Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 28 (2026) 42–49
© O. Makarchuk, R. Kryvoshyia
https://doi.org/10.31392/iscs.2026.28.042 UDC 511.72

On some properties of Q_s-normal numbers in the interval $[0;1]$

Oleg Makarchuk[1], *Rostyslav Kryvoshyia*[2]

Про деякі властивості Q_s-нормальних чисел відрізка $[0;1]$

Олег Макарчук, Ростислав Кривошия

Abstract. This paper investigates the properties of Q_s-normal numbers defined in terms of the Q_s-representation of numbers in the interval $[0;1]$. The focus is on establishing the concept of an absolutely Q_s-normal number, which is a natural extension of E. Borel's concept of an absolutely normal number.

Keywords: Q_s-representation, Q_s-normal number, measurable set, measurable function, Lebesgue measure, stochastic vector

2020 Mathematics Subject Classification: 11K55

Анотація. В роботі досліджуються властивості Q_s-нормальних чисел, заданих в термінах Q_s-представлення чисел відрізка $[0;1]$. Акцент здійснюється на побудові поняття абсолютно Q_s-нормального числа, що є природнім поглибленням поняття абсолютно нормального числа за Е.Борелем.

Ключові слова: Q_s-представлення, Q_s-нормальне число, вимірна множина, вимірна функція, міра Лебега, стохастичний вектор.

1 Вступ

Нехай $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$, $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ — деякий стохастичний вектор такий, що $q_j > 0$ для кожного $j \in A_s \equiv \{0; 1; ...; s-1\}$.

Відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує деяка послідовність цифр (α_n) алфавіту A_s така, що виконується рівність:

[1] Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine. makolpet@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1001-8568

[2] Institute of Mathematcis of NASU, Kyiv, Ukraine. rostyslavkryvoshyia@gmail.com, https://orcid.org/0009-0000-4382-7057

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\alpha_n} \cdot q_{\alpha_{n-1}} \cdot q_{\alpha_{n-2}} \cdot ... \cdot q_{\alpha_1}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, ..., \beta_{s-1} = q_0 + q_1 + ... + q_{s-2}$.

Представлення (1) називається Q_s-представленням числа x. Число x у даному випадку має Q_s-зображення:

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...}.$$

Також відомо, що існує зліченна множина чисел, які мають два зображення наступного виду:

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(s-1)} = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...(\alpha_n+1)(0)}.$$

Такі числа називаються Q_s-бінарними, більше того всі числа, що не є Q_s-бінарними, мають єдине Q_s-зображення та називаються відповідно Q_s-унарними. Якщо $q_j = \dfrac{1}{s}$, $\forall j \in A_s$, то Q_s-представлення є класичним s-ковим представленням чисел відрізка $[0;1]$.

В роботі [8] були введенні наступні означення Q_s-слабонормального та Q_s-нормального числа.

Число $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ називається Q_s-слабонормальним, якщо для кожної цифри $\gamma \in A_s$:

$$\nu(x;\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;\gamma)}{n} = q_\gamma,$$

де $N_n(x;\gamma)$ — кількість цифр γ серед $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Таким чином, число x є Q_s-слабонормальним, якщо асимптотична частота $\nu(x;\gamma)$ кожної цифри $\gamma \in A_s$ дорівнює q_γ.

Число x називається Q_s-нормальним (Q_s-нормальним за стохастичним вектором $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$), якщо для довільного набору символів $(\gamma_1;\gamma_2;...;\gamma_k)$ з алфавіту A_s:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;...;\gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j},$$

де $N_n(x;(\gamma_1;\gamma_2;...;\gamma_k))$ — кількість наборів серед $(\gamma_{1+r};\gamma_{2+r};...;\gamma_{k+r})$ (при $r \in A_{n-k+1}$), рівних $(\gamma_1;\gamma_2;...;\gamma_k)$.

Зрозуміло, що поняття Q_s-слабонормального та Q_s-нормального числа є природнім поглибленням відповідних понять для s-кової системи представлення. В роботі [8] було показано, що майже всі числа $x \in [0;1]$ є Q_s-нормальними.

