*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 50–56.

УДК 517.7

# Еквівалентне означення та властивості сингулярної функції Мінковського

А. В. Калашніков
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. В даній роботі знайдено еквівалентне означення та нові властивості відомої з 1911 року строго зростаючої сингулярної функції (функції Мінковського)

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{1-(a_1+\ldots+a_k)},$$

де $a_k(x)$ – $k$ -тий елемент елементарного ланцюгового зображення числа $x$, як неперервного розв'язку системи двох функціональних рівнянь.

Abstract. In this work is found an equivalent definition and new properties known since 1911 strictly increasing and singular function (function of Minkowski)

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{1-(a_1+\ldots+a_k)},$$

where $a_k(x)$ – $k$ - element of the elementary chain images of the number $x$ as continuous decision of system of two functional equations.

## 1. Вступ

Одним з перших прикладів строго зростаючої сингулярної функції є функція, яка досліджувалась в 1911 році Мінковським [**1**]. Вона пов'язана з елементарними ланцюговими дробами [**7**] і поняттям медіанти двох звичайних нескоротних дробів. З означенням та деякими властивостями функції Мінковського можна ознайомитись в [**2, 3**]. Ця функція фігурувала також в дослідженнях інших авторів [**7, 4, 5**]. Підвищена увага до сингулярних функцій в останні десятиліття, їх тісний зв'язок з фракталами породжують природній інтерес до розвитку як їх загальної, так і індивідуальної теорій. Сьогодні класичні приклади сингулярних функцій є платформою для розробки нової метадології їх дослідження. У першу чергу, актуальним є питання про їх "самоподібні" та "самоафінні" властивості, які тісно пов'язані з функціональними тотожностями. Саме з цією метою ми повертаємось до функції Мінковського,

© А. В. Калашніков, 2009

прагнучи знайти еквівалентне означення цієї функції в термінах функціональних співвідношень та вивчити її внутрішньоструктурну подібність.

## 2. Означення функції Мінковського $G(x)$

Перш ніж означити функцію Мінковського $G(x)$, яка пов'язана з ланцюговими (неперервними) дробами, нагадаємо деякі необхідні відомості з теорії елементарних ланцюгових дробів.

Елементарним ланцюговим дробом називається вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \tag{1}$$

де $a_0$ – ціле число, $a_1, a_2, a_3, ...$ – натуральні числа, що називаються елементами даного ланцюгового дробу, який в короткій формі записується як $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ або $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ в залежності від того, скінченним чи нескінченним є ланцюговий дріб.

Будь-яке дійсне число представляється у вигляді ланцюгового дробу, причому раціональне – у скінченному вигляді, а ірраціональне – у нескінченному вигляді. При умові, що останній елемент кожного скінченного дробу відмінний від одиниці, таке представлення єдине.

Дріб $\dfrac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$, називається підхідним дробом $k$-го порядку ланцюгового дробу (1). Чисельник і знаменник підхідного дробу зв'язані рекурентними формулами:

$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}, Q_{k+1} = a_kQ_k + Q_{k-1}, k \geqslant 1, P_0 = q_0, Q_0 = 1.$$

Медіантою двох дробів $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$ з додатними знаменниками називається дріб $\dfrac{a+c}{b+d}$.

Якщо припустити, що $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$, то $bc - ad \geqslant 0$, отже,

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqslant 0, \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \leqslant 0,$$

тобто медіанта двох дробів завжди лежить між ними.

На першому кроці, означимо функцію $G(\cdot)$, в точках 0 і 1:

$$G(0) = G\left(\frac{0}{1}\right) = 0,$$

$$G(1) = G\left(\frac{1}{1}\right) = 1.$$

На другому кроці означимо функцію для медіанти дробів $\frac{0}{1}$ і $\frac{1}{1}$, тобто для $\frac{1}{2}$, як середнє арифметичне між $G\left(\frac{0}{1}\right)$ і $G\left(\frac{1}{1}\right)$:

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{0+1}{1+1}\right) = \frac{G\left(\frac{0}{1}\right) + G\left(\frac{1}{1}\right)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, на третьому кроці

$$G\left(\frac{0+1}{1+2}\right) = G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{G\left(\frac{0}{1}\right) + G\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4},$$

$$G\left(\frac{1+1}{2+1}\right) = G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{1}\right)}{2} = \frac{3}{4}.$$

