Министерство просвещения УССР

Киевский государственный педагогический
институт имени А.М. Горького

Ядвига Августовна Пасечник

Классификации и их использование в школьном курсе математики

/ Диссертация написана на украинском языке /

/ 13.00.02 - методика преподавания математики/

Автореферат

диссертации на соискание
ученой степени кандидата
педагогических наук по
методике математики

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313618

Киев - 1975

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент Бевз Г.П.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор Чарин В.С.
Кандидат педагогических наук, доцент Хромой Я.В.

Внешний отзыв - Ивано-Франковский государственный педагогический институт имени В. Стефаника, кафедра математики.

Автореферат разослан "3" ноября 1975 г.
Защита состоится "24" декабря 1975 г.

на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького
/ Киев-30, ул. Пирогова, 9 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

Одной из основных задач современной школы есть воспитание высокообразованных, всесторонне развитых молодых людей, способных самостоятельно логически и творчески мыслить и работать. Л.И.Брежнев на Всесоюзном съезде учителей / 4 июля 1968 г./ в своей речи указывал: " ... важно, чтобы школа не только давала сумму конкретных знаний, но и учила делать самостоятельные выводы на базе этих знаний, прививала молодежи навыки творческого мышления". I/

Развитию творческого и логического мышления способствует изучение каждого предмета, в частности математики. Большую роль в этом развитии играет логическая операция классификация, овладение которой позволяет устанавливать существенные, главные признаки, отделять их от несущественных, второстепенных признаков предметов и явлений, усваивать понятия в их взаимной связи, в их общности и соподчинении, т.е. в определенной системе, а не в отрыве одного понятия от другого. Умению классифицировать следует учить детей с раннего возраста, а в школе лучше всего это делать на уроках математики.

Однако до сих пор вопросу обучения учащихся умению классифицировать не уделялось должного внимания. Учителя не только не давали общих понятий о классификации, а даже обходили классификации конкретных понятий, изучаемых в школе, вследствие чего учащиеся, заканчивая школу, часто не могли правильно определить вид функции или уравнения, числа или выражения, геометрического преобразования или фигуры, установить связи между двумя или несколькими математическими понятиями, изобразить их схематически.

I/ Л.И. Брежнев, Ленинским курсом, Речи и статьи, т.II Издательство политической литературы, М., 1970, стр.213.

В методической литературе не разработана методика обучения учащихся приемам проведения классификаций, чтению и построению классификационных схем, диаграмм и пр. Этим в частности объясняется и отсутствие у учащихся представления об общей логической структуре учебного материала.

Классификации играют важную роль не только в структуре знаний учащихся. Они имеют огромное познавательное значение в науке и практической деятельности людей, служат источником знаний: зная место понятия в классификационной схеме или таблице, можно судить о его содержании, свойствах всех предметов, входящих в его объем.

Вопросы, связанные с классификациями, имеют свою историю.

Классификации впервые возникли и использовались в ботанике и зоологии. В 1735 г. Карл Линней опубликовал свой труд "Система природы", в котором основное внимание уделено классификации и систематизации растительного и животного мира. Позже классификации использовались и в других естественных науках. В 1869г. Д.И. Менделеев открыл периодический закон химических элементов.

В математике в 1872 г. Ф. Клейном в Эрлангенской программе был указан общий принцип классификации геометрических свойств фигур, по которому к одному классу принадлежат свойства, сохраняющиеся при некоторой группе преобразований пространства.

Примерами научных классификаций являются также созданная К. Марксом и Ф. Энгельсом классификация общественно-экономических формаций по способу производства материальных благ, классификация наук, созданная Ф. Энгельсом и др.

Вопросам формирования понятия класса и операции классификации посвящены психологические исследования советских и зарубежных психологов Выготского Л.С., Менчинской Н.А., Косма Т.В., Пиаже Ж., Инельдер Б. и др.

Введение классификаций в процесс преподавания школьной математики облегчает решение проблемы формирования математических понятий на теоретико-множественной основе. Вопросы, связанные с решением этой проблемы, нашли свое отражение в некоторых диссертационных работах по методике математики. Однако, проблема формирования математических понятий на теоретико-множественной основе с помощью классификаций ставится впервые и определяет цель нашего исследования.

В связи с этим мы ставили перед собой такие задачи:

I/ определить содержание необходимых сведений о классификации вообще, о правилах проведения классификаций, разработать систему целесообразных упражнений на использование классификаций и экспериментальным путем проверить доступность предлагаемого материала;

2/ обосновать, когда и на каком материале желательно впервые знакомить учащихся с классификациями, когда и как следует приводить классификации конкретных математических понятий;

3/ исследовать, как можно на уроках математики ознакомить учащихся с классификациями, правилами проведения классификаций, классификационными схемами и диаграммами;

4/ исследовать, как влияют классификации математических понятий на качество их усвоения и прочность запоминания, на общеобразовательное развитие учащихся;

5/уточнить классификации конкретных математических понятий, чисел, выражений, функций, углов, соответствий, преобразований и пр.

Диссертация написана на основании 1/анализа научной и учебно-методической литературы по математике, логике, философии, педагогике и психологии; 2/ изученного опыта работы передовых учителей математики Ровенской и Ивано- ранковской областей, личного опыта работы автора в школе /4 года/ и в педагогическом институте/7 лет/; 3/ экспериментальных исследований, проведенных автором и под его руководством в 1972-1975 гг.

Обучающий эксперимент проводился в Дедлинской средней школе № 4 Ивано-Франковской области /учителя Гунька Л.В., Дубей Е.А., Мазуркевич К.А., Микулин А.М./ и в средней школе № 10 г.Ровно /учитель Никон Е.Ф./. Массовый эксперимент охватил более 1000 учащихся названных школ.

Предлагаемая диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии.

Во введении аргументируется актуальность рассматриваемой проблемы, формулируются задачи исследования и методы их решения. Первая глава - " Некоторые общие вопросы о классификации" - состоит из трех параграфов и имеет теоретический характер.

Что такое классификация? Какова ее структура и содержание? Какие виды классификаций следует различать? - Ответы на эти вопросы нашли место в первом параграфе - "Классификация как логическая конструкция, ее содержание и структура". Здесь приведены различные трактовки понятия "классификация". На основании всестороннего их анализа мы предлагаем теоретико-множественную трактовку понятия "классификация", в основу которой удобно положить понятие множества и операций объединения и пересечения множеств. Классификацию определяем как операцию, направленную на образование непустых попарно непересекающихся подмножеств данного множества объектов, объединение которых равно данному множеству.