Зазначимо, що дійсне число x називається абсолютно нормальним, якщо воно є нормальним за будь-якою цілою основою $s \geq 2$. Як показав Е. Борель [4], майже всі числа відрізка $[0;1]$ є абсолютно нормальними.

Хоча Е. Борель ввів поняття нормальних чисел, він не зміг побудувати жодного прикладу абсолютно нормального числа. Історичний розвиток методів ефективної побудови абсолютно нормальних чисел бере свій початок із класичних праць початку XX століття. У 1917 році В. Серпінський [10]

та А. Лебег [9] незалежно один від одного запропонували перші конструктивні приклади абсолютно нормальних чисел. Їхній підхід базувався на теоретико-множинних методах.

Питання алгоритмічної генерації абсолютно нормальних чисел, відкрите з часів В. Серпінського та А. Лебега, було розв'язане В. Бехер та С. Фігейрою у 2002 році [2], які показали, що конструкція Серпінського та Лебега є рекурсивними за Тюрінгом. Проте історична першість належить А. Тюрінгу, чий неопублікований алгоритм 1937–1938 років був остаточно реконструйований у 2007 році [3]. Потрібно відзначити, що побудова s-ково нормального числа також є важкою проблемою [5–7].

Дана робота присвячена побудові аналогу поняття абсолютно нормального числа для Q_s-представлення чисел.

2 Про аналог поняття абсолютно нормального числа за Е. Борелем для Q_s-представлення чисел

Оскільки зліченне об'єднання множин нульової міри Лебега є множиною нульової міри Лебега, то враховуючи результат роботи [8] маємо такий наслідок

Наслідок 1. *Для довільної послідовності* $(p_{0n}, p_{1n}, ..., p_{(s-1)n})$ *стохастичних векторів зі строго додатними координатами множина точок* $x \in [0;1]$ *таких, що* x *є* Q_s*-нормальним для* Q_s*-представлення, продукованого стохастичним вектором* $(p_{0n}, p_{1n}, ..., p_{(s-1)n})$ *для довільного* $n \in N$*, є множиною повної міри Лебега, тобто має міру Лебега* 1.

Зрозуміло, що континуальне об'єднання множин нульової міри Лебега не обов'язково є множиною нульової міри Лебега. Таким чином, у подальшому є цілком природним питання: чи існує число x, яке є Q_s-нормальним за усіма стохастичними векторами $(p_0, p_1, ..., p_{s-1})$ зі строго додатними координатами? Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 4. *Для кожного числа* $x \in [0;1]$ *існує стохастичний вектор* $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ *з додатними координатами такий, що* x *не є* Q_s*-нормальним за стохастичним вектором* $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$.

Доведення. Зрозуміло, що

$$0 = \Delta^{Q_s}_{(0)}; \quad 1 = \Delta^{Q_s}_{(s-1)}.$$

Отже, числа 0 та 1 не є Q_s-нормальними за жодним стохастичним вектором з строго додатними координатами. У подальшому будемо розглядати лише додатні числа $x \in (0;1)$. Розглянемо послідовно випадки.

Випадок 1. Нехай $s \in \mathbb{N}, s > 2$. Для стохастичного вектора $(q_0, ..., q_{s-1})$ розглянемо число:

$$x = \Delta^{Q_s}_{11...111...} = \Delta^{Q_s}_{(1)}.$$

Зрозуміло, що

$$x = \beta_1 + \beta_1 q_1 + \beta_1 \cdot q_1^2 + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_1 \cdot q_1^k = \frac{q_0}{1 - q_1},$$

звідки маємо

$$q_0 = x(1-q_1).$$

Таким чином, для заданого $x^* \in (0;1)$ розглянемо достатньо близьке до 1 число q_1 і розглянемо число

$$q_0 = x^*(1-q_1).$$

Інші значення $q_2, q_3, ..., q_{s-1}$ визначимо за рівністю

$$q_2 = q_3 = ... = q_{s-1} = \frac{1-q_0-q_1}{s-2}.$$

Зауважимо, що

$$q_0 + q_1 = x^*(1-q_1) + q_1 = x^* + (1-x^*)q_1 < x^* + 1 - x^* = 1.$$

Отже, для заданого $x^* \in (0;1)$, Q_s-зображення числа x^* відповідно до стохастичного вектора

$$\left(x^*(1-q_1), q_1, \frac{1-x^*(1-q_1)-q_1}{s-2}, ..., \frac{1-x^*(1-q_1)-q_1}{s-2}\right)$$

має вигляд

$$x^* = \Delta^{s-1}_{11...1...} = \Delta^{s-1}_{(1)}$$

і число x^* відповідно не є Q_s-нормальним.

