. Обчисливши їх середнє арифметичне, учні порівняли його із справжнім значенням числа π = 3,1415926 …, яке повідомив їм вчитель, наголосивши на тому, що воно є десятковим нескінченним, неперіодичним дробом. Таким чином в учнів продовжується формування уявлень про те, що результати практичних вимірювань є наближеними, а також розпочинається формування уявлень про точність наближених значень. Числове значення похибки виконаних вимірювань та відповідних їм обчислень буде знайдене у вигляді десяткового нескінченого, неперіодичного дробу. Для зручності його округлюють. Округлення похибок обов'язково виконується з надлишком, на цьому твердженні слід акцентувати увагу учнів. Отримане таким чином число хоча і не відображає точного значення величини отриманої похибки, однак дає достатньо чіткі уявлення про неї, зокрема про те її значення, яке похибка не може перевищувати.

Курс математики 6 класу завершується темою «Раціональні числа та дії над ними». Під час її вивчення, розширюються та поглиблюються уявлення учнів про наближені значення на прикладі додатних та від'ємних чисел.

Фабули таких задач у контексті вивчення НО доцільно пов'язати з температурою. Температура може лише підвищуватись або знижуватись на певне точне або наближене значення. Тому над від'ємними наближеними значеннями учні виконують дії додавання та віднімання.

Що ж стосується виконання дій другого степеня над нерівностями, які містять від'ємні числа, то воно потребує залучення достатньо складного математичного апарату, а відповідно не може мати місця у 6 класі. Повернення до цього питання стає можливим лише в курсі алгебри 9 класу.

Наприкінці 6 класу відбувається формування в учнів уявлень про координатну площину. Це дає можливість за допомогою ІКТ підтвердити справедливість правил виконання арифметичних дій над наближеними значеннями, що були виведені лише для натуральних чисел і поширені на усі раціональні числа (окрім дій другого степеня для від'ємних чисел). Під час експериментального навчання виявилося доцільним проведення обчислювальних експериментів та унаочнення їх результатів за допомогою створення відповідних динамічних моделей. Відповідні розробки наведені у п. 2.3.

Ознайомленням із навчальним матеріалом 6 класу, який передбачено чинною програмою з математики, а також системою відомостей з НО, яка передбачена пропонованою методикою, завершується перший етап вивчення НО.

Його результатом є перелік знань, умінь і навичок, якими мають оволодіти учні протягом навчання у 5–6-х класах. Зокрема учні мають:

• навчитися розпізнавати та наводити приклади наближених значень; записувати та читати їх у різних формах; володіти навичками їх знаходження та відповідного позначення на координатному промені та прямій;

• вміти аналізувати ступінь близькості наближеного значення до точного; порівнювати їх для кількох наближених значень і в окремих випадках знаходити;

• володіти навичками обчислення суми та різниці наближених значень; добутку та частки додатних наближених значень; суми та різниці наближених та точних

значень; добутку та частки додатних наближених та точних значень.

Сформованість в учнів вказаних компетенцій надає можливість переходу до другого етапу, який за пропонованою методикою має розпочатись у 7 класі.

2.2 Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 7–9-х класів.

2.2.1 Методичні особливості викладення навчального матеріалу з наближених обчислень в 7–9-х класах.

Вивчення НО під час другого та третього етапів охоплюють і курс «Алгебри», і курс «Геометрії» 7–9-х класів. У курсі алгебри проходить доповнення уявлень учнів з НО (ознайомлення з новими поняттями, правилами, властивостями). Воно відбувається у активному режимі. У курсі геометрії також проходить систематичне застосування знань і умінь учнів з НО. Воно відбувається у фоновому режимі там, де є для цього або відповідні змістові передумови, або прямі вказівки у чинній програмі, наприклад:

- 8 *клас. Тема* 4. *Розв'язування прямокутних трикутників* … Прикладні задачі;
- 9 *клас. Тема* 6. *Початкові відомості з стереометрії* … Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру.

Опанування учнями відомостями у активному режимі і їх застосування у фоновому режимі на кожному етапі має свої особливості.

Можливості учнів щодо застосування знань і умінь перебувають у постійній динаміці. На другому етапі вони достатньо обмежені. Проєктивна діяльність, розв'язування задач прикладного змісту та інші завдання передбачають

виконання лише чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями, розширюючи при цьому (порівняно з першим етапом) застосування різних форм запису наближених значень.

Передбачається також використання на репродуктивному внутрішньопредметному рівні уявлень учнів про числові характеристики наближених значень та вмінь виконувати «нові» дії над наближеними значеннями (піднесення до степеня з натуральним та цілим показником, добування арифметичного квадратного кореня).

На третьому етапі ситуація якісно змінюється. Учні вже ознайомлені з усіма провідними поняттями НО та відповідними елементами знань. У 9 класі має місце лише обґрунтування деяких з них (метод меж), незначне доповнення (ППЦ, запис наближених значень правильними цифрами) та узагальнення. Тому протягом третього етапу вивчення НО доцільно зосереджуватись в основному на застосуванні НО, зокрема під час розв'язування прикладних задач, що передбачено чинною програмою. Реалізувати зазначене на практиці дозволяє загальне вдосконалення формально-оперативних алгебраїчних умінь учнів, ознайомлення їх із відсотковими розрахунками, відомостями з тригонометрії тощо.

Як вказувалось вище, вивчення НО у активному режимі на кожному з етапів також має свої особливості. Так відомості з НО, що пропоновані для опанування учнями на другому етапі, майже не представлені в чинній програмі. Тому ознайомлення учнів з відповідним навчальним матеріалом відбувалося під час експериментального навчання за рахунок залучення додаткового часу, а також додаткових засобів навчання, в тому числі підручників з алгебри 70–80-х рр. та авторських розробок.

Щодо третього етапу, то значна частина навчального матеріалу, ознайомлення з якою передбачається

пропонованою методикою, має місце в чинній програмі і представлена в діючих підручниках. Зокрема йдеться про відомості з теорії нерівностей, ППЦ, інші пов'язані з ними властивості, правила, означення та приклади. Таким чином створюються передумови для того, щоб на початку 9 класу логічний акцент робити на «алгебрі НО», а саме на обґрунтуванні та доповненні основних положень методу меж. Необхідність такого підходу обумовлюється, по-перше, психолого-педагогічними особливостями старших підлітків, зокрема підвищенням їх інтересу до причинно-наслідкових зв'язків, до з'ясування закономірностей та ознайомлення із загальними науковими принципами. По-друге, важливістю надання випускникам гімназій відповідної математичної підготовки.

Окрім відмінностей другий та третій етапи мають і спільні риси. Зокрема обидва вони виконують структуруючу роль щодо відомостей з НО, з якими учні були ознайомлені на попередніх етапах. Їх мета – забезпечити гештальтність навчального матеріалу, тобто чітке бачення та розуміння учнями його структури. Під розумінням структури навчального матеріалу маємо на увазі глибоке розуміння всіх основних взаємозв'язків у ньому. Воно є передумовою формування навичок не лише простого використання знань, а й перенесення відповідних узагальнених принципів та відношень на міжпредметний та практичний рівень.

Важливість та необхідність уваги до структурування опанованого учнями навчального матеріалу у загальному випадку неодноразово підкреслювалась науковцями, зокрема Дж. Брунером, А. П. Єгідесом та іншими. На їхню думку старші підлітки вже володіють потенційною здатністю мислити логічно та системно, але для того, щоб вона набула розвитку та «запрацювала» необхідний поштовх у вигляді спеціально організованої відповідної

навчальної діяльності. Під час експериментального навчання учні залучались до такої діяльності. Її доцільність у контексті вивчення була не лише підтверджена, але й виявилася вкрай необхідною. Це пов'язано з тим, що опанування учнями уявленнями про провідні поняття НО відбувається шляхом нерівномірного концентричного нашарування, поступового розширення та систематичного уточнення відповідних відомостей. Тому, якщо своєчасно не приділити увагу структуруванню навчального матеріалу з НО, то в учнів не сформується правильної системи уявлень з НО. Замість неї в пам'яті залишиться лише набір, відокремлених фактів, тверджень, формул та правил. Такий досвід уже мав місце у практиці вітчизняної школи.

Як засоби структурування навчального матеріалу, зокрема засоби моделювання його внутрішньотематичних зв'язків, ми використовували логіко-дидактичні схеми (термін А. П. Єгідеса) та інші знаково-символьні засоби (термін Н. А. Тарасенкової). У більшості випадків вони створювалися разом з учнями. Психолого-педагогічними передумовами такого підходу є поступовий розвиток логічного мислення та абстрактного сприйняття учнів. Нагадаємо, що вказані засоби частково вже мали місце і на першому етапі у вигляді обчислювальних таблиць, схем-орієнтирів тощо. На другому та третьому етапах їх використання набуває більших обсягів та більшої складності.

За словами вітчизняних методистів, поступово математичним апаратом для учнів 7—9-х класів повинна стати і стає словесно-символьна мова. Зокрема набувають подальшого розвитку уявлення учнів про використання букв для запису виразів; про використання символів та креслень для запису правил та закономірностей; про позначення та зображення на числовій прямій та координатній площині; про діаграми, таблиці та графіки. На

другому та третьому етапах в учнів зростає досвід звернення до ІКТ, що дозволяє їх використовувати і як засіб унаочнення, і як засіб оперативного інформаційного супроводження.

Передумовою ефективного структурування навчального матеріалу є актуалізація відомостей з НО. Її важливість була підтверджена і врахована під час експериментального навчання. У методиці навчання математики необхідність актуалізації опорних понять пов'язують з тим, що наявність розривів у часі між вивченням спорідненого матеріалу, природно ускладнює забезпечення наступності у процесі опанування учнями новим навчальним матеріалом. Тому має зростати увага до актуалізації та повторення раніше вивченого. Його організації під час експериментального навчання сприяло використання схем-орієнтирів, алгоритмічних приписів та інших засобів, а також залучення учнів до ігрової та проєктивної діяльності, мета і хід яких описано у наступних пунктах. Під час актуалізації опорних понять уже відомий учням матеріал постає перед ними в іншому вигляді та в інших зв'язках, що, на думку методистів, може викликати певні труднощі й в учнів, і в учителів.

У методиці навчання математики пропонуються два шляхи уникнення такої ситуації. За одним – слід не підкреслювати зв'язки нових відомостей із навчальним матеріалом 5–6-х класів. А за іншим – учитель повинен знати і використовувати відповідні «точки дотику» (між курсом «Математики» 5–6-х класів та курсами «Алгебри» та «Геометрії» 7–9-х класів), а також спиратися на наявні в учнів знання, уміння та досвід їх навчальної діяльності. Ми дотримуємось другого погляду на зазначену проблему.

Говорячи про структурування навчального матеріалу мається на увазі не лише раніше вивчений матеріал, а і той, яким мають оволодіти учні у 7–9-х класах. Нагадаємо, що

згідно із запропонованою нами структурною моделлю вивчення НО, у 5–6-х класах уявлення учнів, які стосуються провідних понять НО, мали бути сформованими на різних рівнях. Відповідно вони повинні продовжити своє формування з різних «стартових» позицій у 7–9-х класах. Зокрема, що стосується відомостей про наближені значення, то їх основні джерела мають бути систематизовані, а уявлення учнів доповнитись уявленнями про нові форми запису наближених значень. Інтуїтивні уявлення учнів про числові характеристики наближень повинні отримати подальший розвиток: в учнів мають сформуватись відповідні поняття про якісні та кількісні числові характеристики, терміни, які їх описують та формули, що відображають зв'язки між ними. Повинні розширитись уміння учнів виконувати дії над наближеними значеннями, зокрема підносити наближені значення до степеня з натуральним та цілим показником, добувати арифметичний квадратний корінь із наближених значень. Мають отримати уточнення та доповнення уявлення учнів про методи НО: йдеться про обґрунтування основних положень методу меж та ознайомлення із ППЦ.

Процес формування перелічених компетенцій з НО підпорядковується загально методичним теоріям. Зокрема з методики навчання математики відомо, що процес формування понять розділяється на два ступеня: чуттєвий і логічний. Згідно цих міркувань на другому етапі провідні поняття НО повинні поступово набути остаточної сформованості на чуттєвому рівні і розпочати своє формування на логічному рівні. На третьому етапі – формування понять на логічному рівні має продовжитись, а для окремих понять набути завершеності. Нагадаємо, що на чуттєвому рівні утворюються відчуття, сприйняття і уявлення, а на логічному – здійснюється перехід від уявлень до понять за допомогою узагальнення та абстрагування.

Причому основний акцент у 7–8-х класах рекомендуємо зосередитися саме на узагальненні, попередньо приділивши достатню увагу розширенню та уточненню уявлень учнів, які стосуються провідних понять НО і були сформовані в них у 5–6-х класах. А вже у наступних класах (зокрема у 9 класі та у старших класах) пріоритети змінюються на користь абстрагування. Цьому передує доповнення та систематизація уявлень учнів з НО, що були сформовані в них у 5–8-х класах. Формування понять НО на логічному рівні забезпечується поступовим підвищенням теоретичного рівня навчального матеріалу, а також поступовим посиленням ролі дедуктивних висновків та абстрактно-теоретичних обґрунтувань, при цьому не принижуючи значення індуктивних міркувань.

Як і на першому етапі в основу експериментального навчання другого етапу були покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики, які підтвердили свою педагогічну доцільність під час вивчення НО в 7–9-х класах за пропонованою методикою. Йдеться про обрання педагогічно доцільних методів, організаційних форм та засобів навчання.

Ефективним виявився поступовий перехід від використання конкретно-індуктивного до абстрактно-дедуктивного методу. Хоча, як показали результати пошукового експерименту, у 7 класі викладення матеріалу з НО слід ще залишати переважно на індуктивному рівні. А ознайомлення учнів з теоретичним матеріалом НО продовжувати пояснювально-ілюстративним методом на наочно-оперативному рівні. Поняття доцільно вводити в основному індуктивним методом, а математичні твердження формулювати у вигляді правил, умовних погоджень, формул та схем-орієнтирів.

І в 7 класі, і пізніше, тобто у 8–9-х класах, не зважаючи на підвищення теоретичного рівня, на думку методистів, до

якої ми приєднуємося, доцільно, не вдаватись до зайвого «теоретизування» відомостей з НО, а зосереджувати увагу на принципово нових моментах теми. Рівень строгості застосованих міркувань має відповідати можливостям сприйняття учнів, навчальному досвіду, який був отриманий ними на першому етапі, та їх пізнавальним інтересах. Так, через домінування у старших підлітків інтересу до дослідження істотних властивостей предметів та явищ, у пропонованій нами методиці не знижується увага до навчально-дослідницької діяльності учнів, до методів проблемного навчання (частково-пошуковий (евристична бесіда) та дослідницький методи) та методу доцільних задач. Їх використання (порівняно з попереднім етапом) більше спирається на навчальний досвід учнів, їх вміння опрацьовувати навчальну та довідкову літературу, інші засоби навчання, а також має ряд певних особливостей. Зокрема, під час використання перелічених методів проводиться цілеспрямована робота з формування в учнів уміння висловлювати припущення.

Відповідна діяльність складається з таких етапів:

1) *спостереження (експеримент) шляхом обчислень, перетворень, співставлень*;

2) *формулювання гіпотези, одержаної внаслідок спостереження, яка стверджує певну закономірність*;

3) *перевірка або підтвердження гіпотези.*

Під час ведення вищезгаданої діяльності та на інших етапах навчання велика увага має приділятись формуванню в учнів вмінь використовувати та встановлювати аналогії. Відомо, що аналогія і як логічний прийом, і як прийом розумової діяльності, і як евристичним метод, стає тим поштовхом, який робить мислення активним. Вона, забезпечуючи уявне перенесення певної системи знань і вмінь з відомого об’єкта на невідомий, оперує та сама стає джерелом асоціацій, які забезпечують глибоке і міцне

засвоєння та запам’ятовування відомостей в тому числі і з НО. Посилена увага до нього під час вивчення НО не лише підвищує його ефективність, але і діє із загальнорозвиваючою метою.

Динаміка мотивів спілкування та соціальних потреб старших підлітків вносить відповідні корективи щодо вибору ефективних організаційних форм навчання. Зокрема, основну увагу доцільно приділяти груповій та індивідуальній діяльності учнів із поступовим перенесенням акценту саме на індивідуальну діяльність. Останнє пов’язано з тим, що коли на другому етапі учні прагнуть лише посісти певне місце у колективі ровесників, то на третьому етапі вже виявляють готовність проявити свої сили. Внаслідок цього вони прагнуть визнання цінності власної особистості в очах однолітків, а також певної автономії у колективі ровесників. Вказаним особливостям підпорядкована ігрова та проєктивна діяльності учнів, а також виконання ними лабораторних та практичних завдань. Як і у 5–6-х класах вони продовжують проводитися на різних етапах навчання, переслідуючи не лише освітню і практичну, а і виховну та розвиваючу мету.

Посилення прикладної спрямованості навчання математики, в тому числі і НО, а також ускладнення математичного апарату, який має використовуватись під час виконання практичних завдань, виконання навчальних проєктів тощо, вимагає посиленої уваги до засобів навчання. Мета їх використання – активізувати розумову діяльність підлітків не відволікаючи їх від суті основного завдання. Це стає можливим, оскільки розвивається увага старших підлітків: збільшується її обсяг, вибірковість та мобільність (швидкість переключення). Згідно досліджень сучасних психологів та методистів засоби, що використовуються у процесі навчання, мають бути різними. Традиційний їх розподіл за віковою ознакою не є достатньо

ефективним. Фахівці пов’язують це з тим, що канали сприйняття учнями нових відомостей або пригадування раніше отриманих (за будь-якою із існуючих класифікацій, наприклад, аудіали (слухання), візували (бачення) та кінестетики (дотик)) не знаходяться у прямій залежності від віку дитини, а обумовлені переважно індивідуальними особливостями розумової діяльності дитини. Тому під час другого та третього етапів продовжують використовуватись і засоби образного, і засоби предметного моделювання, а саме схеми, малюнки, реальні предмети, їх фотографії, макети тощо.

Певних змін набуває діяльність учнів пов’язана з побудовою та використанням схем-орієнтирів, зокрема для виконання дій над наближеними значеннями. Їх оновлений варіант містить не лише висновки, але і основні етапи їх створення. Мета таких кроків в окремих випадках – використати, в окремих випадках – сприяти переходу від конкретно-образного до абстрактно-теоретичного мислення, а також від механічної до логічної пам’яті у підлітків.

Зміни пов’язані із змістом традиційного програмового матеріалу (вивчення питань про побудову та дослідження графіків функцій; про розв’язування систем двох лінійних рівнянь графічним способом; про розв’язування основних геометричних задач на побудову; про декартові координати на площині тощо) спричинюють зміни і у організації лабораторних робіт. Зокрема доцільно, щоб у 7–9-х класах проводились лабораторно-графічні роботи. Їх характерними особливостями вважається: побудова графіків та їх застосування; використання креслярських, вимірювальних та обчислювальних засобів; обчислювальна обробка результатів; порівняння результатів вимірювань і обчислень, тощо. Під час їх виконання ефективним є

використання ІКТ. Мета такого використання – унаочнення певних об'єктів та інтенсифікації навчального процесу.

Набуває змін і проєктна діяльність учнів 7–9-х класів. Так якщо в 5–6-х класах домінували монопредметні проєкти (проєкти у межах одного навчального предмета), то тепер їх змінюють надпредметні проєкти, які виходять за межі шкільних предметів і мають характер дослідження. Процес підготовки проєктів ускладняється і вимагає збільшення самостійної роботи учнів, а також консультативної роботи вчителя. В основу організації проєктної діяльності закладаються мотиви спілкування старших підлітків. У 7–8-х класах вони в основному полягають у прагненні до особистісного спілкування із вчителем, а вже у 9 класі переростають у потребу спілкування «на рівних». Якщо виконання лабораторних та практичних робіт на другому та третьому етапах в основному мають на меті освітні цілі (оволодіння учнями відповідними знаннями та уміннями з НО), то під час проєктної діяльності пріоритети надаються розвивальним цілям (освітні досягаються внаслідок індивідуально-консультативної роботи з учителем, а також у результаті спілкування з колегами по проєкту). Одним із основних завдань є формування організаційної культури особистості учнів. Її складовими є вміння ставити проблему та осмислювати способи її розв'язування; вміння висувати гіпотези; вміння опрацьовувати друковані та електронні інформаційні ресурси; навички планування як власної діяльності, так і роботи групи; комунікаційні вміння; вміння виступати перед аудиторією та інше.

Нами було з'ясовано методичні особливості подання навчального матеріалу з НО у 7–9-х класах, а також намічено загальні напрямки математичної підготовки учнів у контексті вивчення НО. Відомо, що їх досягнення значною мірою залежить від організації, розгортання та

подачі навчального матеріалу з НО на уроках алгебри та геометрії, а також відповідного дидактичного наповнення. Саме цим питанням, а також конкретним методичним розробкам приділено увагу у наступних пунктах.

2.2.2. Розгортання навчального матеріалу з наближених обчислень та його дидактичне наповнення у 7–8-х класах.

У 7–9-х класах відбувається перехід від пропедевтичного вивчення елементів алгебри та геометрії, що розглядався в інтегрованому курсі «Математики» 5–6-х класів, до системного вивчення курсів алгебри та геометрії, яке набуває свого продовження у 9-х та старших класах. Як і на першому етапі, педагогічно виважене та доцільне «вкраплення» відомостей з НО відбувається шляхом дослідження та використання відповідних методичних і змістових передумов.

Однією з перших тем 7 класу є тема «Лінійні рівняння з однією змінною». Під час її вивчення за пропонованою методикою повинно відбутися повторення та систематизація уявлень про основні джерела наближених значень. А також розпочатись формування уявлень про числові характеристики наближених значень, відчуття та сприйняття яких на інтуїтивному рівні, зокрема як «міри» близькості наближених значень до істинних, мало місце у 5–6-х класах. Згадане повторення та систематизацію доцільно провести у формі проєктної діяльності. Під час експериментального навчання вона мала назву «Бюро знахідок». Її підготовчий етап мав позаурочний характер. Учні класу, об’єднавшись у невеликі групи (3-4 учні), отримували завдання: знайти та зафіксувати дані, які виражені наближеними значеннями. Для цього кілька груп отримали «відрядження» у продуктову торгівельну мережу; кілька – у будівельну; кілька – на консультацію до вчителів

з інших предметів, а декільком було запропоновано проаналізувати телепередачі, газети та журнали. Результати своєї діяльності учні спочатку обговорювали в індивідуальному порядку з учителем, а потім офіційно презентували на уроці. Мета попереднього обговорення полягала в корекції даних, що були отримані учнями: необхідно, щоб на офіційній презентації учнями були представлені усі джерела та усі форми запису наближених значень.

Отримані учнями данні мали різні форми запису. По-перше, ті, з якими учні вже були ознайомленні у 5–6-х класах – запис наближених значень шляхом вказування їх меж. Наприклад, температура повітря від –5°С до –8°С; за рецептом слід класти у страву від 4 до 5 долькок часнику; амурські тигри мають масу 250-280 кг; напис на банці з фарбою: вистачить для фарбування 12,5-15,0 $м^2$; коефіцієнт тертя ковзання гуми по твердому ґрунту 0,3-0,5. По-друге, ті, ознайомлення з якими планується у 7–8 класах – запис наближених значень у вигляді умовної рівності. Наприклад, напис на пакеті з цукром: маса нетто 1000 г ± 2 %; напис на пачці з вівсяними пластівцями: маса нетто 0,400 ± 0,005 кг; напис на пачці з серветками: 200 ± 2 шт. По-третє, ті, ознайомлення з якими відбудеться у 9 класі – запис наближених значень правильними цифрами. Наприклад, вага людського мозку приблизно дорівнює 1,4 кг; минулого року Торгівельний центр «Україна» відвідало майже 1 млн осіб.

У першому випадку актуалізовані уявлення учнів були доповнені відомостями про запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей. У останньому – учням повідомлялось, що про таку форму запису наближених значень йтиметься у 9 класі (формування перспективних зв’язків). Другий випадок доцільно використати як мотив для продовження вивчення числових характеристик

наближених значень, яке було розпочато на інтуїтивному рівні у 5–6-х класах.

Результати проєктної діяльності, тобто «знахідки» учнів були обговорені, абстраговані від конкретних прикладів, згруповані та структуровані у вигляді логіко-дидактичних схем із залученням відповідної символіки. Схема, що присвячена запису наближених значень, є не повною і отримає відповідне доповнення (запис наближених значень із використанням знаку модуля) у 9 класі. Рівень розвитку сприйняття учнями знаково-символьних засобів дозволяє основну увагу у 7–8-х класах приділити записам наближених значень математичною мовою, а не побутовою, превалюванням якої характеризувався перший період вивчення НО. Саме тим і пояснюється відсутність у схемі «нематематичних» записів наближених значень.

Як вже вказувалось, повторення відомостей про наближені значення спричинило розгляд питань про їх точність. У цій темі недоцільно вводити ні відповідну термінологію, ні відповідні означення. Що ж стосується числового значення, яке міститься після знаку «±», то його слід позиціонувати як величину найбільшої похибки, яка виникає при заміні точного значення наближеним.

Під час систематизації відомостей про джерела наближених значень учні повинні навчитись порівнювати числові характеристики наближених значень, у деяких практичних завданням знаходити величину похибки, а також набути вмінь (на наочно-оперативному рівні) виконувати перехід між записами наближених значень у вигляді умовних рівностей до подвійних нерівностей. Останнє має супроводжуватись широким використанням наочності, зокрема координатної прямої, що активізує роботу дієвої та зорової пам’яті. Однак в багатьох задачах фігурують достатньо великі числові значення, що

унеможливлює їх унаочнення на координатній прямій. У таких випадках відбувається звернення до образного моделювання, тобто до уяви учнів, яка на цей період вже достатньо розвиненою.

Безпосередньою метою актуалізації відомостей з НО є підготовка учнів до формування в них уявлень про точність та відносну точність. Формуючи уявлення про числові характеристики, ми керувались дослідженнями вітчизняних методистів про те, що у 7 класі методологічно і психологічно доцільно вводити поняття і про кількісні, і про якісні числові характеристики одночасно.

Ознайомлення учнів із точністю наближених значень доцільно розпочинати методом проблемного викладу відповідного навчального матеріалу. Нагадаємо, що під час проєктної діяльності учні дійшли висновку про існування кількох різних форм запису наближених значень. Їх увага спрямовується вчителем на дві з них. А саме, на форму запису наближених значень у вигляді подвійної нерівності, яка відома учням ще з 5–6-х класів, а також на форму запису наближених значень у вигляді умовної рівності, з якою учні найчастіше зустрічались під час проєктної діяльності. Після цього формулюється проблема: як за відомими межами наближеного значення знайти ступінь його близькості до точного значення. Або у більш вузькому форматі: як виконати перехід від запису наближених значень у вигляді подвійної нерівності $HM \le x \le BM$ до запису у вигляді умовної рівності: $x = a \pm h$. Уявлення про перехід оберненого характеру слід формувати в учнів на наочно-оперативному рівні за допомогою задач. Відповідні відомості легко сприймаються учнями, а виконання відповідних дій не викликає в труднощів.

Вирішення вказаної проблеми необхідно проводити конкретно-індуктивним методом. Як стверджували і стверджують методисти, його ефективності значною мірою

сприяє залучення наочних образів, зокрема – координатної прямої. Відповідний матеріал вдало представлено у підручниках для 7 класу 70–80-х рр. Він був використаний нами під час експериментального навчання.

У ході формування умінь учнів переходити від запису наближених значень у вигляді умовної рівності до запису у вигляді подвійної нерівності, учитель має акцентувати увагу учнів на тому, що точне значення (говорять також істинне або дійсне) міститься між числами, які описують межі наближеного значення. А за наближене значення можна приймати будь-яке числове значення із цього проміжку. Подальші міркування доцільно вести конкретно-індуктивним методом. Зокрема, під час експериментального навчання було залучено навчальний досвід, який був отриманий учнями у 6 класі під час практичного знаходження числа π.

Оперуючи даними однієї з учнівських робіт (або власними записами) вчитель нагадує, що в результаті вимірювань та обчислень були отримані певні наближені значення числа π. Як і у 6 класі, серед них обирають верхню та нижню межу, після чого переходять до аналізу похибок, які припущені для кожного із отриманих наближених значень числа $\boldsymbol{\pi}$. Із рисунку 13 видно, що їх величини, тобто відстані між наближеними та точними значеннями числа π, є різними. Однак у всіх випадках їх довжина не перевищує довжину відрізка, кінцями якого є межі наближеного значення.

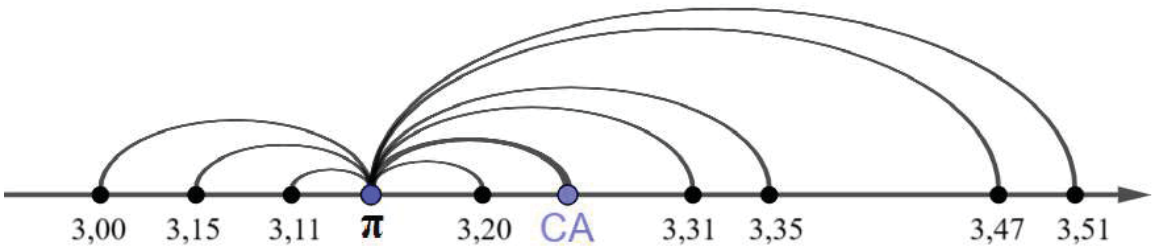


Рис. 13

Водночас учні вже мають уявлення про те, що у якості наближеного значення, як правило, обирають середнє арифметичне його меж (середнє арифметичне меж наближеного значення позначено СА). Тому їм пропонується проаналізувати величину похибки, яка буде отримана у цьому випадку. Виявляється, що вона не перевищуватиме половини відрізка, кінцями якого є межі наближеного значення. Тому, керуючись бажанням отримати меншу похибку, саме останній випадок і беруть за основу під час запису наближених значень у вигляді умовної рівності.

У цей час важливо формувати в учнів навички правильного читання умовної рівності $x = a \pm h$, а також одного із її варіантів, який зазвичай зустрічається у підручниках: $x \approx a$ *з точністю до* h: «Говорять, що число a є наближеним значенням числа x з точністю до h».

Ознайомивши учнів із правилами знаходження складових умовної рівності $\left(a = \frac{BM+HM}{2};\ h = \frac{BM-HM}{2}\right)$, слід розпочати формування в них відповідних умінь. Під час експериментального навчання учням пропонувалось практичні завдання.

Задача. Чергові підраховували кількість учнів школи, що були присутні на першому уроці. Перший з них отримав результат – 729 учнів, другий – 734 учні, третій – 725 учнів, а четвертий і п'ятий по 730 учнів. З якою точністю були виконані підрахунки?

Коментарі до розв'язування задачі. Під час розв'язування задачі ставиться дві мети. По-перше, формування в учнів умінь знаходити точність наближених значень. По-друге, створення проблемної ситуації, результатом розв'язування якої є формулювання певних правил. Так під час розв'язування задачі учні приходять до некоректного результату:

$$725 \le x \le 734; x = \frac{725 + 734}{2} \pm \frac{734 - 725}{2} = 729{,}5 \pm 4{,}5 .$$

Його некоректність полягає в тому, що отримана кількість осіб і точність, з якою вона наведена, виражена не натуральними числами. Тому необхідним є округлення отриманих результатів до розряду одиниць. Під час округлення наближеного значення 729,5 ≈ 730, виникає похибка округлення 730 – 729,5 = 0,5. Її необхідно додати до числа, що виражає точність наближеного значення. Застосувавши наведене правило до задачі отримаємо: 4,5 + + 0,5 = 5, тоді $x = 730 \pm 5$ (осіб) – остаточна відповідь до задачі.

Сформувавши в учнів навички знаходження точності наближених значень, слід звернути їх увагу на ті окремі випадки, коли мова може вестись не про найбільше можливе значення похибки (тобто точність), а про її точне значення. У таких випадках помилку називають абсолютною похибкою і знаходять як модуль різниці між точним та наближеним значеннями.

Під час експериментального навчання використовувалась традиційна методична схема формування уявлень учнів про абсолютні похибки, яка представлена на сторінках сучасної навчально-методичної літератури. Формування вмінь учнів знаходити абсолютні похибки наближених значень відбувалось і на уроках алгебри, і на уроках геометрії. Зокрема, під час вивчення теми «Суміжні та вертикальні кути, їх властивості». Послідовність та хронологічна узгодженість вивчення цих питань відповідала чинній програмі з математики.

Наведемо кілька зауважень до їх вирішення. Не дивлячись на сформовані в учнів у 5−6-х класах уявлення про наближений характер практичних вимірювань, школярі, як правило, знаходяться під «впливом» тих результатів, які «треба» отримати, зокрема за властивостями суміжних та вертикальних кутів. Тому під час експериментального навчання нами використовувалась

парна форма роботи: одну частину завдання виконував сам учень, а другу – його сусід по парті. Відповідальність за якість роботи ніс кожен учень окремо, що ставало на заваді їх сумісному підганянню під «правильну відповідь».

Під час експериментального навчання траплялися випадки, коли отримані учнями результати вимірювань співпадали із теоретично необхідними. У таких випадках учні доходили висновку, що отримана абсолютна похибка дорівнює нулеві.

Наступною темою у 7 класі є тема «Цілі вирази». Під час її вивчення за пропонованою методикою має відбутися розширення уявлень учнів про виконання дій над наближеними значеннями (піднесення до степеня з натуральним показником), а також формування в них уявлень про відносну точність. Передувати цьому повинна актуалізація певних відомостей, з якими учні були ознайомлені у 5–6-х класах.

Під час експериментального навчання вона відбувалась в ході ведення ними проєктної діяльності, в основу якої були покладені ідеї М. А. Бугайової.

Учням було запропоновано за допомогою таблиці 4 скласти комплекс вправ для уроку фізичного виховання. Затрати енергії при цьому не повинні були перевищувати *n*·Дж (значення *n* для кожного з учнів було інше).

Таблиця 4

Довідкові данні для ведення учнями проєктної діяльності

Вид діяльності	Кількість енергії, яка витрачається протягом 1 хв
1. Біг	36-40 кДж
2. Ходьба	8-10 кДж
3. Гімнастика	20-30 кДж
4. Стрибки	28-30 кДж
5. Спортивні ігри	40-60 кДж

Обчислення, до яких припускалися учні під час ведення проєктної діяльності, в основному стосувались таких дій, як додавання наближених значень, а також їх множення на натуральне число. Під час підведення підсумків проєктної діяльності учні разом з учителем створюють узагальнюючу схему, що містить усі чотири відомі учням схеми-орієнтири для виконання дій над наближеними значеннями. Така актуалізація відомостей з НО дозволила під час ознайомлення учнів із традиційним навчальним матеріалом теми «Степінь з натуральним показником» доповнити його правилом піднесення до степеня наближених значень. Доповнення відбувалося двома способами: перший із залученням частково-пошукового методу, другий – із використанням методу доцільних задач.

У першому випадку учням нагадувалось про існування точних та наближених значень. Після чого вони підводилися до думки про те, що коли існує правило піднесення до степеня з натуральним показником для точних значень, то воно повинно існувати і для наближених значень. Аналізуючи означення вузлового поняття навчальної теми, наведену до нього у чинному підручнику схему-орієнтир, а також схему-орієнтир для множення наближених значень (повторення якої відбулося напередодні), учні разом з учителем «створюють» відповідну схему-орієнтир для піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Міркування учнів доцільно супроводжувати та підтримувати за допомогою логіко-дидактичних схем. Остаточним варіантом схеми-орієнтиру для піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником доповнюють узагальнюючу схему.

$$V = a^3$$
$$3{,}20 < a < 3{,}25$$
$$\downarrow \quad \times \quad \downarrow$$
$$3{,}20 < a < 3{,}25$$
$$\downarrow \quad \times \quad \downarrow$$
$$3{,}20 < a < 3{,}25$$
$$(3{,}20)^3 < a^3 < (3{,}25)^3$$

Рис. 14

У другому випадку до уваги учнів пропонувалася така задача.

Задача. Бак має форму куба. Під час вимірювання з'ясувалось, що його ребро a має довжину 3,20 м < a < 3,25 м. Чи поміститься в бак 24,5 т бензину (густина бензину 710 кг/м^3).

Під час її розв'язування шляхом індуктивних міркувань учні робили таке спостереження: межами наближеного значення, піднесеного до куба, є його межі, також піднесені до куба. Це дозволило їм висунути припущення про те, що для піднесення до степеня з натуральним показником наближеного значення слід піднести до цього степеня його межі. Підтверджуючи гіпотезу учнів, учитель разом з ними, як і в попередньому випадку, виводить відповідну схему-орієнтир.

В обох випадках увага учнів повинна бути зосереджена на тому, що отримані ними висновки, справедливі лише для тих випадків, коли межі наближених значень є додатними числами. Порівнюючи описані два способи зазначимо, що перший з них більше відповідав стилю викладення програмової теми у чинному підручнику. Йдеться про домінування абстрактних прикладів, а не текстових задач. Натомість другий спосіб, залишаючи викладення матеріалу переважно на індуктивному рівні, відповідає ідеї прикладної спрямованості навчання та реалізації міжпредметних зв'язків.

Обидва підходи виявились ефективними під час експериментального навчання. Вони переслідували не лише дидактичну мету, але і розвивальну. При цьому дидактична мета полягала в ознайомленні школярів із відповідними питаннями навчальної теми, а розвивальна – у формуванні в учнів уміння висловлювати припущення про існування певних закономірностей.

Під час вивчення теми «Цілі вирази» розпочинається формування уявлень учнів про відносну похибку та відносну точність наближених значень. Цьому має передувати актуалізація відомостей про абсолютні похибки, яка відбувається на геометричному матеріалі. Приклад задачі, яка пропонувалась для розв'язування, зокрема під час вивчення теми «Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною», наведено у п. 2.3.

Ознайомлення учнів із поняттям про відносну похибку під час експериментального навчання відбувалося в ігровій формі, що було ефективним та педагогічно доцільним. Гра називалась «Хто найкращий вимірювач?». Її назва невипадково співзвучна із грою, що рекомендувалась для проведення у 5 класі. В її межах для порівняння якості наближених значень однакових величин однакового порядку пропонувалось використовувати абсолютну похибку (її там називали похибкою). Мета гри у 7 класі – показати, що абсолютна похибка не завжди може слугувати «мірилом» для порівняння точності наближених значень однакових величин, але різного порядку. Водночас отримані результати вмотивовують введення поняття відносної похибки.

Формування уявлень учнів про відносні похибки, відбувалось за традиційною методичною схемою, що представлена у навчально-методичній літературі Особливу увагу учнів при цьому слід зосереджувати на таких принципових моментах.

По-перше, відомо, що відносна похибка може визначатись як відношення абсолютної похибки до точного або наближеного значення. Отримані результати в обох випадках мало відрізняються один від одного. Однак учням важлива визначеність у цьому питанні. Тому знаходження, або інші дії та операції з відносною похибкою доцільно підпорядковувати наступним правилам: якщо відоме і точне, і наближене значення, то для обчислення відносної похибки треба використовувати точне значення; якщо відоме лише одне з них (або точне, або наближене значення), то його і використовують для обчислення відносної похибки.

По-друге – слід зосередити увагу учнів на тому, що аналогічно до того, як існують два поняття «абсолютна точність» та її окремий випадок «абсолютна похибка», існують також і такі два поняття як «відносна точність» та її окремий випадок «відносна похибка». Особлива увага при цьому приділяється відповідній формі запису наближених значень $x = a \pm \varepsilon\%$, з якою учні неодноразово зустрічались під час проєктної діяльності на початку 7 класу.

По-третє, відносна похибка та відносна точність, як і абсолютна похибка та точність округлюються лише з надлишком.

Формування вмінь знаходити відносні похибки наближених значень доцільно продовжити під час розв'язування практичних завдань з алгебри та геометрії.

На базі програмового алгебраїчного матеріалу, зокрема, під час вивчення тем: «Лінійна функція, її графік та властивості», «Лінійне рівняння з двома змінними та його графік», «Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом», доцільно формувати вміння обчислювати абсолютні похибки.

При цьому важливо наголошувати, що графічним способом знаходять лише наближені розв'язки (відповідний матеріал вдало представлено у діючому підручнику), які

можуть виявитися і точними. З'ясувати це можна, підставивши отримані значення в дану систему рівнянь або отримавши нульове значення абсолютної похибки. Розв'язуючи задачі, пов'язані з графічними побудовами, слід обмежуватись знаходженням лише кількісних числових характеристик наближених значень. Під час експериментального навчання було з'ясовано, що завдяки НО, вказані задачі, окрім репродуктивного, набувають ще й розвиваючого характеру. Проілюструємо сказане за допомогою однієї з них.

Задача. (Тема «Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом»). Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} -2x + y = 8 \\ 1{,}5x + y = 11 \end{cases}$ графічним способом та способом підстановки. Обчисліть абсолютну похибку результатів, що отримані графічним способом.

Коментарі до розв'язування задачі. Під час експериментального навчання виявилось, що у контрольних класах учні, як правило, маючи підсвідому звичку до «зручних» відповідей, отримують результат (1;10) (точним розв'язком є $\left(\frac{6}{7}; \frac{68}{7}\right)$) (див. рис. 15).

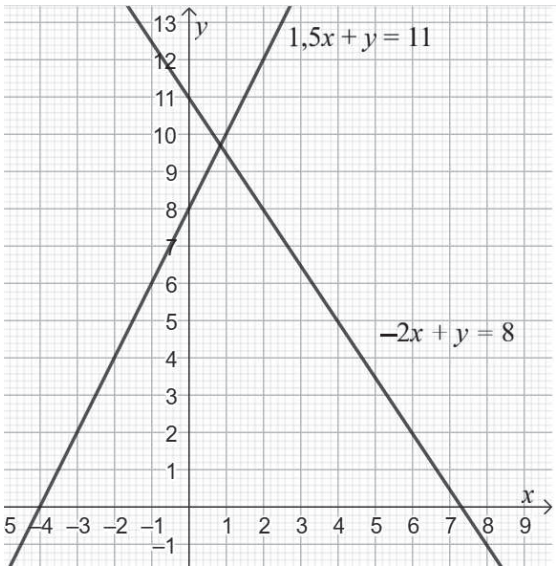


Рис. 15

Що стосується експериментальних класів, то в них спостерігалась дещо інша картина. Учні чітко усвідомлювали можливість отримання похибок, що пов'язані із веденням «власноручних побудов». Вони не лише припускали існування, але і отримували різні відповіді, зокрема (0,9;10), (1;10,1) тощо. Учні активно відстоювали свою позицію, водночас сприймаючи альтернативні відповіді, отримані іншими учнями. Тобто організоване таким чином навчання сприяє розвитку самостійного та водночас дивергентного мислення учнів.

Приклади розв'язування подібних завдань із застосування ІКТ наведені у п. 2.3.

Першою темою 8 класу є тема «Раціональні вирази». Під час ознайомлення з нею, знання учнів про виконання дій над наближеними значеннями повинні доповнитись уявленнями про піднесення їх до степеня з цілим показником. Змістовою передумовою для цього є програмова тема «Степінь із цілим показником та його властивості».

Під час опанування програмовим матеріалом в учнів виникає припущення: якщо до степеня з цілим показником можна підносити точні значення, то мабуть такі дії можна виконувати із наближеними значеннями. Відповідний навчальний матеріал з НО позиціонується як перевірка цієї гіпотези. Як і під час вивчення теми «Степінь з натуральним показником» у 7 класі, заплановане доповнення традиційного навчального матеріалу є природним та ефективним за умови актуалізації відомостей з НО, з якими учні були ознайомлені у 5–7-х класах (мова йде про виконання арифметичних дій над наближеними значеннями).

Повторення відповідного навчального матеріалу доцільно провести у формі проєктної діяльності, що і було зроблено під час експериментального навчання. Проєкт мав назву «Екскурсія вихідного дня». Окрім вищевказаного завдання він також мав на меті формування в учнів умінь опрацьовувати умовні рівності, що містять відносну точність. Під час ведення проєктної діяльності учні повинні були вибрати об'єкт екскурсії та скласти кошторис по її практичній реалізації за певними критеріями наданими вчителем.