Полученные при этом непустые подмножества называем членами классификации или классами. Признак, по которому образуют непустые подмножества, является основанием классификации.

Классификация, как операция, являет собой совокупность взаимосвязанных и соподчиненных друг другу операций мышления. Она осуществляется с помощью сравнения рассматриваемых объектов с целью нахождения различных и сходственных их свойств, на основании чего объекты относят к определенному классу.

При выполнении классификации, как и при выполнении любой операции, необходимо получается определенный результат, который также называется классификацией. В таком понимании классификация являет собой логическую конструкцию, отражающую существующие связи между классами объектов, которая может быть представлена схемами, таблицами и диаграммами.

Поэтому термин классификация мы употребляем в двух случаях: для обозначения операции разбиения множества на непересекающиеся непустые подмножества, удовлетворяющие определенным правилам, и для обозначения результата этой операции, т.е. некоторой логической конструкции.

Классификацию часто называют разбиением множества. И этот термин имеет двойственное значение. Он обозначает и процесс образования непустых подмножеств, и результат этого процесса, т.е. систему S подмножеств данного множества M, удовлетворяющую следующим требованиям:

1/ для любого $X \in S$ имеет место отношение $X \subset M$;

2/ для любого $X \in S$, $X \neq \emptyset$;

3/ для любых $X, Y \in S$ из условия $X \neq Y$ следует $X \cap Y = \emptyset$;

4/ если множество M разбито на n классов, т.е. $S=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, то имеет место равенство $\bigcup_{\substack{K=1 \\ X_K \in S}} X_K = M$.

Элементы X_K системы S называют классами разбиения S.

Указанные требования отражают следующие правила проведения классификаций:

а/разбиение на классы следует выполнять по одному и тому же основанию;

б/ классы должны исключать друг друга;

в/ объединение классов должно равняться разбиваемому множеству;

г/ разбиение классов на подклассы многоступенчатых классификаций следует выполнять непрерывно, не допуская скачков.

В результате анализа учебно-методической литературы установлено, что в ряде случаев авторы не придерживаются указанных правил проведения классификаций. Часто встречаются схемы, которые логически неправильно отражают существующие связи между понятиями, вследствие чего учащиеся получают неправильные представления о содержании и объеме того или иного понятия. В связи с этим в работе указывается на необходимость соблюдения правил проведения классификаций в каждом отдельном случае.

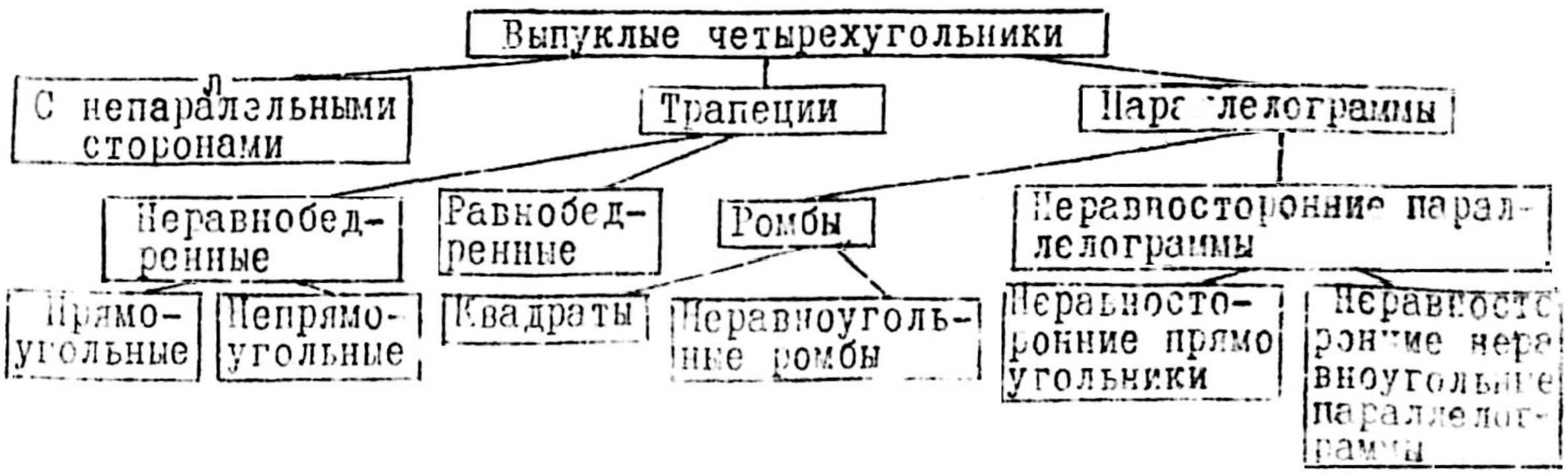
Для того, чтобы выполнить классификацию объектов произвольного множества, необходимо задать некоторое отношение эквивалентности. В работе доказаны две теоремы - прямая и обратная о том, что отношение эквивалентности на множестве M задает разбиение этого множества на классы эквивалентных элементов, и наоборот. Отмечая синонимический характер терминов "класс" и "множество", мы рассматриваем различные классы: конечные и бесконечные, счетные и несчетные, в частности одноэлементные и пустые.

Необходимость введения пустых классов объясняется тем, что классы, пустые в одной предметной области, могут оказаться непустыми в другой. Например, класс, содержащий корни уравнения $x^2-2=0$, пустой для области рациональных чисел и непустой для области действительных чисел. Во-вторых, часто возникает такая ситуация, что, указывая признак с целью образования класса, заблаговременно неизвестно, имеет или нет такой класс хотя бы один элемент.

Выполнение классификаций математических понятий требует решения таких двух задач: I/образование классов; 2/ включение низших, более узких по объему, классов в высшие, более широкие по объему. При решении этих задач необходимо учитывать, что чем шире понятие по объему, тем беднее оно по содержанию, и наоборот, чем уже объем понятия, тем богаче его содержание.

Процесс разбиения множества на классы конечный, но может осуществляться на нескольких ступенях. На каждой ступени разбиения получается два или больше классов. В связи с этим следует различать такие виды классификаций: I/ одноступенчатые и многоступенчатые; 2/ дихотомические и недихотомические. В работе дается полная характеристика каждого вида классификаций, приводятся соответствующие примеры и рассматривается структура этих видов классификаций в смысле логических конструкций.