Випадок 2. Нехай $s = 2$. Розглянемо число

$$x = \Delta^{Q_s}_{0101...01...} = \Delta^{Q_s}_{(01)}.$$

Маємо:

$$x = \beta_0 + \beta_1 q_0 + \beta_2 q_0 q_1 + \beta_3 q_0 q_1 q_0 + ... =$$

$$= 0 + q_0^2 + 0 + q_0^3 q_1 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_0 q_1)^n \cdot q_0^2 = \frac{q_0^2}{1-q_0 q_1} = \frac{q_0^2}{1-q_0+q_0^2}.$$

Зауважимо, що останнє значення можливо отримати іншим чином. Зрозуміло, що x є нерухомою точкою відображення $T^2(x)$, тобто виконується рівність

$$T^2(x) = x$$

за умови, що $x < q_0$ та $T(x) > q_0$.

Маємо:

$$T(x) = \frac{x}{q_0}, \quad T_2(x) = \frac{T(x)-q_0}{1-q_0} = \frac{\dfrac{x}{q_0} - q_0}{1-q_0} \Rightarrow$$

$$\frac{\dfrac{x}{q_0} - q_0}{1-q_0} = x \Rightarrow \frac{x}{q_0} - q_0 = x - x q_0 \Rightarrow x = \frac{q_0^2}{1-q_0+q_0^2}.$$

Розглянемо функцію $h(t) = \dfrac{t^2}{1-t+t^2}$. Зрозуміло, що функція $h(t)$ є неперервною на проміжку $[0;1]$, тому за теоремою Коші про проміжне

значення неперервної функції для заданого $x^* \in (0;1)$ існує $q_0 \in (0;1)$ таке, що

$$x^* = \frac{q_0^2}{1 - q_0 + q_0^2} = \Delta^{Q_2}_{(01)},$$

де останнє Q_2-зображення відповідає стохастичному вектору $(q_0; 1 - q_0)$. Якщо $x^* \neq \dfrac{1}{2}$, то твердження доведене, оскільки

$$\nu_0(\Delta^{Q_2}_{(01)}) = \frac{1}{2}$$

і для $x^* = \dfrac{1}{2}$ достатньо покласти $q_0 = \dfrac{1}{2} = q_1$, тобто розглянути класичне двійкове представлення для числа

$$\frac{1}{2} = \Delta^2_{1(0)} = \Delta^2_{0(1)},$$

яке, очевидно, не є двійково слабонормальним. □

Таким чином, означення абсолютно Q_s-нормального числа як числа Q_s-нормального за всіма стохастичними векторами зі строго додатними координатами не є коректним.

Наступна теорема показує, як означення абсолютно Q_s-нормального числа можливо реалізувати математично коректно.

Теорема 5. *Розглянемо простір параметрів Q_s-представлення Δ, який є відкритим стандартним $(s-1)$-вимірним симплексом:*

$$\Delta = \left\{ Q = (q_0, q_1, ..., q_{s-1}) \in \mathbb{R}^s : q_i > 0, \sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1 \right\}.$$

Позначимо через $\lambda^*(\cdot)$ міру Лебега на Δ (таку, що $\lambda^*(\Delta) = 1$), а через $\lambda(\cdot)$ — стандартну міру Лебега на відрізку $[0;1]$.

Для λ-майже всіх чисел $x \in [0;1]$ множина стохастичних векторів $Q_\alpha = (p_{0\alpha}, p_{1\alpha}, ..., p_{(s-1)\alpha}) \in \Delta$, для яких число x є Q_s-нормальним за стохастичним вектором $(p_{0\alpha}, p_{1\alpha}, ..., p_{(s-1)\alpha})$, має повну міру Лебега у просторі параметрів Δ, тобто виконується рівність:

$$\lambda\left(\{x \in [0;1] : \lambda^*\left(\{Q_\alpha \in \Delta : x \text{ є } Q_s\text{-нормальним}\}\right) = 1\}\right) = 1.$$

Доведення. Розглянемо Q_s-представлення, якому відповідає стохастичний вектор $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$.