В загальному випадку, слідуючи вказаному принципу, визначаємо спочатку $G\left(\frac{a}{b}\right)$ і $G\left(\frac{c}{d}\right)$ для двох послідовних нескоротних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, які виникають в послідовності медіант, а потім значення функції $G(x)$ для медіанти цих дробів:

$$\frac{G\left(\frac{a}{b}\right) + G\left(\frac{c}{d}\right)}{2} = G\left(\frac{a+c}{b+d}\right).$$

За $n$ кроків означимо функцію $G(x)$ для $2^n + 1$ значень $x$. Легко бачити, що ординати, що відповідають цим значенням аргумента, мають вигляд $\frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, ..., 2^n$. За нескінченну кількість кроків ми означимо $G(x)$ на нескінченній всюди щільній множині точок з $[0, 1]$. Для всіх інших значень $x$ функція $G(x)$ доозначується за неперервністю.

Функція Мінковського має [**1**] наступний аналітичний вираз

$$G\left(x\right) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + ... + (-1)^{n-1}\, 2^{1-(a_1+...+a_n)} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{1-(a_1+...+a_k)}, \quad (2)$$

де $a_k = a_k(x)$ – $k$ -тий елемент в зображенні аргумента $x$ елементарним ланцюговим дробом.

## 3. Властивості функції Мінковського

**Лема** 1. *Для функції Мінковського $G(x)$ виконується рівність*

$$G(1-x) = 1 - G(x) \quad (3)$$

*для довільного $x \in [0, 1]$.*

Доведення. Оскільки $1 - \frac{1}{a_1 + v} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + v}}$, то $[0; 1, a_1 - 1, a_2, a_3, ...] = 1 - [0; a_1, a_2, a_3, ...] = 1 - x$, враховуючи це і рівність (2), маємо

$$1 - G\left(x\right) = 2^{1-1} - 2^{1-a_1} + 2^{1-(a_1+a_2)} - ... - (-1)^{n-1}\, 2^{1-(a_1+...+a_n)} + ... =$$

$$= G([0; 1, a_1 - 1, a_2, a_3, ...]).$$

Тому має місце рівність (3). □

**Лема** 2. *Якщо $G(x)$ – функція Мінковського, то для довільного $x \in [0, 1]$ мають місце наступні рівності*

$$G\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \cdot G(x), \tag{4}$$

$$G\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1+G(x)}{2}. \tag{5}$$

Доведення. Очевидно, що рівність (4) виконується при $x = 0$ та $x = 1$. Якщо $x \in (0, 1)$ і $x = [0; a_1, ..., a_k, ...]$, то $\dfrac{x}{1+x} = [0; a_1 + 1, ..., a_k, ...]$ і згідно з (2)

$$G\left(\frac{x}{1+x}\right) = 2^{-a_1} - 2^{-1\cdot(a_1+a_2)} + ... + (-1)^{n-1}\, 2^{-1\cdot(a_1+...+a_n)} + ... =$$

$$= 2 \cdot \left[2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + ... + (-1)^{n-1}\, 2^{1-(a_1+...+a_n)} + ...\right] = 2 \cdot G(x).$$

Рівність (4) доведено.

Алгебраїчні перетворення з використанням рівностей (4) і (3) приводять до

$$G\left(\frac{1}{2-x}\right) = G\left(1 - \frac{1-x}{2-x}\right) = G\left(1 - \frac{1-x}{1+1-x}\right) =$$

$$= 1 - G\left(\frac{1-x}{1+1-x}\right) = 1 - \frac{G(1-x)}{2} = 1 - \frac{1-G(x)}{2} = \frac{1+G(x)}{2}.$$

Лему доведено. □

## 4. Еквівалентне означення функції Мінковського

**Лема** 3. *Функція $f$, яка визначена на $[0, 1]$ і задовольняє систему функціональних рівнянь*

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \dfrac{1}{2} f(x), \\ f\,(1-x) = 1 - f(x). \end{cases} \tag{6}$$

*в раціональних точках відрізка $[0, 1]$ виражається*

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + ... + (-1)^{n-1}\, 2^{1-(a_1+...+a_n)}. \end{cases} \tag{7}$$

*де $a_k(x)$ – $k$ -тий елемент елементарного ланцюгового зображення числа $x$.*

Доведення. З першого рівняння системи (6) отримаємо, що $f(0) = 0$, а з другого – $f(1) = 1$.