На примере классификации выпуклых четырехугольников рассматривается структура "деревовидной" схемы:



"Корню дерева" соответствует понятие, объем которого разбивают, узлам разветвлений - классы, полученные в результате разбиения на каждой ступени классификации. Горизонтальный ряд /ярус/ классификации образуют классы, полученные на одной ступени разбиения. Классы горизонтального ряда непересекающиеся. Вертикальный ряд или ветку образуют классы, связанные отношением включения. Например, горизонтальный ряд образуют классы а/ неравнобедренных трапеций, б/равнобедренных трапеций, в/ромбов и г/неравносторонних параллелограммов. Вертикальный ряд /ветку/ образуют, например, классы а/выпуклые четырехугольники, б/параллелограммы, в/ромбы и г/квадраты. Между множествами признаков классов а/горизонтального ряда и б/вертикального ряда существует определенная зависимость: множества признаков классов, расположенных на одном ярусе, содержат одинаковое количество элементов, но отличаются хотя бы одним элементом. Например, множества признаков классов равнобедренных трапеций и ромбов имеют одинаковое количество элементов, т.к. каждое из них содержит все признаки, свойственные четырехугольникам. Кроме того, каждый из этих классов имеет по два признака, свойственные только ему:

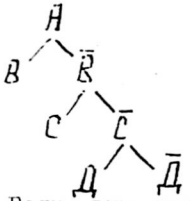
Класс равнобедренных трапеций:	Класс ромбов
а/две стороны параллельны;	а/ противоположные стороны попарно параллельны;
б/непараллельные /боковые/ стороны конгруэнтны	б/ все стороны конгруэнтны

Множество признаков понятия, расположенного на низшем ярусе ветки, включает в себя множество признаков понятия высшего яруса той же ветки.

Представляют интерес дихотомические многоступенчатые классификации. В работе выделены две основные конструкции дихотомичес-

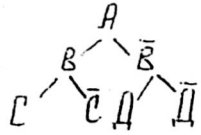
кой классификации. Первая состоит в том,что на каждой ступени выполняется разбиение только одного класса, чаще всего того, название которого содержит частицу "не". Например. пусть объем понятия А на первой ступени разбивается на классы В и $\bar{B}$ по признаку S_1. Класс В удовлетворяет признаку S_1, а класс $\bar{B}$ не удовлетворяет ему. На другой ступени выполняется разбиение класса $\bar{B}$ по признаку S_2 на два противоположные классы C и $\bar{C}$, и т.д.

Схематически такая классификация имеет следующую структуру:



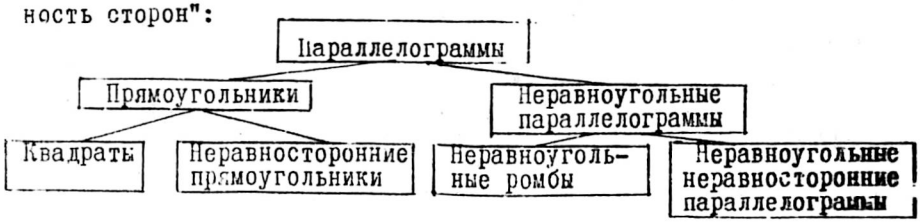
$$A = B \cup \bar{B}, \quad B \cap \bar{B} = \emptyset;$$
$$\bar{B} = C \cup \bar{C}, \quad C \cap \bar{C} = \emptyset;$$
$$\bar{C} = Д \cup \bar{Д}, \quad Д \cap \bar{Д} = \emptyset.$$

Если, выполняя дихотомическую многоступенчатую классификацию, разбиваем на два класса каждый из классов, полученных на предыдущей ступени разбиения, то структура классификации имеет вид:



$$A = B \cup \bar{B}, \quad B \cap \bar{B} = \emptyset,$$
$$B = C \cup \bar{C}, \quad C \cap \bar{C} = \emptyset,$$
$$\bar{B} = Д \cup \bar{Д}, \quad Д \cap \bar{Д} = \emptyset.$$

Разбиение каждого из полученных классов можно выполнять по одному и тому же признаку, или по разным признакам. Например,классификация параллелограммов выполнена по признаку "конгруэнтность углов" на первой ступени, а на второй ступени каждый из полученных классов разбивается по одному и тому же признаку "конгруэнтность сторон":



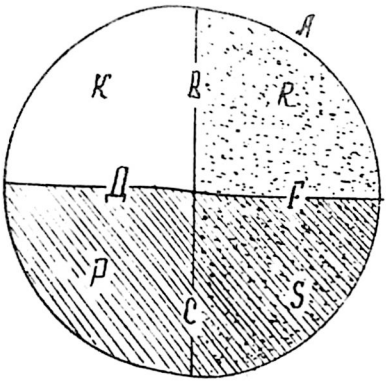
Преимущество дихотомической классификации состоит в том,что при выполнении разбиения часто удается избежать таких ошибок, как неполнота разбиения и скачок в разбиении, важнейшие причины возникновения которых в работе указаны.

Часто в математике и вообще в практической деятельности приходится встречаться с понятиями, которые характеризуются двумя признаками одновременно. Поэтому большую роль в осознанном овладении такими понятиями должны сыграть классификационные таблицы с двумя входами. Структура такой таблицы объясняется на примере классификации параллелограммов по двум признакам одновременно:

по сторонам / по углам	Ромбы	Неравносторонние параллелограммы
Прямоугольники	Квадраты	Неравносторонние прямоугольники
Неравноугольные параллелограммы	Неравноугольные ромбы	Неравносторонние неравноугольные параллелограммы

В таких случаях основание классификации имеет конъюнктивную структуру, т.к. признаки, по которым выполняется разбиение, соединяются союзом " и ", что указывает на одновременное выполнение обеих признаков.

Вместо таблицы с двумя входами можно использовать,например, такую диаграмму /рис.1 /,



/ Рис. I/

где круг А - обозначает множество параллелограммов;
верхний полукруг В - класс ромбов;
нижний полукруг С - класс неравносторонних параллелограммов;
левый полукруг Д - класс прямоугольников;
правый полукруг F - класс неравноугольных параллелограммов;

$B \cap Д = K$ - класс квадратов;
$B \cap F = R$ - класс неравноугольных ромбов;
$C \cap Д = P$ - класс неравносторонних прямоугольников;
$C \cap F = S$ - класс неравносторонних неравноугольных параллелограммов.

При построении диаграммы объем разбиваемого понятия можно изобразить не только кругом, но и любым замкнутым криволинейным контуром без точек самопересечения, например, прямоугольником и т.п.

Второй параграф первой главы называется "Классификация как психологический процесс и формирование алгоритмов его осуществления".

В процессе работы над диссертацией были изучены результаты исследований психологов по вопросу формирования понятия класса и операции классификации. Учитывая эти результаты, возрастные особенности учащихся, уровень развития мыслительных операций /сравнения, анализа, обобщения и абстрагирования/, а также уровень

общего и интеллектуального развития учащихся, в работе выделены три ступени в процессе формирования классификации математических понятий.