Нехай $C = (c_1, c_2, ..., c_l)$ — деякий набір символів з A_s. Зафіксуємо натуральне K. Для заданого набору символів $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{K-1})$ з A_s множина чисел виду

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{K-1}c_1c_2...c_l\gamma_1\gamma_2...}, \quad \gamma_j \in A_s,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

очевидно, є відрізком. Отже, множина $A(K;C)$ чисел виду

$$\Delta^{Q_s}_{\beta_1\beta_2...\beta_{K-1}c_1c_2...c_l\gamma_1\gamma_2...}, \quad \beta_j, \gamma_r \in A_s,\ \forall j \in \{1, ..., K-1\}, r \in \mathbb{N},$$

є об'єднанням відрізків, а тому є борелівською множиною, звідки індикатор $I_K(C;x)$ множини $A(K;C)$ є борелівською функцією.

Добре відомо [1], що для Q_s-циліндрів $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m}$ виконуються рівності

$$\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m} = \left[\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}; \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right],$$

$$\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \sum_{k=1}^{m}\left(\beta_{c_k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j}\right), \quad \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)} = \sum_{k=1}^{m}\left(\beta_{c_k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j}\right)+\prod_{j=1}^{m}q_{c_j}.$$

Таким чином, $\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}, \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}$ є неперервними функціями відносно $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ і умова того, що число x має Q_s-зображення виду

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}c_1c_2\ldots c_e\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r\ldots}, \quad \alpha_i, \gamma_j \in A_s, \tag{2}$$

визначається системою з s^{k-1} нерівностей

$$F^{[j]}(q_0, q_1, ..., q_{s-1}) \le x \le G^{[j]}(q_0, q_1, ..., q_{s-1}), \quad j \in \{1, 2, ..., s^{k-1}\}, \tag{3}$$

де функції $F^{[j]}(q_0, q_1, ..., q_{s-1}), G^{[j]}(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ є неперервними при $j \in \{1, 2, ..., s^{k-1}\}$.

Зрозуміло, що кожному числу $t \in (0;1)$ відповідає деякий стохастичний вектор $(q_0(t), q_1(t), ..., q_{s-1}(t)) \in \Delta$ такий, що t має Q_s-зображення, породжене $\bar{q}(t)$, вигляду (2). Об'єднаємо всі відповідні пари $(t; \bar{q}(t))$ в множину $A(k; C; (x; \Delta))$.

Враховуючи умову (3), легко бачити, що $A(k; C; (x; \Delta))$ є вимірною на $\mathcal{B}([0;1]) \otimes \mathcal{B}(\Delta)$.

Розглянемо на $[0;1] \times \Delta$ індикатор множини $A(k; C; (x; \Delta))$:

$$I(k; C; (x; \Delta)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x^*; q^*) \in A(k; C; (x; \Delta)); \\ 0, & \text{якщо } (x^*; q^*) \notin A(k; C; (x; \Delta)). \end{cases}$$

Зрозуміло, що для кожного натурального N функція

$$S_N(C; (x; \Delta)) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} I(j; C; (x; \Delta))$$

є вимірною на $\mathcal{B}([0;1]) \otimes \mathcal{B}(\Delta)$.

З властивості вимірних функцій та множин випливає, що множина $V(C)$ елементів $(x; q)$ таких, що

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(C; (x; q)) = \prod_{j=1}^{e} q_{c_j}$$

є вимірною на $\mathcal{B}([0;1]) \otimes \mathcal{B}(\Delta)$. Перетин множин $V(C)$ по всіх наборах $(c_1, c_2, ..., c_e)$, очевидно, є вимірним на $\mathcal{B}([0;1]) \otimes \mathcal{B}(\Delta)$.