Під час оцінювання презентації враховувались не лише правильність складеного кошторису, але і цікава історична довідка про об'єкт екскурсії, фотографії тощо. Це надавало розвиваючого характеру проєктній діяльності.

Для економії часу та формування навичок самостійної діяльності доцільно, щоб підготовчий та виконавчий етапи проєктної діяльності відбувалися у позаурочний час, а безпосередня презентація проєктів – на одному з уроків математики.

Для планування, оформлення та представлення власних проєктів учнів об'єднували у невеликі групи по 4 - 5 осіб. Основою групування у вказаному проєкті слугували індивідуальна сумісність учнів та їх гетерогенність у контексті навчальних досягнень. У кожній групі обирався відповідальний керівник проєкту, а участь у безпосередній презентації брали участь усі члени групи. Приклад розрахунку кошторису, який був складений учнями наведено у таблиці 5.

Таблиця 5

Фрагмент звітних паперів, які складались учнями під час проєктної діяльності

Напрям витрат	Межі витрат	Розрахунки витрат
1. Оренда автобуса (***b***)	175-250 грн	**1**. Обчислення витрат на пальне ($a = xyz$): $\begin{array}{r} 0{,}20 \le x \le 0{,}25 \\ \times\ 80 \le y \le 90 \\ \times\ 3{,}70 \le z \le 3{,}90 \\ \hline 59{,}20 \le a \le 87{,}75 \end{array}$ **2.** Обчислення загальної вартості екскурсії ($d = a + b + c$): $\begin{array}{r} 59{,}20 \le a \le 87{,}75 \\ +\ 175 \le b \le 250 \\ +\ 200 \le c \le 250 \\ \hline 434{,}20 \le d \le 587{,}75 \end{array}$ **3.** Обчислення вартості екскурсії з урахуванням знижки ($m = d - \frac{kd}{100}$): $\begin{array}{r} 434{,}20 \le d \le 587{,}75 \\ \times\ 0{,}03 \le \frac{k}{100} \le 0{,}05 \\ \hline 13{,}026 \le \frac{kd}{100} \le 29{,}3875 \end{array}$ $\begin{array}{r} 434{,}20 \le d \le 587{,}75 \\ -\ 13{,}026 \le \frac{kd}{100} \le 29{,}3875 \\ \hline 404{,}8125 \le m \le 574{,}724 \end{array}$ **4.** Вартість екскурсії для одного учня ($f = m{:}n$): $\begin{array}{r} 404{,}8125 \le m \le 574{,}724 \\ \div\ 28 \le n \le 32 \\ \hline 12{,}65 \le f \le 20{,}53 \end{array}$
2. Витрати пального на 1км (***x***)	0,20-0,25 л	
3. Ціна пального за 1 л (***z***)	3,70-3,90 грн	
4. Відстань до об’єкту екскурсії (***y***)	80-90 км	
5. Послуги гіда (***c***)	200-250 грн	
6. Знижка від загальної вартості (***k***)	3-5 %	
7. Кількість екскурсантів (***n***)	28-32 учнів	

Під час проєктної діяльності учні, дістаючи необхідні відомості, часто отримували їх у вигляді умовних рівностей де містилась відносна точність. Наприклад, у бізнес-довідці, їм повідомили таку ціну на пальне: 3,80 грн ± 2,6 % за 1 л. Така форма запису наближених значень відома учням із 7 класу, але в них ще не сформовані навички по знаходженню величини абсолютної точності за відомим значенням відносної точності. Тому після створення таким чином мотиваційного ефекту один із наступних уроків треба присвятити формуванню цих навичок. Під час нього доцільно розв'язувати завдання, запропоновані як вчителем, так і самими учнями. Їх основою, повинні стати «реальні проблеми», з якими зустрілись учні під час проєктної діяльності.

Наведемо коментарі до розв'язування «задачі про пальне». Учні самостійно або за допомогою вчителя згадують, що для виконання дій над наближеними значеннями треба представити їх у вигляді подвійних нерівностей: $HM \le x \le BM$, тобто $a - h \le x \le a + h$ (такому пригадуванню сприяє звернення до відповідних схем-орієнтирів та логіко-дидактичних схем). Із останнього запису випливає, що для знаходження меж наближеного значення треба знати його точність, а отже необхідно пригадати формулу, що пов'язує абсолютну і відносну точності:

$$\varepsilon = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \varepsilon \cdot a ,$$

де h – точність наближеного значення; ε – відносна точність наближеного значення (3,80 грн ± **2,6 %**); a – наближене значення (**3,80 грн** ± 2,6 %).

Після цього учні легко виконують відповідні обчислення:

$h = 3{,}80 \cdot 2{,}6\ \% = \frac{3{,}80 \cdot 2{,}6}{100} = 0{,}0988 \approx 0{,}10$ грн.

Потім інтерпретують отримані результати та використають їх у проєктній діяльності: 3,80 ± 0,10 грн або 3,70 – 3,90 грн – ціна пального за 1 л.

Подальше формування умінь по опрацюванню умовних рівностей, які містять відносну точність повинно відбуватись під час розв'язання учнями задач.

Проведена актуалізація відомостей з НО переконує учнів у об'єктивному існуванні наближених значень, а також дає можливість пригадати правила виконання дій над ними. Вона дозволяє доповнити традиційний навчальний матеріал теми правилом піднесення наближених значень до степеня з цілим показником та правилом добування квадратного кореня із наближених значень. Хід міркувань, методи, засоби унаочнення, що при цьому використовувались є аналогічними до тих, які мали місце під час формування в учнів уявлень про піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником.

Ознайомлення з правилом піднесення наближених значень до степеня з цілим показником слід розпочати з аналізу означення вузлового поняття навчальної теми, а також нагадування схем-орієнтирів для ділення наближених значень та піднесення їх до степеня з натуральним показником. «Створення» схеми-орієнтиру для піднесення наближених значень до степеня із цілим показником доцільно супроводжувати евристичною бесідою. Потім її заносять до підсумовуючої схеми.

Ознайомлення учнів із правилом добування арифметичного квадратного кореня із наближеного значення та «створення» відповідної схеми-орієнтиру слід виконувати методом доцільних задач під час вивчення теми «Квадратні корені. Дійсні числа». Навчальний матеріал, який міститься у цій темі, зокрема питання «Квадратний корінь. Рівняння $x^2 = a$. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа» безпосередньо пов'язані із

наближеними значеннями. Цей зв'язок вдало представлено у діючих вітчизняних підручниках. Під час експериментального навчання, ми доповнили його певними акцентами та ілюстраціями на координатній прямій. Зокрема, доцільно донести до учнів думку про те, що записуючи все нові, і нові цифри після коми у ірраціональному числі ми все ближче наближаємось до нього зліва. Цей процес може тривати нескінченно, але так і не приведе нас до з'ясування точного значення ірраціонального числа: виписати його повністю неможливо. Тому практичні дії над ірраціональними числами замінюються діями над їх наближеними значеннями, точність яких або задається умовою задачі, або приймається з певних практичних міркувань. Для формування в учнів відповідних практичних умінь, їм були запропоновані завдання із чинних підручників для 8–9-х класів. Їх варто розв'язувати двічі: перший раз у 8-му класі, а другий – у 9-му для актуалізації відповідних відомостей із НО.

Як вже вказувалось, за пропонованою методикою програмовий навчальний матеріал має бути доповнений відомостями про добування квадратного кореня із наближених значень. Для цього була запропонована учням задача, аналогічна до тієї, яка традиційно наводиться у підручниках на початку вивчення теми «Квадратні корені та дійсні числа»:

Задача. Спортивний зал має форму квадрата площею 215 м^2. Під час виконання реконструкції його площа може змінитись не більше ніж на 1 %. Якими будуть розміри спортивного залу після реконструкції?

Коментарі до розв'язування задачі. Учні аналізують умову задачі. Записують її «мовою НО»: $S = 215$ м$^2 \pm 1$ %; $S = (215 \pm 215 \cdot 0{,}01)$ м$^2 = (215 \pm 2{,}15)$ м^2, де S – площа спортивного залу після реконструкції. Далі переходять до внутрішньомодельного розв'язування, тобто до

знаходження сторони квадрата: 212,85 м^2 ≤ S ≤ 217,15 м^2; 212,85 м^2 ≤ a^2 ≤ 217,15 м^2, де a – розміри спортивного залу після реконструкції: ? м ≤ a ≤ ? м.

Подальші міркування учнів потребують актуалізації відомостей про піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Під час експериментального навчання з'ясувалося, що актуалізація має носити індуктивно-дослідницький характер і підвести учнів до такого ***висновку***: якби були відомі межі для сторони квадрат (для зручності позначимо їх змінними x та y), то значення площі $S = a^2$ ми б отримали за відомим алгоритмом піднесення до другого степеня. Межі наближеного значення площі квадрат є квадратами меж наближеного значення сторони квадрата. Тому, щоб знайти межі для сторони квадрата, необхідно розв'язати рівняння $x^2 = 112{,}85$ та $y^2 = 217{,}15$, тобто добути квадратні корені із відповідних меж площі. Це активізує та спрямовує діяльність учнів створення відповідної логіко-дидактичної схеми.

Отримавши остаточну відповідь та проаналізувавши виконання дій по її знаходженню, вчитель разом з учнями мають «створити» відповідну схему-орієнтир для добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень та занести її до узагальнюючої схеми.

Під час розв'язування вищенаведеної задачі в учнів має виникнути запитання: до якого розряду слід округлювати межі наближеного значення? У пошуках відповіді на нього відбувається актуалізація уявлень учнів про те, що межі наближеного значення зазвичай округлюють до того розряду, з якого починається розходження цифр однакових розрядів. Нагадаємо, що вони були сформовані в учнів у 5 класі, а відповідне твердження наводилось у вигляді правила. Розвиток дискусійного мислення, а також схильність підлітків до експериментування, призводять до виникнення в них сумнівів щодо істинності такого

твердження. Учні висувають припущення про те, що чим більше ми залишимо десяткових знаків для опису шуканого наближеного значення, тим точнішим воно буде. Для перевірки цієї гіпотези учням доцільно запропонувати провести обчислювальний експеримент (на базі попередньої доцільної задачі). Він полягає в обчисленні для кожного із випадків значення точності та відносної точності наближення. Ілюстрація отриманих результатів за допомогою діаграми показала, що виписування десяткових знаків, які слідують після тих, на які вказує правило, майже не впливає на поліпшення точності отриманого результату. Водночас, якщо записати менше десяткових знаків, ніж вимагає правило, то це значною мірою погіршить точність отриманого результату.

Підсумовуючи результати експерименту вчитель обов'язково має зосередити увагу учнів на тому, що виписування зайвих десяткових знаків вважається невиправданим та непотрібним, але не неправильним. Більше того, в деяких випадках до нього свідомо припускаються, тобто залишають одну або дві запасні цифри.

Доцільно зосередити увагу учнів на таких двох випадках. Перший – дія, що виконується, є проміжною (про це говорилось у 5 класі). Другий – межі (або хоча б одна з меж) є близькими до одних числових значень, а правила вимагають їх округлення до інших числових значень.

Зупинимось детальніше на другому випадку. Нехай наближене значення a міститься у межах $63{,}9212\ldots \le a \le 64{,}4821\ \ldots$ (див. рис. 16). Розходження цифр починається з розряду одиниць, тому згідно з правилом, округлення слід виконувати до одиниць. Нескладно помітити, що числове значення нижньої межі є близьким до 64, а правила округлення меж наближених значень вимагають округлення з недостачею, тобто до 63. У таких

випадках пряме слідування правилу, тобто округлення до одиниць, призводить до невиправданого розширення меж наближених значень. А збереження однієї запасної цифри дозволяє цього уникнути, а також значною мірою поліпшити якість наближення (відносну точність):

$63 \le a \le 65$; $a = 64 \pm 1$; $a = 64 \pm$ **1,57 %**, проти

$63{,}9 \le a \le 64{,}5$; $a = 64{,}2 \pm 0{,}3$; $a = 64{,}2 \pm$ **0,47 %**.

Проілюструвавши зазначене за допомогою координатної прямої, робимо висновок, що відповідь до «задачі про спортивний зал» може бути сформульована одним зі способів: $14{,}5 \le a \le 14{,}8$ або $14{,}58 \le a \le 14{,}74$.

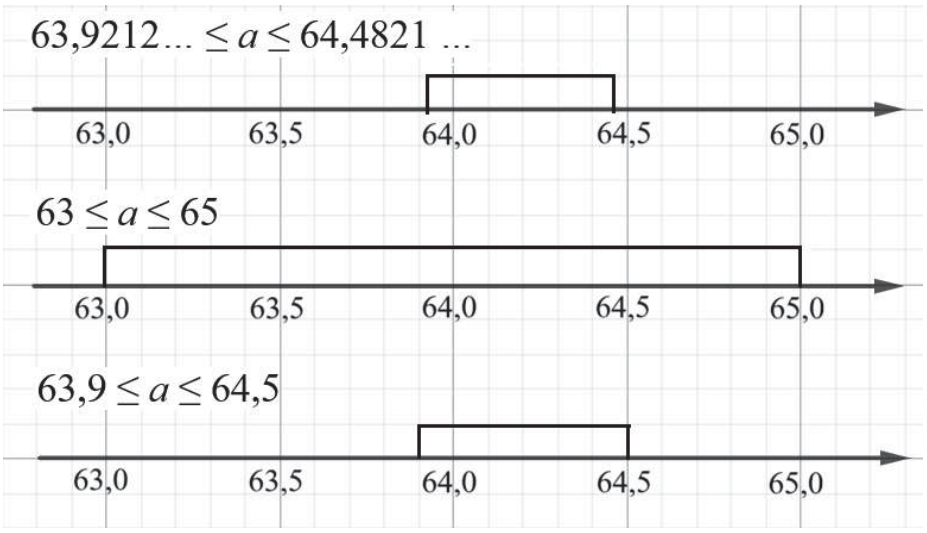


Рис. 16

У 8 класі (як і у 7 класі) формування навичок з знаходження відносної похибки має відбуватись здебільшого на геометричному матеріалі. Змістовими передумовами для цього володіють усі чотири теми, якими представлено в діючій програмі навчальний матеріал з геометрії 8 класу. Відповідні задачі доцільно розв’язувати різними способами та порівнювати отримані результати. Наприклад задачі на ділення відрізка навпіл, одні учні повинні розв’язувати за допомогою циркуля, а інші – за

допомогою лінійки. Перші, як правило, отримують точніший результат.

Розв'язуючи запропоновані задачі, учням важко позбутися бажання отримати «потрібні» відповіді (аналогічна ситуація спостерігалася і у 7 класі). У якості запобіжного засобу ефективною залишається парна робота учнів. Також доцільною є ігрова діяльність учнів. Вона дає можливість переключити увагу учнів, тобто зосередити її на бажанні перемогти у грі.

Приклади задач, які слід пропонувати учням для розв'язування, наведені у п. 2.3. Наведемо приклад та коментарі до однієї з них.

Задача. (Тема «Розв'язування прямокутних трикутників») За допомогою косинця або транспортира побудувати прямокутний трикутник з катетами 5,4 см і 7,3 см. Виміряти довжину гіпотенузи. Обчислити відносну точність отриманого результату.

Коментарі до розв'язування задачі. Пропонується проведення гри-естафети**.** Учні класу мають об'єднатись у три команди, які відповідають трьом рядам парт у класі. Кількість членів кожної команди повинна бути непарною та однаковою. Кожен з учнів отримує «свою» задачу (точніше, однакові задачі з різними числовими даними), аналізує її та виконує необхідні побудови: будує прямокутний трикутник за відомими катетами. Після виконання побудов кожен учень передає естафету (свій зошит) іншому учневі, який сидить попереду через одну парту (наприклад А) (рис. 17). Його мета: виміряти гіпотенузу, записати поряд з трикутником отриманий результат (із використанням знака «≈») і передати естафету далі, а саме учневі, який сидить позаду нього (наприклад В). Його завдання, згідно з умовою, обчислити за теоремою Піфагора довжину гіпотенузи, записати результат поряд з трикутником і передати естафету далі, а саме учневі, який сидить позаду

нього (наприклад С). Так зошит повертається до господаря, який обчислює величину відносної похибки і піднімає руку. Виграє та команда, усі члени якої першими отримають результат. Під час гри задіяні усі учні. Зі схеми видно, що коли над опрацюванням задачі учня С працює учень А, а потім В, він (учень С) виконує такі самі дії спочатку для учня Е, потім для учня Д, після чого до нього повертається його задача, замикаючи таким чином цикл. Підсумовування результатів гри має проходити в два етапи. Кожна з команд отримує певну кількість очок за швидкість одержання відповідей. А вже після перевірки учнівських робіт вчителем, вона може зменшитися внаслідок нарахування штрафних балів за неправильно проведені обчислення.

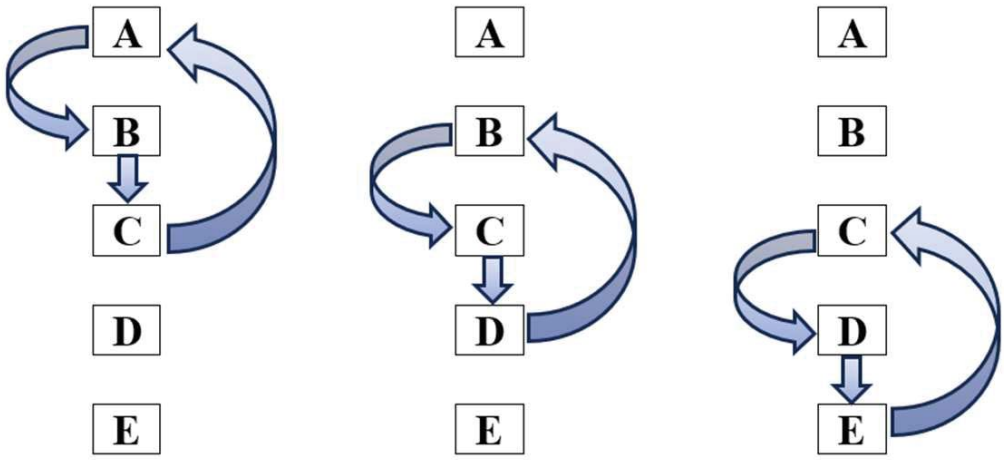


Рис. 17

Під час опанування учнями традиційним навчальним матеріалом курсу алгебри 8 класу, відбувається їх ознайомлення з графіками та властивостями функції $y = \frac{k}{x}; y = x^2; y = \sqrt{x}$, а також із квадратними рівняннями. Як показало експериментальне навчання, зазначений матеріал слід доповнити завданнями, метою яких є, по-перше, формування в учнів комптентностей, які передбачені програмою, по-друге, подальший розвиток

навичок ведення графічних міркувань. Формування останніх було розпочато під час ознайомлення учнів у 7 класі з графіком та властивостями лінійної функції.

Реалізація зазначеного підходу сприяла підвищенню інтересу учнів до програмового навчального матеріалу. Увага учнів зосереджувалась на тому, що графічні міркування (графічне розв'язування рівнянь, знаходження за графіком нулів функції тощо) дозволяють робити наближені кількісні висновки, а також певні якісні висновки, зокрема, перевіряти наявність коренів, їх кількість, вказувати проміжки, яким вони належать.

Зазначимо, що в сучасних підручниках містяться завдання спорідненого характеру, але без вимоги знаходження абсолютної похибки. Під час експериментального навчання наближений характер цих розв'язків до цих завдань був зрозумілим учням експериментальних класів (на відміну від учнів контрольних класів). Вони наводили відповіді із використанням знака «≈» або у вигляді подвійних нерівностей. Учні контрольних класів не сприймали наближений характер відповідей, отриманих за графіком, або графічно, хоча про це і йдеться у діючих підручниках Вони «підганяли» їх під відповіді, отримані алгебраїчно, і, як наслідок, отримували результати з двома-трьома десятковими знаками при одиничному відрізку в одну клітинку. Окрім вищевказаних прикладів із чинних підручників, учням доцільно пропонувати задачі та завдання. Під час їх розв'язування доцільним виявилося використання ІКТ. За допомогою ІКТ швидше будуються графіки функцій. Це дозволяє урізноманітнювати пропоновані завдання, зосереджувати увагу учнів на питаннях, пов'язаних безпосереднього із точністю наближених значень.

Ознайомленням з навчальним матеріалом 8 класу, який передбачено чиною програмою з математики та пропонованою методикою, завершився другий етап вивчення НО. Його результатами є перелік знань, умінь та навичок, якими мали оволодіти учні протягом навчання у 7–8-х класах.

Зокрема, в учнів були сформовані:

• поняття про основні джерела отримання наближених значень та форми їх запису; навички взаємопереходу між різними відомими їм формами запису наближених значень, в тому числі умовними рівностями;

• уявлення про точність та відносну точність наближених значень, а також їх окремі випадки: абсолютну та відносну похибки; учні мають опановувати навичками їх знаходження, розпізнання, порівняння та взаємопереходу від кількісних числових характеристик до якісних і навпаки;

• вміння підносити наближені значення до степеня з натуральним та цілим показником, а також добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень.

Сформованість в учнів вказаних компетенцій надає можливість переходу до завершального третього етапу, який за пропонованою методикою має розпочатись у 9 класі.

2.2.3. Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 9 класу

Навчальний матеріал 9 класу має підсумовуючий характер: його опануванням завершується базова математична підготовка учнів. Рівень сформованих в учнів компетентностей має бути достатнім для подальшої професійної чи освітньої самореалізації учнів.

На відміну від перших двох етапів навчальний матеріал, передбачений чинною програмою, містить не лише методичні та змістові передумови для педагогічно

виправданого вивчення відомостей з НО та розв'язування відповідних завдань, але й певний навчальний матеріал з НО у явному вигляді, тобто опанування якого заплановано чинною програмою.

Згідно з діючою програмою першою темою 9 класу є тема «Нерівності». Під час її вивчення (зокрема, питань «Основні властивості числових нерівностей. Почленне додавання і множення нерівностей. Застосування числових нерівностей для оцінювання значення виразу») обґрунтовуються усі, вивчені протягом попередніх двох етапів, дії над наближеними значеннями. Відповідний навчальний матеріал вдало представлено у діючих підручниках, де теоретичні міркування доповнені практичними завданнями. Одні з них спрямовані на формування відповідних формально-оперативних, в інших – акцент робиться на наближеному характері даних, що задіяні у задачах. Наведемо приклади цих задач.

Задача. Відомо, що $-2 < c < 5$. Оцініть значення виразу: а) $1{,}5c - 3$; б) $-c$; в) $1{,}5 - 3c$.

Задача. Оцініть довжину середньої лінії трапеції з основами a та b, якщо $16{,}5 < a < 16{,}6$ та $7{,}3 < b < 7{,}4$.

Задачі другого виду володіють більшими дидактичними та розвиваючими можливостями. Під час експериментального навчання було з'ясовано, що вони, порівняно із задачами першого виду, викликали більшій інтерес в учнів експериментальних класів. Володіння учнями уявленнями про наближений характер результатів практичних вимірювань, десяткових наближень дійсних чисел тощо, дозволило їм глибше зрозуміти умови запропонованих задач. Таким чином їх увага та навчальні зусилля сконцентровувались безпосередньо на виконанні алгебраїчних дій, а також усвідомленні та коректному записі остаточних відповідей.

У контрольних класах спостерігалась інша ситуація. Володіючи уявленнями лише про теоретичні вимірювання, учні не розуміли змісту умови запропонованих задач та не завжди коректно інтерпретувати остаточну відповідь. Водночас, виконуючи формально-оперативні дії з розв'язування задач першого типу, вони діяли на такому самому рівні, як і учні експериментальних класів. Такі результати спостережень підтверджують необхідність ведення пропедевтичної роботи з НО протягом 5–8-х класів, яка передбачається пропонованою нами методикою.

Під час експериментального навчання найбільшого дидактичного ефекту було досягнуто, коли учні розв'язували не лише обидва види задач, але і спеціально підібрані задачі з геометрії. Їх розв'язування мало на меті формування компетентностей з геометрії, що передбачені програмою, і водночас удосконалення умінь учнів виконувати дії над наближеними значеннями.

Першою програмовою темою з геометрії є тема «Розв'язування трикутників». Наведемо приклад однієї із задач, яка пропонувалась учням для розв'язування під час її вивчення.

Задача. Частина трикутника пошкоджена (див. рис. 18). Обчисліть площу трикутника, яку він мав до пошкодження, виконавши необхідні вимірювання. Обчислити відносну точність отриманого результату.

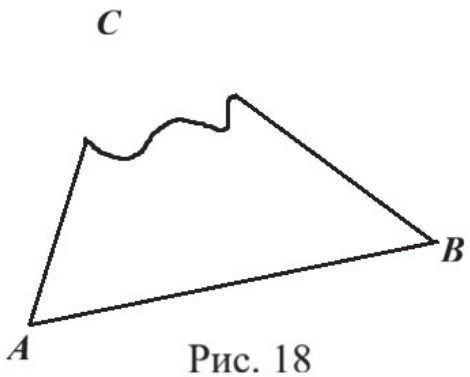


Рис. 18

Коментарі до розв'язування задачі. Під час експериментального навчання учні, як правило, висували такі пропозиції, щодо розв'язування задачі. Перша – виміряти ті кути та сторону, що «збереглися». Обчислити площу трикутника за двома сторонами і кутом між ними, попередньо визначивши

розміри необхідних для цього елементів за допомогою теореми синусів. Друга – добудувати «пошкоджену» частину трикутника, після чого виміряти довжини всіх сторін та використати для обчислення площі трикутника формулу Герона. Перша пропозиція була обрана для практичної реалізації в урочний час. Друга – запропонована для домашнього виконання. На наступному уроці точність, отриманих таким чином результатів, порівнюється та робляться відповідні висновки.

Наведемо орієнтовний хід міркувань учнів в обох випадках.

Перший випадок. Внаслідок позначень та вимірювань учнями були отримані такі результати $\angle A \approx 34^{\circ}$, $\angle B \approx 76^{\circ}$, 5,1 см $\leq AB \leq$ 5,2 см. Робочою формулою для обчислення площі трикутника учні обрали формулу

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sin\, A,$$

де пошкоджену сторону AC знаходять за теоремою синусів

$$\frac{AB}{\text{si}} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \text{si}}{\sin C},$$

тобто $S = \frac{AB^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2\, sin}$; а $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$, $\angle C \approx 70^0$. За допомогою таблиць Брадіса учні визначають межі синусів кутів трикутника: 0,5592 $\leq \sin A \leq$ 0,5736; 0,9703 $\leq \sin B \leq$ 0,9744; 0,9397 $\leq \sin C \leq$ 0,9455 після чого виконують дії для розв'язування задачі:

$$\frac{1}{5} \cdot 5{,}1 \cdot \frac{5{,}1 \cdot 0{,}9703}{0{,}9455} \cdot 0{,}5592 \leq S \leq \frac{1}{5} \cdot 5{,}2 \cdot \frac{5{,}2 \cdot 0{,}9744}{0{,}9397} \cdot 0{,}5736,$$

$$7{,}4631475 \ldots \text{ см}^2 \leq S \leq 8{,}0414412 \ldots \text{ см}^2,$$

$$7{,}4 \text{ см}^2 \leq S \leq 8{,}1 \text{ см}^2.$$

Відповідь: $S = 7{,}75 \pm 0{,}35$ см^2.

Другий випадок. Після добудов, позначень та вимірювань учнями були отримані такі довжини сторін: 5,1 см $\leq AB \leq$ 5,2 см; 5,2 $\leq AC \leq$ 5,3; 3,0 $\leq BC \leq$ 3,1. Визначивши межі півпериметра (6,65 $\leq p \leq$ 6,80*)* та відповідних різниць півпериметра і довжин сторін

$(1{,}45 \le p - AB \le 1{,}70;\ 3{,}55 \le p - BC \le 3{,}80;\ 1{,}35 \le p - AC \le 1{,}60)$ підставляємо отримані значення у формулу Герона:

$$\sqrt{6{,}65 \cdot 1{,}45 \cdot 3{,}55 \cdot 1{,}35} \le S \le \sqrt{6{,}80 \cdot 1{,}70 \cdot 3{,}80 \cdot 1{,}60}$$

$$6{,}7979174 \ldots \text{ см}^2 \le S \le 8{,}3836030 \ldots \text{ см}^2$$

$$6{,}7 \text{ см}^2 \le S \le 8{,}4 \text{ см}^2$$

Відповідь: $S = 7{,}75 \pm 0{,}85 \text{ см}^2 = 7{,}75 \pm 11{,}26\ \%$.

Порівнюючи відносну точність отриманих результатів спостерігаємо, що у другому випадку вона майже втричі більша. Увагу учнів доцільно зосередити на причинах такого погіршення точності. Воно пов'язане з тим, що у другому випадку до похибок вимірювання додались ще і похибки, пов'язані із виконанням добудов. Під час вивчення цієї самої теми учнів доцільно залучити до виконання практичної роботи. Кожен з них отримував план-схему одного з районів міста та текст задачі. Її розв'язування передбачало побудову відповідної математичної моделі, виконання додаткових вимірювань за допомогою засобів вимірювання (транспортира, лінійки тощо), використання відомих тригонометричних тотожностей та чотиризначних таблиць Брадіса, а також перевірку одержаної ними відповіді за допомогою електронної карти. Наведемо приклад такої задачі.

Задача. Пішохід знаходиться на розі вулиць Тростянецької та Горлівської. Який шлях він має подолати пішки, якщо йому найшвидше потрібно дістатися до станції метро «Харківська» (див. рис. 19)? Скільки часу він на це витратить, йдучи зі швидкістю 5–6 км/год?



Рис. 19

Попередньо було з'ясовано (за показниками пристроїв автомобіля),

що частина вулиці Тростянецької (між вулицями Горлівською та Ревуцького) має довжину 750–800 м, а частина вулиці Ревуцького (між вулицями Тростянецькою та М. Бажана) має довжину1400–1450 м.

Коментарі до розв'язування задачі. Увагу учнів слід зосередити на вимозі «найшвидше дістатися» до об'єкта, тому наближеною траєкторією руху необхідно обрати пряму. Наближеність траєкторії пов'язана із неможливістю руху крізь будівлі, які мають місце на шляху пішохода.

Аналіз умови задачі, зокрема виділення відомих даних, приводить до створення її математичної моделі (трикутника) та відповідного внутрішньомодельного розв'язування: дві сторони трикутника відомі за умовою (1,40 км ≤ AC ≤ 1,45 км; 0,75 км ≤ BC ≤ 0,80 км*)*; кут між ними можна виміряти за допомогою транспортира ($\angle C \approx 111°$); а невідому сторону трикутника знайти за теоремою косинусів. Числове значення cos$C$ є від'ємним. Це створює проблемну ситуацію: відомі учням правила виконання дії другого ступеня стосується лише для додатних чисел. Її виникнення слугує мотивацією для ознайомлення учнів із правилами виконання дій другого ступеня над довільними числами, що відбудеться у курсі алгебри. На цьому самому етапі для розв'язання задачі необхідно виконати ряд перетворень:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(180° - \alpha)$, де $\alpha = 66°$,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos \alpha$,

де 0,3907 < cosα <0,4067.

Тоді

$$\sqrt{1{,}40^2 + 0{,}75^2 + 2 \cdot 1{,}40 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3907} < AB < \sqrt{1{,}45^2 + 0{,}80^2 + 2 \cdot 1{,}45 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}4067},$$

1,828379… < AB < 1,919907… .

Враховуючи, що $t = \frac{S}{v} = \frac{AB}{v}$, а 5 км/год $\leq V \leq$ 6 км/год, маємо

$0{,}3047\ldots$ год $\leq t \leq 0{,}3839\ldots$ год $\Rightarrow$ 18 хв $\leq t \leq$ 24 хв.

Відповідь. Пішохід має подолати шлях 1,82–1,92 *км* і витратити для цього 18–24 хв.

Під час експериментального навчання учні, інтерпретувавши отриманий ними результат відповідно до умови задачі, виявили бажання перевірити його правильність. За допомогою електронної карти міста Києва вони визначили наближене значення шуканої відстані, що в межах математичної моделі позначена відрізком *AB*.

Отриманий результат надав можливість зробити висновок про правильність і створеної ними математичної моделі, і внутрішньо модельного розв'язування: 1,82 км < 1,84 км < 1,92 км.

Розв'язування учнями завдань, що є подібними до вищенаведених спрямоване не лише на удосконалення навичок виконання дій над наближеними значеннями, а і відповідає вимогам чинної програми з математики, зокрема вимозі застосовувати алгоритми розв'язування трикутників до розв'язування прикладних задач.

Як вже вказувалось, на початку 9 класу, за чинною програмою учні ознайомлюються із темою «Нерівності». Під час вивчення в її межах основних властивостей нерівностей слід не лише обґрунтувати раніше вивчені правила виконання дій над наближеними значеннями, але і доповнити їх. Зокрема для логічної завершеності змістової лінії НО, необхідно розглянути питання про множення і ділення наближених значень, межі яких містять не лише додатні числа. Навчальну діяльність учнів по формуванню відповідних уявлень доцільно організувати у вигляді індуктивного дослідження. В його основу були покладені ідеї С. М. Чашечникова та інших. Змістовими передумовами навчально-дослідницької діяльності учнів

послужило їх ознайомлення з поняттям про «Об'єднання та переріз числових проміжків», а психолого-педагогічними – відповідний рівень розвитку абстрактно-теоретичного мислення підлітків, який дозволяє їм вести міркування без «прив'язки» до конкретної задачі або конкретних величин.

Учням доцільно запропонувати два загальні випадки. Перший – межі кожного із наближених значень мають однакові знаки. Другий – межі хоча б одного із наближених значень мають різні знаки. Зупинимось детальніше на цих випадках, навівши приклади розв'язувань відповідних завдань.

Задача. Знайдіть межі значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо $1{,}0 \le x \le 5{,}1$ та $-14{,}7 \le y \le -5{,}3$.

Коментарі до розв'язування задачі. Серед указаних наближених значень x та y обираємо ті, межами яких є від'ємні числа. У даній задачі – це y. Множимо відповідну подвійну нерівність на (–1): $5{,}3 \le -y \le 14{,}7$. Виконуємо ділення наближених значень x на (–y) за відомим правилом $0{,}06 \le -\frac{x}{y} \le 0{,}97$. Множимо отриману подвійну нерівність на (–1).

Відповідь. $-0{,}97 \le \frac{x}{y} \le -0{,}06$.

Задача. Знайдіть межі значення виразу $\frac{x}{y}$, якщо $-5{,}1 \le x \le 1{,}0$ та $5{,}3 \le y \le 14{,}7$.

Коментарі до розв'язування задачі. Оберемо ту з нерівностей, яка містить межі різних знаків: $-5{,}1 \le x \le 1{,}0$. Розіб'ємо множину значень, які їй задовольняють, на три підмножини: від'ємні, нульові та додатні (див. рис. 20).



Рис. 20

Розглянемо окремо кожен із трьох випадків і об'єднаємо отримані розв'язки.

1. Нехай $-5{,}1 \le x < 0$ та $5{,}3 \le y < 14{,}7$. Тоді множимо першу нерівність на (–1): $0 < -x \le 5{,}1$. За відомим правилом знаходимо межі частки $\left(-\frac{x}{y}\right)$: $0 < -\frac{x}{y} \le 0{,}97$ та множимо отриману подвійну нерівність на (–1): $\mathbf{-0{,}97 \le \frac{x}{y} < 0}$.

2. Нехай $x = 0$ та $5{,}3 \le y < 14{,}7$, тоді $\frac{x}{y} = 0$.

3. Нехай $0 < x \le 1{,}0$ та $5{,}3 \le y < 14{,}7$. Тоді, за відомим правилом, знаходимо межі частки $\frac{x}{y}$: $\mathbf{0 < \frac{x}{y} \le 0{,}19}$.

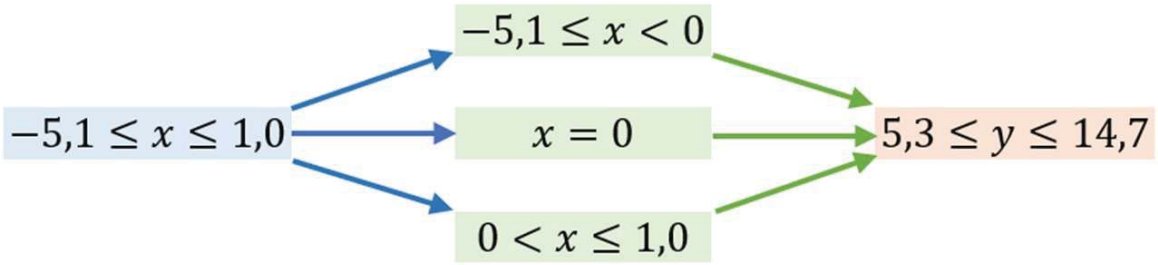


Рис. 21

Множиною розв'язків є об'єднання значень $\frac{x}{y}$, що були отримані в кожному з трьох випадків (див. рис. 22).



Рис. 22

Відповідь. $-0{,}97 \le \frac{x}{y} \le 0{,}19$.

Задача. Знайдіть межі значення виразу xy, якщо $-5{,}1 \le x \le 1{,}0$ та $-14{,}7 \le y \le 5{,}3$.

Коментарі до розв'язування задачі. Розіб'ємо множину значень кожної з нерівностей на підмножини, аналогічно до попередньої задачі: від'ємні, нульові та додатні. Для кожного з трьох випадків значень x можна підібрати по три випадки значень y. Розглянемо окремо кожен із дев'яти випадків і об'єднаємо отримані розв'язки.

1. Нехай $-5{,}1 \le x < 0$ та $-14{,}7 \le y < 0$. Тоді помножимо обидві нерівності на (-1): $0 < -x \le 5{,}1$; $0 < -y \le 14{,}7$ та обчислимо межі добутку $(-x)\cdot(-y) = xy$ за відомим правилом $\mathbf{0 < xy \le 74{,}97}$.

2. Нехай $-5{,}1 \le x < 0$ та $y = 0$, тоді $\mathbf{xy = 0}$.

3. Нехай $-5{,}1 \le x < 0$ та $0 < y \le 5{,}3$. Тоді множимо першу нерівність на (-1): $0 < -x \le 5{,}1$.

За відомим правилом знаходимо межі добутку $(-x)\cdot y$: $0 < -xy \le 27{,}03$ та множимо отриману подвійну нерівність на (-1): $\mathbf{-27{,}03 \le xy < 0}$.

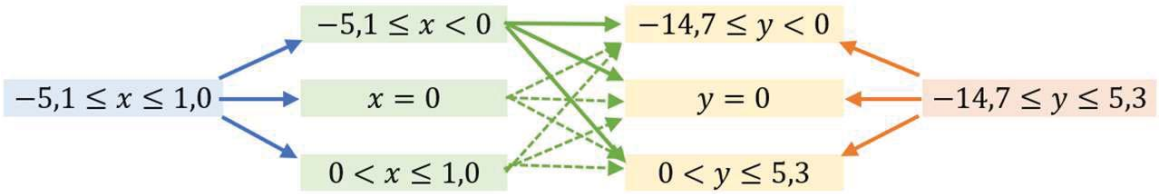


Рис. 23

4. Нехай $x = 0$ та $-14{,}7 \le y < 0$, тоді $\mathbf{xy = 0}$.

5. Нехай $x = 0$ та $y = 0$, тоді $\mathbf{xy = 0}$.

6. Нехай $x = 0$ та $0 < y \le 5{,}3$, тоді $\mathbf{xy = 0}$.

7. Нехай $0 < x \le 1{,}0$ та $-14{,}7 \le y < 0$. Тоді множимо другу нерівність на (-1): $0 < -y \le 14{,}7$. За відомим правилом знаходимо межі добутку $x\cdot(-y)$: $0 < -xy \le 14{,}7$ та множимо отриману подвійну нерівність на (-1): $\mathbf{-14{,}7 \le xy < 0}$.

8. Нехай $0 < x \le 1{,}0$ та $y = 0$, тоді $\mathbf{xy = 0.}$

9. Нехай $0 < x \le 1{,}0$ та $0 < y \le 5{,}3$, тоді $\mathbf{0 < xy \le 5{,}3.}$

Множиною розв’язків є об’єднання значень *ху,* які отримали в усіх дев’яти випадках (див. рис. 24).

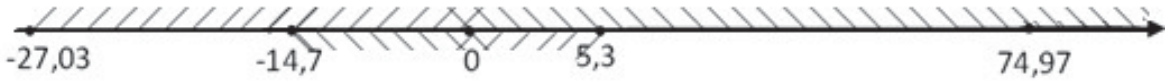


Рис. 24

Відповідь: $-27{,}03 \le xy \le 74{,}97$.

Під час експериментального навчання було з’ясовано, що сприйняття першого випадку не викликає особливих труднощів в учнів. Тому вміннями користуватися алгоритмом перетворення від’ємних меж наближених значень у додатні має оволодіти переважна більшість учнів (при цьому степінь допомоги вчителя учням – індивідуальна). Сприйняття учнями другого випадку викликає певні труднощі. Тому з ним слід ознайомити лише учнів із середнім та високий рівнем навченості. В ШКМ основної школи доцільно розглядати другий випадок не в повному обсязі. Зокрема дію ділення необхідно вводити лише для тих комбінацій, де межі дільника описуються числами однакових знаків.

Розв’язування прикладів, аналогічних до вищенаведених, сприяє узагальненню уявлень учнів про виконання дій над наближеними значеннями та удосконаленню відповідних навичок. Воно є корисним і у контексті вивчення традиційного програмового матеріалу. Зокрема відбувається подальший розвиток уявлень про застосування нерівностей для оцінки значень виразу, пропедевтика розв’язування сукупностей нерівностей, а також актуалізації сформованих раніше комбінаторних уявлень учнів.

Пізніше, під час активного застосування методу меж до розв’язування практичних та прикладних задач, не доцільно

проводити такі громіздкі міркування для виконання дій над наближеними значеннями. Вони відволікають увагу учнів від суті задач та вимагають значних витрат навчального часу.

Тому до уваги учнів слід довести узагальнені правила множення та ділення наближених значень, які були запропоновані доктором педагогічних наук Г. О. Михаліним під час обговорення пропонованої методики вивчення НО.

Множення наближених значень

1. Записати наближені значення $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ у вигляді подвійних нерівностей $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$.
2. Обчислити добутки: ac, ad, bc, bd.
3. Нехай A – найбільший із добутків ac, ad, bc, bd, а B – найменший.

Тоді $B \leq xy \leq A$.

Ділення наближених значень

1. Записати наближені значення $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ у вигляді подвійних нерівностей $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, де $0 \notin [c; d]$.
2. Обчислити частки $\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}$.
3. Нехай A – найбільша із часток $\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}$, а B – найменша.

Тоді $B \leq \frac{x}{y} \leq A$.

Під час опанування учнями темою «Нерівності» за пропонованою методикою має відбутись їх ознайомлення з формою запису наближених значень із використанням знака модуля. Змістові та методичні передумови для цього з'являються під час розгляду питань, які в чинних підручниках носять назву «Нерівності, що містять модулі» або «Нерівності з однією змінною. Числові проміжки». У них авторами акцентується увага на рівносильності

нерівностей, на кшталт, $|x| \leq 3$ та $-3 \leq x \leq 3$. У цей час доцільно ініціювати висунення учнями припущення, яке може звучати так: «Відомо, що наближені значення можна записувати у вигляді подвійної нерівності. Можливо їх можна записувати і з використанням знака модуля?». Вказана гіпотеза виникає в учнів внаслідок співставлень та спостережень за перетвореннями, які виконувались ними з вищевказаними нерівностями.

Учням із високим рівнем навченості було запропоновано самостійно, використовуючи вивчені раніше властивості числових нерівностей, дослідити правильність чи хибність виказаного припущення. Учні із середнім та нижче середнього рівня навченості виконували відповідні дії разом з учителем.

Після отримання остаточного висновку увагу учнів необхідно зосередити на доповненні відповідної логіко-дидактичної схеми ще однією формою запису наближених значень.

Навички виконувати взаємоперехід між різними формами запису наближених значень доцільно формувати під час розв'язування задач, що наведені у чинних підручниках.

Ознайомлення учнів з формою запису наближених значень за допомогою знака модуля надає можливість сформувати означення поняття точності наближених значень. Ознайомлення з ним сприяє логічній завершеності формування в учнів 9 класу поняття про числові характеристики наближених значень.