Нехай $x$ – раціональне число з $(0, 1]$, яке записується у вигляді ланцюгового дробу $x = [0; a_1, a_2..., a_n]$. Оскільки для $m \in R\backslash\{0, 1\}$ виконується

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{m-1}}{1 + \frac{1}{m-1}}, \tag{8}$$

і функція $f$ задовольняє перше рівняння системи (6), то

$$f(x) = f\left(\frac{1}{a_1 + u_1}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{a_1 - 1 + u_1}}{1 + \frac{1}{a_1 - 1 + u_1}}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{a_1 - 1 + u_1}\right),$$

де $u_1 = [0; a_2..., a_n]$. Діючи аналогічно, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{1}{a_1 - 2 + u_1}\right) = ... = \frac{1}{2^{a_1 - 1}} f\left(\frac{1}{1 + u_1}\right).$$

Враховуючи $\dfrac{1}{1 + u_1} = 1 - \dfrac{u_1}{1 + u_1}$ і другу рівність системи функціональних рівнянь (6), отримаємо

$$f\left(\frac{1}{1 + u_1}\right) = f\left(1 - \frac{u_1}{1 + u_1}\right) = 1 - f\left(\frac{u_1}{1 + u_1}\right) = 1 - \frac{1}{2} f(u_1),$$

а отже,

$$f(x) = \frac{1}{2^{a_1 - 1}} \left(1 - \frac{1}{2} f(u_1)\right).$$

Аналогічно,

$$f(u_1) = \frac{1}{a_2 + u_2} = \frac{1}{2^{a_2 - 1}} \left(1 - \frac{1}{2} f(u_2)\right),$$

де $u_2 = [0; a_3..., a_n]$. Тоді

$$f(x) = \frac{1}{2^{a_1 - 1}} \left(1 - \frac{1}{2^{a_2}} \left(1 - \frac{1}{2} f(u_2)\right)\right) = 2^{1 - a_1} - 2^{1 - (a_1 + a_2)} + \frac{1}{2^{a_1 + a_2}} f(u_2).$$

Продовжуючи далі, за $n$ кроків отримаємо

$$f(x) = 2^{1 - a_1} - 2^{1 - (a_1 + a_2)} + ... + (-1)^{n-2} 2^{1 - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{a_1 + ... + a_{n-1}}} f\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

Але згідно з першою рівністю системи функціональних рівнянь (6), маємо

$$f\left(\frac{1}{a_n}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{a_n - 1}}{1 + \frac{1}{a_n - 1}}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{a_n - 1}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{\frac{1}{a_n - 2}}{1 + \frac{1}{a_n - 2}}\right) = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{1}{a_n - 2}\right) = ...$$

$$= \frac{1}{2^{a_n - 1}} f(1) = \frac{1}{2^{a_n - 1}}.$$

Підставивши в останній вираз $f(x)$ отриманий вираз, матимемо розклад (7). Лему доведено. □

Наслідок 1. *Функція $f$, яка задовольняє систему функціональних рівнянь (6), в раціональних точках з $(0,1]$ набуває лише додатних значень.*

Наслідок 2. *Функція $f$, яка задовольняє систему функціональних рівнянь (6), є строго зростаючою функцією на множині раціональних точок відрізка $[0,1]$.*

Зауваження 1. *Значення виразу (7) співпадають для обох різних зображень одного і того ж раціонального числа $x \in [0,1]$.*

Доведення. Справді, розглянемо різницю

$$f([0;a_1,a_2,...,a_n])-f([0;a_1,a_2,...,a_n-1,1]) = 2^{1-a_1}-2^{1-(a_1+a_2)}+...+(-1)^{n-1}\,2^{1-(a_1+...+a_n)}-$$
$$-\left(2^{1-a_1}-2^{1-(a_1+a_2)}+...+(-1)^{n-1}\,2^{1-(a_1+...+a_n-1)}+(-1)^{n}\,2^{1-(a_1+...+a_n-1+1)}\right)=$$
$$=(-1)^{n-1}\,2^{1-(a_1+...+a_n)}-(-1)^{n-1}\,2^{2-(a_1+...+a_n)}-(-1)^{n+1}\,2^{1-(a_1+...+a_n)}=$$
$$=(-1)^{n-1}\,2^{2-(a_1+...+a_n)}-(-1)^{n-1}\,2^{2-(a_1+...+a_n)}=0.$$