На первой ступени /I - II классы/ классификации осуществляются с помощью непосредственного восприятия классифицируемых объектов, а также в результате оперирования моделями объектов. На этой ступени учащиеся должны осознать роль каждого существенного признака. В мыслительной деятельности учащихся первой ступени особую роль играют операции сравнения, сопоставления, противопоставления.

На второй ступени /III- VI классы/ в мыслительной деятельности все больше выступают на первый план операции анализа, синтеза и обобщения.

Третья ступень/VII-X классы/в процессе развития классификации математических понятий характеризуется достаточно высоким уровнем понимания учащимися закона обратного соотношения между объемом и содержанием понятия, умения обобщить некоторые факты на более общие абстрактные понятия, сформировать понятие класса, выбирая за основание классификации признаки оперативного характера.

В работе дана полная характеристика каждой ступени, а также раскрыта методика формирования алгоритмов классификации.

Формирование алгоритмов классификации неразрывно связано с формированием алгоритмов решения задач таких таких трех типов:

I/ задачи на распознавание принадлежности объек а данному классу;

2/ задачи на определение принадлежности объекта одному из известных классов, указанных в схеме;

3/ задачи на систематизацию совокупности понятий.

Решение каждой из этих задач являет собой мыслительный процесс, который совершается в несколько этапов. Методика формирования алгоритмов классификации и решения этих задач освещается в работе

с точки зрения применения классификаций к изучению конкретных математических понятий. Большое внимание уделяется методике построения граф-схем.

Структура алгоритма и соответствующей граф-схемы зависит от структуры признаков, которые служат основанием классификации.

В определениях математических понятий чаще всего встречаются признаки двух типов структур: конъюнктивной и дизъюнктивной. В зависимости от этого алгоритмы классификации имеют соответственно конъюнктивную и дизъюнктивную структуру.

Формирование алгоритмов классификации дизъюнктивной структуры показано на примере решения задачи на распознавание равнобедренного треугольника / Рис.2 /.

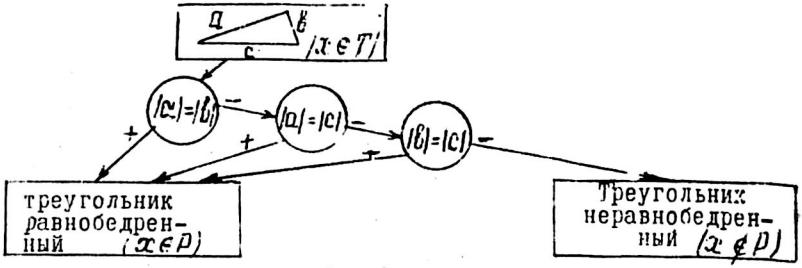


Рис.2

Граф-схема алгоритма дизъюнктивной структуры свидетельствует о том, что положительный результат завершения алгоритма получается после выполнения хотя бы одного из признаков, соединенных знаком дизъюнкции. Так, решение рассматриваемой задачи требует выполнения признака равенства длин двух любых сторон треугольника. Символически это решение записывается так:

$$(x \in P) \Leftrightarrow (|a|=|b|) \vee (|a|=|c|) \vee (|b|=|c|).$$

Эту запись читаем: установить, что треугольник равнобедренный, значит показать, что равны длины сторон а и в, или а и с, или в и с.

Формирование алгоритмов конъюнктивной структуры можно показать на примере классификации натуральных чисел по признакам делимости на 2 и на 3 одновременно. Классификация по двум признакам, которые соединяются с помощью знака конъюнкции, выполняется в два этапа. На первом из них проверяется выполнение первого признака для всех объектов разбиваемого множества, а на втором - второго /рис.3/.

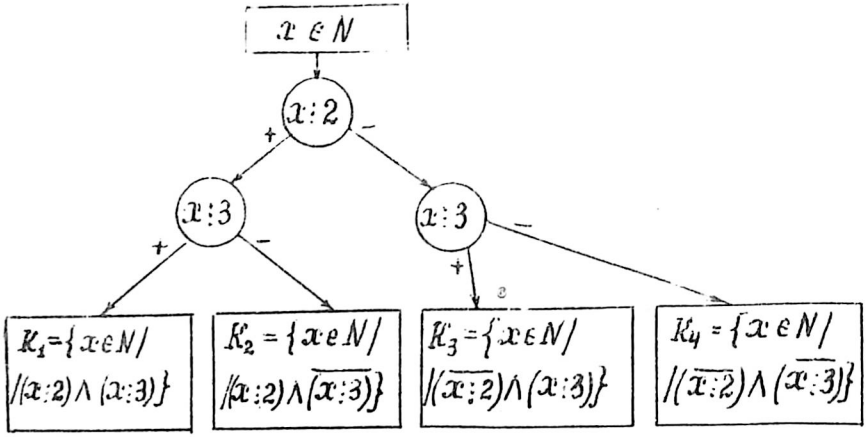


Рис.3

В результате классификации натуральных чисел по двум признакам/делимость на 2 и 3/ получены 4 класса, каждый из которых характеризуется выполнением или невыполнением каждого из признаков. Например, класс $K_2 = \{x \in N / (x:2) \wedge (\overline{x:3})\}$ определяет множество тех натуральных чисел, каждый элемент которого делится на 2 и не делится на 3. Во время ознакомления учащихся с символическими записями членов классификации удобно вместо знака конъюнкции " $\wedge$ " писать союз "и".

При построении граф-схем в кружочке записываем признак, наличие которого нужно проверить у всех объектов разбиваемого множества. Положительный и отрицательный результаты завершения проверки отмечаем стрелками, которые сопровождаются соответственно знаком " + " и " - " и ведут или к следующему этапу, или к результату завершения алгоритма.

Следует считать алгоритм классификации сформированным только тогда, когда учащиеся умеют:

I/ указать признак, по которому выполняется разбиение множества;

2/ проверить этот признак у всех объектов множества и показать результат завершения проверки признака;

3/ определить структуру признака и соответствующего алгоритма;

4/ показать все возможные результаты завершения алгоритма.

Последний параграф первой главы - "Классификационные схемы и диаграммы" - посвящен исследованию роли классификационных схем и диаграмм в формировании математических понятий, а также разработке методики работы с ними и внедрения их в практику работы школы. Здесь приведены краткие исторические сведения о возникновении диаграмм Эйлера, их усовершенствовании П.С.Порецким, об универсальности диаграмм Венна.