Під час експериментального навчання було з'ясовано, що запис наближених значень із використанням знаку модуля краще не вживати у контексті прикладних задач чи задач практичного змісту. Учні лише мають розуміти зміст наведеного запису та вміти його опрацьовувати.

Наступними темами, з якими учні ознайомлюються згідно чинної програми в курсі алгебри є «Квадратична функція», а в курсі геометрії «Правильні многокутники», «Декартові координати на площині» та «Геометричні перетворення». Під час їх вивчення учням доцільно запропонувати задачі на застосування вмінь знаходити числові характеристики наближених значень.

Таблиця 6

Орієнтовний хід міркувань учнів

Можливі міркування учнів	Символьне відображення міркувань учнів
Згадаємо, які існують форми запису наближених значень у вигляді подвійних нерівностей	$НМ \le x \le ВМ$ $a - h \le x \le h + a$
Нам необхідно, щоб з обох сторін подвійної нерівності були протилежні числа. *На роль такого числа у нас два претенденти* ***a*** *і* ***h****.* *Розглянемо ці випадки*	
a *в обох частинах подвійної нерівності містяться з однаковим знаком, що нас не влаштовує*	$a \le \ldots \le a$
h *в обох частинах подвійної нерівності міститься з різними знаками, що нас цілком влаштовує*	$-h \le \ldots \le h$
Позбавимось від зайвих складових, які міститься у обох частинах подвійної нерівності	$a - h \le x \le h + a$ $-$ $a = a = a$ $-h \le x - a \le h$
Виконаємо остаточні перетворення	$\boldsymbol{\lvert x - a \rvert \le h}$

Розв’язування завдань, які передбачають ведення графічних міркувань, доцільно проводити із використання ІКТ.

Далі в курсі алгебри 9 класу вивчається тема «Елементи прикладної математики». Під час опанування навчальним матеріалом, що в ній представлений, необхідно доповнити уявлення учнів про форми запису наближених значень та методи НО. Зокрема, учні мають ознайомитись із записом наближених значень правильними цифрами (поступове формування попередніх уявлень про нього відбувалося починаючи з 5 класу). Означення правильних цифр наближеного значення, приклади переходу від запису наближених значень правильними цифрами до запису у вигляді умовної рівності вдало представлені в чинних підручниках з алгебри для 9 класу. Нагадаємо, що у методиці навчання математики існують поняття про правильні цифри у широкому розумінні, а також у вузькому розумінні. Згідно них правильною цифрою називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка не перевищує одиниці цього розряду (у широкому розумінні) або половини одиниці цього розряду (у вузькому розумінні). Наприклад, якщо температура плавлення міді 1084,5 °С, то у широкому розумінні правильних цифр її можна записати у вигляді (1084,5 ± 0,1) °С, а у вузькому - (1084,5 ± 0,05) °С. Ми вважаємо за доцільне, висвітлювали це питання так, як воно представлено у чинних підручників, тобто керуватись першим означенням.

Під час експериментального навчання виявило ефективність взаємо доповнення навчального матеріалу, який представлено у чинних підручниках, а також доповнення його певними акцентами та методичними зауваженнями. Головним серед них було визначення пріоритетів серед методів НО. Метод меж повинен продовжувати позиціонуватись у якості провідного методу

НО, у тому числі і для наближених значень записаних правильними цифрами. Водночас учні мають отримувати уявлення і про ППЦ як про метод НО, яким керуються під час виконання «невідповідальних» обчислень (термін узято із чинних підручників). Відповідний навчальний матеріал наведено у чинних підручниках з алгебри для 9 класу, а також в окремих підручниках з математики для 6 класу.

Формування умінь, що пов'язані із методом меж, має відбуватись під час виконання практичних завдань. Приклади їх розв'язання наведені у сучасних підручниках. Детальніше їх дослідження виявило необхідність додаткової уваги до певних питань, що пов'язані із записом наближених значень правильним цифрами, а також відсотковими розрахунками, в яких задіяні наближені значення. Зупинимось на них детальніше на прикладі наступних задач.

Задача. Підприємство протягом місяця витрачає приблизно 16 мотків спеціальної мотузки, довжина кожної з яких 100 ± 3 % футів (виробництво Великобританія). Скільки коштів треба запланувати на вказані витрати, якщо 1 м такої мотузки коштує 1,30-1,50 грн? Відомо, що один метр становить приблизно 3,30 футів.

Коментарі до розв'язування задачі. Наближені данні задачі представлені у різних формах. Така подача матеріалу не дивує учнів. Під час власної проєктної діяльності вони неодноразово зустрічались з такою ситуацією. Учні розуміють, що різний запис наближених значень пояснюється різними джерелами отримання відомостей або іншими факторами.

Аналізуючи деякі з наближених значень, зокрема 16 та 3,30, учні приходять до висновку, що вони, можливо, записані правильними цифрами. Зазначене припущення приймається як правильне, тому що повнішої інформації про точність вказаних наближених значень немає. Наближені значення позначають змінними, записують їх у

вигляді подвійних нерівностей та виконують нескладні арифметичні дії.

Особливу увагу учнів слід зосередити на значенні 3,30, тобто на значенні, яке містить наприкінці серед десяткових знаків нуль. Відомо, що під час запису або виконання дій над точними значеннями такі нулі відкидають. Коли ж мова йде про наближені значення – вони обов'язково мають зберігатись, незалежно від обраного методу НО. Вони є правильними цифрами наближеного значення, а відповідно несуть відомості про його точність: $c \approx 3{,}30$; $c = 3{,}30 \pm 0{,}01$. Неправомірне ж відкидання таких нулів спотворює інформацію про точність наближених значень: $c \approx 3{,}30 = 3{,}3$; $c = 3{,}3 \pm 0{,}1$.

Виконавши відповідні арифметичні дії (див. табл. 7), учні інтерпретують отриманий результат у відповідності до питання задачі.

Таблиця 7

Орієнтовний хід міркувань учнів по розв'язанню задачі

Позначення даних задачі	***a*** – кількість мотків, що витрачається; ***b*** – довжина вірьовки у кожному мотку; ***c*** **–** кількість футів в одному метрі; ***d*** – ціна одного метру вірьовки
Запис даних у вигляді подвійних нерівностей	***a*** ≈ 16 шт, тоді припускаємо, що ***a*** = 16 ± 1 шт, тобто 15 шт ≤ ***a*** ≤ 17 шт; ***b*** = 100 ± 3 %, тоді ***b*** = 100 ± 3 футів, тобто 97 футів ≤ ***b*** ≤ 103 футів; ***c*** ≈ 3,30 м, тоді припускаємо, що ***c*** = 3,30 ± 0,01 м, тобто 3,29 м ≤ ***c*** ≤ 3,31 м; 1,30 грн ≤ ***d*** ≤ 1,50 грн
Виконання арифметичних дій	$\frac{15 \cdot 97 \cdot 1{,}30}{3{,}31} \leq \frac{abd}{c} \leq \frac{17 \cdot 103 \cdot 1{,}50}{3{,}29}$, $571{,}45015\ldots \leq \frac{abd}{c} \leq 798{,}32827\ldots$, $571 \leq \frac{abd}{c} \leq 799$

Відповідь: підприємству слід запланувати на вказані витрати 799 грн.

Задача. Світло, розповсюджуючись зі швидкістю приблизно 300 000 км/с, проходить відстань від Сонця до Землі близько 8,3 хв. Обчислити відстань від Землі до Сонця на момент отримання вказаних даних. Перевірити правильність отриманої відповіді, якщо відомо, що вказана відстань протягом року змінюється приблизно від 146 998 000 км до 152 002 000 км.

Коментарі до розв'язування задачі. Проводячи міркування аналогічним чином, як і у попередній задачі, учні зустрічаються з іншою проблемою: який із розрядів у наближеному значенні 300 000 слід вважати розрядом точності?

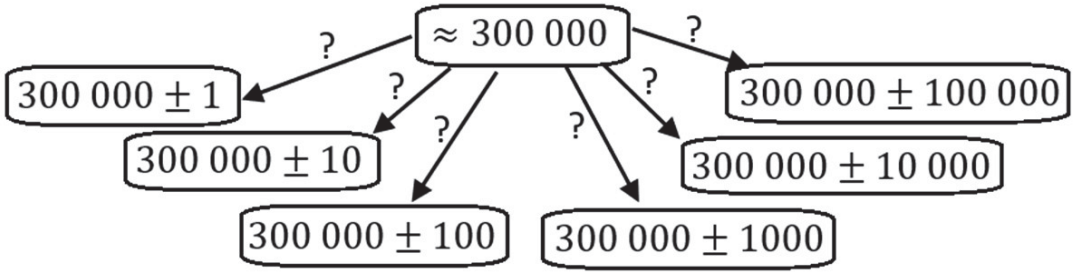


Рис. 25

У методиці навчання математики ця проблема, широко обговорювалась і не знайшла остаточного розв'язання. Наприклад, дослідники минулого пропонували усі такі нулі вважати незначущими цифрами. Сучасні методисти пропонують записувати такі наближені значення у стандартному вигляді. Однак аналіз навчально-методичної літератури та підручників показав, що останнього принципу одні з авторів дотримуються, а інші – ні. У своєму дослідженні під час експериментального навчання ми керувалися думкою про те, що такі випадки потребують додаткового дослідження. Без нього неможливо зробити

більш-менш коректні та обґрунтовані висновки. Так у пропонованій задачі, учням треба дати додаткове завдання знайти у довідниках або інших джерелах відомості (чи хоча б згадки) про швидкість світла. Результатами таких «пошуків» виявилися значення 300 тис. км/с; 299 793 км/с; та деякі інші. Тому відповідну умовну рівність можна записати у вигляді c = (300000 ± 1000) км/с, тобто $299000 \text{ км/с} \leq c \leq 301000 \text{ км/с}$, де c – швидкість розповсюдження світла.

Зрозуміло, що $S = c \cdot t$, де S – відстань від Землі до Сонця, а t – час проходження світла від Землі до Сонця. Одиницями виміру c є км/с, тому t необхідно також виразити у секундах:

t = (8,3 ± 0,1) хв, тобто $8{,}2 \text{ хв} \leq t \leq 8{,}4 \text{ хв}$ або

$492 \text{ с} \leq t \leq 504 \text{ с}$.

Виконавши відповідні обчислення отримуємо $147\,108\,000 \text{ км} \leq S \leq 151\,704\,000 \text{ км}$.

Отримане значення за умовою задачі необхідно порівняти із заданим:

$146\,998\,000 \text{ км} \leq S_1 \leq 152\,002\,000 \text{ км}$.

Числове значення величини S_1, а також данні для обчислення числового значення величини S є результатами певних практичних спостережень та вимірювань. Відомо, що для порівняння результатів вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини слід порівняти інтервали, що їх описують. Якщо ці інтервали перетинаються, то різницю між результатами вважають незначною. Якщо не перетинаються, то різниця між результатами вважається значною, а про результати вимірювань говорять, що вони не збігаються.

Порівнявши $146\,998\,000 \text{ км} \leq S_1 \leq 152\,002\,000 \text{ км}$ та $147\,108\,000 \text{ км} \leq S \leq 151\,704\,000 \text{ км}$ бачимо, що відповідні інтервали перетинаються, а тому робимо висновок про правильність отриманих нами результатів.

Відповідь: $S = (149{,}40 \pm 2{,}31)$ млн км.

Задача. На рис. 27 зображена стовпчаста діаграма розподілу ділянок лижної дистанції у кілометрах. Знайдіть довжину лижної дистанції, яка включає в себе спуски, підйоми та прямолінійні ділянки. Скільки відсотків становить кожна з них від загальної довжини лижної дистанції.

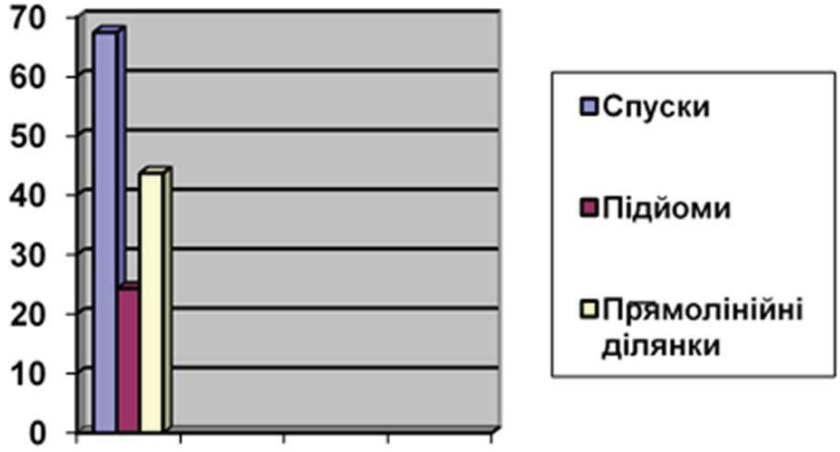


Рис. 26

Коментарі до розв'язування задачі. Учні з різною точністю записували дані задачі, які подано на діаграмі. Одні – з точністю до 5 км, інші – з точністю до 2,5 км. За цією ознакою доцільно об'єднати учнів у дві групи, а результати їх діяльності порівняти.

Для ведення подальших обчислень необхідно ввести такі позначення: x – довжина спусків; y – довжина підйомів; z – довжина прямолінійних ділянок; $S = x + y + z$ – загальна довжина лижної дистанції.

Тоді склавши пропорції та виконавши відповідні обчислення визначаємо, що спуски від довжини загальної лижної дистанції становлять – $\frac{x \cdot 100\%}{S}$, підйоми – $\frac{y \cdot 100\%}{S}$, а прямолінійні ділянки – $\frac{z \cdot 100\%}{S}$.

Наведемо результати обчислень, що були отримані учнями кожної з груп:

• *перша група*: 60 км $\leq x \leq$ 70 км, 20 км $\leq y \leq$ 30 км, 40 км $\leq z \leq$ 50 км, 120 км $\leq S \leq$ 150 км, тоді спуски становлять 40 % - 59 %, підйоми – 13 % - 25 %, а прямолінійні ділянки – 26 % - 42 %;

• *друга група*: 65 км $\leq x \leq$ 70 км, 20 км $\leq y \leq$ 25 км, 40 км $\leq z \leq$ 45 км, 125 км $\leq S \leq$ 140 км, тоді спуски становлять 46 % - 56 %, підйоми – 14 % - 20 %, а прямолінійні ділянки – 28 % - 36 %.

Під час розрахунків, що пов'язані із відсотками, учні «мають звичку» перевіряти правильність отриманих ними відповідей. Зокрема, отримавши вищенаведені результати, вони під час експериментального навчання пропонували з'ясувати чи становитимуть разом усі ділянки лижної дистанції 100 %. Після виконання відповідних дій учні першої групи з'ясували, що усі ділянки лижної дистанції складають 78 % – 126 %, тобто приблизно 102 %, а учні другої групи 88 % – 112 %, тобто приблизно 100 %.

Отримані результати потребують додаткових пояснень. Для учнів першої групи – чому замість очікуваних 100 % ми отримали 102 %? Для учнів другої групи – чому перед очікуваними 100 % ми ставимо знак наближеної рівності? Для відповіді на ці питання з учнями має бути проведена короткочасна бесіда про те, що в результаті виконання арифметичних дій над наближеними значеннями отримуємо також наближені значення. Їх близькість до істинного значення може бути різною. Причому чим «вужчі» межі обираємо для «вхідних» наближених значень, тим ближчим виявляється остаточний результат до істинного.

Змістові передумови для підведення підсумків, щодо вивчення НО в основній школі, є у темі «Початкові відомості з стереометрії», де чинна програма передбачає

розгляд питання «Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру». Під час формування відповідних знань та умінь доцільно запропонувати учням виконання лабораторних робіт або завдань практичного змісту.

Наведемо приклад однієї із задач, яка було покладена в основу згаданої лабораторної роботи.

Задача. Скільки пачок солі поміститься у запропоновану посудину.

Коментарі до розв'язування задачі. Розв'язування задачі доцільно провести у формі лабораторної роботи. Для її виконання учні об'єднуються у гетерогенні групи по 3-4 особи. Задачі, що пропонуються кожній із груп є різними (різні речовини, посудини різної форми), але мають однаковий алгоритм внутрішньомодельного розв'язання, а саме:

1. Визначити об'єм посудини V_1.

2. Визначити об'єм речовини V_2, яка містилась у пакунку.

3. Обчислити частку $\frac{V_1}{V_2}$ та зробити відповідні висновки.

Наприклад надана ємкість на рис. 27 має циліндричну форму, тому її об'єм учні мають знайти за формулою $V_1 = \pi R^2 h$.



Рис. 27

Радіус та висоту циліндра вимірюють. Кожен із розмірів вимірюють по 4-5 рази в різних місцях, після чого записують відповідні наближені значення у вигляді подвійних нерівностей.

Радіус знаходять за непрямими вимірювання: або за допомогою лінійки знаходять діаметр, який потім ділять навпіл; або за допомогою нитки чи паперової стрічки визначають довжину кола, яку потім ділять на 2π. Для обчислення об'єму речовини, яка міститься у пакунку, учні використовують формулу $V_2 = \frac{m}{\rho}$, що відома їм із курсу фізики 7 класу. При цьому значення густини ρ знаходять за таблицею або з інших джерел, а маса m вказана на пакунку у вигляді умовної рівності.

Висновки. Підсумовуючи все сказане, доходимо до таких узагальнених висновків. На кінець 9 класу, тобто по завершенню третього етапу навчання за пропонованою методикою, в учнів має сформуватись логічно завершена система уявлень з НО, а також система відповідних їм умінь і навичок.

***Зокрема учні мають*:**

• володіти поняттям про основні джерела наближених значень, а також про побутові та математичні форми запису наближених значень; вміти виконувати взаємоперехід між різними формами запису наближених значень, аналізувати їх;

• володіти поняттям про кількісні та якісні характеристики наближених значень; вміти знаходити точність та відносну точність наближених значень, виконувати взаємоперехід між ними;

• володіти уявленнями про метод меж як один з методів НО, а також сферу його застосування; вміти виконувати додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з цілим показником та добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень, а також обґрунтовувати їх за допомогою властивостей числових нерівностей;

• уміти застосовувати знання та уміння з НО під час розв'язування практичних та прикладних задач.

Формування уявлень, знань і умінь учнів з НО має відбуватися протягом п'яти років на основі особистісно-діяльнісного спрямування навчального процесу. Використання пропонованої методики навчання НО сприяє покращенню фундаментальної математичної підготовки учнів, виникненню інтересу в учнів до навчання, а також забезпеченню прикладної спрямованості навчання математики.

Створена модель вивчення НО є базовою і передбачає подальше удосконалення, дидактичне наповнення та подальший розвиток у старшій профільній школі. Повний опис запропонованої методики було викладено в навчальному посібнику [63], який був запропонований широкому загалу користувачів.

2.3 Дидактичний матеріал для практичного використання в гімназії

2.3.1 Логіко-дидактичні схеми

Схема 1

Систематизація уявлень учнів про джерела наближених значень

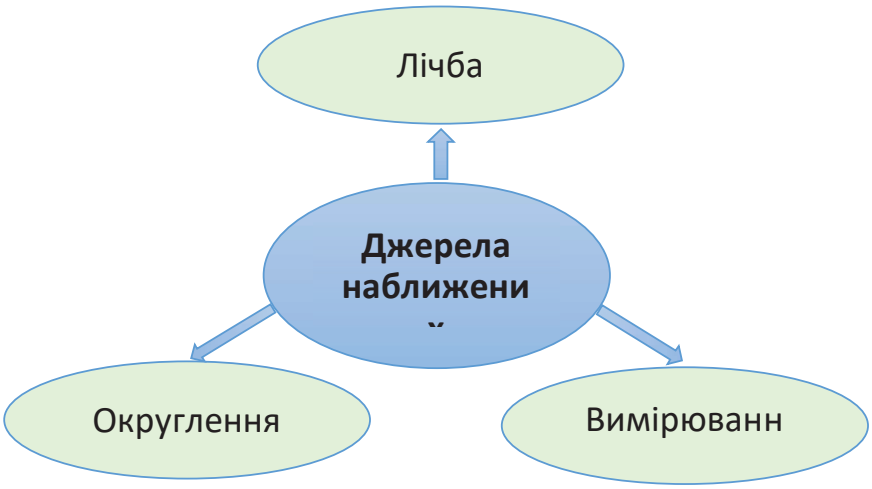


Схема 2

Систематизація уявлень учнів про форми запису наближених значень



Схема 3

Формування уявлень учнів про запис наближених значень у вигляді умовної рівності

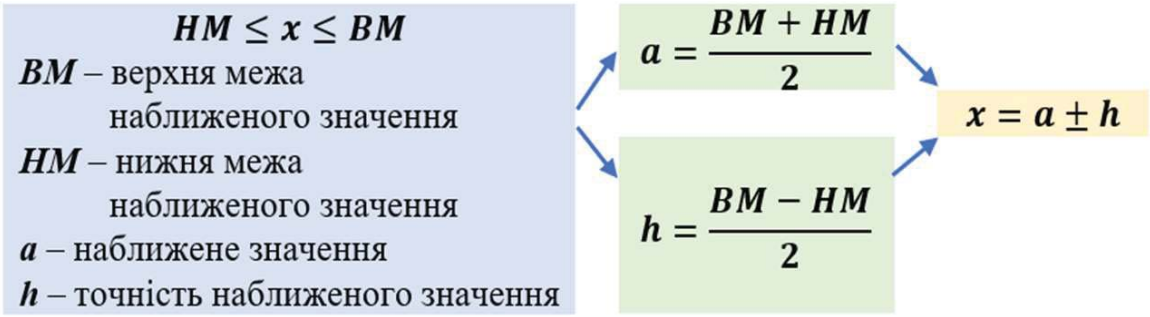


Схема 4

Формування уявлень учнів про правила піднесення наближених значень до степеня з від'ємним показником

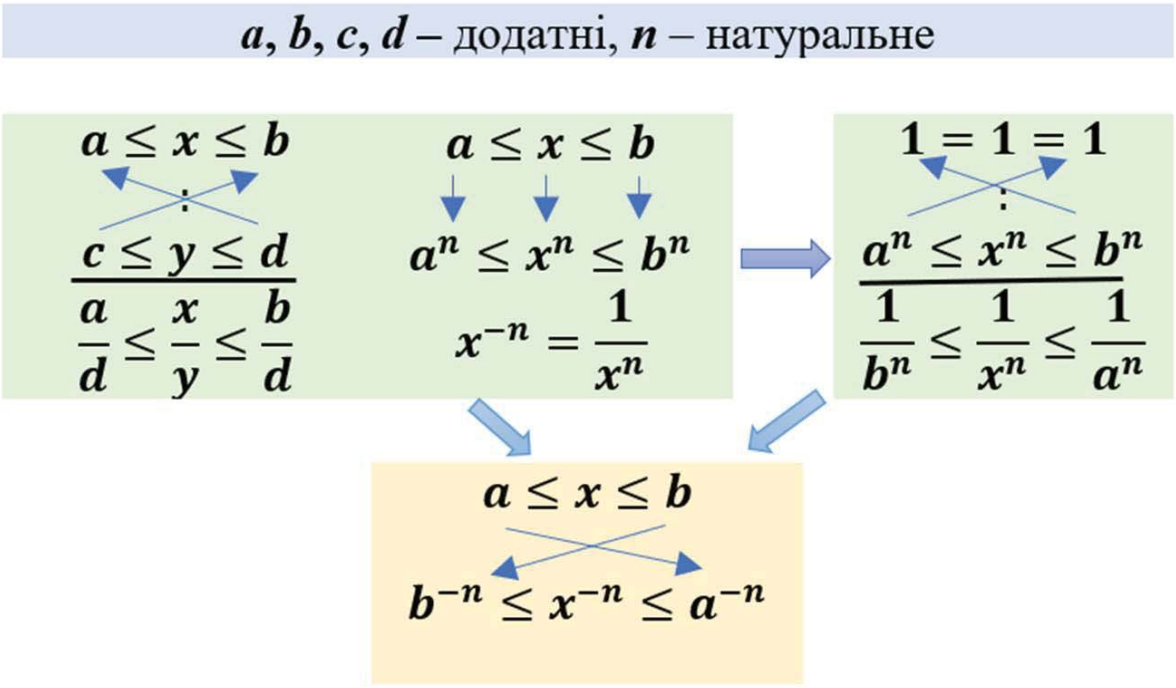


Схема 5

Орієнтири виконання дій над наближеними значеннями

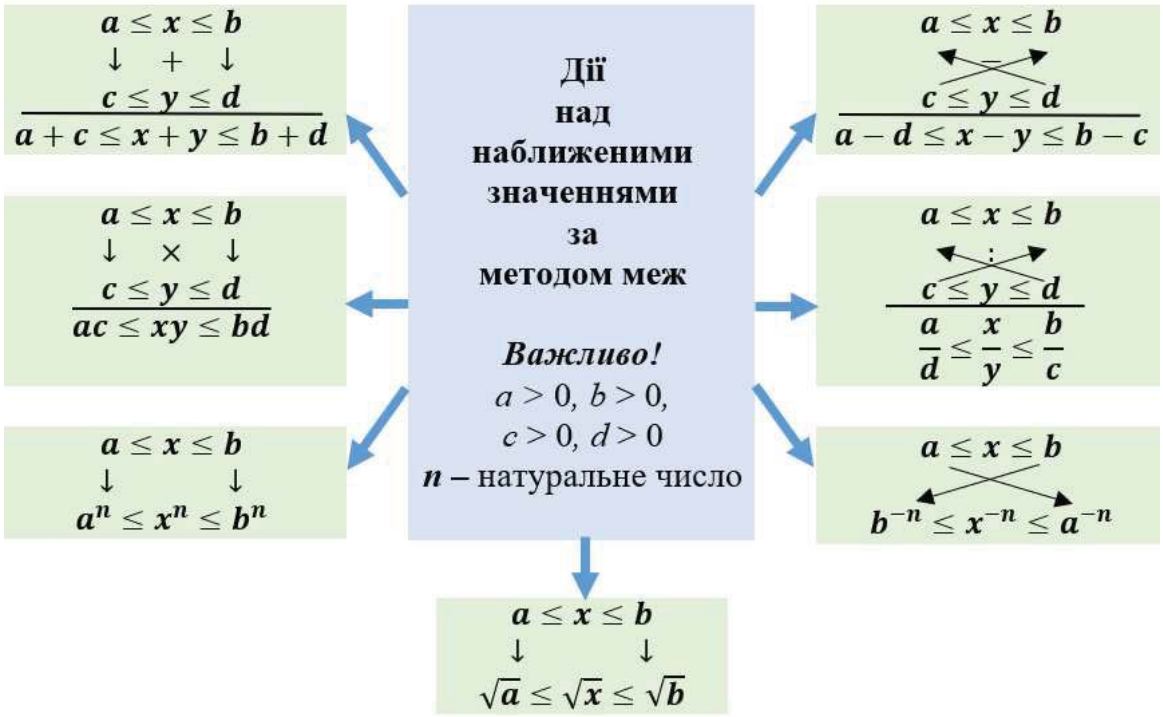


Схема 6

Формування уявлень учнів про правила округлення меж наближених значень.

1. Постановка задачі: на рисунку дано квадрат наближеного числа a. Вказати межі числа a.

$$212{,}85 \le a^2 \le 217{,}15$$
$$14{,}58937969\ldots \le a \le 14{,}73601031\ldots$$
$$\mathbf{? \le a \le ?}$$

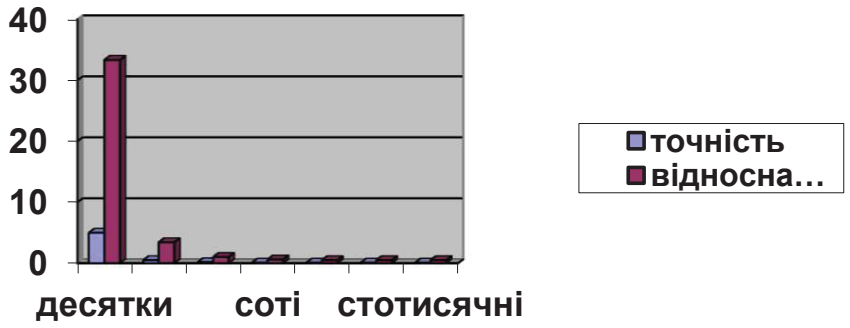
2. Навчально дослідницька робота учнів з елементами обчислювального експерименту.

Таблиця 8

Обчислення меж наближеного значення з різною точністю

Межі наближеного значення	**Точність наближеного значення**	**Відносна точність наближення**
Розряд округлення		
Округлення до десятків		
$10 \le a \le 20$	$a = 15 \pm 5$	$a = 15 \pm 33{,}34\%$
Округлення до одиниць		
$14 \le a \le 15$	$a = 14{,}5 \pm 0{,}5$	$a = 14{,}5 \pm 3{,}45\%$
Округлення до десятих		
$14{,}5 \le a \le 14{,}8$	**$a = 14{,}65 \pm 0{,}15$**	**$a = 14{,}65 \pm 1{,}03\%$**
Округлення до сотих		
$14{,}58 \le a \le 14{,}74$	$a = 14{,}66 \pm 0{,}08$	$a = 14{,}66 \pm 0{,}54\%$
Округлення до тисячних		
$14{,}589 \le a \le 14{,}737$	$a = 14{,}663 \pm 0{,}074$	$a = 14{,}663 \pm 0{,}51\%$
Округлення до десятитисячних		
$14{,}5893 \le a \le 14{,}7361$	$a = 14{,}6627 \pm 0{,}0734$	$a = 14{,}6627 \pm 0{,}51\%$
Округлення до стотисячних		
$14{,}58937 \le a \le 14{,}73602$	$a = 14{,}662695 \pm 0{,}073325$	$a = 14{,}66270 \pm 0{,}51\%$
…		

3. Ілюстрація результатів обчислень за допомогою діаграми.



4. Розв’язування задачі та формулювання відповіді.

$212{,}85 \le a^2 \le 217{,}15$ 14,5
$8937969\ldots \le a \le 14{,}73601031\ldots$
$14{,}5 \le a \le 14{,}8$

2.3.2 Приклади розв’язування доцільних задач на наближені обчислення методом меж

2.3.2.1 Віднімання наближених чисел

1. Маринка витягла із пачки приблизно десяток-півтора серветок. Скільки серветок залишилося в пачці, якщо напис на ній свідчить, що пачка містить приблизно 200-205 серветок?

Обчислювальна таблиця та схема орієнтир для формування уявлень про віднімання наближених значень

	200	201	202	203	204	***205***
10	190	191	192	193	194	195
11	189	190	191	192	193	194
12	188	189	190	191	192	193
13	187	188	189	190	191	192
14	186	187	188	189	190	191
15	185	186	187	188	189	190

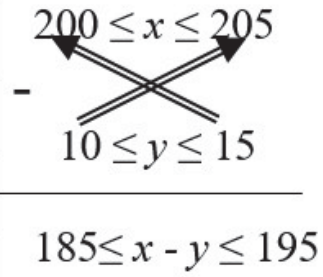


Рис. 28

2. Дідусь нарвав у саду повний кошик яблук. Прийшовши додому він пригостив ними своїх онуків Сашка та Сергійка, а також двох їх друзів. Скільки яблук

залишилось у кошику, якщо в ньому може поміститись приблизно 20-25 яблук.

Обчислювальна таблиця та схема орієнтир для формування уявлень про віднімання наближених та точних значень

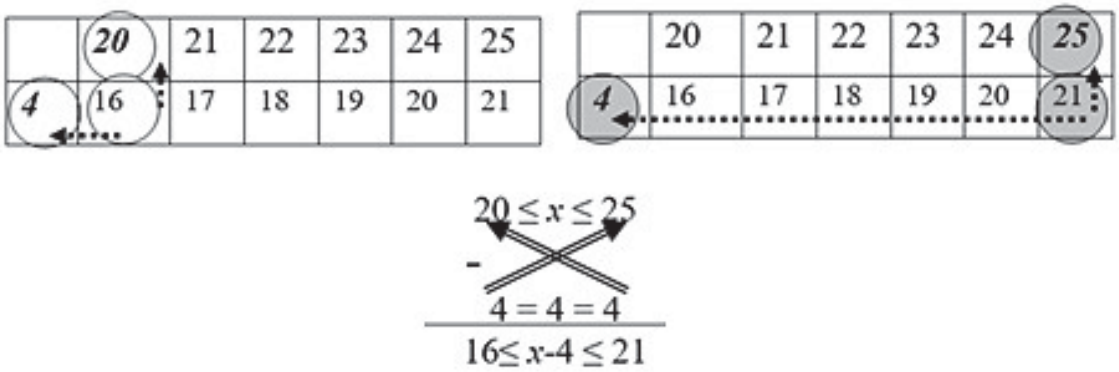


Рис. 29

3. До шкільної бібліотеки надійшло 200 примірників нових підручників. Наступного дня для їх отримання завітало близько 20-25 учнів. Скільки примірників нових підручників залишилось у бібліотеці?

Обчислювальні таблиці та схема-орієнтир для уявлень про віднімання точних та наближених значень

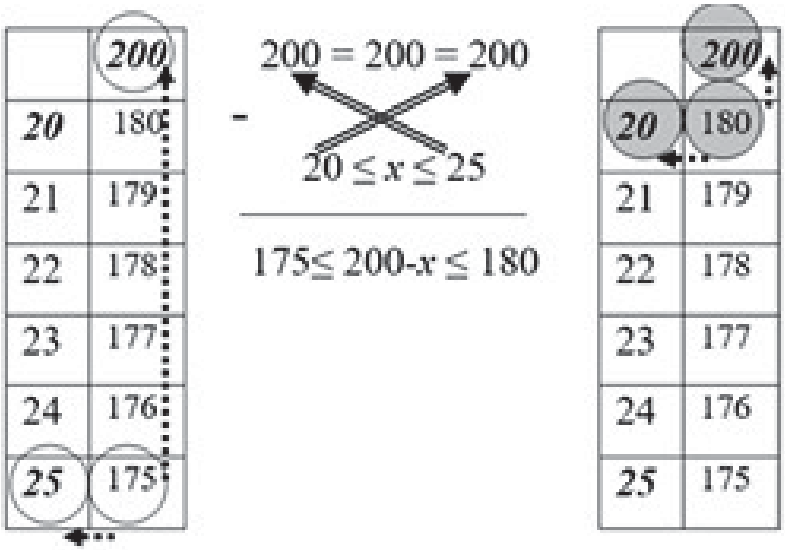


Рис. 30

Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання віднімання наближених значень

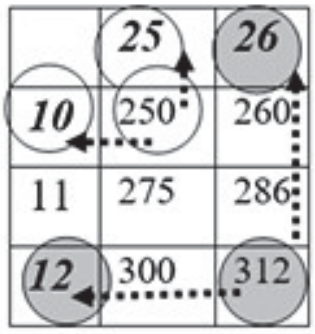
$a \le x \le b$ $c \le y \le d$ $a-d \le x-y \le b-c$	1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей у стовпчик одну під одною. 2. Від нижньої межі зменшуваного відніміть верхню межу від'ємника. Отримане число є нижньою межею різниці. 3. Від верхньої межі зменшуваного відніміть нижню межу від'ємника. Отримане число є верхньою межею різниці. 4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис. 31

2.3.2.2 Множення наближених чисел

1. В одному ящику міститься 25–26 кг яблук. Скільки кг яблук можна перевезти автомобілем, в якому може поміститись 10−12 таких ящиків?

Обчислювальна таблиця та схема-орієнтир для формування уявлень про множення наближених значень



$$25 \le x \le 26$$
$$\times \quad 10 \le y \le 12$$
$$250 \le xy \le 312$$

Рис. 32

2. В одному ящику міститься 25–26 кг яблук. Скільки кг яблук міститься в 20 таких ящиках?

Обчислювальні таблиці та схема-орієнтир для формування уявлень про множення наближених та точних значень

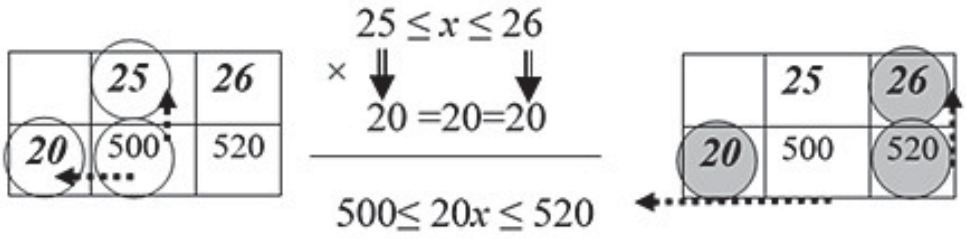


Рис. 33

Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання множення наближених значень

$a \le x \le b$ $\downarrow \quad \times \quad \downarrow$ $c \le y \le d$ $ac \le xy \le bd$	1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей у стовпчик одну під одною. 2. Помножте нижні межі наближених значень. Отримане число є нижньою межею добутку. 3. Помножте верхні межі наближених значень. Отримане число є верхньою межею добутку. 4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис. 34

2.3.2.3 Ділення наближених чисел

1. На пришкільному квітнику розцвіло приблизно 45-60 півоній. Учні вирішили подарувати ці квіти вчителям на свято «Останнього дзвоника». Із скількох квітів їм треба скласти букети, якщо на святковий вечір прийдуть 12-15 учителів?

$$45 \le x \le 60$$
$$: \quad \text{(crossed arrows)}$$
$$12 \le y \le 15$$

$$3 \le x:y \le 5$$

2. Корови на ферм щоденно споживають1980−2090 кг сіна. Скільки сіна з'їдає кожна корова, якщо їх на фермі налічується 110 голів?

$$1980 \le x \le 2090$$
$$: \quad \text{(crossed arrows)}$$
$$110=110=110$$

$$18 \le x:110 \le 19$$

3. Батьки Сергія приготували 30 тістечок, щоб пригостити друзів, які прийдуть привітати його з днем народження. Скільки тістечок дістанеться кожній дитині, якщо їх разом з іменинником очікується 5−6 осіб?

$$30=30=30$$
$$: \quad \text{(crossed arrows)}$$
$$5 \le x \le 6$$

$$5 \le 30:x \le 6$$

Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання ділення наближених значень

$a \le x \le b$ $:$ $c \le y \le d$ $\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$	1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей у стовпчик одну під одною. 2. Нижню межу діленого поділіть на верхню межу дільника. Отримане число є нижньою межею частки. 3. Верхню межу діленого поділіть на нижню межу дільника. Отримане число є верхньою межею частки. 4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис. 35

2.3.3 Добірки задач на наближені обчислення для формування обчислювальних вмінь і навичок

5 клас

Тема 1. Натуральні числа. Геометричні фігури і величини

1. Практичне завдання.

1) Не роблячи графічних поміток, порахувати кількість кругів на рисунках по 5 разів (рис. 36, 37).

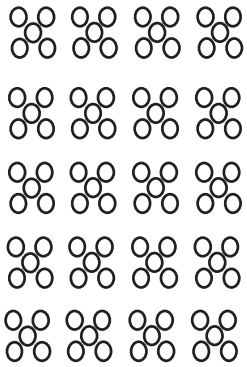


Рис. 36

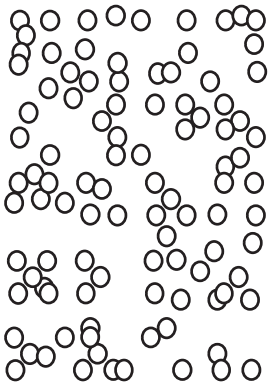


Рис. 37

2) Результати записати у таблицю. В останньому стовпчику таблиці записати відповідь на запитання: «*Скільки кругів намальовано на рисунках*?»

	Спроби підрахунків					Відповідь
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	
Рис. 1						
Рис. 2						

2. Онуки приїхали до бабусі на літні канікули. Вона доручила їм полічити курей, які бігали по подвір'ю. Маринка налічила 22 курки, Микола – 25, Петрик – 26, а дідусь, який вийшов допомогти онукам, налічив 24 курки. Скільки приблизно курей знаходилась на подвір'ї?

3. Дуремар вирішив зробити переоблік у своїй казковій аптеці. Він узяв банку і почав лічити п'явок, що знаходились в ній. Налічив 25 штук. Але вони увесь час рухались і Дуремар вирішив перелічити їх ще раз – отримав 27 п'явок. Після ще кількох спроб він отримав 26 та 24 штуки. Скільки приблизно п'явок у Дуремара, якщо він має 5 однакових банок з п'явками?

4. Використовуючи рисунок 48 запишіть у сантиметрах довжину відрізка *AB*: а) у вигляді подвійної нерівності; б) використовуючи знак наближеної рівності.

З'ясовуючи довжину відрізка AB, Сашко відповів, що вона приблизно дорівнює 5 см, а Сергій – 4 см. Хто із хлопців точніше визначив довжину відрізка *AB* (рис. 38)?

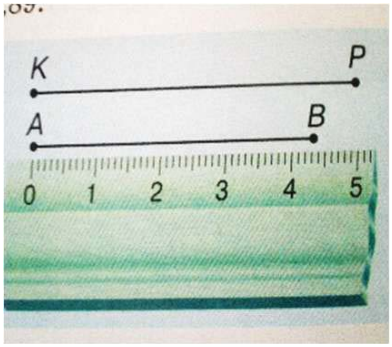


Рис. 38

5. У кошик Червоної Шапочки може поміститись приблизно 10−15 пиріжків. Накресліть у зошити координатний промінь, взявши за одиничний відрізок одну клітинку. Позначте на ньому точки, що відповідають числам 10 і 15. Наведіть приклади того, скільки пиріжків може поміститись у кошик Червоної Шапочки та зробіть відповідні позначення на координатному промені.

6. Марина пішла у крамницю купити хлібину та пакет молока. У крамниці є хліб та молоко різних виробників. Їх ціна різна, зокрема хліб коштує від 1 грн 60 коп. до 2 грн 50

коп., а молоко – від 4 грн 80 коп. до 6 грн 10 коп. Кільки грошей необхідно взяти Марині із собою до крамниці?

7. На початку подорожі за показниками приладів бак автомобіля містив 25-30 л бензину, а по її завершенню – 10-15 л. Скільки бензину було витрачено протягом подорожі?

8. У дендропарку налічується приблизно 300-320 дерев. В результаті санітарної чистки вирубали 18 дерев. Скільки дерев залишилося у дендропарку?

9. Їдальня придбала 17 кг м'яса. Протягом першого дня для приготування страв було використано 4-5 кг м'яса. Скільки м'яса залишилося?

10. Дільничний лікар за годину приймає 3-5 пацієнтів. Скільки пацієнтів може прийняти лікар за робочий день, якщо він триває 3-4 год?

11. Бабуся для консервування придбала 13 кг помідорів. Скільки штук помідорів придбала бабуся, якщо на 1 кг йде приблизно 8-10 штук помідорів?

12. Кухарі шкільної їдальні щоденно випікають 200-300 одиниць хлібобулочних виробів. Усі вони розкуповуються школярами. За підрахунками чергових до їдальні щоденно приходять 150-200 учнів. Скільки приблизно хлібобулочних виробів купляє кожен учень у день?

13. Два класи планують поїхати на екскурсію. Скільки автобусів треба замовити, якщо кожен автобус вміщує 15-20 пасажирів (автобуси різних марок), а у кожному класі навчається по 30 учнів?

14. Мешканці жилого багатоквартирного будинку споживають за місяць 480-672 $м^3$ води. Скільки приблизно води споживають за місяць мешканці однієї квартири, якщо у будинку 96 квартир?

Тема 2. Дробові числа

1. Скільки потрібно ящиків для упакування 223 кг яблук, якщо місткість кожного ящика становить 20 кг?

2. Скільки можна купити зошитів по 55 коп. на 2 грн 65 коп.?

3. 26 учням класу доручено посадити не менше ніж 63 дерева. Скільки дерев повинен посадити кожен учень, якщо вони вирішили посадити дерев порівну?

4. Побудувати квадрат, периметр якого 9,3 см.

5. Розграфити аркуш паперу шириною 85 см на 6 колонок.