□

**Лема** 4. *Неперервна функція $f$, яка задовольняє систему функціональних рівнянь (6), в ірраціональних точках інтервалу $(0,1)$ має вираз*

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{1-(a_1+...+a_k)}, \tag{9}$$

*де $a_k(x)$ – $k$ -тий елемент елементарного ланцюгового зображення числа $x$.*

Доведення. Якщо існує неперервна на $(0,1]$ функція, яка задовольняє систему функціональних рівнянь (6), то така функція є невід'ємною і строго зростаючою, оскільки вона такою є на всюди щільній множині.

Якщо $x=[0;a_1,...,a_n,...]$ – ірраціональне число і $x=[0;a_1,...,a_n+r_n]$, то міркуваннями аналогічними до тих, що проводились при доведенні леми (3), можна отримати

$$f(x)=2^{1-a_1}-2^{1-(a_1+a_2)}+...+(-1)^{n-1}2^{1-(a_1+...+a_n)}+\frac{(-1)^n}{2^{a_1+...+a_n}}f\left(r_n\right).$$

Оскільки $f\left(r_n\right)\leqslant f(1)=1$, то останній доданок прямує до нуля при $n\to\infty$. Тому має місце рівність (9). Лему доведено. □

**Лема** 5. *Функція $f(x)$, визначена на $[0,1]$, причому $f(0)=0$, в раціональних точках визначена рівністю (7), а в ірраціональних – рівністю (9), є неперервною.*

Доведення. Нехай $x_0$ – довільна ірраціональна точка з $(0,1)$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Розглянемо вираз

$$|f(x_n) - f(x_0)| = 2^{1-(a_1+...+a_n)}|2^{-a_{m+1}(x_n)} - 2^{-a_{m+1}(x_0)} + 2^{-a_{m+2}(x_n)} - 2^{-a_{m+2}(x_0)} + ...| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-(a_1+...+a_m)} \to 0 \ \ (m \to \infty),$$

де $(m+1)$ – порядковий номер першого неспівпадаючого елемента в ланцюгових розкладах чисел $x_0$ і $x_n$.

Оскільки умова $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ рівносильна умові $m \to \infty$, то функція $f(x_0)$ є неперервною в точці $x_0$.

Якщо $x_0$ – число раціональне і $x_0 = [0; a_1, a_2, ..., a_m]$, то

$$|f(x_n) - f(x_0)| = 2^{1-(a_1+...+a_m)}\left(2^{-a_{m+1}(x_n)} - 2^{-a_{m+2}(x_n)} + ...\right) \to 0 \ \ (x_n \to x_0),$$

оскільки $a_{m+1}(x_n) \to \infty$, коли $n \to \infty$. □

**Теорема** 1. *Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь (6) в класі неперервних функцій є функція, яка в раціональних точках визначається рівністю (7), а в ірраціональних – рівністю (9).*

Доведення. Дане твердження є наслідком попередніх лем. Справді, якщо функція задовольняє систему (6) і є неперервною, то вона виражається у формі (7) і (9) відповідно в залежності від того, раціональним чи ірраціональним числом є значення аргумента, тобто є функцією Мінковського. □

Зауваження 2. *Система функціональних рівнянь (6) однозначно визначає функцію Мінковського і може слугувати за її означення.*

## Література


[1] *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. – Berlin // 1911. – Bd 2. – P.50-51.

[2] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

[3] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[4] *Paradis J., Viader P.* The Derivative of Minkowski's G(x) Function // Mathematical Analysis and Applications. – №253, 2001. – P. 107-125.

[5] *Paradis J., Viader P.* A New Light on Minkowski's G(x) Function // Number Theory. – №73, 1998. – P. 212-227.

[6] *Olga R., Garrity T.* A two-dimensional Minkowski G(x) function // Number Theory, – №107, 2004. – P. 105-134.

[7] *Калашніков А.В.* Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема. // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – №9. – С.192-198.

[8] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – Москва: Физматгиз, 1961. – 112с.