Для иллюстрации отношений между классами достаточно ограничиться "кругами" Эйлера. Вид диаграммы зависит от отношения между классами. В работе рассмотрены диаграммы, иллюстрирующие такие отношения между классами: а/тождественное совпадание; б/частичное совпадание; в/отношение включения одного класса в другой: г/отношение несовместимости; д/отношение соподчиненности нескольких понятий другому понятию.

Важно научить учащихся выполнять построение диаграммы в такой последовательности:

I/ кругом или областью, ограниченной замкнутой кривой без самопересечения, изобразить один из классов;

2/ исследовать, имеет ли другой класс элементы, общие с первым;

3/ если установлено существование общих элементов, необходимо установить, все ли элементы общие или только некоторые;

4/ сделать вывод о размещении на диаграмме круга, соответствующего второму классу, и изобразить его.

Если количество классов больше двух, необходимо установить связи и отношения между каждой парой классов и изобразить результаты на одной диаграмме.

Чтобы повысить эффективность применения схем при усвоении существенных признаков изучаемых понятий, учащихся следует обучать специальным приемам работы со схемами, а именно:

I/ читать деревовидные схемы в двух направлениях: а/сверху вниз, т.е. от корня "дерева" к узлам разветвлений и б/снизу вверх;

2/ указать основание классификации, если дана схема;

3/ обосновать или опровергнуть схему;

4/ усовершенствовать схему;

5/ самостоятельно построить схему или диаграмму.

Обоснование схемы требует умения найти основание классификации среди существенных признаков классов, указанных в схеме, и проверить все требования, которым должны удовлетворять члены классификации. Опровержение схемы следует начинать с ее обоснования, причем необходимо показать, каким требованиям не удовлетворяют указанные в схеме понятия.

Прежде чем усовершенствовать схему, необходимо обосновать, является ли схема классификационной или нет. Если схема не отражает классификацию, следует указать возможные пути устранения ошибок, допущенных при ее построении, и построить правильную схему. Усовершенствование схем иногда требует завершения построения схемы.

Упражнения указанного характера можно сначала предлагать учащимся в перечисленной последовательности, а позже рассматривать более сложные из них.

Работа с классификационными схемами способствует развитию у учащихся мыслительных операций, а также облегчает процесс формирования понятий на теоретико-множественной основе.

Во второй главе - "Классификации понятий в курсе арифметики, алгебры и начал анализа" - излагается методика использования классификаций при изучении узловых вопросов арифметики, алгебры и начал анализа.

Первый параграф этой главы - "Использование классификаций при изучении числовых множеств" посвящен методике введения классификаций в процесс изучения понятия о числе. Здесь констатируется, что учащиеся часто не осознают отношения включения между числовыми множествами, подчиненности одних числовых множеств другими и пр.

Классификация должна сыграть важную роль в процессе правильного формирования понятия числа. С простейшими классификациями чисел предлагается знакомить младших школьников. При этом следует рассмотреть сначала разбиение конечного числового множества по некоторому признаку. Это позволит постепенно осуществить переход от конечных множеств к бесконечным.

Благодаря введению в школьный курс элементов теории множеств, учащихся У класса можно достаточно подробно ознакомить с понятием классификации, четко сформулировав определение этой операции, с

правилами выполнения разбиения, с необходимой математической и логической символикой. Предлагаем знакомить пятиклассников не только с классификациями чисел, выполненными по одному признаку, но и с классификациями чисел по двум признакам одновременно. Такие классификации желательно ввести при изучении и повторении темы "Делимость чисел. Признаки делимости", а также при закреплении навыков выполнения операций над множествами.

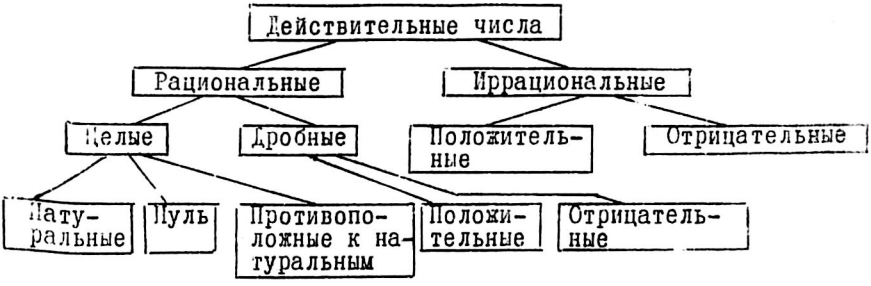
Проведенные исследования подтверждают, что правильное формирование понятия числа требует введения классификаций на каждом этапе расширения этого понятия. Т.к. расширение понятия числа возможно осуществить следуя одной из таких двух схем:

I/ натуральные числа -неотрицательные рациональные -рациональные -действительные;

2/ натуральные числа - целые - рациональные - действительные, то и классификацию чисел можно выполнять по-разному. В школе понятие числа расширяется по первой схеме. Следуя ей, приходим к такой классификации действительных чисел.



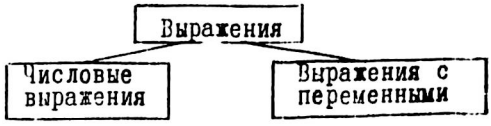
Следуя второй схеме расширения понятия о числе, приходим к другой классификации действительных чисел:



С фрагментами приведенных классификаций целесообразно знакомить учащихся на каждой ступени расширения понятия о числе; в частности со второй схемой классификации действительных чисел, как и с классификацией комплексных чисел, учащихся можно ознакомить на факультативных занятиях в 8 - 10 классах.

Во втором параграфе второй главы - "Классификации выражений и функций" - раскрываются методические вопросы использования классификаций при изучении указанных тем.

На современном этапе перестройки школьного математического образования знакомство с выражениями осуществляется в начальных классах, где учащиеся получают начальные сведения о выражениях, знакомятся с буквенной символикой и простейшими тождественными преобразованиями выражений. Поэтому уже в младших классах возникает необходимость систематизировать полученные сведения о выражениях. Одной из первых классификаций выражений, с которой следует ознакомить учащихся IУ класса, есть дихотомическая классификация, представленная схемой



На основании анализа различных трактовок понятий одночлена и многочлена нужно добиться понимания учащимися соподчиненности первого понятия второму, различий между ними, в результате чего построить классификацию многочленов по количеству членов.

В связи с тем, что, кроме целых выражений, в восьмилетней школе изучаются дробные, рациональные и иррациональные выражения, большое внимание следует уделить выяснению и пониманию учащимися отношений между перечисленными классами выражений, работе на построение схем и диаграмм, иллюстрирующих эти отношения. В процессе построения диаграмм учащиеся замечают, что одной и той же древовидной схеме может соответствовать несколько диаграмм. Вид диаграммы зависит от того, какой из подчиненных классов выделяют первым и изображают кругом.