6. Відомо, що число 35 є результатом округлення з доповненням. До округлення воно містило один десятковий знак. Вкажіть межі, в яких містилось число 35 до округлення. Відповідь наведіть у вигляді подвійної нерівності.

7. Відомо, що число 35 є результатом округлення з доповненням. Наведіть приклад чому воно могло дорівнювати до округлення: а) з одним десятковим знаком; б) з двома десятковими знаками.

8. У класі навчається 33 учні. Двох з них батьки вдома запитали, скільки учнів навчається в їх класі. Перший школяр відповів: «Близько 30 учнів», а другий: «Десь 40 учнів». Хто із школярів точніше відповів на запитання батьків?

9. Наведіть (у вигляді подвійної нерівності) з недостачею та надлишком значення числа 11,3333... , які мають: а) лише цілу частину; б) один десятковий знак; в) два десяткових знака.

10. Наведіть (у вигляді подвійної нерівності) з недостачею та надлишком значення числа $\frac{21}{13}$, які мають: а) лише цілу частину; б) один десятковий знак; в) два десяткових знака.

11. За перший день туристи пройшли приблизно від 6,3 до 6,5 км. А за другий на кілометр-півтора менше. Скільки приблизно кілометрів пройшли туристи протягом другого дня? Скільки приблизно кілометрів пройшли туристи за два дні?

12. В один з днів змагань яхта рухалась приблизно зі швидкістю від 26,5 до 28,5 км/год. Яку приблизно відстань вона подолала, якщо цього дня змагання тривали приблизно 9-10 год?

6 клас

Тема 1. Подільність чисел

1. Між якими двома найближчими числами, кратними 3, міститься десятковий дріб 12,9? Відповідь наведіть у вигляді подвійної нерівності.

2. Назвіть верхню та нижню межі наближеного значення x. Наведіть приклади наближеного значення x, які кратні 6, якщо$18 \leq x \leq 31$.

3. Позначте на координатному промені межі та кілька прикладів наближеного значення x, що є парними числами, якщо $8 \leq x \leq 13$.

Тема 2. Звичайні дроби

1. Марічка пригощала своїх друзів святковим тортом. Дівчатка з'їли більше ніж чверть, але менше ніж третину торту. А хлопці – більше ніж третину, але менше чим половину торту. Скільки приблизно торту з'їли друзі Марічки?

2. На пришкільній ділянці учні мали посадити 60 кущів. Відомо, що з них п'ятикласники посадили більше ніж $\frac{1}{10}$, але менше ніж $\frac{1}{6}$ частину. А десятикласними більше ніж

половину, але менше чим дві третини з усіх кущів. Скільки кущів залишилося посадити учням інших класів?

3. Яке з десяткових наближень точніше відображає значення дробу $\frac{11}{34}$: 0,3 чи 0,4?

Тема 3. Відношення і пропорції

1. Вимірюючи по карті відстань між Києвом і Тернополем отримали такий наближений результат 7,2 см $\leq$ s $\leq$ 7,3 см. Яка справжня відстань між цими містами, якщо масштаб карти 1 : 5 000 000?

2. Заробітна платня батьків приблизно становить від 2 до 2,5 тис. грн. З неї щомісяця вони 10 % відкладають на літню відпустку. Скільки грошей відкладуть батьки за рік?

3. Руда містить від 60 % до 62 % заліза. Скільки треба взяти руди щоб отримати 70-72 т заліза?

4. Необхідно з'ясувати кількість риби у ставку. Для цього у ставок випустили 100 мічених рибин. Визначить наближену кількість риби у ставку, якщо із 50 рибин, що спіймали, 3 виявились міченими.

5. За тиждень в їдальні витратили приблизно 63,5-64,3 кг цукру. З них 20-25 % було витрачено в понеділок. Скільки приблизно кілограм цукру було витрачено в понеділок?

6. Вимірюючи по карті відстань між Києвом і Тернополем отримали такий наближений результат 7,2 см < s <7,3 см (масштаб карти 1 : 5 000 000). За який час її можна подолати літаком, якщо швидкість літака 400-450 км/год?

Тема 4. Раціональні числа та дії над ними

1. Назвіть та позначте на координатній прямій межі наближеного значення температури січня 2006 року – 5,4 °С < *t* < –2,2 °С. Наведіть приклади вказаного наближеного значення та позначте їх на координатній прямій.

2. У лютому цього року температура повітря коливалась від –10,3 °С до +3,5 °С, а у минулому році вона була на 3 °С – 5 °С нижчою. Яка приблизно температура була у лютому минулого року?

3. Удень порівняно з ранком температура повітря підвищилась на 5 °С. Визначити її, якщо вранці температура була –9 °С – 4 °С.

7 клас. Алгебра

Тема 1. Лінійні рівняння з однією змінною

1. На двох пакетах із цукром вказана їх маса. На одному 1000 ± 10 г, а на другому 1000 ± 15 г. На якому з пакетів точніше вказана вага цукру?

2. Побудуйте відрізок довжиною 15 см. Без застосування вимірювальних засобів («на око») поділіть його на 5 рівних частин. Виміряйте кожну з отриманих частин. Знайдіть для кожної з частин величину отриманої помилки.

3. Визначте межі наближеного значення температури, при яких можна зберігати продукти, що зображені на рис. 39 та рис. 40. Зобразіть їх на координатній прямій. Запишіть наближене значення температури у вигляді подвійної нерівності. Наведіть по два приклади наближеного значення температури, при яких можна зберігати продукти, а при яких не можна.



Рис. 39

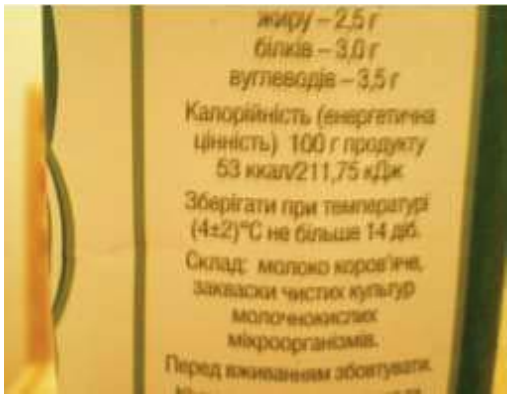


Рис. 40

4. Прочитайте речення: «У пляшці міститься 900 ± 10 г соку». Знайдіть межі наближеного значення. Запишіть наближене значення у вигляді подвійної нерівності. Чи може в пляшці міститись: а) 905 г соку; б) 920 г соку; в) 895 г соку; г) 800 г соку?

5. Господиня придбала пакет із сіллю, на якому був напис «маса нетто (1500 ± 45) г». За рецептом треба відміряти 5 порцій по 300 г, що господині не вдалося. Почавши приготування, вона відміряла лише 4 повні порції по 300 г, а п'ята виявилася неповною – лише 270 г. Поясніть чому так сталося. Чи правильно вказана маса солі на упаковці?

6. Чергові порахували кількість учнів школи, що були присутні на першому уроці. Перший з них отримав результат 729 учнів, другий – 734 учні, третій – 725 учнів, а четвертий і п'ятий по 730 учнів. З якою точністю виконано підрахунки черговими?

Тема 2. Цілі вирази

1. Бак має форму куба. Під час вимірювання з'ясувалось, що його ребро a має довжину

3,20 м < a < 3,25 м. Чи поміститься в бак 24,5 т бензину (густина бензину 710 кг/м^3)?

2. Шланг довжиною 5 м ± 5 % подає для поливу струмінь води довжиною 2,0-2,5 м. Яку територію можна полити цим шлангом, приєднавши його до джерела води посередині городу?

3. Під час підрахунку покупців, які відвідали торгівельний центр протягом тижня, із різних джерел були отримані такі данні: 2780, 2716, 2746, 2768 та 2785 осіб.

У якому випадку відображені відомості відповідають дійсності:

а) 2750 ± 35 осіб; б) 2750 осіб ± 1 %;

в) 2750 осіб ± 1,3 %; г) 2750 осіб ± 35 %.

Тема 3. Функції

За графіком функції необхідно з'ясувати, в якій точці пряма $y = -5x + 4$ перетинає вісь OX. Учнями були отримані такі відповіді: Сашком $x = 0{,}5$; Мариною $x = \frac{3}{4}$; Олексієм $x = 0{,}6$; Яриною $x = 0{,}9$. Хто з учнів найточніше визначив абсцису точки перетину?

Тема 4. Система лінійних рівнянь з двома змінними

1. На прямій, що є графіком рівняння $x + 3y = 4$, взято точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть за графіком ординату цієї точки. Обчисліть абсолютну похибку отриманого результату.

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x + y = 8 \\ 1{,}5x + y = 11 \end{cases}$$

графічним способом та способом підстановки. Обчисліть абсолютну похибку результатів, що отримані графічним способом.

7 клас. Геометрія

Тема 1. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості.

Тема 2. Взаємне розташування прямих на площині

1. Побудуйте суміжні кути *ACD* та *BCD*. Виміряйте їх та знайдіть суму отриманих значень величин. Визначте абсолютну похибку отриманого результату.

2. Побудуйте кут *AOD* = 87° та вертикальний йому кут *BOE*. Виміряйте кут *BOE*. Визначте абсолютну похибку отриманого результату.

3. Побудуйте дві паралельні прямі *a* і *b* та січну *c*, яка утворює із прямою *b* кут 63^0. Виміряйте кути, які січна *c* утворює з прямою *a*. Визначте абсолютну похибку отриманих результатів (рис. 41).

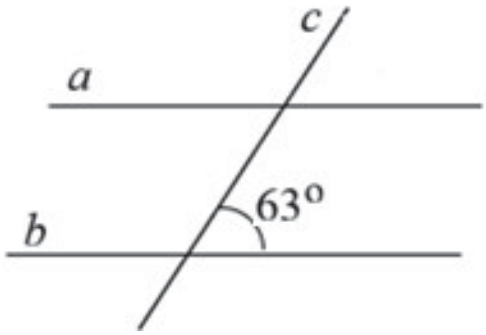


Рис. 41

Тема 3. Трикутники.

Тема 4. Коло і круг. Геометричні побудови

1. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник *ABC* з кутами при основі *C* = *B* = 36°. Побудуйте медіану *AO*. Виміряйте кути *CAO, BAO, AOC* та *AOB*. Обчисліть відносну похибку отриманих результатів.

2. Побудуйте трикутник *ABC* зі сторонами 5,3 см, 6,1 см, 6,1 см та бісектрису кута при вершині *CO*. Виміряйте довжину відрізка *AO*. Обчисліть відносні похибки отриманих результатів.

8 клас. Алгебра

Тема 1. Раціональні вирази

1. Витрати сім'ї на харчування протягом місяця становлять 820 грн ± 10 %. Яку суму коштів слід відкладати на харчування на початку місяця?

2. За документами автомобільний причеп допускає перевезення ваги 550 кг ± 8 %. Один із господарів перевозив на такому причепі вантаж у 600 кг, другий – 575 кг, а третій – 558 кг. У разі поломки причепу, хто із господарів може вимагати відшкодування від виробника або торгівельної організації?

3. Дарина купуючи пакунок із цукром, прочитала на ньому напис: «маса нетто 1000 ± 20 г». З цього вона зробила висновок, що в пакунку міститься 980-1020 г цукру. Її подруга Галина також придбала цукор. Із напису «1000 г ± 3 %» вона зробила висновок, що в пакунку міститься 997-1003 г цукру. Хто із подруг зробив правильний висновок, а хто хибний? Наведіть правильний висновок замість хибного.

Тема 2. Квадратні корені. Дійсні числа

1. Акваріум, запланований до виготовлення у формі куба, повинен мати об'єм 0,3-0,4 м^3. Якими повинні бути його лінійні розміри (висота, ширина, довжина)?

2. Під час реконструкції площа спортивного залу, який має форму квадрата, може змінитись не більше ніж на 1 %. Якими будуть розміри спортивного залу після реконструкції, якщо до реконструкції його площа була 215 м^2?

3. Користуючись графіком функції $y = x^2$ визначте наближене значення $2{,}6^2$. За допомогою мікрокалькулятора обчисліть абсолютну похибку отриманого результату.

4. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ визначте наближене значення $\sqrt{7{,}5}$. За допомогою мікрокалькулятора обчисліть точність отриманого результату.

Тема 3. Квадратні рівняння

1. За допомогою графіків лінійної та квадратичної функцій з'ясуйте, чи буде мати розв'язки квадратне рівняння $3x^2 - 4x + 7 = 0$.

2. Розв'яжіть графічно рівняння. Обчисліть точність отриманих результатів, розв'язавши рівняння алгебраїчно:

а) $20x^2 - 134x + 114 = 0$;

б) $4x^2 - 7x - 11 = 0$.

8 клас. Геометрія

Тема 1. Чотирикутники.

Тема 2 . Подібність трикутників

1. Побудуйте довільну трапецію з основами 7,8 см та 11,3 см. Проведіть середню лінію трапеції та виміряйте її довжину. Обчисліть відносну похибку результату.

2. Побудуйте трикутник *ABC* зі сторонами 2 см, 4 см та 5 см та подібний йому трикутник *A`B`C`* з коефіцієнтом подібності 2. Виміряйте кути та обчисліть відносну похибку отриманих результатів, узявши за точне значення міри кутів трикутника *ABC*.

Тема 3. Многокутники. Площі многокутників.

Тема 4. Розв'язування прямокутних трикутників

1. Побудуйте опуклий семикутник. Виміряйте його кути та знайдіть їх суму. Обчисліть відносну похибку результату.

2. За допомогою косинця або транспортира побудуйте прямокутний трикутник з катетами 5,4 см та 7,3 см.

Виміряйте довжину гіпотенузи. Обчисліть відносну точність отриманого результату.

9 клас. Алгебра

Тема 1. Нерівності

1. Знайдіть межі значення виразів xy та $\frac{x}{y}$, якщо $1{,}0 \le x \le 5{,}1$; $-14{,}7 \le y \le -5{,}3$.

2. Знайдіть межі значення виразів $x \cdot y$ та $\frac{x}{y}$, якщо $-5{,}1 \le x \le 1{,}0$; $5{,}3 \le y \le 14{,}7$.

3. Наближена відстань від Землі до Сонця дорівнює 149,5 млн км. Протягом року ця відстань змінюється майже на 2,502 млн км. Запишіть вказані відомості у вигляді подвійної нерівності, у вигляді умовної рівності та із використанням знака модуля.

4. Із довідника відоме наближене значення радіуса Землі $|R_{Землі} - 6370км| \le 10{,}5$ км. Чи може довжина екватора дорівнювати 40 000 км?

Тема 2. Квадратична функція

Побудуйте графік функції $3x^2 + 6x - 5 = 0$. За графіком знайдіть нулі функції. Визначте точність отриманих результатів.

Тема 3. Елементи прикладної математики

Тема 4. Числові послідовності

1. Підприємство протягом місяця витрачає приблизно 16 мотків спеціального шнура, довжина кожного з яких 100 ± 3 % футів (виробництво Велика Британія). Скільки коштів треба запланувати на вказані витрати, якщо 1 м такого шнура коштує 1,30-1,50 грн? Відомо, що один метр становить приблизно 3,28 футів.

2. Світло, розповсюджуючись зі швидкістю приблизно 300 000 км/с, проходить відстань від Сонця до Землі близько 8,3 хв. Обчислити відстань від Землі до Сонця на момент отримання вказаних даних. Перевірити правильність отриманої відповіді, якщо відомо, що вказана відстань протягом року змінюється приблизно від 146 998 000 км до 152 002 000 км.

3. На рисунку 42 зображена стовпчаста діаграма розподілу ділянок лижної дистанції у кілометрах. Знайдіть довжину лижної дистанції, яка включає в себе спуски, підйоми та прямолінійні ділянки. Скільки відсотків становить кожна з них до загальної довжини лижної дистанції?

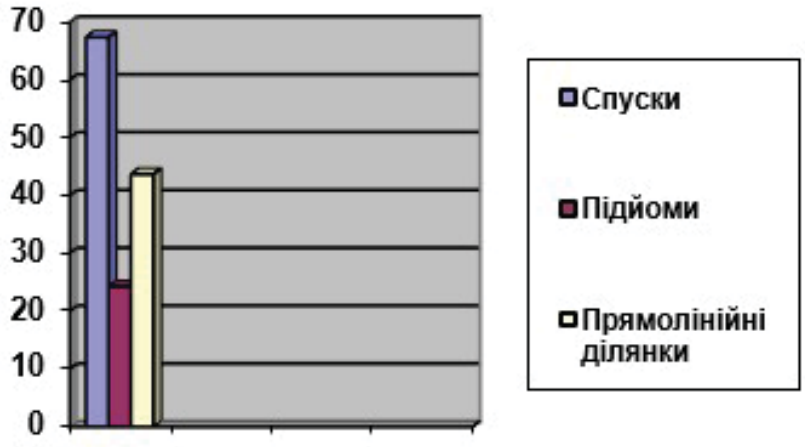


Рис. 42

9 клас. Геометрія

Тема 1. Розв'язування трикутників

Тема 2. Правильні многокутники

1. У коло радіуса 3 см вписати семикутник. Виміряти одну із сторін та один із кутів побудованого семикутника. Обчислити відносну точність виконаних побудов та вимірювань.

2. Частина трикутника пошкоджена (рис. 43). Обчисліть площу трикутника, яку він мав до пошкодження,

виконавши необхідні вимірювання. Обчислити відносну точність виконаних отриманих результатів.

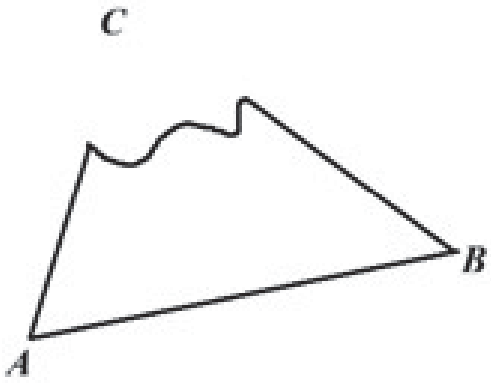


Рис. 43

Тема 4. Геометричні перетворення

Тема 3. Декартові координати на площині

1. Обчисліть координати середини відрізка *AB*. Визначте точність отриманих результатів (рис. 44).

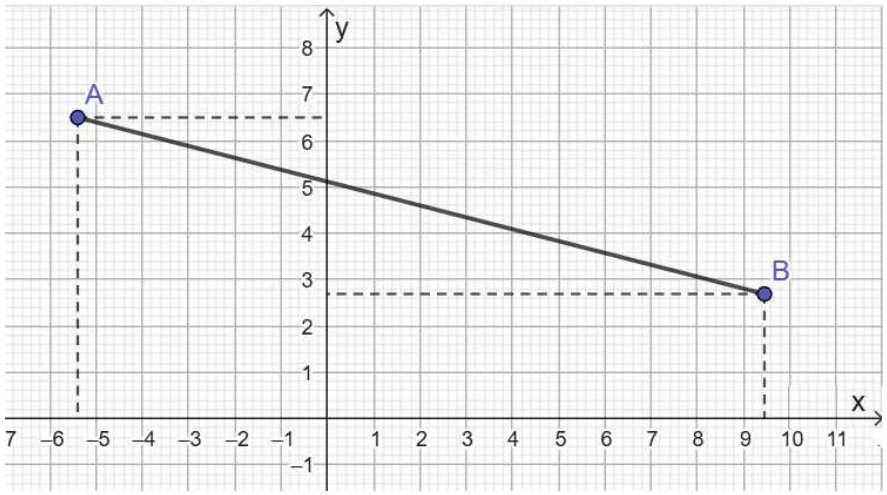


Рис. 44

2. Побудуйте трикутник *ABC* зі сторонами 6,2 см, 4,3 см та 3,1 см. Оберіть довільну точку *O* центром гомотетії. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника *ABC* з коефіцієнтом подібності $k = 3$. Виміряйте одну із сторін трикутника $A_1B_1C_1$, обчислити відносну точність виконаних отриманих результатів (рис. 45).

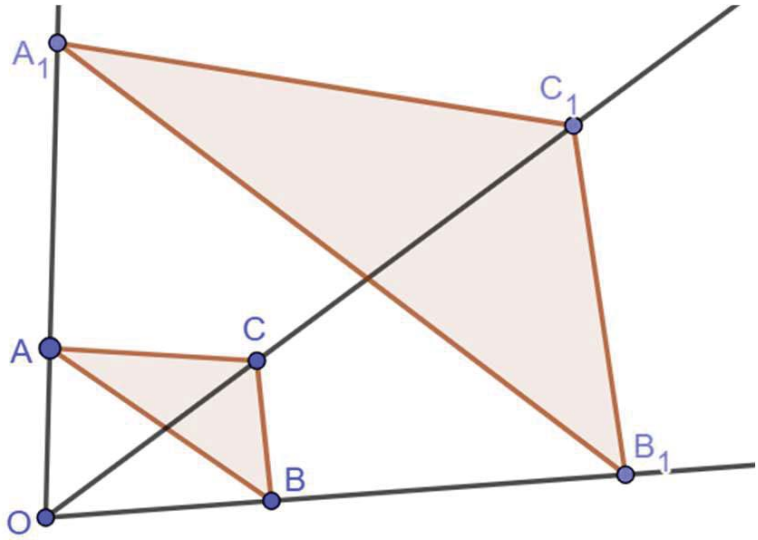


Рис. 45

Тема 5. Вектори на площині

Тема 6. Початкові відомості з стереометрії

Скільки пачок гречаної крупи поміститься у надану посудину (рис. 46). Щільність гречаної крупи 1220–1240 кг/м^3 (під час розв'язування задачі учні вимірюють лінійні розміри запропонованої посудини).



Рис. 46

2.3.4 Організаційна модель проєктної діяльності учнів гімназії під час вивчення наближених обчислень

5 клас

Тема: Масштаб. Середнє арифметичне

Навчальна мета ведення учнями проєктивної діяльності:

• формування поняття про масштаб та його використання; формування умінь знаходити середнє арифметичне кількох чисел (*програмові вимоги до підготовки учнів*);

• актуалізація уявлень про запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей; формування пропедевтичних уявлень про точність, відносну точність, правила їх знаходження та запис наближених значень у вигляді умовної рівності *(вимоги до підготовки учнів у контексті вивчення наближених обчислень).*

Розвивальна мета ведення учнями проєктної діяльності: ознайомлення учнів із картою України; формування уявлень про існування та розміри областей України; формування уявлень про статистичні спостереження та їх подання; формування навичок заповнювати звітну документацію, користуватись друкованими та електронними носіями інформації.

Базові уявлення, уміння та знання учнів:

• знаходження площ за допомогою палетки; знаходження відсотків від числа;

• уявлення про запис наближених значень за допомогою знаку наближеної рівності та у вигляді подвійної нерівності; вміння виконувати арифметичні дії над наближеними та точними значеннями.

Обґрунтування вибору проєкту:

• навчальний матеріал теми «Масштаб» часто засвоюється учнями формально, а відповідні елементи знань швидко забуваються. Вказана тема має широкі можливості щодо використання інтегрованих знань та додаткового матеріалу (зокрема і наочного);

• тема «Масштаб» має безпосередні логіко математичні та методичні зв'язки з наближеними обчисленнями.

Виявлення проблеми: учням відомо, що за допомогою масштабу, який вказаний на карті або плані, можна отримати уявлення про відстані або лінійні розміри об'єкту. А чи можна, використовуючи масштаб, отримати уявлення про інші числові характеристики об'єктів, що зображені на карті або плані, наприклад площу?

Основна ідея проєктної діяльності. Для розв'язування проанонсованої проблеми учні повинні визначити (виконавши відповідні дослідження та обчислення) площі територій кожної із областей України та перевірити правильність отриманих результатів.

План реалізації проєкту та діяльність команди: 25 учнів класу (24 області України та Автономна республіка Крим) шляхом жеребкування отримують «свою» область. Вони працюють індивідуально, маючи змогу консультуватись із учителем та спілкуватись між собою. Інші учні – об'єднуються у групу експертів. Вони працюють колективно або розподіливши певним чином обов'язки між собою.

Кожен учень отримує ксерокопію карти України. Вирізає ножицями «свою» область. Накладає її на папір у клітинку та обводить гостро заточеним олівцем. За отриманим таким чином кресленням учні заповнюють бланки такого зразка (на прикладі Луганської області):



Рис. 47

1. Назва області: Луганська.

2. Кількість клітинок, які містяться повністю на території області (нижня межа): 40 клітинок.

3. Кількість клітинок, які мають з територією області спільні точки (верхня межа): 51 клітинка.

4. Наближене значення площі області у вигляді подвійної нерівності:

$$40 \text{ клітинок} \leq S \leq 51 \text{ клітинка}.$$

5. Наближене значення площі області у $см^2$.

Під час заповнення даного пункту учні мають висунути припущення щодо відповідних обчислень. У випадку, коли припущення учнів є помилковими, вчитель не виправляє їх. Хибність власних міркувань учні мають усвідомити самостійно в ході подальшого ведення проєктної діяльності або під час підведення її підсумків. В цьому і є основна ідея проєктної діяльності. У випадках, коли припущення є правильними, коректність їх формулювання не береться до уваги.

Наприклад, одне із правильних припущень може звучати так: «Ми знаємо, що у 1 $см^2$ міститься 4 клітинки, тому площа області у $см^2$ буде у 4 рази меншою чим площа області у клітинках»:

$$10{,}00 \text{ см}^2 \leq S \leq 12{,}75 \text{ см}^2 \text{ (на карті).}$$

6. Наближене значення площі області у км^2.

Правильні припущенні учнів можуть мати такий вигляд: «Масштаб карти 1 : 5 000 000. Тобто відстані 1 см на карті відповідає 5 000 000 см = 50 км на місцевості. А 1 см^2 (1см×1см) відповідає 2500 км^2 (50 км^2×50 км^2) на місцевості. Тому площа області у км^2 буде у 2500 рази більшою чим площа області у см^2»:

$$25\,000 \text{ км}^2 \leq S \leq 31\,875 \text{ км}^2 \text{ (на місцевості).}$$

7. Наближене значення площі області за допомогою знаку наближеної рівності.

Учні мають припустити, можливо з допомогою вчителя, що для цього необхідно обчислити середнє арифметичне меж наближеного значення:

$$S \approx (25\,000 + 31\,875) : 2,$$
$$S \approx 28\,437{,}5 \text{ км}^2.$$

Учні експертної групи за отриманими таким чином результатами будують звітну таблицю 9.

Таблиця 9

Відомості про площу областей України

№	Назва області	Площа області за довідником, км^2	Площа області, що отримана дослідником, км^2	Прізвище дослідника	Величина отриманої похибки	
					км^2	%
…	…	…	…	…	…	…
3	Луганська	26 700	28 437,5	Корчак П.	1737,5	6,51
	…	…	…	…	…	…

Для заповнення третього стовпчика учні-експерти використовують довідник. Четвертий та п’ятий стовпчики заповнюються ними по мірі виконання роботи проєктантами. Отримані таким чином результати експертна група демонструє за допомогою діаграми.

Зауважимо, що за програмою учні знайомляться з діаграмами у 6 класі. Запропонована демонстрація є водночас і пропедевтикою, і мотивацією для подальшого їх вивчення.



Рис. 48



Рис. 49

Після того як учні «побачили» на екрані допущені ними помилки (різницю між висотами стовпчиків), відбувається їх обчислення. Учні-експерти, попередньо проінструктовані вчителем, повідомляють учням спосіб їх обчислення;

виконують відповідні обчислення на дошці на прикладі однієї із областей; консультують та допомагають учням у їх обчисленнях. Отримані таким чином числові значення заносять до шостого стовпчика таблиці.

Під час ведення відповідної діяльності в учнів виникали запитання «Отримані нами помилки є великими чи малими? Як за їх величиною зрозуміти: дії виконано нами якісно чи ні?». Для відповіді на ці та інші питання до проєктної діяльності приєднується вчитель. Він пропонує відповісти на поставлені питання «на мові відсотків». Зокрема, пропонує обчислити скільки відсотків с отримана помилка від істинного результату: $(1737{,}5 : 26700)\cdot 100\ \% \approx 6{,}51\ \%$ (на прикладі Луганської області).

Кожен з учнів обчислює аналогічним чином показник якості своєї роботи. Учні-експерти перевіряють хід виконання обчислень, заносить результати у сьомий стовпчик таблиці та будують діаграму «успіху діяльності». Зрозуміло, що отримані значення є відносною точністю наближених значень, що були одержані учнями. І хоча відповідна термінологія не наводилась, в уявленнях учнів залишився відбиток про те, що величину помилки можна відображати як у відповідних одиницях вимірювання (у нашому прикладі це тис. км^2 або км^2), так і відсотках. Іншими словами відбувається формування пропедевтичних уявлень про кількісні та якісні числові характеристики наближених значень.

Висновки. Нами було проведено дослідження, в результаті якого було з’ясовано, що за допомогою масштабу можна отримати уявлення не лише про лінійні розміри об’єкту дослідження, а і про його площу. Отримані так значення є наближеними.

Величина отриманих нами помилок сягала 0,5-28,9 %. Їх причини кожен має з'ясувати самостійно та відобразити у висновках. На практиці, у справжніх дослідженнях, наприклад під час аерозйомки, величини помилок звичайно набагато менші. Це досягається зокрема і багатократним зменшенням «клітинок», які ми обираємо за умовні одиниці площини. Проаналізуйте результати власної діяльності та зробіть відповідні висновки, записавши їх у своїх роботах.

Критерії оцінювання проєктної діяльності учнів

1	Чіткість виконання креслень; охайність та правильність ведення відповідних записів	**0-2 бали**
2	Правильність виконання обчислень	**0-2 бали**
3	Величина відносної точності отриманих результатів	**до 10,0% –2 бали; від 10,0% до 19,5% – 1 бал; більше 19,5% – 0 балів**
4	Аргументація виконання дій	**0-2 бали**
5	Вміння проаналізувати та підсумувати результати власної діяльності	**0-2 бали**
6	Додаткова інформація про об'єкт дослідження (за умови ведення ПД у позаурочний час)	**0-2 бали**

2.3.5 Організаційна модель проведення гри «Хто найкращий вимірювач?»

7 клас

Тема. Цілі вирази

Підготовка до гри: Учитель об'єднує учнів у 12 гомогенних груп. Різні групи отримують різні завдання.

Вони є майже однаковими за змістом, але незначною мірою відрізняються за рівнем володіння учнями навичками вимірювань та геометричних побудов: 1-4 групи об'єднують учнів обов'язкового рівня навченості; 5-8 – середнього; а 9-12 – підвищеного.

Перед початком гри проводиться *актуалізація опорних знань*, зокрема повторення елементів та властивостей прямокутника; уявлень про прямокутний трикутник, про абсолютну похибку, модуль числа, відсотки та округлення чисел.

Із представників кожного рівня навченості *обирається журі* (3 учня). Вони займаються оформленням підсумовуючої таблиці, а також оголошенням проміжних та остаточних результатів. Вчитель скеровує хід гри, а також виконує функції консультанта для кожної із груп.

Хід гри

1. Кожна група отримує картки з переліком *обладнання та завданням*:

1 та 2 групи

Завдання: побудуйте прямокутник зі сторонами 6,3 см та 8,4 см. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.

Обладнання: папір у клітинку, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

3 та 4 групи

Завдання: побудуйте прямокутник зі сторонами 7,2 см та 9,6 см. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.

Обладнання: папір у клітинку, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

5 та 6 групи

Завдання: побудуйте прямокутник зі сторонами 3,9 дм та 5,2 дм. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.

Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

7 та 8 групи

Завдання: побудуйте прямокутник зі сторонами 4,2 дм та 5,6 дм. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.

Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

9 та 10 групи

Завдання: побудуйте прямокутний трикутник із гіпотенузою 6,5 дм та будь-яким катетом 5,2 дм. Виміряйте довжину катета, отриманого внаслідок побудов. Результати запишіть та подайте журі.

Додаткова інформація: у прямокутному трикутнику сторона, яка лежить навпроти прямого кута називається гіпотенузою, а дві інші сторони називають катетами.

Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир, циркуль.

11 та 12 групи

Завдання: побудуйте прямокутний трикутник із гіпотенузою 17 см та будь-яким катетом 13,6 см. Виміряйте

довжину катета, отриманого внаслідок побудов. Результати запишіть та подайте журі.

Додаткова інформація: у прямокутному трикутнику сторона, яка лежить навпроти прямого кута називається гіпотенузою, а дві інші сторони називають катетами.

Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир, циркуль.

2. Учні виконують завдання та подають отримані результати членам журі, які заносять їх у таблицю (другий стовпчик).

3. Учитель ініціює дискусію, яка може мати такий вигляд.

Учитель: У кожній грі мають бути переможці. Як нам визначити переможця? Як визначити хто точніше зробив вимірювання?

Учні: Треба визначити, хто зробив найменшу помилку. Якби нам були відомі точні значення тих довжин, які ми вимірювали, то ми б могли обчислити її за допомогою абсолютної похибки.

Учитель: Під час вивчення геометрії у наступних класах ми будемо вчити, що довжини відрізків, які необхідно було виміряти можна знайти і математичними методами, зокрема за допомогою теореми Піфагора. Вони наведені у третьому стовпчику таблиці, який закрито аркушем паперу і який зараз ми відкриємо.

4. Кожна з команд обчислює абсолютну похибку, яка ними була припущена в результаті побудов та вимірювань. Отримані результати вони подають членам журі, які заносять їх у таблицю (четвертий стовпчик).

5. Учитель підсумовує діяльність учнів.

Учитель: Абсолютна похибка отриманих результатів для усіх команд складає усього декілька міліметрів. Тобто

різниться не принциповим чином. Як же визначити хто найкраще виконав вимірювання? Можливо учнів усіх команд, які отримали найменшу абсолютну похибку (0,1 см – 1, 2, 9 та групи) і визнати найкращими вимірювачами?

Учні: Ми не згодні. Учням, які опрацьовували більші за розмірами геометричні фігури, було складніше це робити. Тому в їх «поганих» результатах (абсолютна похибка 0,2-0,4 см) винні не самі учні, а особливості запропонованих завдань. Можливо, це треба якимось чином врахувати?

Учитель: Справді, для з'ясування якості вимірювання (тобто для з'ясування того хто краще виконав вимірювання) недостатньо знати лише величину абсолютної похибки. Необхідно враховувати її співвідношення з розмірами об'єкту, що досліджується. Для цього існує поняття «*відносна похибка*».

Таблиця 10

Результати вимірювань та підрахунків, що були виконані учнями під час ігрової діяльності

Групи	Відповіді, отримані учнями	Відповіді, відомі заздалегідь	Абсолютна похибка	Відносна похибка (%)
1	10,4 см	10,5 см	0,1 см	(0,1 см : 10,5 см)·100 % ≈ 0,96 %
2	10,2 см	10,5 см	0,3 см	(0,3 см : 10,5 см)·100 % ≈ 2,86 %
3	12,1 см	12,0 см	0,1 см	(0,1 см : 12,0 см)·100 % ≈ 0,84 %
4	12,2 см	12,0 см	0,2 см	(0,2 см : 12,0 см)·100 % ≈ 1,67 %
5	65,2 см	6,5 дм = = 65 см	0,2 см	(0,2 см : 65 см)·100 % ≈ 0,31 %
6	64,6 см	6,5 дм = = 65 см	0,4 см	(0,4 см : 65 см)·100 % ≈ 0,62 %
7	70,3 см	7,0 дм = = 70 см	0,3 см	(0,3 см : 70 см)·100 % ≈ 0,43 %

Продовження таблиці 10

Групи	Відповіді, отримані учнями	Відповіді, відомі заздалегідь	Абсолютна похибка	Відносна похибка (%)
8	70,2 см	7,0 дм = = 70 см	0,2 см	(0,2 см : 70 см)·100 % ≈ 0,29 %
9	38,9 см	3,9 дм = = 9 см	0,1 см	(0,1 см : 39 см)·100 % ≈ 0,26 %
10	39,1 дм	3,9 дм = = 39 см	0,1 см	(0,1 см : 39 см)·100 % ≈ 0,26 %
11	10,5 см	10,2 см	0,3 см	(0,3 см : 10,2 см)·100 % ≈ 2,95 %
12	10,4 см	10,2 см	0,2 см	(0,2 см : 10,2 см)·100 % ≈ 1,97 %

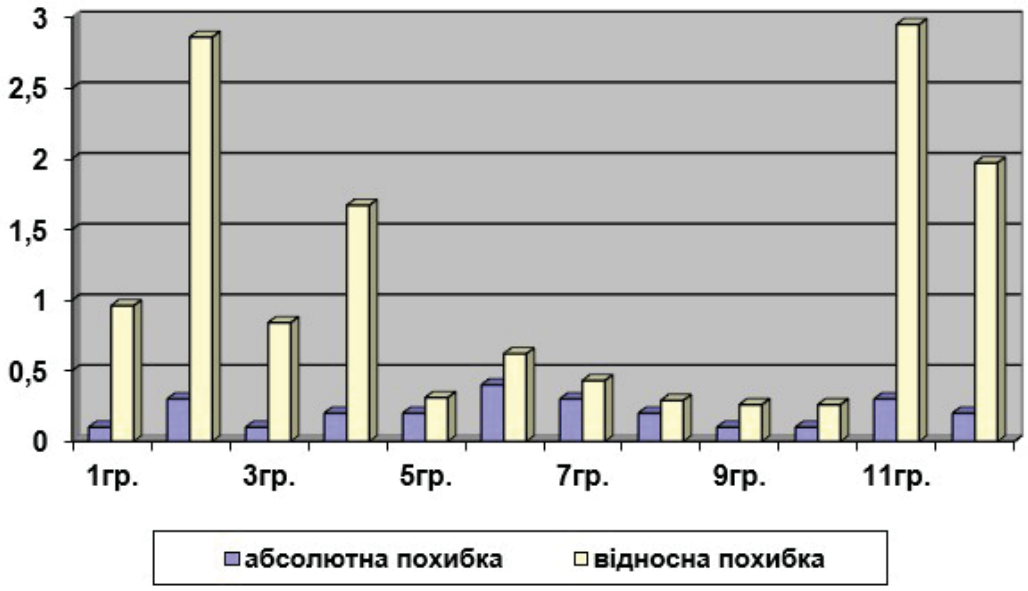


Рис. 50

6. Учитель наводить означення відносної похибки та відносної точності, формули для їх обчислення, а також «яскраві» ілюструючи приклади (відповідний матеріал викладено на сторінках діючих підручників для 8, 9 класів, а також підручників минулих років для 7, 8 класів).

7. Кожна команда обчислює відносну похибку, яка ними була припущена в результаті практичних побудов та вимірювань. Отримані результати вони подають членам журі, які заносять їх у таблицю (п’ятий стовпчик).

8. Журі підсумовує отримані відомості з допомогою діаграми.

9. Учитель аналізує результати гри, проводить невелику бесіду про джерела виникнення похибок, що були отримані учнями та оголошує переможців.

РОЗДІЛ ІІІ. НАВЧАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗДОБУВАЧІВ ПРОФІЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Знання про наближені обчислення, отримані учнями гімназій, мають здобуватись, поновлюватись, закріплюватись, удосконалюватись і в ліцеях. Зупинимось на особливостях вивчення НО здобувачами профільної середньої освіти.

3.1 Цілі і зміст вивчення наближених обчислень в ліцеях. Метод меж похибок

Результати дослідження, проведеного нами в 2014-2015 рр. серед учнів старшої школи та вчителів математики загальноосвітніх закладів Чернівецької області показали, що більшість вчителів, особливо молодих, мають низький рівень культури НО. Внаслідок цього та через відсутність тем з наближених обчислень у начальних програмах з математики впродовж тривалого часу учні також не навчались вміло працювати з наближеними значеннями величин та чисел. Такі прогалини в опанування НО негативно проявляються: під час виконання і опрацювання результатів лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії, біології тощо; під час розв'язування практико-орієнтованих завдань, прикладних задач, сюжети яких пов'язані з економікою, підприємництвом, фінансовою діяльністю, природничими науками, під час виконання дослідницьких проєктів і т. п.

Дослідження показало також, що є потреба в старшій школі актуалізувати відомі учням знання про НО, які вони отримали в базовій школі, вже з перших занять з курсу алгебри і початків аналізу. Це стане основою для їх застосування **у фоновому режимі** під час вивчення математики впродовж наступних років та **безпосередньому застосуванні** під час виконання лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії, біології та інших суміжних дисциплін.

Тому рекомендуємо, за рахунок резервного часу, виокремити в навчальній програмі з математики навчальну тему «Наближені обчислення», її зміст, вимоги до підготовки учнів, орієнтований час та мету вивчення подано в таблиці 11.

Таблиця 11

10 клас. Алгебра і початки аналізу	
Тема 1. Наближені обчислення (10 год)	
Основна мета вивчення: *актуалізувати, систематизувати, поглибити і розширити знання учнів про наближені обчислення. Ознайомити з методом меж похибок, підготувати грунт для застосування НО під час вивчення алгебри і початків аналізу, стереометрії, суміжних дисциплін*	
Зміст навчального матеріалу	**Навчальні досягнення учнів**
Наближені значення чисел та величин. Характеристики наближеного значення числа: похибка, абсолютна похибка, межа абсолютної похибки, відносна похибка, межа відносної похибки, точність наближення. Запис наближених чисел у вигляді подвійної нерівності, умовної рівності. Наближені обчислення *методом меж*. Правильні і значущі цифри числа. Запис наближених значень чисел у вигляді наближеної рівності. Стандартний вид числа. Наближені обчислення методом підрахунку цифр. [Метод меж похибок, його переваги і недоліки]*. Розв'язування вправ на застосування методів наближених обчислень	*Розрізняє* точні і наближені числа. *Знає* правила округлення чисел, виконання арифметичних дій з наближеними значеннями величин, правила подання відповіді до прикладної задачі. *Вміє* округлювати числа з наперед заданою точністю, знаходити абсолютну і відносну похибки, межі абсолютної та відносної похибок, точність наближення, визначати правильні та сумнівні цифри, значущі цифри в записі наближеного значення числа, записувати результат обчислення у вигляді умовної чи наближеної рівності. *Виконує* дії над наближеними значеннями, в тому числі за допомогою обчислювальних засобів. Розв'язує практичні і прикладні задачі, дані в яких виражені наближеними числами

Зауваження*) Метод меж похибок рекомендуємо вивчати в класах, де математика вивчається за програмою профільного та поглибленого рівнів. Показати доцільність його використання на прикладах обчислень під час виконання лабораторних робіт з фізики, практичних робіт хімії, оскільки він більш строгий за метод підрахунку цифр і менш громіздкий за метод меж

3.2 Наближені обчислення під час вивчення змістової лінії «Функції і їх графіки»

3.2.1 Наближені обчислення значень функцій

Однією з цілей вивчення алгебри і початків аналізу в старшій профільній школі є – систематичне вивчення функцій як важливого математичного об'єкта засобами алгебри і математичного аналізу. Йдеться про вивчення функцій:

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}x$, $y = x^r$ (де r – раціональне число), $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = log_a x$, $y = x^\alpha$, (де α – дійсне число).

Вивчаючи такі функції, учні повинні навчитись:

- будувати їх графіки, «читати» ці графіки і використовувати під час розв'язування практичних та прикладних задач;
- знаходити значення функцій для заданих значень аргументів, в тому числі і для того випадку, коли аргументом є наближене число. Оцінювати точність таких наближених значень;
- обчислювати вирази, що містять вказані в програмі функції з наближеними значеннями даних.

У недалекому минулому, в старшій школі такі вміння ретельно формувались. Учнів вчили обчислювати значення функцій, виразів за допомогою *чотиризначних математичних таблиць* В. М. Брадіса [56].

Сьогодні користуватись такими таблицями в школах не вчать, а потреба в перерахованих вище уміннях є. Оскільки

з’явилися потужні *обчислювальні засоби* – то учнів старшої школи слід навчити користуватися ними на уроках математики, і не тільки математики, для різних обчислень, зокрема і значень функцій. У програмі з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та в такій же програмі, для класів з поглибленим вивченням математики, профільного рівня, говориться, що випускник загальноосвітнього навчального закладу (вимога): «*виконує математичні розрахунки (дії з числами, представленими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення, тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення*».

Більш чіткіше ця вимога звучить як навчальне досягнення учня, під час вивчення окремих тем курсу «Алгебра і початки аналізу»:

Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності.