Розглянемо множину S, що складається з усіх пар $(x; Q)$ у декартовому добутку просторів $[0;1] \times \Delta$, для яких x є Q-нормальним:

$$S = \{(x; Q) \in [0;1] \times \Delta : x \text{ є } Q\text{-нормальним}\}.$$

Як було показано вище, множина S є вимірною на $\mathcal{B}([0;1]) \otimes \mathcal{B}(\Delta)$. Проінтегруємо функцію $I_S(x;Q)$, що є індикатором S, по простору параметрів Δ за мірою λ:

$$\int_\Delta \left(\int_{[0;1]} I_S(x,Q) d\lambda(x) \right) d\lambda^*(Q) = \int_\Delta 1 d\lambda^*(Q) = \lambda^*(\Delta) = 1.$$

Оскільки функція $I_S(x;Q)$ є невід'ємною і вимірною, за теоремою Фубіні ми маємо можливість змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі:

$$\int_{[0;1]} \left(\int_\Delta I_S(x;Q) d\lambda^*(Q) \right) d\lambda(x) = 1.$$

Введемо функцію $f(x)$, яка дорівнює внутрішньому інтегралу:

$$f(x) = \int_\Delta I_S(x;Q) d\lambda^*(Q) = \lambda^* \left(\{ Q \in \Delta : (x;Q) \in S \} \right).$$

Зрозуміло, що $f(x)$ — це міра Лебега $\lambda^*(\cdot)$ множини параметрів Q, для яких фіксоване число x є Q-нормальним.

Зрозуміло, що для всіх $x \in [0;1]$ виконується умова:

$$0 \le f(x) \le \lambda^*(\Delta) = 1,$$

і, більш того,

$$\int_{[0;1]} f(x) d\lambda(x) = 1.$$

Таким чином, $f(x) = 1$ майже скрізь на проміжку $[0;1]$, звідки випливає потрібне. □

Відповідна теорема дозволяє сформулювати наступне означення

Означення 5. Число x називається *абсолютно Q_s-нормальним*, якщо воно є Q_s-нормальним для майже всіх стохастичних векторів $(q_0, q_1, ..., q_{s-1})$ у розумінні $(s-1)$-вимірної міри Лебега на стандартному $(s-1)$-вимірному симплексі.

Враховуючи теорему 5, маємо наступний наслідок

Наслідок 2. *Майже всі числа відрізка* $[0;1]$ *є абсолютно Q_s-нормальними.*

Безумовно, актуальним є питання побудови абсолютно Q_s-нормального числа. Реалізувати підходи робіт Лебега [9] та Серпінського [10] у цьому випадку не вдається.

Предметом подальших досліджень може бути побудова рекурсивно-обчислювальних прикладів абсолютно Q_s-нормальних чисел.

Література

[1] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. 1992. *Фрактальные множества, функции, распределения.* Наук. думка, Киев.

[2] Becher V., Figueira S. 2002. *An example of a computable absolutely normal number*. Theoretical Computer Science, 270:(1–2):947–958. https://doi.org/10.1016/S0304-3975(01)00170-0

[3] Becher V., Figueira S., Picchi R. 2007. *Turing's unpublished algorithm for normal numbers*. Theoretical Computer Science, 377(1–3):126–138. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.02.022

[4] Borel É. 1909. *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 27:247–271. https://doi.org/10.1007/BF03019651

[5] Champernowne D. G. 1933. *The construction of decimals normal in the scale of ten*. Journal of the London Mathematical Society, 8(4):254–260. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-8.4.254

[6] Davenport H., Erdős P. 1952. *Note on normal decimals*. Canadian Journal of Mathematics, 4:58–63. https://doi.org/10.4153/CJM-1952-005-3

[7] Erdős P., Turán P. 1948. *On a problem in the theory of uniform distribution. I.* Indagationes Mathematicae, 10:370–378. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(48)50041-4

[8] Kryvoshyia R. V. 2021. *On a generalization of the concept of normal numbers*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 2:63–68. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.8

[9] Lebesgue H. 1917. *Sur certaines démonstrations d'existence*, Bulletin de la Société Mathématique de France. 45:132–144.

[10] Sierpiński W. 1917. *Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre*. Bulletin de la Société Mathématique de France, 45:125–132.