Одним из фундаментальных понятий современной математики является понятие "Функция". Сейчас в школе функция рассматривается как определенное соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества. Поэтому понятие функции является членом дихотомической классификации соответствий между двумя множествами. Классу функций противопоставляется класс соответствий, которые не являются функциями /для их обозначения не существует специального термина/. Отметим, что при выполнении этой классификации учащиеся часто допускают ошибку - не включают в класс функций те соответствия между множествами X и Y, у которых не все элементы множества Y "принимают участие" в установленном соответствии, т.е. в множестве Y имеются "свободные" элементы, к которым не подходит ни одна стрелка. Устранению такой ошибки помогает анализ графических иллюстраций различных видов соответствий, например таких: /рис.4/.

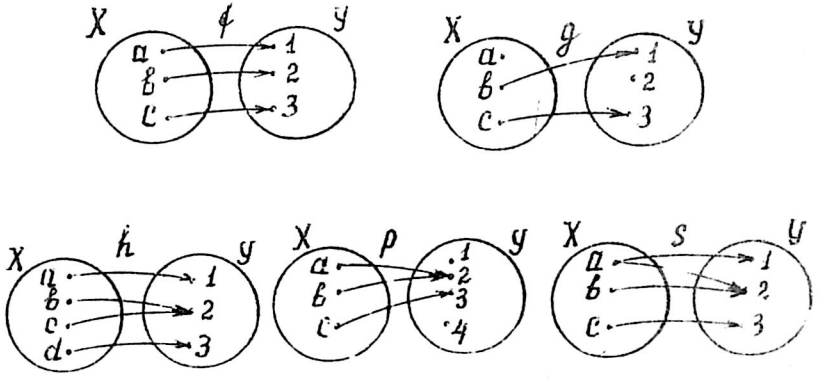


Рис.4

Здесь функциями являются соответствия f, h, p, а соответствия g и S не являются функциями. При этом необходимо указать, при каких условиях соответствие не является функцией.

С понятием функции тесно связано понятие отображения, в частности, "отображения множества X в множество У " и " отображения множества X на множество У".

Связи между этими понятиями целесообразно иллюстрировать также "кругами" Эйлера /рис.5/, подчеркивая равносильность терминов "функция" и "отображение множества X в множество У".

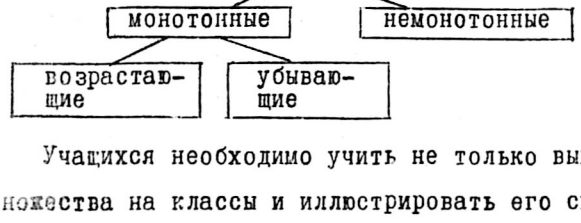


Рис.5

В работе освещается методика введения классификации функций в зависимости от аналитического представления функции, от степени

переменной в формуле, задаваемой степенную функцию, от монотонности, четности, периодичности и т.д.

Множество всех функций можно разбить по признаку монотонности на 2 класса - монотонных и немонотонных функций, - первый из которых в свою очередь разбивается на 2 подкласса - возрастающих и убывающих функций. Эту двухступенчатую дихотомическую классификацию желательно проиллюстрировать схемой:



Учащихся необходимо учить не только выполнять разбиение множества на классы и иллюстрировать его схемой, но и по заданной схеме построить соответствующую диаграмму. Например, в результате построения диаграммы, соответствующей выше приведенной схеме классификации функций, возможно появление одного из видов диаграмм /рис.6 а, б /, на которых обозначено

через P - множество всех функций,

M - класс монотонных функций,

T - класс возрастающих функций,

S - класс немонотонных функций.

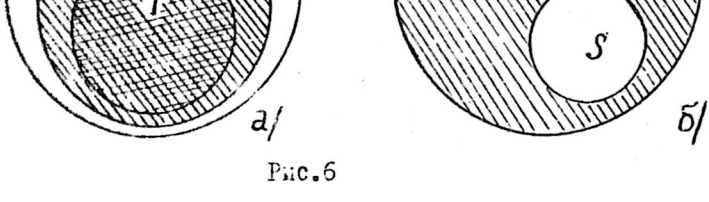


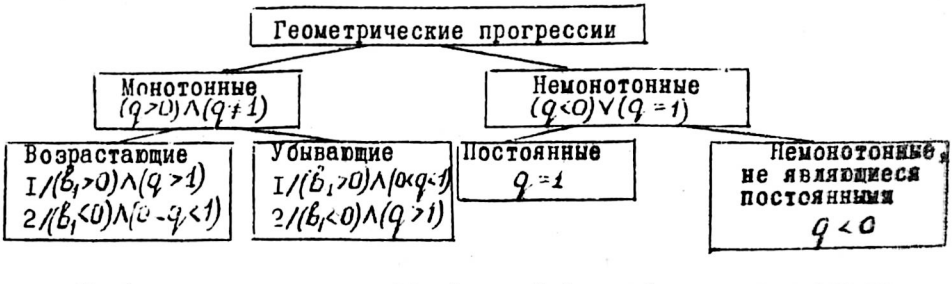
Рис.6

Топологически эти диаграммы одинаковые.

Методика использования диаграмм, иллюстрирующих классификацию функций, раскрыта на материале числовых последовательностей, как отдельного вида функций. В школе изучаются два вида числовых последовательностей: арифметические и геометрические прогрессии.

Классификацию арифметических прогрессий можно проиллюстрировать диаграммами /рис.6а,б,/, на которых каждой точке области соответствует не любая функция, а арифметическая прогрессия.

Аналогичный вид имеют и диаграммы, иллюстрирующие классификацию геометрических прогрессий. Но прежде, чем строить эти диаграммы, учащиеся должны осознать структуру основания этой классификации. Основание классификации геометрических прогрессий в зависимости от их монотонности имеет конъюнктивную структуру, т.к. содержит два признака, соединенных союзом "и" "знаком конъюнкции " $\wedge$ " /. Обозначив первый член прогрессии - b_1, а знаменатель - q, приведем схему этой классификации:



Кроме дихотомических классификаций функций в зависимости от периодичности и непрерывности, необходимо ознакомить учащихся с классификацией функций по четности. При этом желательно использовать "круги"Эйлера, т.к. учащиеся часто считают, что классификация функций по четности также дихотомическая, т.е. существуют функции четные и нечетные. Чтобы предупредить и устранить эту ошибку, необходимо построить и глубоко проанализировать диаграмму/рис.7/.