Учень/учениця *знаходить* значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення

Тема 2. Степенева функція.

Учень/учениця *обчислює, оцінює та порівнює* значення виразів, які містять корені і степені з раціональним показником.

Тема 3. Тригонометричні функції.

Учень/учениця *обчислює* значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень

Аналогічна вимога має виконуватися і під час вивчення показникової та логарифмічної функцій, хоч вона в програмі чітко *не виділена.*

Якщо ж переглянути діючі альтернативні підручники з Алгебри і початків аналізу, то практичних завдань, направлених на реалізацію вказаної вимоги насправді

немає. А мали б бути! Виконання вимоги призведе до формування в учнів обчислювальної компетентності. Таке державне замовлення слід виконувати. Сформовані уміння і навички є удосконаленням обчислювальної компетентності старшокласників, яка, фактично, стає міжпредметною, необхідною під час розв'язування задач з фізики, хімії, інформатики та інших навчальних предметів.

Пропонуємо авторський підхід до розв'язання вказаної проблеми. Наші пропозиції ґрунтуються на властивостях функцій, що вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу. Їх суть така.

Нехай розглядається неперервна, монотонна (зростаюча, чи спадна) на проміжку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ (рис. 51).

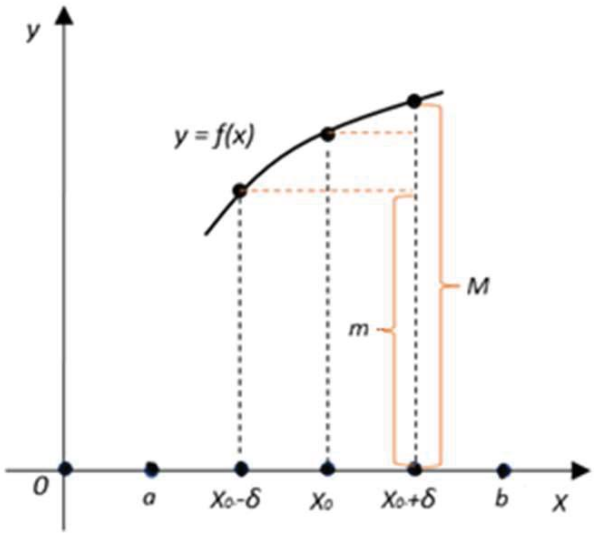


Рис. 51

Нехай $x = x_0 \, \epsilon \, [a; b]$. Виберемо мале, додатне значення δ так, щоб $x_1 = x_0 - \delta$, та $x_2 = x_0 + \delta$ належали проміжку $[a; b]$.

Знаходимо $f(x_0 - \delta) = m$ і $f(x_0 + \delta) = M$ (розглядаємо зростаючу функцію, y випадку, коли функція буде спадна, міркують за аналогією).

Якщо числа m і M знайдені, то виходячи з властивостей функції $y = f(x)$ (неперервна і монотонно зростаюча) можна стверджувати, що $f(x_0) \approx \frac{M+m}{2}$, а похибка не перевищуватиме що $h = \frac{M-m}{2}$. У цьому і є суть нашого підходу.

Такі теоретичні відомості рекомендуємо викласти в 10 класі, в першій темі курсу Алгебри і початку аналізу, яка називається **«Функції, многочлени, рівняння і нерівності»**.

Далі слід перейти до застосування отриманих знань під час вивчення основних елементарних функцій, які, як відомо, на певних проміжках є і монотонні, і неперервні: $y = x^r$ (де r – раціональне число), $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = e^x$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \log_a x$, $y = \lg x$, $y = x^\alpha$ (де α – дійсне число).

Проілюструємо сказане на прикладах.

Приклад 1. Обчислити $\sqrt[8]{x}$, якщо:

а) $x = 2{,}44$; б) $x \approx 2{,}44$.

Розв'язання

а) Число $x = 2{,}44$ – точне, тому за допомогою калькулятора знаходимо:

$\sqrt[8]{2{,}44} = 2{,}44^{0{,}125} = 1{,}11795347$ ... Значення кореня знайдене з точністю $t = 10^{-8}$. Залежно від потреби його можна округлити до певного десяткового знаку. Всі цифри в записі числа правильні. Отже, $\sqrt[8]{2{,}44} \approx 1{,}11795347$.

б) Число $x \approx 2{,}44$ подане з точністю до сотих. Можна вважати що похибка наближення не перевищує $h = 0{,}005$.

Отже, має місце нерівність $2{,}435 < 2{,}44 < 2{,}445$.

Функція $y = \sqrt[8]{x}$ монотонно зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Знаходимо:

$$m = \sqrt[8]{2{,}435} = 2{,}435^{0{,}125} \approx 1{,}11766685$$

$$M = \sqrt[8]{2{,}445} = 2{,}445^{0{,}125} \approx 1{,}11823957$$

Помічаємо, що в обох значеннях збігаються три перші цифри. Розбіжність починається з третього десяткового знаку після коми.

Округлюємо: число m до тисячних з недостачею, маємо 1,117 (бажано, щоб учні пояснили чому округлення робиться з недостачею); число M до тисячних з надлишком, маємо 1,119 (теж саме питання, що й в попередньому випадку).

Отримуємо, що $\sqrt[8]{2{,}44} \in [1{,}117; 1{,}119]$.

Тому, $\sqrt[8]{2{,}44} \approx \frac{1{,}117+1{,}119}{2} = 1{,}118$, а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}119-1{,}117}{2} = 0{,}001$.

Отже, $\sqrt[8]{2{,}44} = 1{,}118 \pm 0{,}001$ (умовна рівність) або $\sqrt[8]{2{,}44} \approx 1{,}118$ (наближена рівність, цифра 8 сумнівна).

Відповідь: а) $\approx 1{,}117\ 95347$ б) $\approx 1{,}118$.

Приклад 2. Знайти значення кореня $\sqrt[7]{3{,}14}$, де 3,14 – число точне.

Розв'язання

Під знаком кореня 3,14 – число точне. Скориставшись знову калькулятором, який показник $\frac{1}{7}$ подає як нескінчений періодичний десятковий дріб 0,(142857), помічаємо, що показник потрібно округлити. Тому для подальших обчислень скористаємось нерівністю: $0{,}142 < \frac{1}{7} < 0{,}143$. Межі взяті з трьома значущими цифрами, бо під коренем число 3,14 з трьома значущими цифрами. З властивостей степеневої функції випливає нерівність

$$(3{,}14)^{0{,}142} < \sqrt[7]{3{,}14} < (3{,}14)^{0{,}143}\ .$$

Знаходимо за допомогою калькулятора:

$(3{,}14)^{0{,}142} = 1{,}17\ 642436 \ldots$;

$(3{,}14)^{0{,}143} = 1{,}17\ 777123 \ldots$.

Розбіжність у значеннях починається з третього десяткового знака після коми.

Тоді $m = 1{,}176,\ \ M = 1{,}178.$

Тому $\sqrt[7]{3{,}14} \approx \frac{1{,}178+1{,}176}{2} = 1{,}177,$ а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}178-1{,}176}{2} = 0{,}001.$

Отже, $\sqrt[7]{3{,}14} = 1{,}177 \pm 0{,}001$ (умовна рівність) або $\sqrt[7]{3{,}14} \approx 1{,}177$ (наближена рівність, остання цифра 7 – сумнівна, якщо проміжних обчислень немає, то її відкидаємо).

Округлюємо результат.

Відповідь: $\sqrt[7]{3{,}14} \approx 1{,}177.$

Приклад 3. Обчислити значення функції $y = x^r$, де $x \approx 2{,}3,\ r \approx\approx 0{,}35.$

Розв'язання

І аргумент і показник степеня взяті з точністю до сотих. Тому маємо:

$2{,}25 < x < 2{,}35,\ \ 0{,}345 < r < 0{,}355.$ Функція $y = x^r$ монотонна (подвійна монотонність і з огляду аргументу, і з огляду показника). Тому, щоб не вдаватися у подробиці, пропонуємо поступати таким чином. Виконати обчислення за схемою:

$2{,}25 \ < \ x \ < \ 2{,}35,$

$0{,}345 \ < \ r \ < \ 0{,}355.$

$2{,}25^{0{,}345} = 1{,}3\ 2282675 \ldots (!)$

$2{,}25^{0{,}355} = 1{,}3\ 3359757 \ldots (!)$

$2{,}35^{0{,}345} = 1{,}3\ 4282189 \ldots (!)$

$2{,}35^{0{,}355} = 1{,}3\ 5434432 \ldots (!)$

Очевидно, що найбільшим з цих чотирьох значень буде $2{,}35^{0{,}355}$, а найменшим $2{,}25^{0{,}345}$. Тому обираємо:

$m = 1{,}32,\ \ M = 1{,}36.$

Тоді, $2{,}3^{0{,}35} \approx \frac{1{,}32+1{,}36}{2} = 1{,}34$, а похибка не перевищує $h = \frac{1{,}36-1{,}32}{2} = 0{,}02$.

Отже, $2{,}3^{0{,}35} = 1{,}34 \pm 0{,}02$ (умовна рівність), або $2{,}3^{0{,}35} \approx 1{,}3$ (наближена рівність).

Відповідь: $2{,}3^{0{,}35} \approx 1{,}3$.

Приклад 4. Обчислити значення функції $y = \sin x$, якщо $x \approx 0{,}785$.

Розв'язання

Аргумент поданий з точністю до тисячних. За відомостями про наближені числа робимо висновок, що похибка не перевищує $\varepsilon = 0{,}0005$. Тому можна вважати, що $0{,}7845 < 0{,}785 < 0{,}7855$.

Будемо вважати числа $x_1 = 0{,}7845$ та $x_2 = 0{,}7855$ – точними. Вони належать проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$, на якому функція $y = \sin x$ неперервна і монотонно зростає. Тому знаходимо за допомогою калькулятора:

$$m = \sin 0{,}7845 = 0{,}706471399 \ldots$$
$$M = \sin 0{,}7855 = 0{,}707178787 \ldots$$

Помічаємо, що в обох значеннях збігаються три перших цифри. Розбіжність починається і третього десяткового знака.

Округлюємо число *m* до тисячних з недостачею і маємо $\boxed{0{,}706}$.

Округлюємо число *M* до тисячних з надлишком і маємо $\boxed{0{,}708}$.

Отримуємо, що $\sin 0{,}7845 \in [0{,}706;\ 0{,}708]$.

Тоді маємо: $sin0{,}785 \approx \frac{0{,}706+0{,}708}{2} = 0{,}707$, а межа похибки $h = \frac{0{,}708-0{,}706}{2} = 0{,}001$.

Отже, $\sin 0{,}785 = 0{,}707 \pm 0{,}001$ – умовна рівність; $\sin 0{,}785 \approx 0{,}707$ – наближена рівність. Всі цифри в запасі

значення $\sin 0{,}785$ правильні, крім останньої, оскільки вона стоїть на місці тисячних, а одна тисячна не перевищує межі похибки h.

Тому вона сумнівна, проте в проміжних обчисленнях вона враховується.

Відповідь: $\sin 0{,}785 = 0{,}707 \pm 0{,}001$, або $\sin 0{,}785 \approx \approx 0{,}71$.

Приклад 5. Обчислити значення функції $y = \lg x$, якщо $x \approx 5{,}243$.

Розв'язання

Аргумент поданий з точністю до тисячних. Функція $y = \lg x$ – неперервна і монотонно зростаюча. Скориставшись попередніми рекомендаціями, маємо: $x \in [5{,}2425;\ 5{,}2435]$.

Вважаючи числа 5,2425 і 5,2435 – точними, маємо:

$\lg 5{,}2425 = 0{,}719538439$ ...,

$\lg 5{,}2435 = 0{,}719621272$ ....

Помічаємо, що в обох значеннях збігаються три десяткові знаки після коми, розбіжність починається з четвертого десяткового знака.

Округлюємо:

для m з недостачею і маємо $m = 0{,}7195$;

для M з надлишком і маємо $M = 0{,}7197$.

Тоді отримуємо: $\lg 5{,}243 \approx \frac{0{,}7195 + {,}7197}{2} = 0{,}7196$, а межа похибки $h = \frac{0{,}7197 - {,}7195}{2} = 0{,}0001$.

Отже,

$\lg 5{,}243 = 0{,}7196 \pm 0{,}0001$ або $\lg 5{,}243 \approx 0{,}7196$.

За такою методикою слід вчити учнів знаходити значення інших елементарних функцій, коли йде їх безпосереднє вивчення, переводити градусну міру кута в радіанну і навпаки, знаходити значення виразів зі змінними, якщо значення змінних – наближені числа, визначати

точність таких значень, відносну точність, робити відповідні висновки про якість обчислень.

3.3.2 Обчислення значень виразів, що містять функції вказані в програмі з математики

Отримані знання і вміння виконувати наближені обчислення стануть в нагоді під час розв'язування на уроках математики практичних та прикладних задач (дані в яких зазвичай наближені числа), фізики (особливо під час виконання лабораторних робіт), хімії (практичні роботи), тощо. Наведемо кілька прикладів розв'язань таких задач.

Тема. Степенева функція

Задача 1. Діаметр труби для водопроводу визначають за формулою $D = \sqrt{\frac{4Q}{1000 \cdot \pi \cdot \vartheta}}$, де D – діаметр труби (мм), Q – витрати води (л/с), ϑ – швидкість води в трубах (м/с). Знайти діаметр труб, для вказаних даних (заповнити таблицю):

Q	ϑ	D
2	1,2	50 *мм*
6	1,6	70 *мм*
21	1,8	125 *мм*

Отримані за формулою дані замінити найближчими значеннями стандартних розмірів труб (в міліметрах):
$D = \{15, 20, 25, 32, 40, 50, 70, 80, 100, 125, 175, 200, 225, 275, 300\}$.

Розв'язання

Спростимо для зручності виконання обчислень задану в умові задачі формулу і скористаємося калькулятором:

$$D = \frac{2}{10}\sqrt{\frac{Q}{10 \cdot \pi \cdot \vartheta}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10Q}{\pi \cdot \vartheta}}.$$

1. Якщо $Q = 2$, $\vartheta = 1{,}2$, методом МПЦ знаходимо, що

$$D_1 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{\pi \cdot 1{,}2}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{200}{\pi \cdot 1{,}2}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{100}{6\pi}} \approx$$

$\approx 0{,}046065886.$

Округлимо D_1 до мм: $D_1 \approx 50$ мм.

2. Якщо $Q = 6$, $\vartheta = 1{,}6$, то

$$D_2 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 2}{\pi \cdot 1{,}6}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{600}{\pi \cdot 16}} = 0{,}069098829 \approx 0{,}07(\text{м}).$$

$D_2 \approx 70$ мм.

3. Якщо $Q = 21$, $\vartheta = 1{,}8$, то

$$D_3 = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 21}{\pi \cdot 1{,}8}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{2100}{\pi \cdot 18}} = 0{,}12187888 \approx 0{,}122(\text{м}).$$

$D_3 \approx 122$ мм.

Знаючи розміри стандартних труб (в мм), першу трубу можна замінити – на 50 мм, другу – на 70 мм, а третю – на 125 мм.

Задача 2. Внаслідок підвищення температури води Північного моря виникла екологічна катастрофа – забруднення синьо-зеленими водоростями території довжиною близько 10 км (площа, на якій повністю вбито морське життя). Визначте середній приріст синьо-зелених водоростей протягом доби, виражений у відсотках, якщо кожного місяця їх кількість збільшується у 10 разів.

Розв'язання

Використаємо відому формулу $l = l_0(1 + p)^t$ (математична модель), де l – довжина забрудненої водоростями території в момент часу *t,* l_0 – початкова довжина забрудненої території, p – середній приріст водоростей протягом доби, виражений *y* %, t – час, вимірюється добами. Звідси, згідно даних задачі одержуємо рівність: $10(1 + p)^{30} = 100$, якій рівносильна рівність $(1 + p)^{30} = 10$. Для визначення p можна піднести обидві

частини рівняння до степеня $\frac{1}{30}$ і, виконавши певні перетворення, одержати $p = \sqrt[30]{10} - 1$.

Для обчислення значення виразу спочатку знайдемо значення функції:

$y = \sqrt[30]{x}$, де $x = 10$. Оскільки $\frac{1}{30} = 0{,}03333\ldots$, то маємо $0{,}033 < \frac{1}{30} < 0{,}034$.

Скористаємось методом меж. Тоді,

$10^{0{,}033} = 1{,}07894672\ldots$, $m = 1{,}07$;

$10^{0{,}034} = 1{,}08143395\ldots$, $M = 1{,}09$.

Отже, $\sqrt[30]{10} \approx \frac{1{,}09+1{,}07}{2} = 1{,}08$, $h = 0{,}01$.

Умовна рівність $\sqrt[30]{10} = 1{,}08 \pm 0{,}01$, наближена рівність $\sqrt[30]{10} \approx 1{,}08$.

Тоді $p = \sqrt[30]{10} - 1 \approx 0{,}08$, $p \approx 8\ \%$.

Відповідь: $\approx 8\ \%$.

Задача 3. Залежність максимальної кількості опадів від їх тривалості в місцевості N описується за допомогою залежності $I = 13{,}1 \cdot t^{-0{,}56}$, де I – максимальна інтенсивність опадів (мм/год), t – тривалість опадів (год). Знайдіть:

1) максимальну інтенсивність опадів при їх тривалості 0,5 *год*, 1 год, 2 год;

2) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність дорівнює 3,6 мм/год?

3) при якій тривалості опадів максимальна інтенсивність вища: при $t_1 = \frac{2}{3}$ год чи $t_2 = \frac{3}{4}$ год?

Розв'язання

Залежність, про яку йдеться в задачі, є степеневою функцією з раціональним показником $r = -0{,}56$.

1) Потрібно знайти значення цієї функції для значень аргументу t : 0,5 год, 1 год, 2 год.

Тому

$I(0{,}5) = 13{,}1 \cdot (0{,}5)^{-0{,}56} \approx 19{,}3129267466 \approx 19$(мм/год),
$I\ (1) = 13{,}1 \cdot (1)^{-0{,}56} \approx 13{,}1 \approx 13$ (мм/год),
$I\ (2) = 13{,}1 \cdot (2)^{-0{,}56} \approx 8{,}88575833 \approx 9$ (мм/год).

2) Щоб знайти тривалість опадів, при якій максимальна інтенсивність буде дорівнювати 3,6 (мм/год) потрібно розв'язати рівняння $3{,}6 = 13{,}1 \cdot t^{-0{,}56}$ звідки, виконавши відповідні обрахунки методом МПЦ, знаходимо, що

$t = \left(\frac{13{,}1}{3{,}6}\right)^{\frac{1}{0{,}56}} \approx 7{,}2$ (год).

3) Функція $I = 13{,}1 \cdot t^{-0{,}56}$ – визначена для $t > 0$, неперервна і спадна.

Оскільки $t_1 = \frac{2}{3}$ (год)$< t_1 = \frac{3}{4}$ (год), то $I\left(\frac{2}{3}\right) > I\left(\frac{3}{4}\right)$.

Тобто, при тривалості опадів $t_1 = \frac{2}{3}$ (год) максимальна інтенсивність вища.

Відповідь: 1) ≈ 19 мм/год; ≈ 13 мм/год; ≈ 9 мм/год. 2) 7,2 год; 3) максимальна інтенсивність опадів при $t = \frac{2}{3}$ год вища, ніж при $t = \frac{3}{4}$ год.

Тема. Тригонометричні функції

Задача 4. Обчислити заряд кульки q масою $m \approx 2{,}0$ г, що обертається на нитці завдовжки $l \approx 1{,}2$ м навколо нерухомого такого самого точкового заряду q. Період обертання кульки $T \approx 3{,}2$ с, а кут відхилення від вертикалі $\alpha \approx 25°$. Розв'язання задачі зводиться до обчислення значення виразу:

$q = l \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon_0 m\left(g \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2} l \cdot \sin\alpha\right)}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2.

Розв'язання

Із таблиць знаходимо значення електричної сталої

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-1}\ \ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$.

1) Знаходимо спочатку значення $\text{tg}\alpha$, $\sin\alpha$, якщо $\alpha \approx$ $\approx 25°$. Виберемо за межу похибки для кута α один градус (ціна поділки). Тоді маємо : $24^\circ < \alpha < 26^\circ$.

$\text{tg}24^\circ = 0{,}445228685 \ldots$, $m_1 = 0{,}44$, $M_1 = 0{,}49$.

$\text{tg}26^\circ = 0{,}487732589 \ldots$, $\text{tg}25^\circ \approx 0{,}465$, $h_1 = 0{,}025$.

$\sin24^\circ = 0{,}406736643 \ldots$, $m_2 = 0{,}40$, $M_2 = 0{,}44$.

$\sin26^\circ = 0{,}438371147 \ldots$, $\sin25^\circ \approx 0{,}42$, $h_2 = 0{,}02$.

Обидва значення функції беремо з двома значущими цифрами.

Отже, $\text{tg}25^\circ \approx 0{,}46$, $\sin25^\circ \approx 0{,}42$.

2) $g \cdot \text{tg}\alpha = 9{,}8 \cdot 0{,}46 = 4{,}508 \approx 4{,}51$.

3) $\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot \sin\alpha = \frac{4 \cdot 3{,}14^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}42 = 1{,}94110875 \approx$

$\approx 1{,}94$.

4) $g \cdot \text{tg}\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l \cdot \sin\alpha \approx 4{,}51 - 1{,}94 = 2{,}57$.

Зауважимо, що $m \approx 2 \cdot 10^{-4}$ кг.

5) $\sqrt{4\pi\varepsilon_0 \cdot m \cdot 2{,}57} =$

$= \sqrt{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}57} \approx 23{,}9 \cdot 10^{-8}$.

6) $q = l \cdot \sin\alpha \cdot 23{,}9 \cdot 10^{-8} \approx 1{,}2 \cdot 0{,}42 \cdot 23{,}9 \cdot 10^{-8} \approx$

$\approx 12 \cdot 10^{-8}$.

Відповідь: $q \approx 12 \cdot 10^{-8}$ (Кл).

Задача 5. *Прикладна задача з фізики.* Міну випущено з міномета зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Визначте максимальну висоту h_{max} підняття міни і на яку відстань пролетить міна при такій швидкості. Під яким кутом до горизонту слід пускати міну, щоб дальність польоту була максимальною? Обчисліть названі величини для армійського міномета М120-15 «Молот» (українського виробництва), знаючи що його дульна швидкість становить $v_0 \approx 325$ *м/с*, а постріл зроблено під кутом $\alpha \approx 60^\circ$, опором повітря знехтувати.

Розв'язання

1) Побудова математичної моделі для розв’язання задач.

Виконаємо ілюстративний рисунок, на якому зазначимо положення міни і напрямок швидкості її руху приведені міркування учні можуть знайти в шкільному підручнику з фізики для 10 класу.

Оскільки опір повітря відсутній, то можна скористатися законом збереження енергії. Пригадаємо, що під час руху тіла під дією сили тяжіння проекція швидкості на горизонтальну вісь *OX* не змінюється $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$.

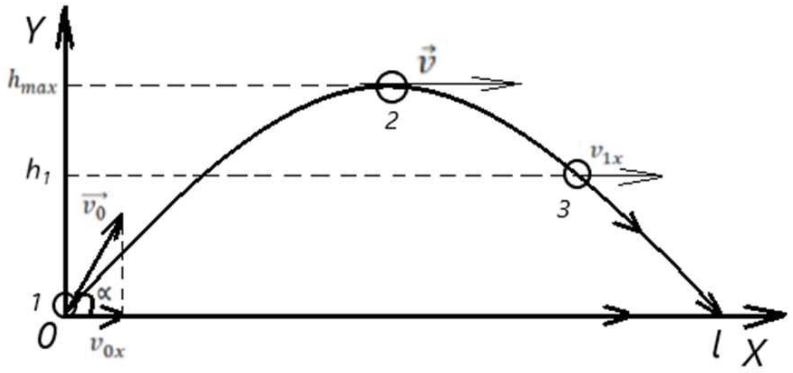


Рис. 52

У верхній точці траєкторії швидкість руху тіла напрямлена горизонтально, тому $v_x = v$. Для кожного положення міни запишемо вираз для розрахунку повної механічної енергії:

1. $W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv_0^2}{2}$;

2. $W = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_{max} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + mgh_{max}$;

3. $W = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1$.

Оскільки повна механічна енергія зберігається, маємо дві рівності:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + mgh_{max}; \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Помноживши обидві рівності на 2 та скоротивши на m, знайдемо невідому величину h_{max}:

$$v_0^2 = v_0^2\cos^2\alpha + 2gh_{max} \Rightarrow 2gh_{max} = v_0^2 - v_0^2\cos^2\alpha,$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2q} \qquad (1)$$

Тоді $l = v_0\cos\alpha \cdot 2t$, де t – час підйому на висоту h_{max}, тобто час протягом якого вертикальна складова швидкості зменшиться до 0 $t = \frac{v_0\sin\alpha}{q}$.

Отже, $l = v_0\cos\alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0\sin\alpha}{q} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{q}$,

$$l = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{q} \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) математичні моделі, за якими розв'язується дана фізична задача.

Дальність польоту міни для заданої швидкості v_0 буде максимальною у випадку, коли $\sin 2\alpha = 1$. За допомогою одиничного тригонометричного кола знаходимо, що в цьому випадку $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$. Отже, теоретично, найдовшу відстань міна пролетить тоді, коли постріл здійснено під кутом 45° до горизонту.

Обчислимо шукані величини для міномета М120-15 «Молот».

Відомо, що $v_0 \approx 325$ м/с, $q \approx 9{,}8$ м/с, $\alpha \approx 60^\circ$. Обчислення виконаємо МПЦ. Тоді,

$$h_{max} = \frac{325^2\ \sin^2 60^\circ}{2\cdot 9{,}8} = \frac{105\,625\cdot 0{,}75}{19{,}6} = 4041{,}7726 \approx 4042 \text{ м},$$

$$l = \frac{325^2\ \sin\ \ 120^\circ}{2\cdot 9{,}8} \approx \frac{105\,625\cdot 0{,}866}{9{,}8} \approx 9334 \text{ м}.$$

Відповідь: $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2\cdot q}$, $l = \frac{v_0^2\sin\ \ 2\alpha}{q}$, $h_{max} \approx 4042$ м, $l \approx 9334$ м.

Зауваження. Якщо враховувати опір повітря, то значення знайдених величин будуть меншими. У технічних

характеристиках міномета М120-15 «Молот» вказується, що ефективна дальність стрільби з нього до 7 000 *м*.

Тема. Похідна та її застосування

1) Застосування похідної до знаходження наближених значень функції.

Якщо функція диференційовна в точці x_0, то це означає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. Тому для ***досить малих*** Δx виконується наближена рівність: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx f'(x_0)$.

З неї випливає, що $\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ або

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x.$$

Добуток $f'(x_0)\cdot\Delta x$ називають диференціалом функції в точці x_0 і позначають d_x. Отже, $d_x=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Отже, маємо:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x+f(x_0) \quad (1)$$

Ця формула часто застосовується в іншому вигляді:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+d_x.$$

Приклад 6. $y=\sqrt[n]{x}$. Користуючись формулою (1) матимемо:

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{n\cdot x_0}\cdot\Delta x \quad (x\neq 0) \qquad (2)$$

Застосування:

а) Обчислити $\sqrt{4{,}01}$.

Згідно формули (2) маємо: $\sqrt{4{,}01}=\sqrt{4+0{,}01}=\sqrt{4}+$ $+\frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4}\cdot 0{,}01=2+0{,}25\cdot 0{,}01=2{,}0025$. Якщо обчислення здійснити за допомогою калькулятора чи таблиць, то $\sqrt{4{,}01}\approx 2{,}002498440$ (з дев'ятьма знаками після коми). Отже, $\sqrt{4{,}01}\approx 2{,}0025$.

б) Обчислити $\sqrt[5]{1028}$.

Оскільки $1028=1024+4=2^{10}+4$, то

$$\sqrt[5]{1028} = \sqrt[5]{1024 + 4}.$$

Щоб скористатись формулою (2) винесемо з під знака кореня число 1024.

Маємо:

$$\sqrt[5]{1028} = 4 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{4}{1024}} = 4 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{256}} \approx 4 \cdot \left(\sqrt[5]{1} + \frac{\sqrt[5]{1}}{5 \cdot 1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{256}\right) = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{1280}\right) = 4 + \frac{1}{320} \approx 4 + 0{,}003125 =$$

$$= 4{,}003125.$$

Якщо провести обчислення на калькуляторі, то отримуємо $\sqrt[5]{1028} \approx 4{,}00312013$. Отже, можна вважати, що $\sqrt[5]{1028} \approx 4{,}0031$.

Примітка. Застосовуючи формулу (1) важливо підібрати «вдало» аргумент x_0 так, щоб значення $f(x_0)$ можна було відшукати швидко і при цьому значення Δx було достатньо малим. У випадках а) і б) ця рекомендація і була врахована.

Задача 7. Нехай популяція бактерій у момент часу t (час в секундах) нараховує $x(t)$ особин:

$$x(t) = 3000 + 100t^2.$$

Ця формула виражає залежність кількості особин від часу. Знайти швидкість росту популяції: а) у момент часу 1 с; б) у момент часу 60 с.

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі (*математизація*)

Розв'язання даної задачі передбачає розуміння поняття ***популяція***, тому перед створенням математичної моделі до задачі, варто учням наголосити на цьому:

Популяція – це сукупність організмів одного виду, що займають обмежений ареал (територія поширення якогось об'єкта або явища), мають спільне походження за фенотипом та географічно ізольовані від інших популяцій

даного виду, можуть вільно схрещуватися і дають плодюче потомство.

В умові задачі задано функцію росту популяції залежно від часу, яка має такий вигляд: $x(t) = 3000 + 100t^2$, де x – кількість особин, що виражається додатнім числом.

Перекладаючи вимогу запропонованої задачі на мову математики, отримуємо **математичну задачу**:

визначити похідну функції $x(t) = 3000 + 100t^2$ в точці $t = 1$ та $t = 60$.

2. Хід розв'язання математичної задачі (*математичне опрацювання*).

Знаходимо похідну $X'(t)$ від заданої функції:

$X'(t) = (3000 + 100t^2)' = 200t$.

Отже, маємо $X'(t) = 200t$ – швидкість росту популяції.

Знаходимо значення похідної $X'(t)$ при $t = 1$ та $t = 60$:

а) $X'(1) = 200 \cdot 1 = 200$ – швидкість росту популяції через 1 с;

б) $X'(60) = 200 \cdot 60 = 1200$ – швидкість росту популяції через 60 с.

Розв'язання математичної задачі завершене.

3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології (*інтерпретація*).

Отже, швидкість росту популяції в момент часу $t = 1$ становить 200 ос/с; а в момент часу $t = 60$ – 1200 ос/с. Зрозуміло, що ці значення ідеальні і близькі до реальних.

Відповідь: а) 200 ос/с; 1200 ос/с.

Задача 8. Число *N* бактерій у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + t^2$. Скільки бактерій було в біомасі у початковій момент $t = 0$? Яка швидкість приросту числа бактерій в момент часу 3,5 хв?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі.

Ознайомившись з умовою задачі, маємо функцію кількості бактерій, що виражена таким чином:

$N(t) = 450 + 52t + t^2$, де N – кількість бактерій, що виражається додатним числом.

Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту числа бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге запитання використаємо правило знаходження похідної. Надамо t приросту Δt. Знайдемо приріст залежної змінної ΔN:

$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = 450 + 52(t + \Delta t) + 2(t + \\ + \Delta t)^2 - (450 + 52t + 2\Delta t^2) = 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \\ = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t)$.

Складемо відношення $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t$.

Для того, щоб знайти швидкість приросту числа бактерій у момент часу t, необхідно знайти границю цього відношення. Отже, маємо **математичну задачу**:

знайти границю відношення $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(52 + 4t + 2\Delta t)$ в момент часу $t = 3{,}5$ хв.

2. Хід розв'язання математичної задачі.

Знайдемо границю відношення, якщо $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}(52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t.$$

Знайдемо швидкість приросту числа бактерій при $t = 3{,}5$ хв.

$N(3{,}5) = 52 + 4 \cdot 3{,}5 = 52 + 14 = 66$ (бакт./хв).

Розв'язання математичної задачі завершене.

3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології.

Отже, швидкість приросту числа бактерій в момент часу $t = 3{,}5$ хв становить приблизно 66 бакт./хв.

Відповідь: 450 бактерій, приблизно 66 бакт./хв.

Задача 9. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено у годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ та $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Розв'язання

1. Створення математичної моделі до задачі.

Після ознайомлення з умовою задачі та перекладаючи її на мову математики, ми маємо усвідомити, що розв'язання даної задачі зводиться до відшукання максимумів функцій $r_1(t) = te^{-t}$ та $r_2(t) = t^2e^{-t}$.

2. Хід розв'язання математичної задачі.

Перш за все, продиференціюємо функції $r_1(t)$ та $r_2(t)$, що визначені та неперервні на проміжку $(0; \infty)$ і розв'язавши рівняння $(1-t)e^{-t} = 0$ і $(2-t)te^{-t} = 0$, з'ясуємо, що ці функції на вказаному проміжку мають такі стаціонарні точки $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 0$. Оскільки час $t > 0$, то на всій області визначення кожна функція має єдину стаціонарну точку $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. При переході через стаціонару точку знак похідної змінюється з «+» на «–». Отже, на підставі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $t_1 = 1$ є точкою максимуму функції $r_1(t)$, а точка $t_2 = 2$ є точкою максимуму функції $r_2(t)$. Знайдемо максимуми функцій $r_1(t)$ та $r_2(t)$: $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$; $r_2(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$.

Розв'язання математичної задачі завершене.

3. Інтерпретація розв'язків математичної задачі мовою біології.

Отже, знайшовши максимуми функції $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$ та $r_2(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$, можна дійти висновку, що в другого виду ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.

Відповідь: у другого виду ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.

Зауваження. З розв'язанням задач 3-5 учні мають змогу переконатись, що застосування похідної не вичерпується лише фізико-математичними дисциплінами. Похідна має тісний зв'язок з біологією, медициною, хімією, екологією, економікою, тощо. Так, наприклад, у біології, похідна виступає як швидкість зміни чисельності популяції. Завдяки математичному апарату ми можемо пояснювати ті чи інші біологічні залежності та разом з тим формувати в учнів, як математичні, так і біологічні компетентності.

Тема. Показникова та логарифмічна функції

Задача 10. В процесі вливання глюкози її кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t год. складає $C(t) = 10 - 8e^{-t}$. Побудуйте графік $C(t)$ як функції часу при $t \geq 0$. Знайдіть $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ – рівноважну кількість глюкози в крові.

Розв'язання

Областю визначення даної функції є всі невід'ємні числа $(t \geq 0)$, $C(0) = 2$. Для того, щоб з'ясувати, який проміжок є множиною значень даної функції, знайдемо рівноважну кількість глюкози в крові хворого:

$\lim\limits_{t\to\infty} C(10 - 8e^{-t}) = 10 - 8\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 10$ (од).

Отже, $E(C) = [2; 10)$.

Оскільки похідна $C'(t) = 8e^{-t} = \frac{8}{e^{-t}}$ додатна, то функція $C(t)$ зростаюча на всій області визначення. Її графік зображено на рис. 53 (побудований за допомогою ПК).

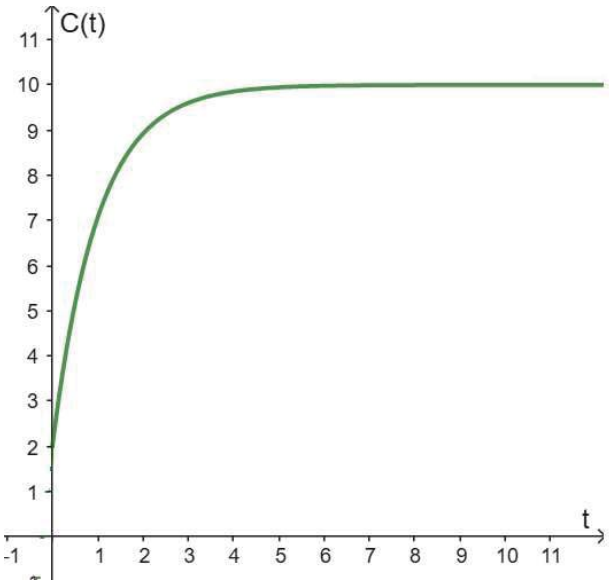


Рис. 53.

Відповідь: рівноважна кількість глюкози 10 одиниць.

Задача 11. Ємність легенів людини виражається функцією її віку $g(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де $x \in [10; 100]$ – вік людини у роках, $g(x)$ – ємність легенів у літрах. Визначте, в якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює. Побудуйте графік функції $g(x)$ у прямокутній декартовій системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 10 років життя на осі абсцис, 1 см на 1 л осі ординат. Встановіть графічно інтервал часу, протягом якого ємність легенів людини продовжує бути більшою або дорівнює тій, яка є в 45 років.

Розв'язання

Знайшовши похідну функції $g(x)$ і розв'язавши рівняння $110 \cdot \frac{3 - \ln x}{x^2} = 0$, з'ясовуємо, що дана функція має на відрізку $[10; 100]$ єдину стаціонарну точку $x_0 = e^3 \approx$ $\approx 20{,}1$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з «+» на «–», то на основі достатньої ознаки існування екстремуму в точці доходимо висновку, що точка $x_0 = e^3 \approx 20{,}1$ є точкою максимуму функції g.

Виходячи з єдиності такої точки на вказаному відрізку, стверджуємо, що в ній функція $g(x)$ набуває найбільшого значення: $g(e^3) = \frac{110(\ln e^3 - 2)}{e^3} = \frac{110}{e^3} \approx 5{,}48$. Отже, у 20-ти річної людини ємність легенів максимальна. Вона наближено дорівнює 5,48 л. Беручи до уваги зростання функції $g(x)$ на відрізку $[10; 20{,}1]$ і спадання на відрізку $[20{,}1; 100]$, склавши таблицю значень функції, побудуємо її графік (рис. 54, побудований за допомогою ПК).

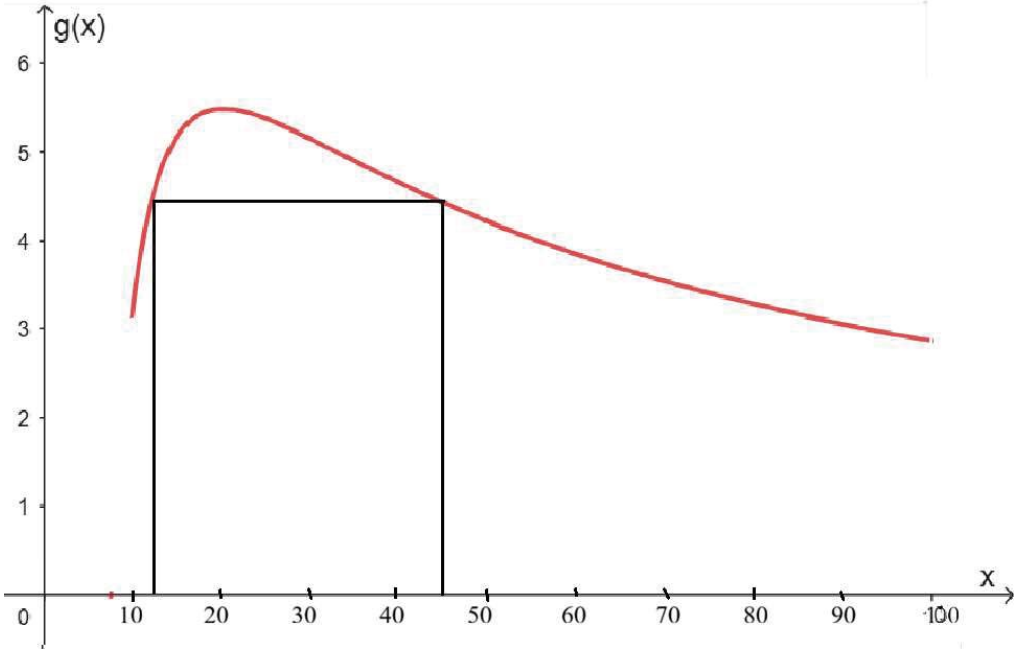


Рис. 54

Відповідь: $t \in [12; 45]$.

Задача 12. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується приблизно на 3 % за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хв, якщо її початкове значення 1 г.

Розв'язання

Математичною моделлю даної задачі є функція $m(t) = (1 + 0{,}03)^{\frac{1}{6}} = 1{,}03^{\frac{1}{6}}$.

Для функції *f,* диференційованої в точці x, і достатньо малих Δx має місце наближена рівність: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скориставшись цією формулою, наближених обчислень маємо:

$$x_0 = 1, \Delta x = 0{,}03, f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1, f'(x_0) = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{-5}{6}} = \frac{1}{6}$$

і, отже, $(1 + 0{,}03)^{\frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}03 \approx 1{,}005$ г.

Відповідь: $\approx 1{,}005$ г.

Тема. Інтеграл та його застосування

Задача 13. Продуктивність праці бригади протягом семигодинної зміни виражається функцією $y(t) = 0{,}004t^2 + 0{,}09t + 20{,}094$. Знайти обсяг випуску продукції за рік (240 робочих змін).

Розв'язання

Обсяг випуску продукції протягом робочого дня є визначеним інтегралом у межах від $a = 0$ до $b = 7$ від функції, що виражає продуктивність праці. (Див. доцільні задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.)

Тому обсяг випуску продукції V обчислюємо як визначений інтеграл.

Отже,

$$V = \int_0^7 (0{,}004t^2 + 0{,}09t + 20{,}094)dt =$$

$$= \left(\frac{0{,}004t^3}{3} + \frac{0{,}09t^2}{2} + 20{,}094t\right)\Big|_0^7 =$$

$$= \frac{0{,}004 \cdot 7^3}{3} + \frac{0{,}09 \cdot 7^2}{2} + 20{,}094 \cdot 7 \approx 0{,}4573 + 2{,}205 +$$

$$140{,}658 = 143{,}3203 \approx 143 \text{ (одиниці).}$$

Тоді обсяг випуску продукції за рік становить $143 \cdot 240 \approx 34\,320$ (одиниць).

Відповідь: ≈34 320 од.

Задача 14. Споживання електроенергії, в кВт год підприємствами та міським населенням з 8 до 18 годин наближено виражається функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де $t -$ кількість годин. Обчислити плату за електроенергію, що споживається містом за цей час, якщо тариф $-$ 4,32 грн за 1 кВт·год.

Розв'язання

За умовою задачі маємо, що 18 – 8 = 10 (год.) місто споживало електроенергію. Тому кількість її за проміжок часу [0;10] обчислюється за допомогою інтеграла. (*Методичний коментар*: споживання електроенергії є функцією часу. Задача схожа до задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Цим і слід скористатись).

Отже, кількість спожитої електроенергії N протягом 10 годин дорівнює:

$$N = \int_0^{10} (10000 - 8t + 15t^2 dt) =$$

$$= (10000t - 8\frac{t^2}{2} + 15\frac{t^3}{3})\Big|_0^{10} =$$

$$= 10000 \cdot 10 - 4 \cdot 100 + 5 \cdot 1000 =$$

$$= 104600 \text{ (кВт} \cdot \text{год)}.$$

Оскільки тариф на електроенергію 4,32 грн за 1 кВт·год, то плата за електроенергію $P = 104600 \cdot 24{,}36 = 451\,872$ (грн).

Відповідь: 451872 грн.

Задача 15. Водій автомобіля загальмував у той момент, коли швидкість автомобіля дорівнювала ≈ 36 км/год. Знайдіть шлях, який проїде автомобіль за час від $t_1 = 2$ с до

$t_2 = 6$ с, якщо при ввімкнених гальмах автомобіль рухається з прискоренням $a = 5$ м/с^2.

Вказівка. Під час розв'язування задачі використаємо формулу швидкості $v = v_0 + at$, де $a -$ прискорення.

Розв'язання

Починаючи розв'язувати задачу слід перевести швидкість автомобіля 36 км/год в м/с:

$36\frac{\text{км}}{\text{год}} = \frac{36 \cdot 1000}{3600}$ м/с $= 10$м/с. Тоді $v(t) = 10 - 0{,}5t$ м/с.

Використовуючи формулу $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, одержану під час розв'язування доцільної задачі, маємо:

$$S = \int_2^6 (10 - 0{,}5t)dt = 10t - \frac{t^2}{4}\Big|_2^6 = 60 - 9 - 20 + 1 =$$

$= 32$ (м).

Відповідь: 32 м.

Задача 16. При розтягуванні пружини на 5 см виконана робота в 29,43 Дж. На скільки розтягнеться пружина, якщо затратити роботу в 9,81 Дж? *(Вказівка.* За законом Гука, сила *F* пропорційна розтягуванню або стисканню пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягування або стискання.)

Розв'язання

Для розв'язування задачі формулу роботи

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

потрібно використати двічі.

1) $A_1 = 29{,}43 = \int_0^{0{,}05} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = \frac{k \cdot 0{,}0025}{2}$.

Звідки обчислюють, що $k = 23544$.

Отже, $F(x) = 23544x$.

2) $A_2 = 9{,}81 = \int_0^{x_2} 23544xdx = 23544\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_2} = 11772x_2^2$.

Звідси $x_2^2 \approx 8{,}3 \cdot 10^{-4}$, $x_2 > 0$. Отже, маємо $x_2 \approx 0{,}029(\text{м}) \approx 2{,}9(\text{см})$.

Відповідь: 2,9 см.

Тема. Рівняння, нерівності та їх системи

Задача 17. Компанії «Омега» і «Тета» пропонують на біржі однакові партії однотипних автомобілів за різними цінами. Якщо компанія «Омега» продасть на 2, а компанія «Тета» на 3 автомобілі менше пропонованої кількості, то перша заробить 112 тис. г. од., а друга майже 135 тис. г. од. Якщо ж, навпаки, компанія «Омега» продасть на 3 автомобілі, а компанія «Тета» – на 2 автомобілі менше пропонованої кількості, то компанія «Омега» заробить на 32 тис. г. од. менше, ніж компанія «Тета». Який виторг від реалізації компаніями «Тета» і «Омега» усіх автомобілів? Скільки автомобілів збирається реалізувати кожна з компаній?

1. Створення математичної моделі (математизація).

З умови задачі можна дійти висновку, що кількість автомобілів, які реалізувала кожна з компаній, однакова, але невідома. Отже, їх можна виразити через змінні: позначимо змінною x кількість реалізованих кожного компанією автомобілів. Тоді змінною y (тис. г. од.) можна позначити ціну одного автомобіля з компанії «Омега», а змінною z (тис. г. од.) – ціну автомобіля компанії «Тета». Оскільки кількість автомобілів та ціна кожної одиниці з них будуть натуральними числами, то робимо висновок, що змінні x, y та z – натуральні числа.

Користуючись залежністю між кількістю товару (к), ціною (ц) і вартістю (В) (формулою В = к · ц) будуємо математичну модель. Отримуємо систему рівнянь – математичну модель прикладної задачі, вимога якої знайти розв'язки системи.

$$\begin{cases} (x-2)y = 112, \\ (x-3)z = 135, \\ (x-2)z - (x-3)y = 32. \end{cases}$$

2. Дослідження математичної моделі (математичне опрацювання)

Розв’язуємо дану систему рівнянь, використовуючи знання з алгебри.

Перетворимо систему:

$$\begin{cases} xy-2y=112, \\ xz-3z=135, \\ xz-2z-xy+3y=32; \end{cases} \quad \begin{cases} xy-2y=112, \\ xz-3z=135, \\ xz-2z-xy+3y=32; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy-2y=112, \\ xz-3z=135, \\ xz-xy+3y-2z=32. \end{cases}$$

Доповнимо систему різницею другого і першого рівнянь:

$$\begin{cases} xy-2y=112, \\ xz-3z=135, \\ xz-xy+3y-2z=32, \\ xz-xy+2y-3z=23. \end{cases}$$

Тепер можемо замість третього і четвертого рівнянь записати їх різницю

$$\begin{cases} xy-2y=112, \\ xz-3z=135, \\ y+z=9. \end{cases}$$

Виразимо з першого і другого рівняння y і z через x і підставимо отримані вирази $y=\frac{112}{x-2}$ та $z=\frac{135}{x-3}$ у третє рівняння. Отримуємо таке рівняння відносно x:

$$\frac{112}{x-2}+\frac{135}{x-3}=9.$$

Розв’яжемо його:

$$112(x-3)+135(x-2)=9(x-2)(x-3),$$

$$9x^2-292x+660=0.$$

Коренями рівняння є $x_1=30, x_2=\frac{22}{9}$. Очевидно, що значення $\frac{22}{9}$ не задовольняє умову задачі. Далі матимемо, що $y=\frac{112}{28}=4$, $z=\frac{13}{27}=5$. Отже, систему задовольняють числа: $x=30, y=4, z=5$.

3. Відбір розв’язків прикладної задачі (інтерпретація)

Виходячи з умови прикладної задачі маємо, що вартість одного автомобіля компанії «Тета» становить 5 тис. г. од, а одного автомобіля компанії «Омега» – 4 тис. г. од. Кількість автомобілів, які збирається реалізувати кожна з компаній $x = 30$. Отже, компанії збираються продати по 30 автомобілів кожна. Знаходимо можливий виторг кожної з компаній:

$5 \cdot 30 = 150(\text{тис. грош. од.}) - \text{виторг компанії "Тета";}$

$4 \cdot 30 = 120(\text{тис. грош. од.}) - \text{виторг компанії "Омега".}$

Відповідь: компанії збираються реалізувати по 30 автомобілів кожна; можливий виторг компанії «Тета» становитиме 150 тис. грош. од., а компанії «Омега» 120 тис. г. од.

Тема. Координати і вектори

Задача 18. Вантаж рівномірно переміщують по горизонтальній поверхні в заданому напрямі (або вздовж рейки або по спеціальних напрямних) за допомогою двох канатів, прикріплених до тракторів. Один з канатів утворює з напрямом руху приблизно кут 15°, а другий 20° (рис. 55). Сила натягу кожного канату 50 кН. Яку роботу буде затрачено для переміщення вантажу на 100 м?

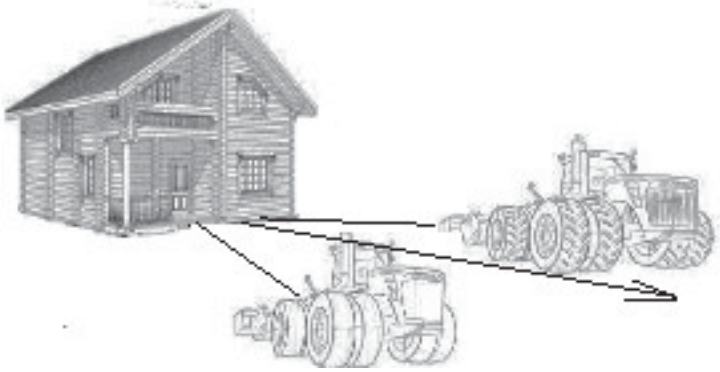


Рис. 55

Розв'язання

На рис. 56 зображено напрям дій сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ та напрям переміщенню *OA*. Точка *O* – точка прикладання сил.

Спроєціюємо $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ на вісь OA. Тоді $\vec{P} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ – сила, яка діє на вантаж. З прямокутних трикутників OBF_1 і OBF_2 знаходимо, що $OB = F_1 \cdot \cos 20°,\ OC = F_2 \cdot \cos 15°$.

Тоді

$P = F_1 \cdot \cos 20° + F_2 \cdot \cos 15° = 50(\cos 20° + \cos 15°) \approx$

$\approx 50 \cdot (0{,}9397 + 0{,}9659) \approx 95{,}1$ (kH).

Роботу, витрачену на переміщення вантажу на 100 м знаходимо за формулою: $A = P \cdot S = 95{,}1 \cdot 100 = 9510$ (кДж).

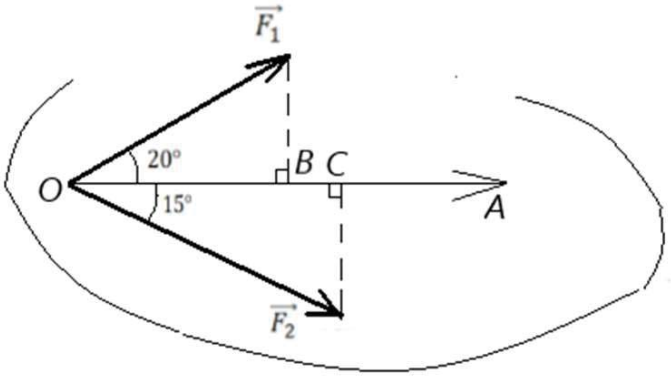


Рис. 56

Відповідь: ≈ 9510 кДж.

Задача 19. Куля масою 500 кг і об'ємом 0,7 м^3 утримується в підводному положенні трьома тросами однакової довжини (рис. 57). Обчислити силу натягу кожного троса, якщо кут між двома будь-якими тросами дорівнює 60°.

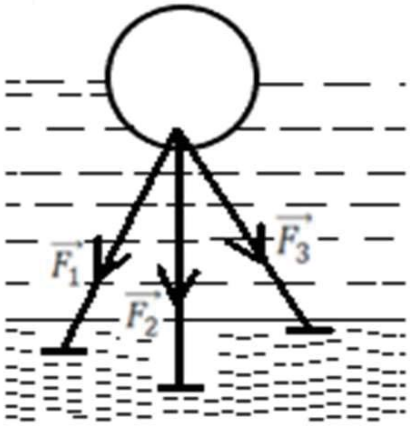


Рис. 57

Розв'язання

Оскільки маса витісненої кулею води на 200 кг більша за масу кулі, то на неї діє підіймальна сила $\vec{F}$, величина якої дорівнює ≈ 2кН.

Умовою рівноваги кулі є рівність:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F} \qquad (1)$$

де $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ – сили натягу троса.

Очевидно, $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|$. Позначимо цю величину x. Піднісши до квадрата рівність (1), дістанемо:

$$\overrightarrow{F_1^2} + \overrightarrow{F_2^2} + \overrightarrow{F_3^2} + 2\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2} + 2\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_3} + 2\overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{F^2}$$

або $3x^2 + 3 \cdot 2x^2 \cos 60° = \overrightarrow{F^2}$,

звідки $x^2 = \frac{1}{6}\overrightarrow{F^2}$ і $x = \frac{\sqrt{6}}{6}\left|\overrightarrow{F}\right| \approx 0{,}8$ кН.

Відповідь: $\approx 0{,}8$ кН.

Тема. Многогранники

Задача 20. Перпендикулярний переріз насипу шосе має форму рівнобічної трапеції з верхньою основною 8 м і бічними сторонами 2,6 м і висотою 2,4 м (рис. 58). Скільки кубічних метрів ґрунту потрібно привезти для будівництва 10 м такого шосе?



Рис. 58

Розв'язання

Числові дані в задачі – наближені числа. Це має бути враховане під час обчислень. Віртуальною ідеальною моделлю такого десятиметрового насипу може бути геометричне тіло (рис. 59) –чотирикутна пряма призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, яка лежить гранню AA_1D_1D на площині α.

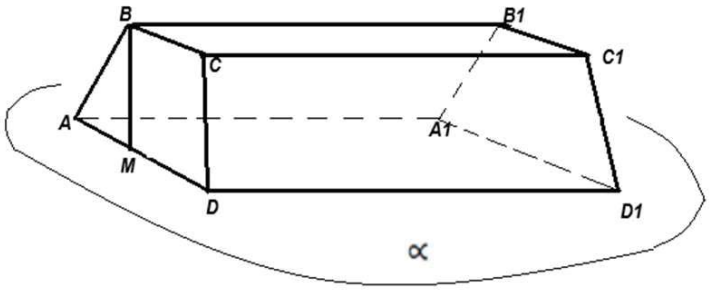


Рис. 59

Об’єм призми обчислюємо за формулою:

$$V_{\text{пір.}} = S_{ABCD} \cdot BB_1 \ . \qquad (1)$$

Відомо, що $BB_1 \approx 10$ м, $BC \approx 8$ м, $AB \approx 2{,}6$ м, $BM \approx 2{,}4$ м , $BM \perp AD$.

Скористаємося методом наближених обчислень МПЦ. Площу трапеції $ABCD$ обчислюємо за формулою:

$$S_{ABCD} = \frac{BC+A}{2} BM \ . \qquad (2)$$

З прямокутного ΔBMA визначаємо, що

$AM = \sqrt{AB^2 = BM^2} = \sqrt{2{,}6^2 - 2{,}4^2} = \sqrt{5 \cdot 0.2} = 1$ (м).

Тоді $AD = BC + 2AM = 8 + 2 = 10$ м.

Отже, $S_{ABCD} = \frac{8+10}{2} \cdot 2{,}4 = 21{,}6$ (м^2). Підставимо отримане значення в (1) і матимемо:

$V_{\text{пір.}} = 21{,}6 \cdot 10 = 216$ (м^3).

Відповідь: ≈ 216 м^3.

Тема. Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл

Задача 21. Скільки витратили квадратних метрів жерсті, щоб виготовити 1 млн. консервних банок діаметром 10 см і висотою 5,0 см? (*на шви та відходи додайте 15 % матеріалу*).

Розв’язання

Методичний коментар. За геометричну модель консервної банки можна обрати прямий круговий циліндр, діаметр кола основи якого дорівнює 10 см, а твірна – 5.0 см

(рис. 60 а)). Банка виготовляється з двох кругів – основ та прямокутника – розгортка бічної поверхні (рис. 60 б)).



а) б)

Рис. 60

Отже, потрібно обчислити площу прямокутника та площі двох рівних кругів. До цієї площі додати ще 15 % від матеріалу на шви. Таким чином отримаємо витрати матеріалу на одну банку. Щоб дізнатися витрати матеріалу на 1 млн. консервних банок, потрібно витрати на одну банку помножити на мільйон. Важливо звернути увагу на те, що числові дані в задачі подано з двома значущими цифрами. Це слід врахувати під час проведення обчислень.

Довжина прямокутника $c = 2\pi r$, де за умовою $r = 5$ см, а ширина $l = 5{,}0$ см. Тоді його площа буде дорівнювати $S_1 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 5{,}0 = 50\pi$ см^2. Отже, на одну банку витрачається (без швів) $S_3 = 100\pi = 50\pi + 25\pi + 25\pi$ см^2. Від цієї суми потрібно підрахувати кількість матеріалу на шви. Це буде $S_3 = 115\pi$ см^2. А на 1 млн. банок витрати будуть становити:

$S = 115 \cdot \pi \cdot 10^6$ см^2 $= 115 \cdot \pi \cdot 10^2$ м^2 $\approx 36\,000$ м^2.

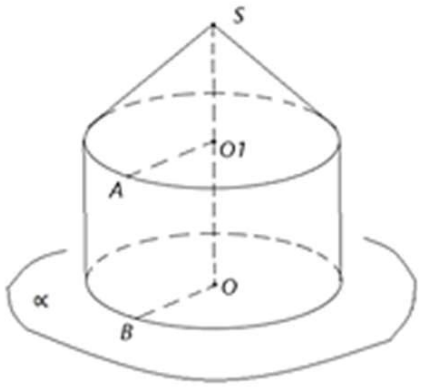
Відповідь: $\approx 36\,000$ м^2.

Задача 22. Скирта сіна має форму циліндра з верхівкою у вигляді конуса (рис. 61 а)). Довжина кола основи скирти дорівнює 15,7 м, висота скирти 4 м, а висота циліндричної її частини 2,2 м. Знайдіть масу скирти, якщо густина сіна дорівнює 0,03 г/см^3.

Розв'язання

Ідеальною моделлю скирти може бути геометричне тіло, яке є об'єднанням двох тіл: циліндра і конуса (рис. 61 б)). Основа *конуса* і *основа циліндра* – рівні круги. SO – висота скирти, OO_1 – висота циліндричної частини. $SO_1 =$ 1,8 м висота конуса, $OO_1 = 2{,}2$ м.





а) б)

Рис. 61

Об'єм скирти знаходимо як суму об'ємів конуса і циліндра:

$$V_{\text{ск.}} = V_{\text{к.}} + V_{\text{ц.}} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot O_1A^2 \cdot SO_1 + \pi \cdot AO_1^2 \cdot OO_1$$

$$V_{\text{ск.}} = \pi \cdot AO_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}SO_1 + OO_1\right)$$

Але $\frac{1}{3}\,SO_1 + OO_1 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}8 + 2{,}2 = 0{,}6 + 2{,}2 = 2{,}8$ м.

Оскільки довжина кола основи циліндра дорівнює 15,7 м, то знаходимо радіус основи косинуса:

$2\pi \cdot AO_1 = 15{,}7$, $AO_1 = \frac{15{,}7}{2\pi}$ *м.*

Отже, $V_{\text{ск.}} = C \cdot \frac{15{,}7}{2\pi} \cdot 2{,}8 = \frac{15{,}7^2 \cdot 2{,}8}{\pi \cdot 4} = \frac{15{,}7^2 \cdot 1{,}4}{2\pi}$,

$V_{\text{ск.}} \approx \frac{345{,}086}{2 \cdot 3{,}14} \approx 54{,}95$ м^3. Виразимо густину сіна в тонах на метр кубічний $\rho = 0{,}03\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0{,}03\,\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$. Тоді маса скирти буде: $M = V_{\text{ск.}} = 54{,}95 \cdot 0{,}03 \approx 1{,}6485$ т.

Округлимо результат до десятих, маємо: $M \approx 1{,}6$ т.
Відповідь: $M \approx 1{,}6$ т.

3.3 Наближені обчислення під час вивчення рівнянь і нерівностей

Учням звичніше користуватися градусною мірою кута, тому коли постає питання, як діяти у випадку, якщо кут заданий у радіанах, вони одразу намагаються перевести його міру в градуси. Але під час такого переведення з'являється похибка округлення, яка накладається на вже існуючу похибку вимірювання. Тому значення тригонометричної функції буде менш точним. Цього можна уникнути, якщо безпосередньо знаходити значення функції при наближеному значенні аргументу, вираженому у радіанах.

У профільних класах, де математика вивчається на поглибленому рівні, доцільно звернути увагу на те, що для малих кутів, близьких до нуля, виконуються наближені рівності $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$. Вони широко використовуються учнями на уроках фізики у 10 класі під час виконання лабораторних і практичних робіт. При цьому кути вимірюються у радіанах. Такі рівності ще раз підкреслюють, важливість радіанної міри кута.

Наприклад, $\sin 2^{\circ} \approx \sin(2 \cdot 0{,}01745) = \sin 0{,}03490 \approx$
$\approx 0{,}0348929 \ldots \approx 0{,}03489.$

На вивчення обернених тригонометричних функцій та їх властивостей у ШКМ відводиться 2-3 години. За цей час учні повинні ознайомитися із графіками обернених тригонометричних функцій, їх властивостями, навчитися знаходити значення функції за відомим значенням аргументу. Тому для побудови графіків достатньо скористатися умовами існування та властивостями

обернених тригонометричних функцій і виготовленими шаблонами.

Доцільно звернути увагу учнів на знаходження значень обернених тригонометричних функцій за відомим значенням аргументу. Якщо він є точним, то розрахунки проводяться за допомогою калькулятора з наперед заданою точністю. Якщо уважно подивитися на клавіатуру калькулятора, то можна помітити, що на ній відсутній арккотангенс числа. Як відомо, тангенс і котангенс однакового, відмінного від нуля аргументу є взаємно оберненими величинами. Тому для додатного аргументу $\text{arcctg}x = \text{arctg}\frac{1}{x}$.

Для знаходження арккотангенса від'ємного числа функція зводиться до додатного аргументу за допомогою рівності $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$. Тоді $\text{arcctg}(-x) = \pi - -\text{arctg}\frac{1}{x}$. Подальші обчислення виконуються за методом підрахунку правильних цифр.

Аналіз результатів такої роботи приводить учнів до запису таких правил-орієнтирів, аналогічних до методу підрахунку правильних цифр:

1. Для арксинуса та арккосинуса кількість правильних цифр значення функції дорівнює кількості десяткових знаків аргументу. Якщо модуль аргументу дорівнює 1,0; 1,00; 1,000;… або 0,0; 0,00; 0,000…, то кількість правильних цифр співпадає з кількістю правильних цифр аргументу, але – не більше двох.

2. Для арктангенса числа, меншого за модулем за 2 та арккотангенса числа, модуль якого менший 0,5, кількість правильних цифр значення функції дорівнює кількості десяткових знаків аргументу.

3. Для арктангенса числа, модуль якого більший за 2 та арккотангенса числа, більшого по модулю за 0,5, кількість

правильних цифр у значенні функції дорівнює кількості цифр в значенні аргументу.

Таким чином, створені учнями правила-орієнтири допоможуть знаходити наближені значення тригонометричних та обернених до них функцій при відомому значенні аргументу. Знайомство з тригонометричними рівняннями розпочинається з найпростіших. У систему вправ, що формують навички їх розв'язування доречно включити завдання на знаходження наближених розв'язків тригонометричних рівнянь.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $\cos x = -0{,}235$.

Розв'язання

За формулою розв'язків можна записати

$$x = \pm \arccos(-0{,}235) + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

За описаними вище правилами кількість правильних цифр значення арккосинуса дорівнює кількості десяткових знаків аргументу, тобто трьом. Використовуючи калькулятор, учні обчислюють значення $\arccos(-0{,}235) = 1{,}80801 \ldots \approx 1{,}81$.

Отже, $x \approx \pm 1{,}81 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, що тригонометричні функції можуть міститися не лише в найпростіших тригонометричних рівняннях.

Тому до уваги слід взяти випадки, коли ліва і права частини рівняння є відповідно алгебраїчною та тригонометричною функціями тощо.

Приклад. Знайти наближені корені рівняння

$$2\sin(3x - 4) = x^2 - 3x - 5.$$

Розв'язання

Скористаємося рекомендованою МОН України програмою GeoGebra і побудуємо в одній системі координат графіки відповідних функцій $y = 2\sin(3x - 4)$ та $y = x^2 - 3x - 5$ (рис. 62).

За допомогою зображення легко визначити, що рівняння має два корені на проміжку (–2; 5).

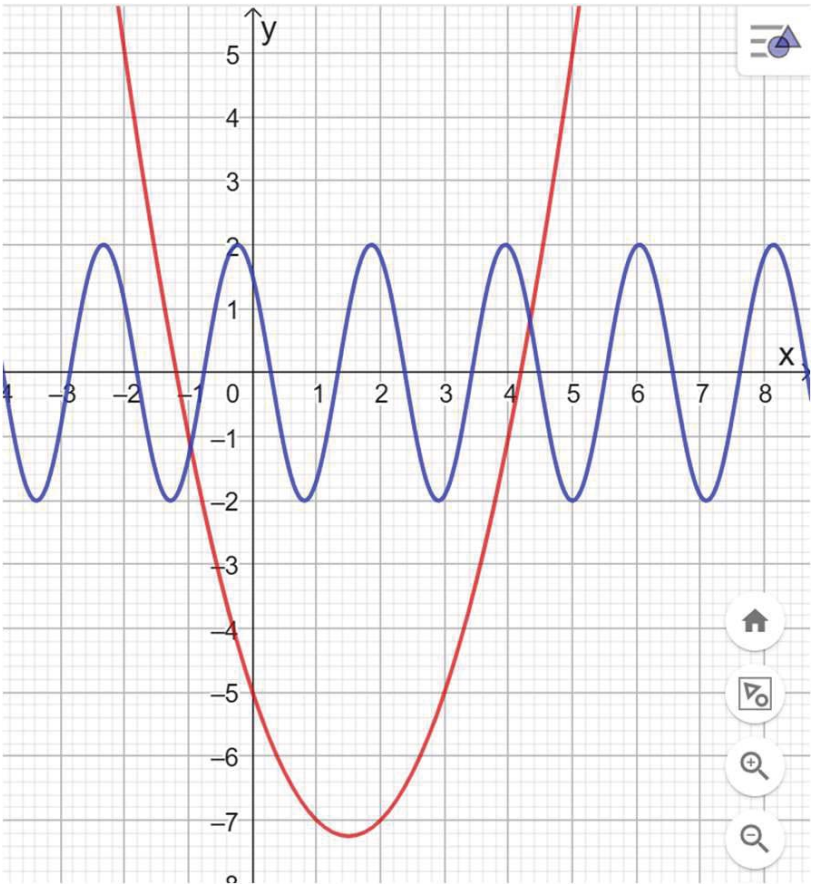


Рис. 62

За допомогою команди  (точка перетину двох ліній) знаходимо координати точок перетину з наперед заданою точністю, яку можна задати самостійно (обираємо, наприклад, округлення до 5 розрядів). Результат показано на рис. 63.

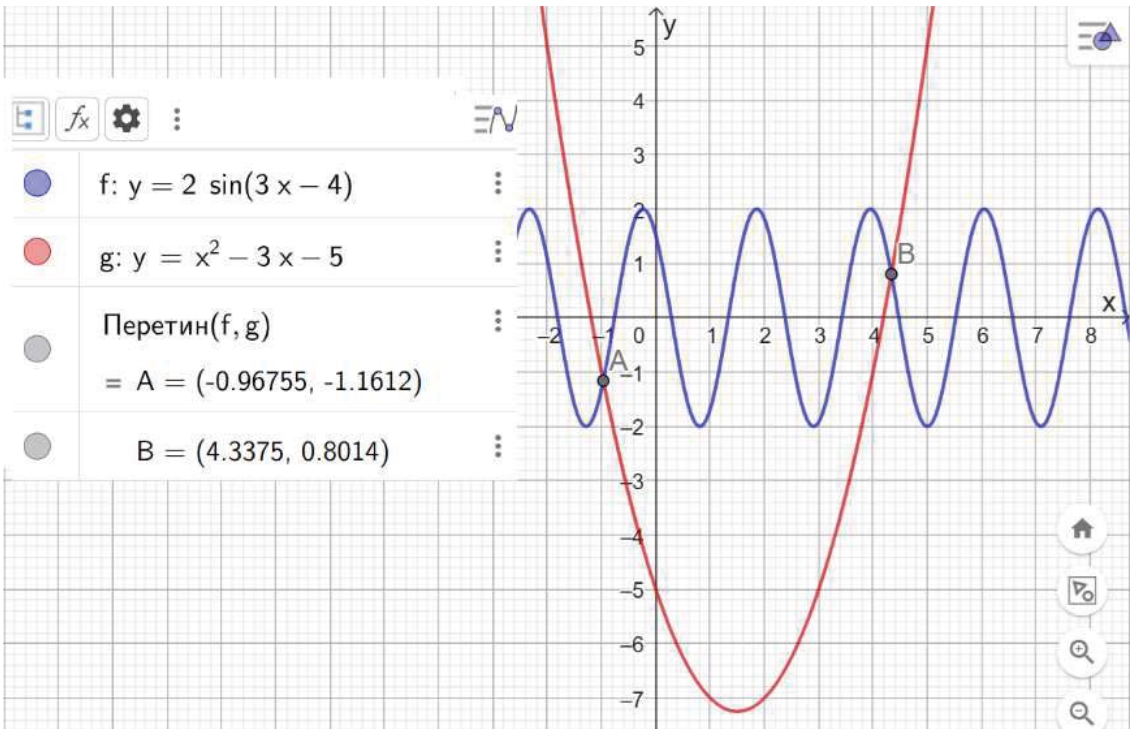


Рис. 63

Таким чином, отримаємо результат (таблиця 12).

Таблиця 12

Координати точок перетину графіків функцій

Точка	Абсциса, x	Ордината, y
A	– 0,96755	– 1,1612
B	4,3375	0,8014

Тоді наближеними коренями даного рівняння є числа $x_1 \approx -0{,}96755;$ та $x_2 \approx 4{,}33750$. Як видно з таблиці, координати другої точки перетину графіків мають чотири десяткових знаки. У відповідь записується п’ять цифр в силу того, що в даному випадку калькулятор залишає п’ять правильних цифр для наближеного значення аргументу. Оскільки остання цифра – п’ятий десятковий знак наближеного значення аргументу дорівнює нулю, то останній, п’ятий знак, калькулятор, не вказує. Слід звернути увагу учнів на те, що в цьому випадку наближене значення

функції записується правильними цифрами, за виключенням, можливо, останньої.

На знайомство з найпростішими тригонометричними нерівностями навчальною програмою відводиться мало часу. У зв'язку з цим їх розв'язування наближеними методами також зручно здійснювати за допомогою комп'ютера.

Поділити їх можна на дві групи:

1) найпростіші нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з деяким дійсним числом;

2) нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з алгебраїчним виразом. Розглянемо кожну з цих ситуацій окремо.

1. Найпростіші нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з деяким дійсним числом. Методика розв'язування таких нерівностей описана в підручниках. Особливість знаходження наближених розв'язків полягає в тому, що значення обернених тригонометричних функцій числа є, як правило, наближеними. Наприклад, потрібно розв'язати нерівність виду $\sin x > 0{,}32$. Тоді за стандартним алгоритмом знаходимо, що $\arcsin 0{,}32 + 2\pi n < x < \pi - \arcsin 0{,}32 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Аргумент арксинуса може бути як точним, так і наближеним. Тому значення функції обчислюється за правилами точного чи наближеного значення аргументу.

Нехай число 0,32 – наближене. Воно містить два десяткових знаки, тому значення арксинуса беремо з двома значущими цифрами. Обчислення здійснюються за допомогою калькулятора. Значення виразу $\pi - \arcsin 0{,}32$ зручно рахувати на інженерному калькуляторі. Під час запису наближених значень не треба забувати, що лівий кінець проміжку округлюється з надлишком, а правий – з недостачею. Межа абсолютної похибки при цьому –

одиниця останнього розряду. Таким чином, множина розв'язків нерівності буде записана у вигляді $x \in [0{,}4 + 2\pi n\,;\, 2{,}8 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$. Значення 0,4 та 2,8 записано з точністю до $h = 0{,}1$ – межа абсолютної похибки.

2. Нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з алгебраїчним виразом. У такому випадку аналогічно до розв'язування рівнянь застосовуємо графічний метод. Знайдені абсциси точок перетину графіків функцій будуть визначати проміжки, які є множиною розв'язків відповідної нерівності.

Як правило, математичними моделями практичних задач, що розглядаються в ШКМ є саме рівняння, їх системи, інколи – нерівності та їх системи. Як зазначалося раніше, розв'язками таких моделей є наближені числа та величини. Тому невід'ємною складовою вивчення показникової та логарифмічної функцій є знаходження наближених розв'язків рівнянь та нерівностей.

Наближені розв'язки показникових рівнянь можуть з'явитися як під час розв'язання графічним, так і аналітичним способом. Деякі показникові рівняння аналітично можуть бути розв'язані лише за допомогою логарифмів, тому виконання вправ такого типу відбувається впродовж вивчення усієї теми. Отже, набір завдань доцільно доповнити такими завданнями.

Приклад. За допомогою обчислювальних засобів знайдіть корінь рівняння $10^{2x-1} = 7$ з точністю до сотих.

Вказівки до розв'язування. Користуючись означенням логарифма, та зробивши відповідні рівносильні перетворення, можна записати, що $x = \frac{\lg 7 + 1}{2}$. Подальше розв'язування зводиться до обчислення значення виразу при точному значенні аргументу. За допомогою калькулятора $\lg 7 = 0{,}84509\ldots$. Учні згадують, що усі цифри числа на екрані монітора – правильні, тому

округлюємо за правилами округлення до тисячних: $\lg 7 \approx 0{,}854$ – остання цифра запасна, її відкидають у відповіді. Отже, $x \approx \frac{0{,}854+1}{2} = 1{,}427 \approx 1{,}43$.

Слід зауважити, що корінь рівняння можна було знайти інакше. Оскільки вираз не є громіздким, можна визначити порядок дій і послідовно їх виконувати на інженерному калькуляторі, який міститься у базовому програмному забезпеченні кожного персонального комп'ютера чи смартфона. Тому бажано звернути увагу старшокласників на такий підхід розв'язування рівнянь.

Систему завдань на розв'язання рівнянь та нерівностей, що містять показникові та логарифмічну функції, слід доповнити вправами на графічне їх розв'язування.

Приклад. Розв'язати рівняння графічно:

а) $\log_2 x = x - 3$; б) $1,5^x = x^2$.

Виконайте завдання за допомогою міліметрової сітки. Перевірте правильність розв'язання за допомогою комп'ютерної програми. Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

Вказівки до розв'язування. Як зазначалося в попередніх параграфах дослідження, побудову графіків функцій в обох випадках можна виконувати двома шляхами: перший – за допомогою методу меж складається таблиця наближених значень функції: а) $y = \log_2 x$; б) $y = 1,5^x$ при заданих значеннях аргументу на відповідних проміжках. На підставі отриманих значень будуються графіки відповідних функцій.

З іншого боку, можна скористатися шаблоном функції $y = e^x$ або $y = \ln x$ відповідно та елементарними геометричними перетвореннями (наприклад, функцію $y = \log_2 x$ можна записати як $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$). Графічне розв'язання рівнянь подано на рисунках 64 і 65.

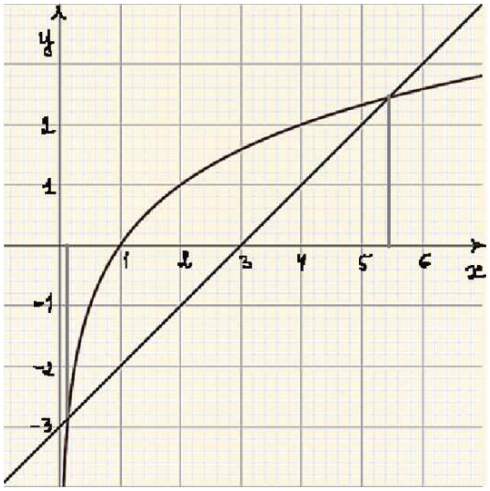


Рис. 64

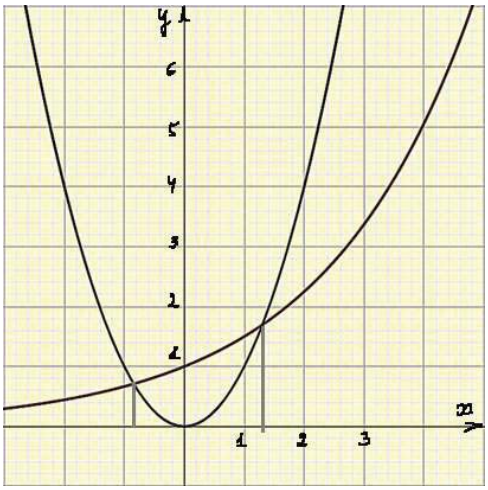


Рис. 65

Як видно, в першому випадку $x_1 \approx 0{,}2, x_2 \approx 5{,}4$, у другому $x_1 \approx -0{,}8$, $x_2 \approx 1{,}7$. Отже, за допомогою міліметрової сітки можна визначити приблизне значення коренів з точністю, не вищою, ніж ціна поділки. Тому «вручну» знайдені корені рівнянь матимуть вигляд:

а) $x_1 = 0{,}2 \pm 0{,}1, x_2 = 5{,}4 \pm 0{,}1$;

б) $x_1 = -0{,}8 \pm 0{,}1$, $x_2 = 1{,}7 \pm 0{,}1$.

Проте слід звернути увагу учнів на те, що під час побудови графіків функцій «вручну» до похибки розрахунків добавляється ще похибка зображення рисунка на листку паперу. Тому точність обчислень є досить ненадійною. З метою перевірки отриманих результатів доцільно звернутися до програми GeoGebra. Її використання допоможе не тільки побачити точне зображення графіків відповідних функцій, а й обчислити координати точок їх перетину з наперед заданою точністю (рис. 66, 67).

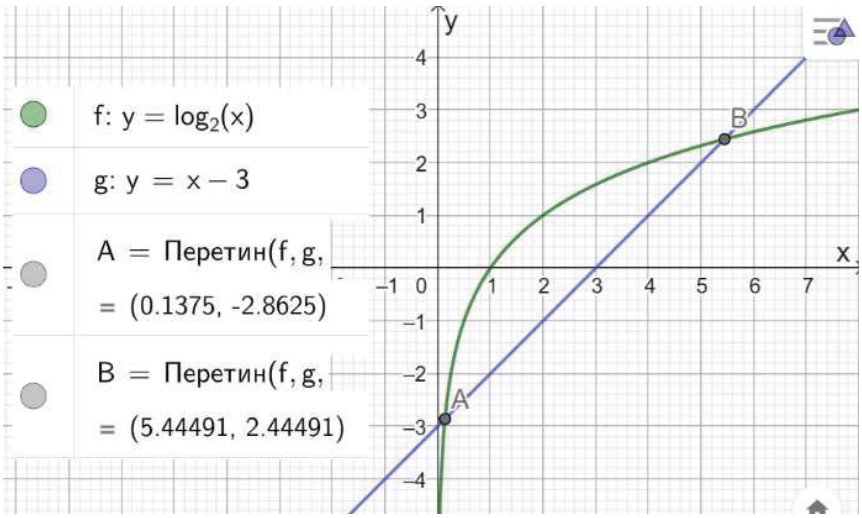


Рис. 66

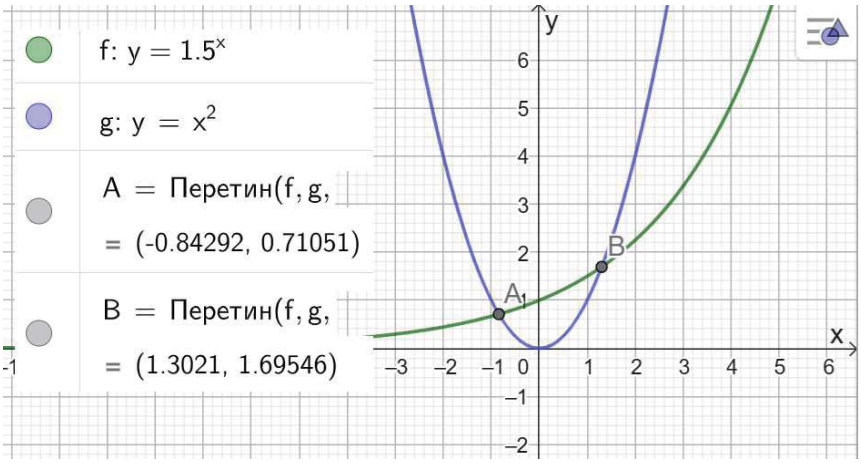


Рис. 67

На підставі сформованих умінь розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння, формуються уміння розв’язувати нерівності відповідного класу. Особливість розв’язання показникових та логарифмічних нерівностей полягає в тому, що потрібно враховувати область визначення логарифмічної функції.

Наприклад, розв’язати нерівність:

а) $1{,}75^x \leq 3 - x$; б) $\log_\pi(3 - x) < (x - 1)^2$.

Розглянемо детальніше кожну з запропонованих нерівностей.

а) За допомогою програми GeoGebra будується графіки функцій $y = 1{,}75^x$ та $y = 3 - x$. Зрозуміло, що множиною розв'язків нерівності буде множина абсцис тих точок координатної площини, для яких графік першої функції розташований не вище від графіка другої. Знайшовши координати точок перетину графіків, можна записати відповідь: $x \in (-\infty; 1{,}1241]$(рис. 68).

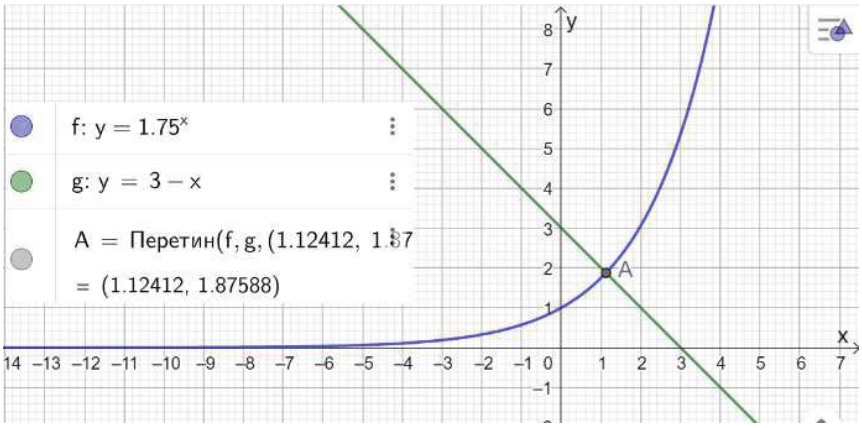


Рис. 68

При цьому учні згадують про те, що незалежно від знаку нерівності – строгий він чи нестрогий, значення кінців проміжку включаємо у відповідь, а правий кінець проміжку округлюємо з недостачею. Причому округлювати можна з точністю до 0,0001 або з меншою точністю, оскільки використання програми дає можливість координати точок перетину знаходити з наперед заданою точністю.

Отже, відповідь буде такою: $x \in (-\infty; 1{,}1241]$.

б) Для розв'язування другої нерівності слід побудувати графіки функцій $y = \log_\pi(3 - x)$ та $y = (x - 1)^2$. Множиною розв'язків нерівності буде множина абсцис тих точок координатної площини, для яких графік першої функції розташований нижче від графіка другої. Знайшовши координати точок перетину графіків, можна записати відповідь: $x \in (-\infty; 0{,}0236] \cup [1{,}5630; 3)$ (див. рис. 69). При цьому потрібно пам'ятати про те, що дана

логарифмічна функція визначена лише для $x < 3$. Тому обов'язково під час запису відповіді слід врахувати цю умову.

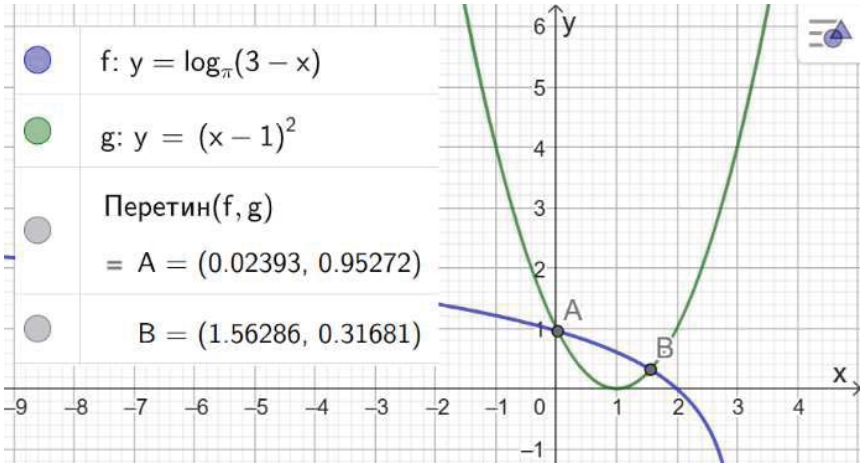


Рис. 69

Наступним кроком доцільно запропонувати розв'язати графічно рівняння, нерівності, які містять складніші вирази, такі, що відповідні графіки важко побудувати на міліметровій сітці. Приклади таких рівнянь (нерівностей) запропоновані в системі задач і вправ до теми «Показникова і логарифмічна функція».

Під час застосування показникової функції для розв'язування прикладних задач, доцільно проілюструвати на прикладах, де вони можуть бути використані для опису явищ природи. Наведемо приклад.

Приклад. Ділянка лісництва складає 58 500 м^3 лісу. Скільки буде лісу на цій ділянці через 15 років, якщо його щорічний приріст складає в середньому 2 %?

Розв'язання

Розрахунки слід проводити за формулою складних відсотків $V = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де V_0 – початковий об'єм лісу, p % – щорічний приріст лісу, n – кількість років за методом меж. Це пояснюється тим, що, як зазначалося учням під час вивчення степеневої функції, метод підрахунку правильних цифр дає несуттєву похибку лише для другого та третього

степеня. У даному ж випадку підносити доводиться до 15 степеня. Зрозуміло, що задані в умові величини є наближеними.

Тоді згідно умови

$V_0 = (58\,500 \pm 50)$м^3, $p = (2 \pm 0{,}5)\%$.