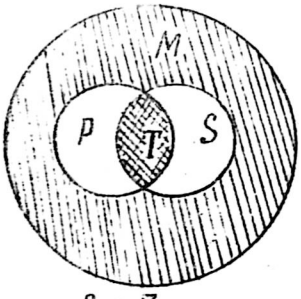


Рис. 7.

Круг M соответствует множеству всех функций; P - классу четных, а S - классу нечетных функций. Круги P и S частично пересекаются, т.к. существуют функции /например, $y = 0$, заданная на множествах интервалов действительной оси, симметрических относительно точки O/, являющиеся одновременно четными и нечетными. Этому классу соответствует область T. Области $K = M \setminus / P \cup S /$ соответствует класс функций не являющихся ни четными, ни нечетными.

Следующий параграф второй главы посвящен введению классификаций в процесс изучения уравнений и неравенств. На основании анализа известных трактовок понятий уравнения и неравенства рассматриваются различные классификации этих понятий, обосновывается непригодность некоторых из них для современной трактовки этих понятий, предлагается знакомить учащихся с классификациями уравнений в зависимости от количества переменных, от степени переменной в уравнениях, содержащих одну переменную и т.п.

В работе предлагается рассмотреть с учащимися классификации линейных уравнений и систем двух линейных уравнений с двумя переменными в зависимости от существования и количества корней уравнений и их систем.

Формировать понятие квадратных уравнений также целесообразно с помощью классификаций, выполненных по различным признакам: в зависимости от значения старшего коэффициента, от количества членов, отличных от нуля, от существования и количества действительных корней и т.п.

Классификацию трансцендентных уравнений выполняем в зависимости от методов их решения.

Формирование понятия "неравенства" не представляет никаких трудностей, если учащиеся четко усвоили структуру понятия "уравнение", хорошо овладели приемами проведения классификаций уравнений. При изучении неравенств полезно использовать те схемы и диаграммы, которые иллюстрируют классификацию уравнений, указывая при этом на характер соответствия между множеством точек области и множеством неравенств.

Третья глава диссертационной работы - "Классификац я понятий в школьном курсе геометрии".

Первый параграф этой главы посвящен раскрытию методики использования классификаций при изучении геометрического материала в начальных классах, обоснованию их роли в преподавании и усвоении материала.

Использование классификаций геометрических понятий в начальных классах служит хорошей пропедевтикой для изучения понятий систематического курса геометрии в последующих классах, вооружает учащихся навыками проведения полного и целеустремленного анализа геометрической фигуры, на основании которого выделяются те существенные признаки, которые лежат в основе определения понятий. Вместе с тем классификации способствуют развитию логического мышления младших школьников, правильному формированию представлений о геометрических фигурах и тех понятиях, простейшие свойства которых изучаются в начальных классах.

Значительное место при изучении геометрического материала в начальных классах должны занять дихотомические классификации. Процесс формирования геометрических понятий с помощью классификаций у младших школьников в работе раскрыт на примерах формирования понятий угла, ломанной, треугольника. Учащихся начальных классов следует ознакомить и с простейшими классификационными схемами и диаграммами

В третьей главе раскрывается вопрос формирования алгоритмов классификации геометрических понятий у учащихся восьмилетней школы.

Серьезные изменения в содержании школьного курса геометрии, насыщенность его новыми идеями и новой логической структурой требуют усовершенствования методов преподавания. Использование теоретико-множественного аппарата в преподавании геометрических понятий позволяет формировать их не изолированно друг от друга, а в неразрывной связи их с родственными понятиями, сформировать логическую конструкцию, в которой каждое понятие занимает определенное место.

В работе раскрыта методика формирования алгоритмов классификации геометрических понятий на примерах понятий геометрических объектов таких, как треугольник, выпуклый четырехугольник, параллелограмм, а также понятий оперативного характера-перемещения, отображения, преобразования.

Экспериментальные исследования позволили выявить те трудности, которые возникают в процессе формирования алгоритмов классификации у учащихся. Главная трудность состоит в том, что отдельные классы, полученные в результате завершения проверки признака, который является основанием классификации, не имеют специальных терминов для их обозначения. Например, отношение конгруэнтности смежных сторон на множестве параллелограммов задает разбиение этого множества на два класса - ромбы и неравносторонние параллелограммы, но для обозначения последнего не существует специального термина.

А это приводит к тому, что учащиеся часто не допускают даже существования такого класса параллелограммов.

Другая трудность состоит в том, что при проведении классификаций учащимся часто приходится проверять лишние признаки, которые содержатся в традиционных определениях отдельных геометрических понятий.

Например, в определении прямоугольника - "прямоугольник -параллелограмм, у которого все углы прямые" - содержатся лишние признаки.

При выполнении классификации параллелограммов достаточно ограничиться существованием одного прямого угла для образования класса прямоугольников. Понятно, что в учебнике такое определение дается с целью уменьшения количества теорем, которые доказываются для прямоугольника.

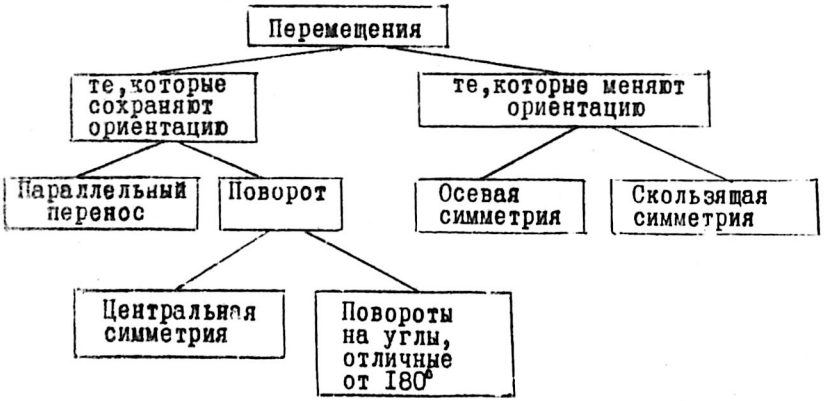
В связи с тем в работе намечены пути устранения этих трудностей, в частности предлагается учащимся видоизменять отдельные определения так, чтобы при классификации выполнять проверку минимального количества видовых признаков. С этой целью в работе рассматриваются нестандартные примеры упражнений на выполнение классификаций, которые требуют от учащихся умения найти такие существенные признаки объектов, которые не встечаются в известных определениях этих объектов, а также умения определять классы, полученные в результате разбиения, по их существенным признакам.

Большое внимание следует уделить работе по формированию понятий "отображение", "перемещение" и "преобразование", т.к. они составляют основу современного курса геометрии.