Кількість років $n = 15$ можна вважати точною величиною, оскільки обчислення можна проводити для того самого дня рівно через рік. Отже,

$$1{,}5 < p < 2{,}5,$$

$$0{,}015 < \frac{p}{100} < 0{,}025,$$

$$1{,}015 < 1 + \frac{p}{100} < 1{,}025,$$

$$(1{,}015)^{15} < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < (1{,}025)^{15}.$$

Основи степенів – числа, більші за одиницю, тому знаки нерівності не змінюються. За допомогою калькулятора:

$$1{,}250232\ldots < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}44829\ldots$$

У записі наближеного значення виразу залишаємо лише правильні цифри і одну запасну – сумнівну. Визначати правильні і сумнівні цифри учні вже вміють, тому така процедура не викликає у них труднощів.

Отже, $1{,}2 < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}5$.

За умовою $58\,450 < V_0 < 58\,550$. Тоді можна перемножити останні дві нерівності.

$$1{,}2 \cdot 58\,450 < V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}5 \cdot 58\,550,$$

$$70\,140 < V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 87\,825.$$

За вже відомою процедурою можна подати останню нерівність у вигляді умовної рівності:

$$V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} = \frac{87825+70140}{2} \pm \frac{87825-7014}{2} =$$
$$= 78982{,}5 \pm 8842{,}5 \approx 79000 \pm (8842{,}5 + 17{,}5) =$$
$$= 79000 \pm 8860.$$

Як видно з розрахунків, цифра 9 наближеного результату є сумнівною. Межа абсолютної похибки дорівнює h = 8860, межа відносної похибки

$$\varepsilon = \frac{8860}{79000} \cdot 100\ \% = 11{,}21 \ldots < 11{,}3\ \%.$$

Отже, отриманий результат для межі відносної похибки показав, що задані в умові задачі величини взяті з достатньо «грубими» похибками, тому і отриманий результат є недостатньо точним.

3.4. Наближені обчислення під час вивчення похідної та інтеграла

Відповідно до діючої навчальної програми, під час вивчення таких тем, як «Похідна та її застосування» та «Інтеграл та його застосування», основна увага повинна зосереджуватися на тому, що:

1. Похідна характеризує не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни певної величини під час протікання деякого процесу із зміною аргументу. Опис самого процесу здійснюється за допомогою функціональної залежності. При цьому швидкість зміни відповідної функції із зміною аргументу характеризується стрімкістю зміни її графіка.

2. Під час вивчення первісної та інтеграла акцент слід робити на його застосуванні до моделювання реальних процесів і явищ, до розв’язування прикладних задач, а не на безпосередньо техніці інтегрування як такій.

Проте розв’язування таких завдань неможливе без застосування наближених обчислень. Тому в учнів

продовжується формування умінь знаходити значення похідної функції в точці із заданою точністю як для точних, так і для наближених значень аргументу, знаходити наближені значення критичних точок, екстремумів функції.

З огляду на вищезазначене, вивчаючи тему «Похідна та її застосування», учнів слід навчити:

1) обчислювати значення похідної функції в заданій точці для: а) точних значень аргументу х; б) наближених значень аргументу х;

2) знаходити точні та наближені значення точок екстремумів і екстремуми функцій;

3) знаходити проміжки монотонності функцій як точні та наближені розв'язки відповідних нерівностей;

4) застосовувати формули наближених рівностей, що отримуються з використанням похідної. У класах з вивченням математики на профільному\поглибленому рівнях навчити учнів застосовувати рівність $y(x_0 + \Delta x) \approx \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$ для знаходження наближених значень функції;

5) досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки, використовуючи методи наближених обчислень під час виконання обчислень;

6) розв'язувати практичні та прикладні задачі на застосування похідної, зокрема на знаходження найбільшого та найменшого значень функції з використанням методів наближених обчислень.

Насамперед, систему вправ, що пропонується в нині діючих підручниках, доцільно доповнити завданнями, в яких потрібно знайти наближене значення похідної в точці, де аргумент набуває як точних, так і наближених значень, оцінити точність отриманого результату.

Вивчення питання застосування похідної до наближених обчислень слугує гарним фундаментом для

пояснення матеріалу про дотичну до графіка функції, а також про дослідження функції за допомогою похідної. Як відомо, для будь якої неперервної функції $y = f(x)$ в точці x_0 виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. З іншого боку, якщо фіксованій точці x_0 надати приріст Δx, то для $x = x_0 + \Delta x$, буде справедливою рівність $f(x) \approx \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, за умови, що $x \approx x_0$. Тоді можемо зробити висновок, що для неперервної у точці x_0 функції поблизу цієї точки виконується наближена рівність $f(x) \approx f(x_0)$. Якщо ж задана функція диференційовна у цій точці, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \approx 0$, виконується рівність $f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, звідки $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тоді $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$, звідки $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Використовуючи отриману рівність, можна вивести наближені формули, які використовуються для знаходження наближених значень функції:

$\sin x \approx x$, для значень аргументу, вираженого у радіанах та близького до нуля,

$\operatorname{tg} x \approx x$, для значень аргументу, вираженого у радіанах та близького до нуля,

$\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x$, для значень аргументу, близького до одиниці,

$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$, для значень аргументу, близького до одиниці.

Приклад. Знайдіть наближене значення функції $f(x) = \sqrt{x}$ в точці $x = 1{,}03; 9{,}018$.

Розв'язання

І спосіб. Скористаємося наближеною рівністю $\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x$.

Для $x = 1{,}03$ маємо, що $x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}03$. Тоді $\sqrt{1{,}03} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 = 1{,}015$.

Для $x = 9{,}018$ маємо, що

$$\sqrt{9{,}018} = \sqrt{9 + 0{,}018} = 3 \cdot \sqrt{1 + \frac{0{,}018}{9}} = 3\sqrt{1 + 0{,}002} \approx$$

$$\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}002\right) = 3 \cdot 1{,}001 = 3{,}003.$$

Отже, $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015;\ \sqrt{9{,}018} \approx 3{,}003$.

Зауваження. Під час виконання завдання доцільно звернути увагу учнів на те, що коли підкореневий вираз не є числом, близьким до одиниці, тому спочатку з-під кореня виноситься множник так, щоб підкореневий вираз був близьким до одиниці.

II спосіб. Скористаємося формулою

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Похідна функції $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Для $x = 1{,}03$ знаходимо значення $x_0 = 1$ та $\Delta x = 0{,}03$. Тоді

$$f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1;\ f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0{,}5.$$

Звідси

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 = 1{,}015.$$

Для $x = 9{,}018$ аналогічно визначаємо $x_0 = 9$ та $\Delta x = 0{,}018$. Тоді

$$f(x_0) = f(9) = \sqrt{9} = 3;$$

$$f'(x_0) = f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6};$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}018 = 3{,}003.$$

Отже, $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015;\ \sqrt{9{,}018} \approx 3{,}003$.

Межа абсолютної похибки

$$h = \left|\sqrt{1{,}03} - 1{,}015\right| = 0{,}035 \ldots < 0{,}04,$$

межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}04}{1{,}015} \cdot 100\ \% = 3{,}94 \ldots < 4\ \%$.

Як видно з наведеного прикладу, наближені значення функції, розраховані як одним, так і іншим шляхом, рівні між собою. Перевага другого способу обчислень полягає в тому, що ним можна скористатися для знаходження наближеного значення довільної диференційовної функції в точках $x = x_0 + \Delta x$, для яких нескладно знайти значення $f(x_0)$ та $f'(x_0)$.

Дослідження властивостей функції за допомогою похідної передбачає знаходження точок екстремумів, проміжків монотонності функції. З цією метою, з точки зору наближених, обчислень слід згадати методи знаходження наближених коренів рівнянь, та способи оцінки точності отриманих результатів.

Приклад. Використовуючи похідну, дослідити функцію на монотонність та визначити точки екстремумів функції $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. Відповідь округліть до тисячних.

Розв'язання

Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел.

Обчислюємо похідну: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$. Знаходимо стаціонарні точки розв'язуючи рівняння:

$$4x^3 - 9x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Очевидно, що аналітичними методами корені такого рівняння знайти важко.

Тому застосовуємо графічний метод: будується графік функції $y = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$ та визначаються її нулі.

Виконати побудову допомагає комп'ютерна програма (рис. 70).

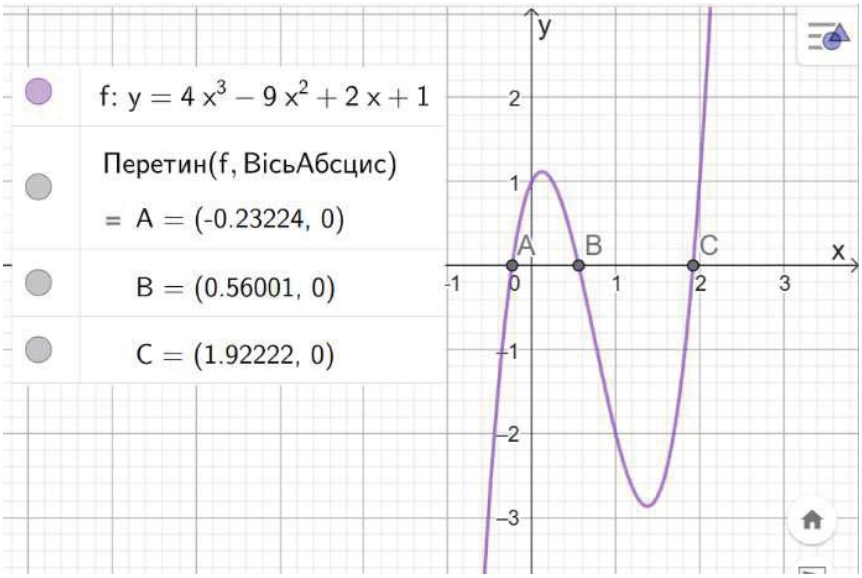


Рис. 70

Візуальне сприйняття графіка $y = f'(x)$ дає змогу визначити проміжок, на якому знаходяться нулі похідної функції, тобто стаціонарні точки.

За допомогою візуального сприйняття графіка визначається і поведінка самої функції $y = f(x)$: якщо графік $y = f'(x)$ розміщений нижче осі абсцис, то похідна від'ємна, тобто функція спадна, і навпаки, якщо графік $y = f'(x)$ розміщений вище осі абсцис, то похідна додатна, тобто функція зростаюча.

Отже, функція $y = f(x)$:
зростає на проміжках [–0,232;0,560] та [1,923; +∞) і спадає на проміжках (–∞; –0,233] та [0,561;1,922].

Очевидно, що точками мінімуму функції будуть $x_{min1} \approx \approx -0{,}232$ і $x_{min2} \approx 1{,}922$, а точка максимуму $x_{max} \approx 0{,}560$ з точністю $h = 0{,}001$.

Відповідь: $y = f(x)$ зростає при $x \in [-0{,}232;\ 0{,}560]$ та $x \in [1{,}923;\ +\infty)$; $y = f(x)$ спадає при $x \in (-\infty;\ -0{,}233]$ та $x \in [0{,}561;\ 1{,}922]$; $x_{min1} \approx \approx -0{,}232$ і $x_{min2} \approx 1{,}922$, а точка максимуму $x_{max} \approx 0{,}560$ з точністю $h = 0{,}001$..

Під час виконання завдання учням доцільно ще раз нагадати, що *результати записуються у вигляді проміжків, для яких наближене значення лівого кінця проміжку завжди округлюється з надлишком, а значення правого – з недостачею. При цьому кінці проміжків включаються у відповідь і мають бути записані у квадратних дужках.*

На наступному етапі вивчення теми розглядається застосування похідної до дослідження функції та побудови її графіка

Таким чином, у процесі дослідження функції за допомогою похідної, методи наближених обчислень можуть бути застосовані неодноразово.

Завершується вивчення теми розв'язуванням прикладних задач на застосування похідної та на знаходження найбільшого та найменшого значень функції у прикладних задачах. При цьому у нині діючих підручниках основна увага приділяється розв'язанню абстрактних задач, у яких задана функція та відрізок, на якому слід визначити її найбільше та найменше значення. Другорядне місце займають задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення периметра чи площі деякої фігури. Таку систему задач і вправ доцільно доповнити різноманітними завданнями практичного змісту, які потребують застосування методів НО під час їх розв'язування. Розглянемо зразок розв'язання прикладної задачі з даної теми.

Приклад. Електрична лампочка висить над центром круглого столу радіуса 0,70 м і дає силу світла $I = 160$ кд. На якій висоті слід підвісити цю лампу, щоб на краю стола отримати найбільшу освітленість?

Розв'язання

Зобразимо рисунок до задачі (рис. 71). Позначимо джерело світла – лампочку точкою B, відстань від якої до поверхні

стола визначається довжиною перпендикуляра до його площини BA, а точку на краю стола – точкою D. Тоді кут нахилу променю світла, який направлений на край стола визначатиметься кутом $BDA = \varphi$.

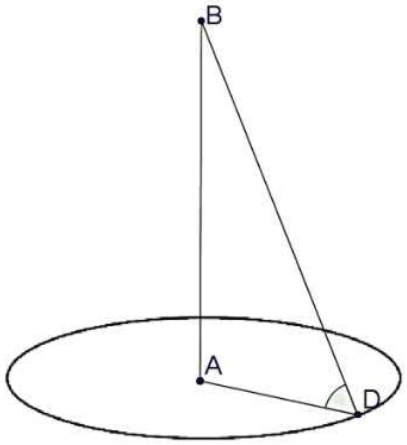


Рис. 71

Як відомо з курсу фізики, величина освітленості E обернено пропорційна квадрату відстані $BD = d$ до джерела світла і пропорційна синусу кута $\varphi = \angle BDA$ нахилу променя світла до поверхні, що освітлюється: $E = I\frac{\sin\varphi}{d^2}$, де I – сила світла лампи. В умові задачі $I = 160$ кд.

Нехай довжина відрізка $BA = x$ м. Тоді з утвореного прямокутного трикутника BDA за означенням синуса $\sin\varphi = \frac{x}{d}$.

За теоремою Піфагора: $d = \sqrt{x^2 + r^2}; \quad x \in (0;\ \infty)$, де $r = AD = 0{,}70$м – радіус стола. Отже,

$$E = I \cdot \frac{x}{d^3} = \frac{I \cdot x}{(\sqrt{x^2+r^2})^3}.$$

Отже, практична задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції $E(x)$ на проміжку $x \in (0;\ \infty)$.

Зауваження. Оскільки задача має практичний зміст, то числові величини, задані в умові, є наближеними. Тому

доцільно розв'язати задачу в загальному вигляді, пам'ятаючи при цьому, що змінною величиною є x. Лише тоді, коли задача розв'язана в загальному вигляді, можна підставити відомі величини і знайти шукану величину, використовуючи методи НО.

Похідна функції $E'(x) = I \cdot \frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}}$. Визначимо критичні точки: $\frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}} = 0;\ r^2 - 2x^2 = 0;\ x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Оскільки функція задана на множині додатних чисел, то існує лише одна критична точка $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Очевидно, що при $x < \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція зростає, при $x > \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція спадає, тому $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ – шукане значення відстані, на якій повинна знаходитися лампа, щоб освітлення на краю стола було максимальним.

Отже, $x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}70}{\sqrt{2}} = 0{,}494974 \ldots \approx 0{,}49$ (м). За методом підрахунку правильних цифр у відповіді залишається дві значущі цифри.

Відповідь: На відстані 0,49 м від поверхні столу слід розмістити лампу, щоб освітлення на краю стола радіуса 0,70 м було найбільшим.

З точки зору навчання НО, вивчаючи тему «Інтеграл та його застосування», учнів слід навчити:

1) обчислювати значення визначеного інтеграла для: а) точних значень меж інтегрування; б) наближених значень меж інтегрування;

2) знаходити наближені значення площі фігури, обмеженої графіками заданих функцій та рівнянь за умови, що: а) межі фігури, площу якої слід обчислити, є точними; б) межі фігури, площу якої слід обчислити, є наближеними;

3) застосовувати компютерні програми для обчислення наближених значень інтеграла та наближених значень площ фігур, обмежених графіками функцій та рівнянь;

4) розв'язувати практичні та прикладні задачі з використанням первісної та визначеного інтеграла методами наближених обчислень.

Поняття визначеного інтеграла тісно пов'язане із первісною, тому застосування методів НО у процесі його знаходження розпочинається тоді, коли відбулася адаптація учнів до процедури інтегрування. Тоді розпочинається обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона – Лейбніца. Визначений інтеграл, насамперед, може бути як точним, так і наближеним числом. Межі інтегрування, в свою чергу, також можуть бути як точними величинами, так і наближеними. У таких випадках процес інтегрування відбувається по-різному, з дотриманням методів НО. Розглянемо окремо кожну із описаних ситуацій.

Нехай перед учнем стоїть завдання обчислити $\int_a^b f(x)dx$, де a та b – точні межі інтегрування. За формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

За правилами інтегрування можна знайти первісну функції $F(x)$, після чого потрібно обчислити її значення у верхній та нижній межі інтегрування. Ці значення можуть бути як точними, так і наближеними числами. Якщо $F(b)$ та $F(a)$ – точні числа, то слід діяти за правилами роботи з точними величинами. Як показує практика, такі ситуації не викликають труднощів у старшокласників. Якщо хоча б одна з цих величин є наближеною, то у такому випадку слід діяти за правилами знаходження наближеного значення функції, коли відоме точне значення аргументу. Алгоритм виконання таких обчислень описаний нами раніше. У цій ситуації залежно від поставленої в умові завдання задачі

можна використовувати як метод підрахунку правильних цифр, так і метод меж.

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де a та b – наближені межі інтегрування. У такому випадку доцільно знаходити наближене значення первісних у верхній та ніжній межах інтегрування, після чого – відповідне значення інтеграла лише за методом підрахунку правильних цифр. Це пояснюється тим, що потреба у його застосуванні під час вивчення ШКМ виникає вкрай рідко з одного боку, та тим, що застосування методу меж потребує досить громіздких обчислень з іншого. Завершити вивчення теми «Інтеграл та його застосування» доцільно розв'язуванням прикладних задач. Завдання такого змісту слід включити у систему задач і вправ, які містять нині діючи підручники.

Розглянемо одну з таких задач.

Приклад. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4,0 м, що має квадратний переріз зі стороною 1,5 м. Густина води ρ = 998,23 кг/м^3.

Розв'язання

Оскільки яма має квадратний переріз, то вода, залита в яму, набуває форми прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить квадрат із стороною 1,5 м, та висотою 4,0 м.

Побудуємо переріз паралелепіпеда площиною, паралельною до основи, на відстані x м від неї, де $x \in [0; 4{,}0]$. Значення сили $F(x)$, що діє на переріз паралелепіпеда площею $S_{\text{осн}} = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ (м^2), визначається вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу. За МППЦ під час знаходження площі основи у відповіді залишається дві значущі цифри, та ще одна запасна – сумнівна цифра, оскільки дія є проміжною. Отже, $F(x) = 2{,}25 \cdot \rho \cdot g(4{,}0 - x)$ де $\mathrm{g} \approx 9{,}8$ м/с. Тому робота, яку потрібно виконати, щоб викачати воду з ями, обчислюється за формулою:

$$A = \int_0^{4,0} 2,25\rho g(4,0 - x)dx =$$

$$= 2,25\rho g \cdot \int_0^{4,0}(4,0 - x)dx = 2,25\rho g \cdot \left(4,0x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{4,0} =$$

$$= 2,25 \cdot 998,23 \cdot 9,8 \cdot \left(\left(4,0 \cdot 4,0 - \frac{4,0^2}{2}\right) - \left(4,0 \cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right)\right) =$$

$$= 2,25 \cdot 998,23 \cdot 9,8 \cdot \left(4,0 \cdot 4,0 - \frac{4,0^2}{2}\right) = 176087,772 \approx$$

$$\approx 1,8 \cdot 10^5 (\text{Дж})$$

Важливо звернути увагу учнів на те, що за методом підрахунку правильних цифр відповідь міститиме лише дві значущі цифри, тобто округлення відбувається до десятків тисяч.

Відповідь: $A \approx 1,8 \cdot 10^5$ Дж.

3.5. Наближені обчислення під час вивчення стереометрії

Метою навчання курсу стереометрії є систематичне вивчення властивостей геометричних фігур у просторі, розвиток просторових уявлень і уяви, засвоєння учнями способів обчислення важливих для практики геометричних величин і подальший розвиток логічного мислення. Особливості програми з геометрії 10 класу не дають змоги широко застосовувати методи НО під час розв’язування задач. З іншого боку, саме в цей період на уроках алгебри і початків аналізу в учнів формується уявлення про наближені числа і величини, про правила роботи з ними, методи наближених обчислень.

Виходячи з основних цілей навчання геометрії в старшій школі, учнів слід навчити обчислювати площі поверхонь та об’єми геометричних тіл, зокрема в реальному житті. Проте такі тіла не завжди мають зручні для

вимірювань та обчислень форми. Тому насамперед потрібно сформувати в учнів уміння і навички виконувати такі розрахунки на більш простих прикладах.

Вивчення многогранників і тіл обертання, їх властивостей можна поділити на два етапи. На першому етапі розглядаються многогранники – призма і піраміда та їх властивості, потім відбувається формування умінь застосовувати ці властивості до розв'язування геометричних задач. У цей період доцільно запропонувати учням виконання практичних робіт з побудови розгорток многогранників, виготовлення їх моделей, та обчислення елементів виготовлених тіл. Розгортки слід робити з цупкого паперу, продавлюючи його по лініям згину. Зрозуміло, що під час зазначених вимірювань та розрахунків доведеться працювати з наближеними величинами та застосовувати вже відомі учням методи наближених обчислень. Наступним, складнішим етапом застосування НО, є визначення параметрів реальних об'єктів, що мають форму відповідного многогранника та обчислення його елементів. Під час проведення відповідних розрахунків слід пам'ятати, що числа, отримані в результаті вимірювання, неточні, тому й результат обчислення – наближене число, а тому розрахунки проводяться за методами НО. Якщо зміст задачі не потребує визначення меж похибок обчислень, то зручніше користуватися МППЦ. Точність результату в такому випадку не буде перевищувати точності найменш точних величин, проте економиться час на виконання роботи. За аналогічним алгоритмом вивчаються тіла обертання – циліндр і конус. Паперову модель сфери учні не виготовляють, вони одразу переходять до практичних вимірювань і розрахунків.

Приклад. Скільки мішків аміачної селітри можна помістити в склад розмірами 20м × 9м × 4м, якщо мішок селітри можна вважати (з певною похибкою) прямокутним паралелепіпедом з розмірами 90см × 5см × 25см? (На щілини між мішками і центральний прохід виділяється 30 % об'єму складу).

Вказівки до розв'язування. Оскільки розміри складу є наближеними числами, то застосуємо метод меж для обчислення його об'єму. Нехай $a \approx 20$ м; $b \approx 9$ м, $c \approx 4$ м.

$$19{,}5 \leq a \leq 20{,}5,\ \ 8{,}5 \leq b \leq 9{,}5,\ \ 3{,}5 \leq c \leq 4{,}5$$

Тоді об'єм складу $580{,}125 \leq V \leq 876{,}375$.

Отже, $V = 728{,}25 \pm 148{,}125$ ($м^3$).

Межа відносної похибки об'єму $\varepsilon \leq 21$ %.

Очевидно, що практичне розв'язування даної задачі можливе лише за умови, що вихідні дані будуть взяті з більш високою точністю.

На наступному, другому етапі, відбувається узагальнення і систематизація вивченого раніше навчального матеріалу, формуються навички застосовувати формули для знаходження площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл. Систему задач і вправ з цих тем, що містяться в сучасних підручниках доцільно доповнити задачами практичного змісту, практичними роботами та задачами з інтернет-джерел. Таким чином, під час вивчення інших тем алгебри і початків аналізу та стереометрії закріплюються та поглиблюються знання, уміння та навички застосовувати методи НО під час розвязування математичних задач, поглиблюються міжпредметні звязки та відбувається зв'язок математики із життям.

3.6. Дидактичні матеріали для практичного використання в ліцеях

3.6.1. Розрахунково-графічні роботи

1. Розрахунково-графічна робота з НО **«Побудова графіка степеневої функції»**.

Зміст роботи. Складання таблиці значень даної функції з використанням обчислювальних засобів та побудова її графіка на міліметровій сітці.

Приклади завдань

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а) $f(x) = x^2,\ a = -3{,}00;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

б) $f(x) = x^3,\ a = -2{,}00;\ b = 2{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

в) $f(x) = x^{-2},\ a = -3{,}00;\ b = -0{,}40;\ \Delta x = 0{,}20$ і $f(x) = x^{-2},\ a = 0{,}50;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

г) $f(x) = x^{\frac{1}{2}},\ a = 0;\ b = 9{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

д) $f(x) = \frac{1}{x},\ a = -3{,}00;\ b = -0{,}40;\ \Delta x = 0{,}20;$ $f(x) = \frac{1}{x},\ a = 0{,}50;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20.$

Під час складання таблиці користуйтеся методом меж. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій.

3. Виготовіть шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

2. Розрахунково-графічна робота з НО **«Побудова графіка тригонометричної функції».**

Зміст роботи. Складання таблиці значень даної функції з використанням обчислювальних засобів та побудова її графіка на міліметровій сітці.

Приклади завдань

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ із заданим кроком Δx, якщо $f(x) = \sin x,\ a = 0;\ b = \frac{\pi}{2};\ \Delta x = \frac{\pi}{19}$.

Під час складання таблиці користуйтеся:

I група – методом меж (у відповідь записуйте лише правильні цифри числа),

II група – методом підрахунку правильних цифр.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці (при цьому оберіть масштаб $\frac{\pi}{19}$ – 0,5см, відповідно 1 – приблизно 3см). Побудуйте графік функції.

3. Виготовіть шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

4. Користуючись одиничним колом та властивостями косинуса, визначте, який вигляд матиме графік функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $[-2\pi; 2\pi]$. Побудуйте графік функції $f(x) = \sin x$ на цьому відрізку.

5. Користуючись графіком, визначте значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-\frac{\pi}{18}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; -2{,}3;\ 3{,}1$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,5; 0,85? Вкажіть межу абсолютної похибки результатів.

6. За допомогою програми GeoGebra побудуйте графік функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $[-2\pi; 2\pi]$. Користуючись отриманим графіком, виконайте попереднє завдання. Порівняйте отримані графіки та значення функції і аргументу.

3. Розрахунково-графічна робота з НО **«Побудова графіка показникової функції».**

Зміст роботи. Скласти таблицю значень заданої функції за допомогою обчислювальних засобів та побудувати її графік на міліметровій сітці.

Приклади завдань

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а) $f(x) = e^x,\ a = -2{,}0;\ b = 2{,}0;\ \Delta x = 0{,}2;$

б) $f(x) = 2^x,\ a = -2{,}0;\ b = 2{,}0;\ \Delta x = 0{,}2;$

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ a = -2{,}0;\ b = 2{,}0;\ \Delta x = 0{,}2.$

Під час обчислень значень функції користуйтеся методом меж або МППЦ. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій.

3. Виготовіть шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

4. Побудуйте на міліметровій сітці графіки логарифмічних функцій, використавши ті, що побудовані у завданні 2:

а) $y = \ln x$; б) $y = \log_2 x$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

4. Розрахунково-графічна робота з НО **«Обчислення площі криволінійної трапеції наближеними методами».**

Мета роботи. Сформувати в учнів уявлення про наближені методи обчислення площі криволінійної трапеції для монотонної на відрізку функції. Здійснити порівняння отриманих площ для розбиття на 4 та 8 відрізків за

допомогою методів прямокутників та трапецій. Визначити межі абсолютної та відносної похибки обчислень.

Хід роботи

Обчислити наближене значення площі фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a, x = b$, за допомогою методу прямокутників, здійснивши розбиття відрізка $[a; b]$ на: а) 4 рівних відрізка; б) на 8 рівних відрізків.

Визначити межу абсолютної та відносної похибки.

Обчисліть наближене значення площі вказаної фігури за допомогою метода трапецій для розбиття а) 4 рівних відрізка; б) на 8 рівних відрізків.

Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

Зауваження. В якості функції $y = f(x)$ можна взяти такі функції як $y = e^x$, $y = \frac{6}{x}$, $y = \ln x$, а прямі $x = a, x = b$ обрати так, щоб задана функція була невід'ємною на зазначеному відрізку, наприклад $x = 2, x = 4$.

Виконання роботи. Нехай задано функцію $y = \ln x$ та прямі $y = 0, x = 2, x = 4$. Обчислимо площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими рівняннями для розбиття на 4 рівних відрізка. Тоді інтервал розбиття $\Delta x = \frac{2-4}{4} = 0{,}5$, точки розбиття $x_0 = 2, x_1 = 2{,}5, x_2 = 3, x_3 = 3{,}5, x_4 = 4$.

Значення функції у визначених точках:

$f(x_0) = f(2) = \ln 2$, $f(x_1) = f(2{,}5) = \ln 2{,}5$,
$f(x_2) = f(3) = \ln 3$, $f(x_3) = f(3{,}5) = \ln 3{,}5$,
$f(x_4) = f(4) = \ln 4$.

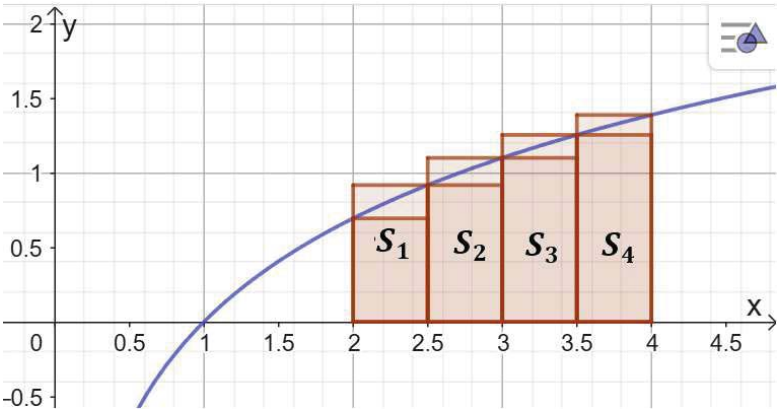


Рис. 72

Тоді

$$f(x_0)\cdot\Delta x < S_1 < f(x_1)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5\ln 2 < S_1 < 0{,}5\ln 2{,}5,$$
$$f(x_1)\cdot\Delta x < S_2 < f(x_2)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5\ln 2{,}5 < S_2 < 0{,}5\ln 3,$$
$$f(x_2)\cdot\Delta x < S_3 < f(x_3)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5\ln 3 < S_3 < 0{,}5\ln 3{,}5,$$
$$f(x_3)\cdot\Delta x < S_4 < f(x_4)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5\ln 3{,}5 < S_4 < 0{,}5\ln 4,$$
$$0{,}5(\ln 2 + \ln 2{,}5 + \ln 3 + \ln 3{,}5) < S <$$
$$< 0{,}5(\ln 2{,}5 + \ln 3 + \ln 3{,}5 + \ln 4),$$
$$0{,}5\ln 52{,}5 < S < 0{,}5\ln 105,$$
$$1{,}980406\ldots < S < 2{,}326980\ldots,$$
$$1 < S < 3.$$

$$S = \frac{BM_S + HM_S}{2} \pm \frac{BM_S - HM_S}{2} = 1{,}5 \pm 1 \text{ (кв.од)}.$$

Як видно з отриманого результату, усі цифри отриманого результату для площі криволінійної трапеції не є правильними. Перша з них – сумнівна, решта – неправильні. Межа абсолютної похибки $h = 1$, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{1}{1{,}5}\cdot 100\,\% \approx 67\,\%$, що є неприпустимо великою величиною.

У випадку розбиття на 8 однакових відрізків, інтервал розбиття буде вдвічі менший, тобто $\Delta x = \frac{4-2}{8} = 0{,}25$, точки розбиття $x_0 = 2, x_1 = 2{,}25, x_2 = 2{,}5, x_3 = 2{,}75, x_4 = 3,$ $x_5 = 3{,}25, x_6 = 3{,}5, x_7 = 3{,}75, x_8 = 4$

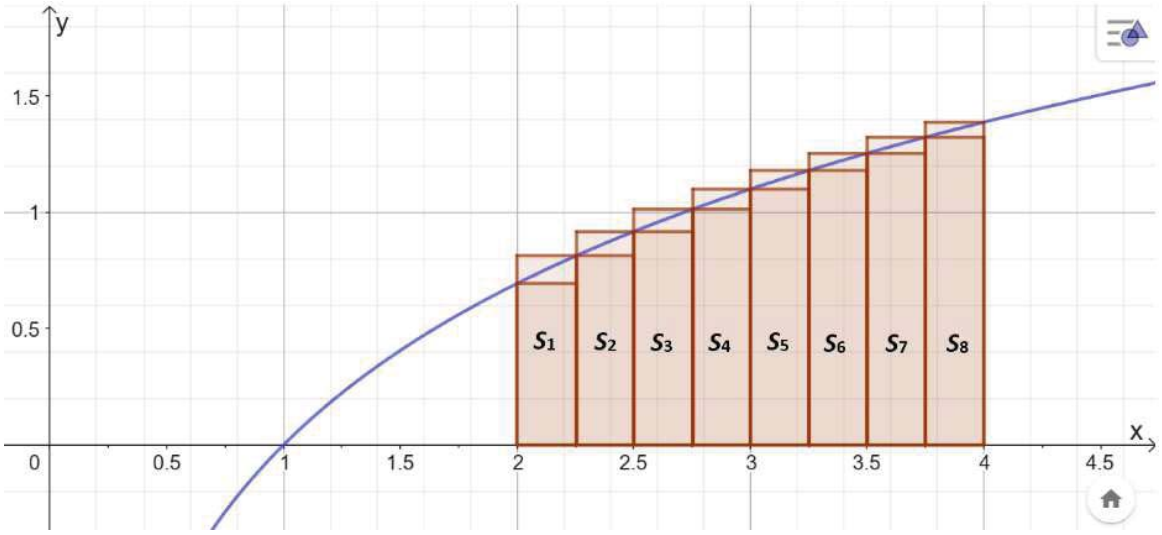


Рис. 73

Провівши аналогічні до попередніх міркування, отримаємо, що

$$0{,}25(\ln 2 + \ln 2{,}25 + \cdots + \ln 3{,}5 + \ln 3{,}75) < S < \\ < 0{,}25(\ln 2{,}25 + \ln 2{,}5 + \cdots + \ln 3{,}75 + \ln 4)$$

$$0{,}25\ln\frac{4054050}{1024} < S < 0{,}25\ln\frac{8108100}{1024}$$

$$2{,}07093\ldots < S < 2{,}24422\ldots$$

$$2{,}0 < S < 2{,}3$$

$$S = \frac{BM_S + HM_S}{2} \pm \frac{BM_S - HM_S}{2} = 2{,}15 \pm 0{,}15\ (\text{кв. од.})$$

Як видно з отриманого результату, перша цифра отриманого результату для площі криволінійної трапеції є правильною, друга – сумнівна.

Тоді $S = 2{,}2 \pm 0{,}2$ (кв.од.). Межа абсолютної похибки $h = 0{,}2$, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}2}{2{,}2} \cdot 100\% \approx 9{,}1\%$, що є допустимою величиною.

Розглянемо розбиття заданого інтервалу на 8 відрізків і застосуємо метод трапецій для знаходження площі криволінійної трапеції.

Тоді $S \approx \sum_{i=1}^{8} S_i = \sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\Delta x,$

$$S \approx 0{,}25 \cdot \frac{(\ln 2+\ln 4)}{2} \cdot (\ln 2{,}25 + \ln 2{,}5 + \cdots + \ln 3{,}75),$$

$$S \approx \frac{\ln 8}{8} \cdot \ln \frac{2027025}{1024} \approx 0{,}25 \cdot 7{,}5906 = 1{,}89765 \approx 2(\text{кв.од}).$$

Як видно, наближене значення площі криволінійної трапеції, обчислене за методом трапецій близьке за своїм значенням до отриманого результату за методом прямокутників. Слід зауважити, що обчислення в останньому випадку здійснювалися за методом підрахунку правильних цифр.

3.6.2. Практичні роботи на обчислення значень функцій, виразів

Практична робота № 1 «Обчислення значень функцій для поточного аргументу».

Мета роботи. Формування умінь виконувати обчислення з наближеними величинами різними методами НО. Вироблення навичок роботи з калькулятором у смартфоні.

Обладнання: Аркуш паперу, ручка, смартфон.

Хід роботи

Завдання. Обчисліть за допомогою калькулятора з точністю до сотих значення функції $y = \frac{x^2+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-2\sqrt{2{,}35x}}$, якщо відоме значення аргументу $x = 1{,}73$.

Примітка. Оскільки значення аргументу є точним числом, то усі цифри в записі значення $\sqrt{2{,}35x}$ будуть правильними. Для проміжного значення кореня $\sqrt{2{,}35x}$ його наближене значення повинно бути знайдено з однією запасною цифрою – з точністю до тисячних. Цю цифру слід відкинути під час запису відповіді. Запис обчислень має бути представлений у вигляді таблиці. Як бачимо, наближене значення функції дорівнює $y(1{,}73) \approx 0{,}08$.

Розв'язання. З метою контролю за правильністю проведення розрахунків під час обчислення значення функції доцільно розбити розрахунки на окремі дії та внести їх у таблицю для запису проміжних результатів.

Таблиця обчислень за методом підрахунку цифр

x	x^2	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2 + \sqrt{2{,}35x}$	$x^2 - 2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-2\sqrt{2{,}35x}}$

Таблиця обчислень за методом меж

x	x^2	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2 + \sqrt{2{,}35x}$	$x^2 - 2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-2\sqrt{2{,}35x}}$
ВМ							
НМ							

Таблиця обчислень за методом меж похибок

x	x^2	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2 + \sqrt{2{,}35x}$	$x^2 - 2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-2\sqrt{2{,}35x}}$

Практична робота № 2 «Обчислення значення функції за наближеним значенням аргументу».

Мета роботи. Формування умінь виконувати обчислення з наближеними величинами різними методами НО. Вироблення навичок роботи з калькулятором у смартфоні.

Обладнання: Аркуш паперу, ручка, смартфон.

Хід роботи

Завдання. Обчисліть за допомогою комп'ютера значення функції

$y = \frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-\sqrt{2{,}35}}$, якщо значення аргументу $x \approx 1{,}73$:

а) за методом підрахунку цифр;

б) за методом меж;

в) за допомогою введення всього виразу для обчислення у вікно калькулятора.

Знайдіть межу абсолютної та відносної похибок. Порівняйте отримані результати. Зробіть відповідний висновок.

Практична робота № 3 «Визначення значень тригонометричних функцій за допомогою одиничного кола».

Зміст роботи. Побудова на одиничному колі точок, що відповідають заданим кутам повороту та визначення значень тригонометричних функцій цих кутів через координати відповідних точок. Визначення межі абсолютної та відносної похибки розрахунків.

Обладнання. Аркуш міліметрового паперу, циркуль, лінійка, транспортир.

Приклади завдань

1. На міліметровій сітці зобразіть систему координат і оберіть одиничний відрізок. Накресліть одиничне коло.

2. За допомогою транспортира побудуйте на колі точки, що відповідають кутам:

а) 35°; 158°; 216°; 354°; 430°;

б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{5}$; 1,4; 2,8; 3,62.

3. Визначте координати відповідних точок. Запишіть значення синуса та косинуса відповідних кутів.

4. Обчисліть значення тангенса та котангенса відповідних кутів.

5. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибки розрахунків.

Під час виконання такої роботи слід урахувати, що транспортир дає змогу побудувати кути з точністю до градуса, тому визначати значення синуса, косинуса будемо не для точного кута 35°, а для кута $(35 \pm 1)^\circ$. Результат можемо записати ***не більше***, ніж з точністю до 0,1 – ціна поділки міліметрової сітки.

Практична робота № 4 «Визначення дотримання санітарних норм щодо об'єму повітря в приміщенні».

Мета роботи. Здійснити розрахунок об'єму повітря на одного учня в класній кімнаті та порівняти його з санітарними нормами.

Хід роботи

1. Виміряйте довжину, ширину та висоту класної кімнати, в якій ви знаходитесь (для визначення висоти приміщення можна скористатися технічним паспортом будівлі).

2. Оцініть межі похибок проведених вимірювань.

3. За допомогою методів НО обчисліть об'єм повітря в класній кімнаті та обчисліть, скільки повітря приходиться на одного учня. Оцініть точність проведених обчислень.

4. Порівняйте отриманий результат із санітарними нормами: на 1 дорослого повинно бути 10 $м^3$ повітря, на дитину до 14 років – 7,5 $м^3$ повітря.

5. Зробіть висновок: чи достатньою є кількість повітря у вашій класній кімнаті. Яким повинен бути об'єм кабінету, для дотримання санітарних вимог?

Аналогічні вимірювання і розрахунки учні можуть провести самостійно для квартири, в якій мешкають.

3.6.3. Добірки задач і вправ для практичних занять з наближених обчислень

1. Система вправ для формування в учнів навичок знаходити наближені корені алгебраїчних рівнянь.

1. а) Перевірте, що числа 2,9 і 2,8 є десятковими наближеннями числа $\sqrt{8}$ з точністю до 0,1 з надлишком і з недостачею відповідно.

б) Перевірте, що числа 2,83 і 3,82 є десятковими наближеннями числа $\sqrt{8}$ з точністю до 0,01 з надлишком і з недостачею відповідно.

2. Знайдіть за допомогою калькулятора з точністю до тисячних:

а)$\sqrt{2}$; б)$\frac{3}{7}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; г)$\sqrt{13}-\sqrt{6}$.

3. Виконайте попереднє завдання, використовуючи: а) метод підрахунку правильних цифр; б) метод меж. Оцініть межі похибок обчислень.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+3x-5=0$; б) $1{,}2x^2-7{,}2x+3{,}4=0$

з точними коефіцієнтами за методом меж. Оцініть похибки обчислень.

5. Розв'яжіть рівняння з наближеними коефіцієнтами $2{,}56x^2+3{,}7x+0{,}235=0$ за методом меж. Оцініть похибки обчислень.

6. Розв'яжіть рівняння завдання 4 та 5 за методом підрахунку правильних цифр. Порівняйте отримані результати.

7. За допомогою калькулятора знайдіть наближені значення функції $y=x^2$ для наближених значень аргументу та заповніть таблицю:

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2													

За знайденими значеннями на міліметровому папері побудуйте графік функції $y = x^2$. Виготовить шаблон графіка цієї функції.

8. Користуючись виготовленим шаблоном, побудуйте графік функції:

а) $y = -x^2$; б) $y = (x + 1)^2$; в) $y = x^2 - 1{,}2$;

г) $y = (x - 0{,}5)^2 + 1$; д) $y = 1{,}5x^2$; є) $y = -0{,}5x^2$;

е) $y = 0{,}2x^2 - 2{,}5$; ж) $y = 2(x - 2{,}5)^2$;

з) $y = |0{,}2x^2 - 2{,}5|$; і) $y = 2(|x| - 2{,}5)^2$.

9. Розв'яжіть графічно рівняння: $1{,}5x^2 = 2{,}5x + 3$. Перевірте отриманий результат за допомогою комп'ютерної програми GeoGebra.

10. Розв'яжіть графічно нерівність: $1{,}5x^2 \leq 2{,}5x + 3$. Перевірте отриманий результат за допомогою комп'ютерної програми GeoGebra.

11. Знайдіть радіус, при якому площа круга дорівнюватиме площі квадрата, сторона якого має ту саму довжину.

12. Висота мідного бруса, що має форму прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить квадрат, дорівнює 12,1 см. Знайдіть довжину невідомих ребер бруса, якщо його маса 971 г (визначте густину міді за таблицею).

13. Вкладник поклав до банку 1000 грн. За перший рік йому нарахований відсоток річних, який другого року збільшений на 2 %.У кінці другого року на рахунку було 1 188 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка першого року?

2. Система задач і вправ до теми «Степенева функція». Корінь *n*-го степеня та його властивості.

1. Знайдіть за допомогою калькулятора значення виразів з точністю до сотих, вважаючи підкореневі вирази точними числами:

а) $\sqrt[5]{378}$; б) $\sqrt[3]{23{,}4}$; в) $\sqrt[4]{23}+2$; г) $\sqrt[3]{187}-4$.

Оцініть межу абсолютної та відносної похибки.

2. Обчисліть значення виразу, користуючись методом підрахунку правильних цифр:

а) $\sqrt{3{,}5}$; б) $\sqrt[3]{0{,}37}$; в) $\sqrt[3]{1{,}70}+\sqrt[3]{3{,}48}$; г) $\sqrt{4{,}25}-\sqrt[3]{2{,}3}$.

3. Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x$, де Δx – величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів:

а) $\sqrt{1{,}002}$; б) $\sqrt{9{,}01}$; в) $\sqrt{0{,}98}$; г) $\sqrt{25{,}036}$.

4. Виконайте завдання 2, 3 за допомогою методу меж. Порівняйте отримані результати. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибок.

Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її властивості

1. Користуючись калькулятором, обчисліть наближені значення функції для вказаних у таблиці наближених значень аргументу:

а) $y=\sqrt{x}$

x	0	0,5	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
y														

б) $y=\sqrt[3]{x}$

x	–3,0	–2,5	–2,0	–1,5	–1,0	–0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y													

2. Користуючись даними, отриманими у завданні 5, побудувати на міліметровій сітці графіки функцій $y=\sqrt{x}$ та $y=\sqrt[3]{x}$. Зробіть шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

3. Скористайтеся виготовленим шаблоном та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки функцій:

а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y=\sqrt{2x}$; в) $y=0{,}5\sqrt{x}$;
г) $y=-2\sqrt{x}$; д) $y=1{,}5-3\sqrt{x}$; е) $y=\sqrt[3]{x}+1$;
є) $y=\sqrt[3]{0{,}5x}$; ж) $y=\sqrt[4]{|x|}$; з) $y=3\sqrt[3]{x-1}$;
и) $y=\left|1{,}5+\sqrt[3]{x}\right|$.

4. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\sqrt[3]{x}-1{,}5$ та $y=2+x$:

а) на міліметровій сітці;

б) за допомогою комп'ютерної програми.

Визначте координати точки перетину графіків. Оцініть точність отриманого результату.

Ірраціональні рівняння та нерівності

1. Розв'яжіть рівняння графічним способом, виконавши побудову графіків функцій на міліметровій сітці:

а) $\sqrt{0{,}3x}-x+2{,}3=0$; б) $1{,}5+\sqrt[3]{x-2}=2x$.

Оцініть межу абсолютної похибки результату.

2. Розв'яжіть нерівність графічно, виконавши побудову графіків відповідних функцій на міліметровій сітці:

а) $\sqrt{x}>x+1{,}2$; б) $\sqrt[3]{x-0{,}5}\le x$.

Оцініть межу абсолютної похибки результату.

3. Виконайте завдання 9 та 10 за допомогою комп'ютерної програми. Порівняйте отримані результати та зробіть відповідні висновки.

Степінь з раціональним показником. Степенева функція

1. За допомогою калькулятора знайдіть значення степеневих функцій $y=x^{1.4}$, $y=x^{\sqrt{2}}$ з точністю до тисячних для вказаних значень аргументу (значення аргументу вважати точним числом).

Порівняйте отримані результати.

x	1	2	3	4	5	6
$x^{1.4}$						
$x^{\sqrt{2}}$						

2. Обчисліть значення функції $y = x^{\sqrt{2}}$, округлюючи показник степеня з точністю до сотих для наближених значень аргументу:

а) 3,2; б) 3,20; в) 3,2000.

3. Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$, де Δx – величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів:

а) $1{,}003^{52}$; б) $0{,}996^5$.

4. Виконайте розрахунково-графічну роботу: скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а)$f(x) = x^2,\ a = -3{,}00;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

б)$f(x) = x^3,\ a = -2{,}00;\ b = 2{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

в)$f(x) = x^{-2},\ a = -3{,}00;\ b = -0{,}40;\ \Delta x = 0{,}20$ та

$f(x) = x^{-2},\ a = 0{,}40;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

г)$f(x) = x^{\frac{1}{2}},\ a = 0;\ b = 9{,}00;\ \Delta x = 0{,}20;$

д)$f(x) = \frac{1}{x},\ a = -3{,}00;\ b = -0{,}40;\ \Delta x = 0{,}20$ та

$f(x) = \frac{1}{x},\ a = 0{,}40;\ b = 3{,}00;\ \Delta x = 0{,}20.$

Під час роботи користуйтеся методом меж. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій. Виготовте шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

5. Побудуйте в одній системі координат за допомогою виготовлених раніше шаблонів графіки функцій: а) $y = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2,\ x \geq 0$; б) $y = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^3$. Що можна сказати про точність побудови ескізів графіків?

6. Розв’яжіть графічно рівняння:

а) $(x-1{,}5)^{0{,}5}=-x^2+2x$;

б) $x^{-2}=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

7. Знайдіть множину розв'язків нерівності, використовуючи комп'ютерну програму: $(x+2)^{\frac{1}{3}}<\frac{1}{x-2{,}5}$.

Математичні моделі реальних процесів

1. Залежність енергії *E* рухомого тіла при сталій масі *m* від його швидкості *v* виражається формулою $E=\frac{1}{2}mv^2$. Обчисліть енергію тіла, маса якого $m \approx 2{,}20$ кг, якщо воно рухається із швидкістю 18,23 км/год.

2. Ціна газу для населення складала 0,68 грн за 1 м^3 після подвійного підвищення тарифу на *x* % ціна стала 1,12 грн за 1 м^3. Визначте, на скільки відсотків підвищувалася щоразу ціна?

3. Система задач і вправ з теми «Тригонометричні функції, рівняння та нерівності».

Тригонометричні функції

1. За допомогою калькулятора зайдіть радіанні міри кутів:

а) 27°; б) $37°54'$; в) $36°54'23''$.

2. За допомогою калькулятора зайдіть градусні міри кутів:

а) 0,235; б) 2,650; в) 1,3256.

3. На одиничному колі приблизно відмітьте точки, що відповідають числам 1,2; –3,55; 22.

4. Обчисліть довжину дуги радіуса *R* = 15,0 см, що відповідає центральному куту, який дорівнює α, якщо $\alpha = 75^\circ$; $\frac{\pi}{16}$; 2,120.

5. За допомогою калькулятора зайдіть наближені значення тригонометричних функцій кута α, якщо $\alpha \approx 0{,}18$; 2,43; $32^{\circ}14'$.

6. Використовуючи формули додавання, обчисліть з точністю до 0,001 значення $\sin 15°$; $\cos 75°$.

7. Обчисліть без таблиць значень тригонометричних функцій значення $\sin 46$ з точністю до 0,001, якщо $\cos 32° \approx 0{,}848$.

Вказівка. Скористайтеся тим, що $\sin 46° = \sin(30° + 16°)$.

8. Для кожного з даних кутів знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс:

1) $20°48'$; 4) $88°54'$; 7) $61°13'$; 10) $45°07'$;
2) $35°06'$; 5) $20°50'$; 8) $88°51'$; 11) $87°11'$;
3) $61°12'$; 6) $35°05'$; 9) $44°03'$; 12) $65°05'$.

9. Знайти гострий кут за заданим значенням синуса (косинуса):

1) 0,1874; 4) 0,9903; 7) 0,9412; 10) 0,9441;
2) 0,5577; 5) 0,2682; 8) 0,4381; 11) 0,9944;
3) 0,9078; 6) 0,8264; 9) 0,8760; 12) 0,0020.

10. Знайти гострий кут за заданим значенням тангенса (котангенса):

1) 0,2698; 4) 0,9903; 7) 0,9412; 10) 0,9441;
2) 2,2250; 5) 0,2682; 8) 0,4381; …..11) 0,9944;
3) 3,9230; 6) 0,8264; 9) 0,8760; 12) 0,0020.

11. Виконайте розрахунково-графічну роботу і виготуйте шаблон графіка функції $y = \cos x$, $y = \sin x$. *Вказівка.* Для побудови синусоїди користайтеся рівністю $\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

Тригонометричні рівняння і нерівності

1. Обчислити в градусах і в радіанах: $arcsin 0{,}4587$; $arccos 0{,}3245$; $\operatorname{arctg} 2{,}7087$; $\operatorname{arcctg}(-3{,}4587)$; $arcsin(-0{,}5034)$.

2. Розв’яжіть рівняння

а) $cosx = 0{,}23$; б)$2sinx = 1{,}234$; в)$\text{tg}(2x) = -3{,}2$.

3. Розв’яжіть графічно рівняння $\sin x = 1 - x$. Відповідь запишіть з точністю до 0,01. Визначте, чи розв’язки рівняння визначені з надлишком, чи з недостачею.

4. Знайти корені рівняння з точністю до тисячних:

а) $\cos x = x - 1$; б) $\sin x + 0{,}5 = x$.

5. Скільки коренів має рівняння $10\sin x = x$?

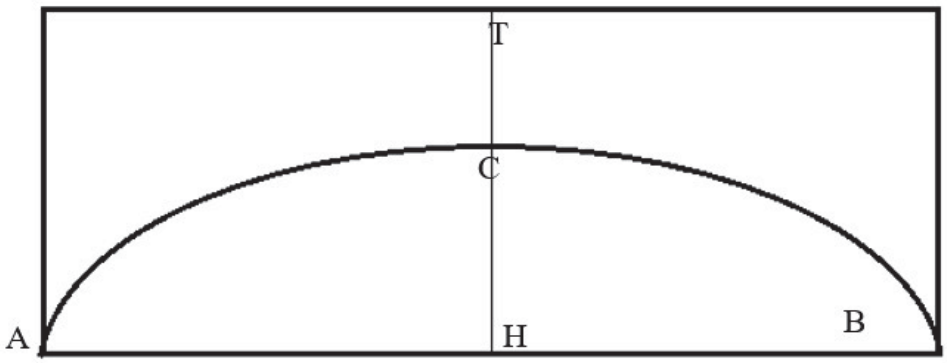
6. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $\text{tg}x = 1 - x$ з точністю до 0,01. Виконайте завдання за допомогою комп’ютерної програми.

7. За допомогою комп’ютерної програми побудуйте графіки функцій $y = \sin x$, $y = x^2$ та розв’яжіть графічно рівняння з точністю до 0,001: $x^2 = \sin x$.

Задачі практичного змісту

1. Колесо радіуса 2,2 м повернулось на кут $88°51'$. Знайдіть довжину шляху, пройденого точкою на ободі цього колеса. *Вказівка.* Скористайтеся формулою $l = \alpha R$, де кут α вимірюється в радіанах.

2. На рисунку зображено переріз мосту, де ACB – дуга кола. $AB = 20$ м, $CH = 1{,}2$ м і $CT = 1$ м. Знайдіть площу цього перерізу.



3. Знайдіть напрям і рівнодійну двох сил, прикладених до точки А, якщо одна з них дорівнює 5Н, друга – 7Н, а кут між ними 80°.

4. Промінь світла проходить через скляну пластину товщиною *d.* Визначити величину паралельного зміщення цього променя, якщо кут падіння дорівнює α, а показник заломлення скла дорівнює *n*.

5. Кривошип *OP* довжина якого 13 см, обертається проти стрілки годинника із кутовою швидкістю 180 обертів за хвилину. У початковий момент часу він нахилений під кутом 48° до додатного напряму осі абсцис. Визначити закон руху проекції точки *P* на вісь абсцис.

6. У мережі змінного струму між силою струму і часом задано залежність $I = 2{,}75\sin(700t + 1{,}44)$. Визначте максимальне значення сили струму, кількість періодів у секунду і початкову фазу. Побудуйте графік залежності сили струму від часу.

7. Знайдіть напрям і рівнодійну трьох сил, прикладених до точки *M*, якщо їх величини дорівнюють 12Н, 20Н, 33Н відповідно, а кути, утворені з додатним напрямом осі абсцис дорівнюють 21°, $43^{\circ}14'$, $105^{\circ}34'$.

8. З вершини пагорба, який знаходиться на лівому березі річки, цей берег видно під кутом $33{,}4^{\circ}$ до лінії горизонту, а правий берег – під кутом $27{,}9^{\circ}$. Визначте висоту пагорба і відстань до берега річки, якщо ширина річки дорівнює 125,0м.

9. Сила змінного струму є функцією, що залежить від часу і виражається формулою $J = A\sin(wt + \varphi)$, де A– амплітуда коливань, w– частота, φ– початкова фаза. Побудуйте графік цієї функції, якщо $A = 2, w = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$.

10. Літак, який видно з бази пошукової групи під кутом 15°, інформує на базу, що він знаходиться на висоті 800 м

над об'єктом, що розшукується. Знайти відстань від бази до об'єкта, що розшукується.

11. Під час фотографування оборотної сторони Місяця автоматична міжпланетна станція знаходилася від нього на відстані, що приблизно дорівнює 65 000 км. Під яким кутом в цей час було видно Місяць? Радіус Місяця прийняти рівним 1 740 км.

12. М'яч, кинутий вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 40м/с$, через t с виявляється на висоті $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ метрів від точки кидання, де $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Знайдіть h при $t = 3$ с; 7 с.

4. Система задач і вправ з теми «Показникова та логарифмічна функції».

Показникова функція

1. Користуючись калькулятором чи таблицями, обчисліть з точністю до 0,0001 значення:

а) $10^{1,7}$та $10^{1,8}$; б) $10^{1,73}$та $10^{1,74}$;

в) $10^{1,732}$та $10^{1,733}$; г) $10^{1,7320}$та $10^{1,7321}$.

Скориставшись отриманими значеннями, знайдіть значення $10^{\sqrt{3}}$ з точністю до 0, 001.

2. Знайдіть значення функції $y = 3{,}25^{x-1}$ за відомим значенням аргументу:

а) $x = 2{,}1; 2{,}75;\ 3{,}146;$ б) $x \approx 0{,}3; 1{,}12; 3{,}146.$

Основу функції вважати точним числом. Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

3. Для функції $y = 1{,}34^x$ основа є наближеним числом. Знайдіть за допомогою обчислювальних засобів значення функції, якщо:

а) $x = 0{,}1; 1{,}34;\ 2{,}109;$ б)$x \approx 0{,}8; 1{,}08; 3{,}270.$

Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

4. Обчисліть значення виразу: $2{,}4^{1,32} + \frac{0{,}75-1{,}02^3}{3\cdot 5{,}12^{-0,41}}$, якщо:

а) усі числа є точними; б) основи степенів – точні, а показники – наближені числа.

Порівняйте отримані результати.

5. Скористайтеся виготовленими шаблонами та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки показникових функцій:

а) $y = 2^{-x}$; б) $y = 0{,}5^{x-2}$; в) $y = 3 \cdot 2^{x}$;

г) $y = -3^{2x}$;д) $y = 3 - 2^{x+1}$; е) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 1$;

є) $y = 0{,}5^{x} + 1{,}5$; ж) $y = 2^{|x|}$;

з) $y = 4^{|x-1|}$; и) $y = |2 - 0{,}5^{x}|$.

7. Розв’язати рівняння графічно на міліметровій сітці:

а) $2^{x} = 2{,}5 + x$;б) $2^{x-1} = x^{2}$; в) $3^{x} = 3x + 0{,}5$.

Знайдіть наближені значення коренів рівнянь. Оцініть межу абсолютної похибки.

8. Виконайте попереднє завдання за допомогою комп’ютерної програми. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

9. Розв’язати рівняння графічно за допомогою комп’ютерної програми:

а) $3^{x-0{,}25} = 3 + 2x$; б) $1{,}5 - 2^{0{,}5x} = x^{2}$;

в) $2^{3x} = 3x + x^{2}$.

Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

10. Розв’язати нерівності графічно на міліметровій сітці:

а)$0,5^{x} \geq 2x - 3$; б) $2^{x-1} \leq x^{2}$;

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} \leq 3x + 0{,}5$.

Логарифмічна функція

1. Знаючи, що $\lg 2 \approx 0{,}3010$, $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$, знайдіть десяткові логарифми наступних чисел: 12; 18; 20; $\frac{2}{15}$; $\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[5]{2}$; $\frac{1}{27}$; $\log_{0{,}5} 3$; $\log_{2} 1\,25$; $\log_{2} 1\,8$.

2. Знайти значення $\lg 2$, $\lg 5$, якщо добуток цих десяткових логарифмів наближено дорівнює 0,2104.

3. Користуючись інженерним калькулятором, обчисліть $\lg 2,7$; $\ln 3,45$; $\log_{0,3} 7$ з точністю до 0,001.

4. Знайдіть значення функції $y = \log_{3,5} x$ за відомим значенням аргументу:

а) $x = 2,1; 2,75;\ 3,146$; б) $x \approx 0,3; 1,12; 3,146$.

5. Основу логарифма вважайте точним числом. Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

6. Знайдіть за допомогою обчислювальних засобів значення функції $y = \ln(2x)$, якщо:

а) $x = 0,1; 1,34;\ 2,109$; б)$x \approx 0,8; 1,08; 3,270$.

Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

7. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{3 + \log_{1,2} 6,75}$, якщо:

а) усі числа є точними; б) число 6,75 є наближеним;

в) числа 1,2 та 6,75 є наближеними.

Порівняйте отримані результати.

8. Знаючи, що $\log_2(\sin\phi) \approx 0,1919, \log_2(\cos\phi) \approx \approx 0,1157$, знайти логарифми $\log_2(\operatorname{tg}\phi)$, $\log_2(\operatorname{ctg}\phi)$.

9. Скористайтеся виготовленими шаблонами та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки наступних функцій:

а) $y = 3\ln x$; б) $y = -\ln(2x + 1)$;

в) $y = \log_{3,5} x$; г) $y = \log_{3,5} x - 1$;

д) $y = |3 - \ln x|$.

10. За допомогою обчислювальних засобів знайдіть корені рівняння:

а) $10^{2x-1} - 1 = 7$; б)$5^{3x+1} = 19,5$.

11. Розв'язати рівняння графічно, користуючись міліметровою сіткою:

а) $\log_2 x = x - 3$; б) $\log_2(x + 3) = 3 - x$;

в) $\log_2 x = \frac{1}{x}$.

Знайдіть точність наближених значень коренів рівнянь.

12. Виконайте попереднє завдання за допомогою комп'ютерної програми. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

13. Розв'язати рівняння графічно за допомогою комп'ютерної програми:

а) $log_{1,5}(2x-3) = 3 + 2x$; б) $1{,}5 \cdot 2^{0,5x} = log_3 x^2$;

в) $ln(5 - 1{,}7x) = 3x - x^2$.

Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

Прикладні задачі

Показникова функція

1. 01 січня 2014 року бізнесмен вирішив питання про придбання копіювально-розмножувальної техніки на суму 43,256 млн. грн. Термін придатності техніки – 5 років, після чого вона повністю зношується. Щорічний прибуток від використання – 13,174 млн. грн. Щорічні витрати на її використання розподіляються за роками наступним чином: 2,365; 3,325; та 4,129 млн. грн. При цьому прибуток отримуємо в кінці року, а відповідні витрати на використання виплачуються відразу при отриманні прибутку. Техніку, що придбали продати не можливо. Чи є глузд у придбанні техніки при умові, що ставка банківського прибутку за депозитом (виплачується один раз на рік) до 1 січня 2019 року буде постійною та складає 17 % на рік? Інфляція у розрахунок не береться.

2. Чисельність деякої популяції складає 8200 осіб. Останнім часом вона щорічно зменшувалась на 9,5 %. Коли чисельність популяції досягне 1800 осіб, вона почне вимирати. Скільки років залишилось існувати популяції? (формула складних відсотків).

3. Прикладом швидкого розмножування бактерій є виготовлення дріжджів, під час якого по мірі росту бактерій

проводиться відповідне додавання цукрової маси. Знайти масу дріжджів, якщо їх початкова маса складає 5,3 кг, а тривалість процесу 4,0 год. Обчислення проводяться за формулою $m = m_0 \cdot 1{,}2^t$, де m_0 – початкова маса дріжджів, t– час бродіння в годинах.

4. Якою була чисельність населення міста 10 років тому, якщо в даний час проживає 300 тис. чоловік, а щорічний приріст населення складає 3,5 %.

5. Обчислити, яким буде атмосферний тиск на вершині Ельбрусу, висота якого 5,60 км, якщо залежність атмосферного тиску p від висоти (вираженої у кілометрах) h над рівнем моря виражається формулою: $p = 76 \cdot 2{,}7^{\frac{h}{8}}$.

6. Вартість обладнання дорівнює 500 тис. грн. Відомо, що через 10 років вартість цього обладнання через амортизацію буде дорівнювати 200 тис. грн. Знайдіть відсоток щорічної амортизації обладнання.

(*Вказівка.* Скористайтеся формулою складних відсотків $B_к = B_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де $B_к$ – кінцева вартість обладнання, B_0 – початкова вартість, p % – відсоток щорічної амортизації, n – кількість років.)

Логарифмічна функція

1. Вкладник поклав до банку 10 000 грн під 12 % річних. Через скільки років сума на рахунку подвоїться?

2. Населення міста зростає щорічно на 3 %. Через скільки років населення міста збільшиться у 5 разів.

3. Альпіністи, які підкорювали пік Перемоги, досягли висоти, де тиск був рівний 304 мм рт. ст. обчислити на якій висоті находяться альпіністи, якщо p_0 = 760 рт. ст.

Висота над рівнем моря обчислюється за формулою $h = \frac{8000}{0{,}4343} \cdot \lg\frac{p_0}{p}$, де p_0 – тиск над рівнем моря, p – тиск на висоті h.

4. Початкова кількість бактерій в колонії складала 8, а через 2 години після того як їх розмістили в сприятливе середовище, число збільшилось до 100. Через який період часу можна очікувати колонію в 500 бактерій. Розрахунки слід проводити за формулою $x = \frac{t \cdot (\lg B - \lg Q)}{\lg P}$, де Q – початкова кількість бактерій, t – час, P – число, що показує, у скільки разів змінилася кількість бактерій за вказаний час, B – кінцева кількість бактерій.

5. Система задач і вправ з теми «Похідна та її застосування».

Похідна функції

1. Обчисліть з точністю до 0,1:

а)$\sqrt{9{,}02}$; б)$\sqrt{12{,}07} + \frac{2}{7}$; в)$5\sqrt{36{,}4}$.

2. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення квадрата числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення числа: $1{,}02^2$; $0{,}97^2$; 102^2; 97^2.

3. Скориставшись формулою наближених обчислень значення функції, обчисліть наближено $1{,}002^5$; $2{,}006^5$; $3{,}001^4$.

4. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення кореня квадратного з числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення кореня: $\sqrt{1{,}01}$; $\sqrt{0{,}98}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{96}$.

5. Цікавим є спосіб, за допомогою якого наближене значення квадратного кореня шукали стародавні вавилоняни ще за дві тисячі років до нашої ери. У сучасній математиці цей спосіб може бути поданий у вигляді формули $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Скориставшись зазначеною

формулою, обчисліть значення коренів $\sqrt{1{,}01}$; $\sqrt{0{,}98}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{96}$. Порівняйте відповіді з результатами, отриманими у вправі 4. Зробіть висновок.

6. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення кореня квадратного з числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення кореня:

$\sqrt[4]{1{,}08}$; $\sqrt[3]{27{,}05}$; $\sqrt[8]{1000}$.

7. За допомогою формул наближеного значення функції, обчисліть значення виразів:

$(27 \cdot 2)^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[4]{625 \cdot 3}$; $162^{\frac{1}{4}}$.

Застосування похідної

1. На початку радіоактивного розпаду мали 1 г радія А. Через скільки хвилин його залишиться 0,125 г, якщо його період напіврозпаду дорівнює 3 хв?

2. Період напіврозпаду радіоактивної речовини дорівнює 1 год. Через скільки годин його кількість зменшиться у 10 разів?

3. Обчисліть, яка доля радію залишиться через 1000 років, якщо період його напіврозпаду дорівнює 1550 років.

4. Визначити розміри циліндричної закритої консервної банки, об'єм якої V см^3, щоб затрати жерсті на її виготовлення були найменшими.

5. З трьох однакових дошок завширшки a см потрібно зробити жолоб, поперечний переріз якого має форму рівнобічної трапеції. Знайдіть величину кута нахилу бічних сторін перерізу до лінії горизонту, при якому жолоб буде мати найбільшу пропускну здатність?

6. Система задач і вправ з теми «Первісна та її застосування».

Визначений інтеграл

1. Обчисліть наближене значення визначеного інтеграла:

а) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$,

якщо межі інтегрування є точними числами.

2. Виконайте попереднє завдання, вважаючи межі інтегрування наближеними значеннями.

3. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть:

а) $\int_{2,5}^{3,1} \frac{1}{x}\,dx$; б) $\int_{1,4}^{2,3} e^x dx$,

якщо межі інтегрування є точними числами.

4. Виконайте попереднє завдання, вважаючи межі інтегрування наближеними значеннями.

5. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^2 + 2x$ та прямими $x = 1{,}2;\ x = 2{,}4$:

а) за методом прямокутників, здійснюючи розбиття проміжку на 3; на 6 рівних відрізків;

б) за допомогою комп'ютерної програми.

6. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ та $y = sin\, x$:

а) за методом підрахунку правильних цифр, визначивши межі інтегрування з точністю до сотих;

б) за допомогою комп'ютерної програми.

Порівняйте отримані результати.

Прикладні задачі

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 7$ с.

2. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за інтервал часу від t_1 до t_2, якщо $v(t) = t^2 - 5t + 6,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1.$

3. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, що змінюється за законом $v(t) = t^2 - 5t + 6$ (м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 5$ с.

4. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює $R = 1{,}80$ м, а висота $H = 3{,}50$ м.

5. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб розтягнути пружину на 0,06 м, якщо сила 12 Н розтягує її на 0,01 м. (*Вказівка.* За законом Гука, сила F пропорційна розтягуванню або стисканню пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягування або стискання. З умови задачі можна знайти k. Оскільки при $x = 0{,}01$ м сила F дорівнює 12 Н, то $k = \frac{F}{x}$, $k = \frac{12}{0{,}01} = 1200$. Отже, $F = kx = 1200x$).

6. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 3,5 см, якщо відомо, що сила 2,0 Н стискає пружину на 1,2 см?

7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а) $y = \sqrt{x};\ x = 0{,}1;\ x = 2{,}3;$

б) $y = 1 - x^2;\ x = -0{,}5;\ x = 0{,}5.$

8. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло масою $m = 15{,}00$ кг підняти з поверхні Землі вертикально вгору на висоту $h = 3{,}5$ м. Радіус Землі $R = 6371{,}032$ км. (*Вказівка*: за законом Ньютона сила F притягання тіла Землею дорівнює: $F = G \cdot \frac{mM}{x^2}$, де m – маса тіла, M – маса Землі, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{Н} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ (або $\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$) – гравітаційна стала, x – відстань від центра мас тіла до центра мас Землі).

7. Система задач і вправ з теми «Елементи теорії ймовірності та математичної статистики».

1. Проведіть експеримент по підкиданню монети 30 разів. Обчисліть відносну частоту випадання «герба», «числа» з точністю до тисячних. Якою буде ймовірність випадання «герба»? Відповідь запишіть у відсотках. Оцініть точність отриманого результату.

2. Визначте, як часто зустрічаються в районі вашої школи різні види дерев. Результати занесіть у таблицю частот. Визначте відносну частоту та ймовірність (у відсотках) того, що вибране навмання дерево буде деревом конкретної обраного Вами виду. Оцініть точність отриманого результату.

3. Гравець вносить 100 грн у касу грального клубу. У процесі гри підкидають гральний кубик. Якщо випадає число 6, гравець виграє 200 грн, випадає число 5 – виграє 100 грн, випадає число 4 або 3 – не виграє нічого, випадає двійка – програє 50 грн, випадає число один – програє 100 грн. Визначте, чому дорівнює математичне сподівання щодо виграшу під час цієї гри. Проведіть експеримент 30, 60 разів та знайдіть середнє арифметичне отриманих значень. Порівняйте результати обчислень.

4. Гру вважають справедливою, якщо математичні сподівання усіх учасників гри однакові. Чи справедливою буде наступна гра: підкидають дві монети. Гравець 1 отримує 2 очка, якщо одночасно випадають «герб» і «число». В усіх решта випадках він отримує 0 очок. Гравець 2 отримує 3 очка, якщо одночасно випадають два «герба». В усіх решта випадках він отримує 0 очок.

5. Застосуйте біном Ньютона до наближених обчислень: $(1+x)^n \approx 1+nx$. Знайдіть наближені значення наступних виразів:

1) $1{,}002^{10}$; 2) $0{,}09^{10}$; 3) $\sqrt{0{,}93}$; 4) $\sqrt{2\sqrt{0{,}24}}$; 5) $\frac{1}{0{,}97}$;

6) $1{,}01^6$; 7) $0{,}96^7$; 8) $\sqrt[5]{1{,}02}$; 9) $\left(\sqrt[3]{0{,}95}\right)^4$; 10) $\frac{1}{1{,}02}$;

11) $0{,}98^8$; 12) $\sqrt{1{,}03}$; 13) $\sqrt[9]{0{,}99}$; 14) $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$; 15) $\frac{1}{\left(\sqrt[5]{0{,}98}\right)^3}$.

ПІСЛЯСЛОВО

Зміна знаннєвої парадигми шкільної освіти на компетентнісну змушує переглянути якими мають бути результати навчання учнів на кожному з її рівнів: початковому, базовому середньому та профільному середньому.

Згідно нової компетентнісної парадигми освіти завданням навчання математики учнів стає формування в них усіх, зазначених у концепції НУШ, ключових компетентностей, що сприяють вихованню і соціалізації особистості, формує готовність і здатність до життя в суспільстві, до самовдосконалення та навчання впродовж життя, життєвого вибору та самореалізації, трудової діяльності та громадської активності.

Особлива роль серед задекларованих компетентностей під час навчання математики приділяється математичній компетентності учня, яку можна розглядати як базову, як основну, на якій вивчаються суміжні з математикою шкільні предмети. Математична компетентність у свою чергу поділяється на графічну, обчислювальну, процедурну, дослідницьку та інші.

Сучасному фахівцю важливо вміти швидко і правильно виконувати обчислення як з точними, так і з наближеними числовими значеннями величин.

Пропонована монографія містить у достатньому обсязі практичний та теоретичний матеріал для формування в учнів закладів загальної середньої освіти обчислювальної компетентності, методичні рекомендації, добірки задач і вправ. Вона не замінює в повному обсязі навчальний підручник з наближених обчислень, а розкриває підходи до формування обчислювальних умінь, навичок, методів обчислення на етапі вивчення математики в ЗЗСО, які

пройшли експериментальну перевірку під час виконання наукових досліджень автора та його учнів.

Сподіваюсь на те, що й учителі-практики, й автори підручників з математики, і дослідники в області теорії та методики навчання математики знайдуть у монографії необхідні їм матеріали, відповіді на проблемні питання. Зичу всім успіхів у розв'язанні важливих завдань.

З повагою, щиро ВаШ
(Василь Швець)

СПИСОК ВИКОРИСТИХ ДЖЕРЕЛ

1. Нормативні документи

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 23.11.2011, №1392. Діє в старшій школі. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text
2. Державний стандарт базової середньої освіти. Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 30.09.2020, № 989. Діє в основній школі 5-9 класи. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti
3. Державний стандарт профільної середньої освіти. Затв. постановою Кабінету Міністрів України, від 25.07.2024, № 851. Застосовується з 01.09.2027 р. для здобувачів освіти, які навчаються за програмами дванадцятирічної повної загальної середньої освіти: https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724
4. Закон України про повну загальну середню освіту. 16.01.2020, № 463-IX. https://sqe.gov.ua/law/zakon-ukraini-N-463-ix-pro-povnu-zagalnu/
5. Концепція Нової української школи: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf
6. Модельна навчальна програма «Алгебра 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Автори: Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/

2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf

7. Модельна навчальна програма «Геометрія 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Автори: Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf

8. Модельна навчальна програма «Математика 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. Автори: Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.:

https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl-Vasylyshyn.ta.in.14.07.pdf

9. Модельна навчальна програма «Математика 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти. Автори: Бурда М. І., Васильєва Д. В.: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Burda.Vasileva.14.07.pdf

10. Модельна навчальна програма «Математика 7-9 класи (інтегрований курс)» для закладів загальної середньої освіти. Автор Істер О. С.: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.intehrovanyy.kurs-Ister-12.09.2023.pdf

11. Модельна навчальна програма «Математика 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.:
https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.Vasylyshyn.ta.in.26.07.2023.pdf
12. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Рівень поглибленого вивчення. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
13. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Профільний рівень. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
14. Навчальна програма для 10-11 кл. загальноосвітніх навчальних класів. Математика. Рівень стандарту. https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv
15. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-9 класи (12-річна школа) // Математика в школі. 2006. № 2. С. 2-15.
16. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-12 класи. МОН України. К.: Ірпінь, 2005. 64 с.
17. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. К.: Шк. світ. 2001. 212с.
18. Програми з математики для 5-11 кл. середньої загальноосвітньої школи. К.: Освіта, 1992. 89 с.

19. Программы по математике для 5-11 кл. средней общеобразовательной школы. К.: Рад. шк., 1989. 89 с.

20. Программа по математике для средней общеобразовательной школы (V-XI классы) // Математика в школе. 1985. № 6. С. 7-26.

21. Программа по математике для IV-X классов средней общеобразовательной школы // Математика в школе. 1979. № 2. С. 7-12.

22. Программы по математике для восьмилетней и средней школы // Математика в школе. 1978. № 4. С. 7-32.

23. Программы для 1 и 2 ступени семилетней Единой трудовой школы. М.: ГИЗ, 1921. 350 с.

2. Шкільні підручники

24. Алгебра: Учеб. для 7 кл. средней школы / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. Под ред. С. А. Теляковского. М: Просвещение. 1989. 240 с.

25. Алгебра: Підруч. для 8 кл. середньої школи / Ю. Н. Макаричев, Н. Г. Миндюк, К. І. Нєшков, С. Б. Суворова. За ред. С. А. Теляковського. Вид. 2. К: Освіта. 1994. 288 с.

26. Бевз В. Г., Бевз Г. П., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень). 10 клас. К.: Освіта. 2018.

27. Бевз В. Г., Бевз Г. П., Владімірова Н. Г., Владіміров В. М. Геометрія (проф. рівень) 10 клас. К.: Освіта. 2018.

28. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський В. Ф., Єршов С. В. Геометрія (проф. рівень) 10 клас. Х.: Ранок. 2018.

29. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень). 10 клас. К.: Генеза. 2018.

30. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень). 11 клас. К.: Генеза. 2018.

31. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія (проф. рівень) 10 клас. К.: Генеза. 2018.

32. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія. 11 клас. Х.: Гімназія. 2018.

33. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) 10 клас. Х.: Гімназія. 2018.

34. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) 11 клас. К.: Генеза. 2018.

35. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія (проф. рівень) 10 клас. Х.: Гімназія. 2018.

36. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. 11 клас. К.: Освіта. 2018.

37. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) 10 клас. Х.: Ранок. 2018. 272 с.

38. Нелін Є. П. Геометрія (проф. рівень) 10 клас. Х.: Ранок. 2018.

39. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) 11 клас. К.: Генеза. 2018.

40. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія. 11 клас. Х.: Гімназія. 2018.

3. Дисертації

41. Шпилевая Л. Г. Измерения и математическая обработка их результатов в курсе физики восьмилетней школы: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. М., 1984. 173 с.

42. Цориева А. К. Формирование вычислительных навыков и умений учащихся, 7-8 классов по алгебре: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 1993. 175 с.

43. Соколовский И. Ф. Вычислительная культура как основа методики введения начал математического анализа

в средней школе: дис. канд. пед. наук, 13.00.02 .Л., 1988. 180 с.

44. Суткова А. В. Питання наближених обчислень в загальноосвітній трудовій політехнічній школі: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 1964. 271 с.

45. Овчаренко Л. П. Элементы современной вычислительной культуры в старших классах средней общеобразовательной школы: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 1965. 281 с.

46. Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень в основній школі: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 2008. 331 с.

47. Жук І. В. Розвиток умінь старшокласників виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 2015. 281 с.

48. Дубинчук О. С. Вузлові питання викладання арифметики в V класі: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 1954. 259 с.

49. Слепкань З. И. Культура тригонометрических вычислений в восьмилетней и средней школе: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. К., 1962. 235 с.

50. Прайсман Н. Я. Основы теории приближенных вычислений по методу подсчета цифр и методика их преподаваний в школе: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. М., 1964. 180 с.

51. Елизаветина Н. В. Приближенные вычисления в средней школе и их роль в формировании математических понятий: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. Казань, 1966. 178 с.

52. Лобанов И. Б. Приближенные вычисления в средней школе: дис. канд. пед. наук, 13.00.02. Николаев, 1955. 336 с.

4. Монографії, підручники, навчальні посібники

53. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навчальний посібник. К.: Вища школа, 1989. 367 с.

54. Брадис В. М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. М.: Изд-во АПН РСФМ. 1962. 252 с.

55. Брадіс В. М. Засоби і способи елементарних обчислень / В.М.Брадіс. Рад. шк., 1952. 176 с.

56. Брадіс В. М. Чотиризначні математичні таблиці / В. М. Брадіс. Рад. шк., 1979. 94 с.

57. Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник. За редакцією С. М. Кіро, Ю. М. Шмандіна. К.: Рад. шк., 1964. 428 с.

58. Великий тлумачний словник сучасної української мови / Укладач і головний редактор В. Т. Бусел. К.: Ірпінь: ВТФ «ПЕРУН». 2005. 1728 с.

59. Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе. Пособие для учителя. М.: Просвещение. 1964. 112 с.

60. Демкович В. П. Приближенные вычисления в школьном курсу физики. Книга для учителя / В.П.Демкович, Н.Я.Прайсман. М.:Просвещение, 1983. 112 с.

61. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. К.: Техніка. 1997. 304 с.

62. Кавун И. Н. Приближенные вычисления. Курс элементарный. М.: Гиз. 1924. 124 с.

63. Кліндухова В.М., Швець В.О. Наближені обчислення на уроках математики: 5-9 кл. К.: Шкільний світ, 2010. 128 с.

64. Крилов О. М. Лекції з наближених обчислень. Харків, Київ. 1932. 293 с.

65. Литовченко З. М., Єлизаветіна Н. В. Наближені обчислення. Посібник для вчителя. К.: Рад.шк. 1988. 125 с.

66. Минаева С.С. Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. Пособие по математике. М.: Просвещение 1983. 128 с.

67. Прочухаев В. Г. Приближенные вычисления в школе. Учебное пособие. М., 1973. 179 с.

68. Прус А. В., Швець В. О. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: Рута, 2011. 388 с.

69. Пулькин С. П. Вычислительная математика. Пособие для учащихся 9-10 кл. по факультативному курсу. М.: Просещение. 1974. 239 с.

70. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие. К. Рад. шк., 1983. 192 с.

71. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. К.: Зодіак-Еко, 2006. 310 с.

72. Слєпкань З. І. Тригонометричні обчислення в школі / З.І.Слєпкань. К.: Рад. шк., 1962. 106 с.

73. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навчальний посібник. Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.

74. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.

75. Суткова А. В. Наближені обчислення в курсі математики середньої школи. Методичний лист. К.: Рад. шк., 1966. 36 с.

76. Швец М. Н. О приближенных числах / М. Н. Швец. К: Рад. шк., 1968. 124 с.

77. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. К. УДУ імені Михайла Драгоманова. 2024. 498 с.

78. Швець В. О., Прус А. В. Теорія і практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії. Навчальний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.

79. Шунда Н. М. Застосування похідної до розв'язування задач: навчальний посібник. К.: Техніка, 1999. 240 с.

5. Статті

80. Александров П. С. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях / П.С.Александров, А.Н.Колмогоров // Математика в школе. 1941. № 2. С. 1-12.

81. Жук І. В. Зв'язок між радіанною та градусною мірою кута з точки зору наближених обчислень // Science and Education a New Dimension/ Pedagogy and Psychology. 2015. С. 38-43.

82. Жук І. В. Обчислення значень тригонометричних функцій при наближених значеннях аргументу // Математика в рідній школі. № 1. 2014. С. 14-17.

83. Жук І. В. Розвиток у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функцій // Вісник ЧНУ імені Богдана Хмельницького. Вип. 17. 2015. С. 97-102.

84. Жук І. В. Розвиток у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функцій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. К. 2015. С. 33-39.

85. Кліндухова В.М. Основні методи наближених обчислень в курсі шкільної математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 5. 2006. С. 139-143.

86. Хабиб Р. А. Приближенные вычисления в курсе алгебры и геометрии восьмилетней школы // Математика в школе. 1962. С. 52-59.

87. Швець В. О., Жук І. В. Наближені обчислення в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу // Математика в рідній школі. 2014. № 11. С. 25-31.

88. Швець В. О., Жук І. В. Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції // Математика в рідній школі. 2015. № 3. С. 18-23.

89. Швець В. О., Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи // Математика в школі. 2008. № 2. С. 3-8.

90. Швець В. О., Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи // Математика в школі. 2008. № 3. С. 10-15.

91. Швець В. О., Кліндухова В. М. Наближені обчислення у 7-8 класах // Математика в школі. 2008. № 6. С. 12-17.

92. Швець В. О., Кліндухова В. М. Наближені обчислення у 9 класі // Математика в школі. 2008. № 9. С. 16-22.

93. Швець В. О., Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії // Математика в школі. 2009. № 4. С. 17-23.

94. Швець В. О., Радченко М. В. Похідна функції у розв’язаннях задач з економіки // Математика в рідній школі. 2019. № 9. С. 22-29.

95. Швець В. О., Соколенко Л. О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосування у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в рідній школі. 2014. № 9. С. 2-10.

Наукове видання

В. О. ШВЕЦЬ

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ У НОВІЙ УКРАЇНСЬКІЙ ШКОЛІ. МОНОГРАФІЯ

ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені Михайла Драгоманова

Підписано до друку 04.05.2026 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Умов.друк.арк. 18,83. Облік.видав.арк. 14,22
Зам. № 020.
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Українського державного університету
імені Михайла Драгоманова.
01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК 7896 від 25.07.2023.
(044) 239-30-26.

ШВЕЦЬ Василь Олександрович – кандидат педагогічних наук, професор, професор кафедри методики навчання математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.



Народився 20 січня 1948 року в с. Рогізна Сквирського району Київської області.
У 1966 році, після закінчення школи, вступив на фізико-математичний факультет Чернігівського державного педагогічного інституту імені Т. Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у 1970 році. Після служби в армії працював на посаді асистента кафедри вищої математики Чернігівського педінституту (1971–1973) й одночасно проходив стажування в Інституті математики АН України. У 1973–1985 рр. працював учителем математики в смт Немішаєве Київської області.

З 1985 року працює асистентом, старшим викладачем, доцентом, професором, заступником декана, завідувачем кафедри математики і методики навчання математики. Нині Василь Олександрович – професор кафедри методики навчання математики.

У 1989 році захистив кандидатську дисертацію, науковий керівник професор З. І. Слєпкань. У 1990 році йому присвоєно вчене звання доцента кафедри математики і методики викладання математики, а в 2004 році – звання професора. Василь Олександрович читає такі навчальні курси як «Теорія та методика навчання математики», «Елементарна математика», «Педагогічні технології» та інші дисципліни для студентів фізико-математичного факультету; керує написанням курсових, бакалаврських, магістерських робіт, а також педагогічною практикою студентів. Швець В. О. є співавтором «Галузевих стандартів вищої освіти. Математика», навчальних Програм з математики для середньої та вищої школи; член редколегії фахового наукового часопису «Фізико-математична освіта» (фаховий науковий журнал у галузі педагогічних наук, індексований наукометричними базами світу). Під його керівництвом захистили кандидатські дисертації понад 25 осіб; проведено шість Міжнародних науково-практичних конференцій «Актуальні проблеми методики навчання математики» (2004, 2007, 2011, 2017, 2021, 2023); у науковому доробку понад 300 публікацій, серед яких навчальні програми, підручники, навчально-методичні посібники, монографії та статті.

Нагороджений Грамотою Міністерства освіти УРСР (1977), Нагрудним знаком Відмінник народної освіти УРСР (1983), Нагрудним знаком Відмінник освіти України (2000), Нагрудним знаком МОН України «Петро Могила» (2008), Почесними грамотами Національної Академії Наук України (2009, 2018), Почесними грамотами Національної Академії Педагогічних наук України (2015, 2018), Нагрудним знаком «Василь Сухомлинський» (2021), Орденом святого рівноапостольного князя Володимира III ступеня (2023).

ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені Михайла Драгоманова

9 789669 313539