Одним из средств правильного формирования этих понятий есть классификация. Мы предлагаем ознакомить учащихся с классификациями отображений и перемещений на плоскости, а затем в пространстве. Так, отношение "сохранять расстояния между точками" на множестве отображений плоскости на себя задает разбиение этого множества на два класса. Соответствующая классификация иллюстрируется схемой:



В зависимости от того, сохраняют или меняют перемещения ориентацию фигур, их также можно разделить на классы. Соответствующая классификация, с которой предлагаем знакомить учащихся на уроках геометрии восьмилетней школы, имеет вид:

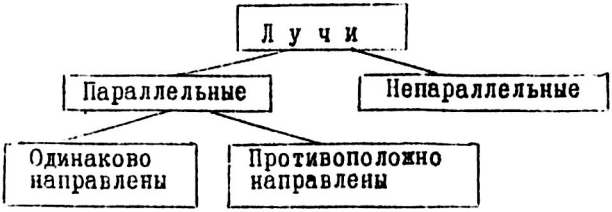


Считаем нужным заметить, что поскольку изучение скользящей симметрии не предусмотрено обязательной программой по геометрии, то о ней можно рассказать учащимся на факультативных или кружковых занятиях по математике.

Кроме классификаций понятий геометрических объектов, понятий оперативного характера, в работе рассмотрены классификации взаимных положений двух геометрических фигур, как например, двух прямых, лучей, окружности и прямой и пр.

В основании классификации взаимных положений пар прямых и пар лучей лежит отношение параллельности, а в основании классификации взаимных положений двух окружностей или окружности и прямой лежит отношение "иметь общую точку".

В качестве примера классификации взаимных положений геометрических объектов приведем классификацию пар лучей:



В последнем параграфе - "Использование классификаций при изучении стереометрического материала" - предлагаем ознакомить старшеклассников с классификациями многогранников, призм, параллелепипедов, пирамид, телесных углов и пр.

Большое внимание здесь уделяем анализу ошибок, которые часто еще встречаются в учебном процессе при выполнении учащимися классификаций стереометрических объектов.

Например, многие учащиеся, а иногда и учителя считают, что пирамиды делятся на полные и усеченные /то же самое относительно конусов/. В работе указаны причины возникновения таких ошибок, т.к. такое противопоставление понятий не имеет смысла: усеченная пирамида не является пирамидой /согласно определения пирамиды/, а также пути их устранения.

Проведенное исследование позволило сделать следующие выводы:

I. Использование классификаций в процессе изучения математики должно быть направлено на а/ повышение логической культуры учащихся; и б/ усвоение математических понятий в системе.

2. Начальные сведения о классификации желательно рассмотреть уже в младших классах в пропедевтическом плане. На примерах конечных числовых множеств, множеств геометрических объектов, известных учащимся, а также произвольных объектов, не обязательно математических, младших школьников следует ознакомить с классификацией в

общих чертах с тем, чтобы постепенно подготовить их к формированию научно правильных классификаций в последующих классах.

3. В процессе формирования классификаций и соответствующих алгоритмов у младших школьников значительное внимание следует уделять принципу варьирования несущественных признаков объектов, согласно которому неизменными остаются только существенные признаки. При этом следует подчеркивать, что именно существенные признаки характеризуют определенный класс.

4. Для иллюстрации классификаций понятий уже в младших классах целесообразно использовать простейшие схемы и диаграммы. При построении диаграмм желательно вводить буквенные обозначения для классов, записывая, например, начальные буквы соответствующих им названий, тем самым сосредоточить внимание учащихся на выделении определенного класса, а числовые множества - буквами N, Z, Q, как принято в науке и в современной школе.

5. Сведения о классификации желательно сгруппировать вокруг двух основных понятий: множества и отношения.

6. Впервые термин "классификация" можно ввести в У классе. Здесь предлагаем дать определение /классификация - это операция образования непустых, попарно непересекающихся подмножеств данного множества, объединение которых равно данному множеству/, ввести термины "класс", "члены классификации", "основание классификации". Позже желательно ознакомить учащихся с правилами проведения классификаций и структурой схем и диаграмм.

7. Процесс выработки умения классифицировать продолжительный: соответствующую работу следует проводить в тех классах и на тех уроках, где понятие не только впервые изучается, а расширяется и углубляется.

8. Построение классификационных диаграмм в школе должно стать средством формирования обобщений: объекты любой природы, свойства которых изучаются, изображаются точками, а совокупности точек некоторой фигуры изображают множество этих объектов. Обучая учащихся построению диаграмм, необходимо постоянно указывать на то, что от отношения между понятиями зависит взаимное расположение фигур, интерпретирующих это отношение.

9. В процессе построения различных классификационных диаграмм, касающихся одних и тех же понятий, нужно научить учащихся замечать, что одной и той же деревовидной схеме может соответствовать несколько диаграмм. Вид диаграммы зависит от того, какой из подчиненных классов выделяют раньше всех и изображают кругом. Понимание структуры каждой диаграммы обеспечивает понимание структуры соответствующего понятия.

IO. Предлагаем в учебниках и учебных пособиях по математике для восьмилетней школы поместить дидактические материалы на выполнение классификаций не только множеств математических объектов, но и множеств произвольной природы. Упражнения должны быть такого характера:

I/ выполнение разбиения множества по определенным признакам;

2/ построение деревовидных схем, таблиц с двумя входами, диаграмм;

3/ обоснование схем и диаграмм;

4/ нахождение основания классификации по данной схеме или диаграмме;

5/ завершение построения диаграмм и схем;

6/ опровержение неправильных схем и др.

О результатах исследований диссертант докладывал на научных конференциях преподавателей Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького, Ровенского государственного педагогического института имени Д.З. Мануильского.

По теме диссертации автор выступал с докладами и лекциями на республиканских курсах усовершенствования квалификации учителей при Киевском государственном педагогическом институте имени А.М. Горького, на городских конференциях учителей г.Ирпень /Киевская область/, г.Ровно и г.Долины/Ивано-Франковская область/. Сообщения получили одобрения.

Основные результаты исследования опубликованы в следующих работах:

1. Классификация геометрических понятий в курсе математики начальных классов, ж. "Початкова школа", 1973, № 8 / на украинском языке/.

2. Роль классификаций математических понятий в учебном процессе,ж."Початкова школа",1974,№ 7/на украинском языке/.

3. Применение алгоритмов классификации изучения математических понятий, ж. "Початкова школа", 1975, № 1/ на украинском языке/.

4. "Классификации математических понятий и их использование в процессе обучения", ж. "Радянська школа",1975, № 2 /на украинском языке/.