B58
Р-Р 8 371/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В. Ф. ВЛАСЕНКО

СУММИРОВАНИЕ РАЗБАВЛЕННЫХ РЯДОВ

№ 001 математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

371 (сучасне)
Київський педагогічний інститут БІБЛІОТЕКА
-79

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100310857

Киев — 1967

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В. Ф. ВЛАСЕНКО

СУММИРОВАНИЕ РАЗБАВЛЕННЫХ РЯДОВ

№ 001 математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1967

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им. А. М. Горького.

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор *Давыдов Н. А.*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор *Коренблюм Б. И.*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Тиман М. Ф.*

Ведущее предприятие Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан « » 196 г.

Защита диссертации состоится « » 196 г. на заседании совета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького, г. Киев —30, бульвар Тараса Шевченко, 22/24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Ученый секретарь совета.

1. Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с комплексными членами a_n $(n = 0,1,\ldots)$ и матрица $A = \|a_{nk}\|$ с комплексными элементами a_{nk} $(n, k = 0,1,\ldots)$. Обозначим через $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ частные суммы ряда (1). Если ряды

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k \tag{2}$$

сходятся для всех $n = 0,1,\ldots$ и $\lim_{n\to\infty} t_n = S\ (S \neq \infty)$, то говорят, что ряд (1) или, что одно и то же, последовательность $\{S_n\}$ суммируется матрицей $A = \|a_{nk}\|$ (A — суммируется) к числу S и записывают:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S(A) \quad \text{или} \quad S_n \to S(A).$$

Число S при этом называется обобщенной суммой ряда (1) или A — суммой ряда (1), а выражения (2) — A — средними последовательности $\{S_n\}$.

Наряду со средними вида (2) в теории суммирования рассматриваются также средние вида

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k, \tag{3}$$

где $\{a_k(x)\}$ — заданная последовательность функций, определенных в промежутке $[0; x_0)$, x_0 — конечное число или $+\infty$. Говорят, что ряд (1) суммируется при помощи полунепрерывной матрицы $A = \|a_k(x)\|$ к числу S, если $t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k$ существуют для всех $x \in [0; x_0)$ и $\lim_{x\to x_0} t(x) = S\ (S \neq \infty)$. В отличие от матрицы преобразования (3) матрицу преобразования (2) называют дискретной.

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad (4)$$

— функциональный ряд, членами которого являются функции $f_n(z)$ $(n = 0,1, \ldots)$, определенные на множестве E точек комплексной плоскости, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ — его частные суммы. Говорят, что ряд (4) суммируется при помощи матрицы $A = \|a_{nk}\|$ $(A = \|a_k(x)\|)$ на множестве E к функции $f(z)$, если в каждой точке $z_0 \in E$ A — суммируется числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ к числу $f(z_0)$.

Матрица A (дискретная или полунепрерывная) определяет метод суммирования A и выражения: «ряд суммируется при помощи матрицы A» и «ряд суммируется методом A» означают одно и то же.

Особо выделяются матрицы, суммирующие каждый сходящийся ряд к его сумме. Они называются регулярными или T-матрицами (матрицами Теплица). Условия, определяющие регулярные матрицы, даются теоремой Сильвермана-Теплица ([1], теорема (4. I, II), стр. 79).

Если $a_{nk} \geqslant 0$ для всех $n, k = 0,1, \ldots$ $(a_k(x) \geqslant 0$ для всех $k = 0,1, \ldots$ и $x \in [0; x_0))$, то матрица A называется положительной.

Следуя Р. Куку ([1], стр. 161), определим ядро R последовательности $\{S_n\}$ как пересечение: $R = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$, где R_n — наименьшее замкнутое выпуклое множество точек расширенной комплексной плоскости, содержащее точки $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$ Для регулярных положительных матриц, имеет место теорема Кноппа о ядрах ([1], теорема (6. I, II), стр. 164), утверждающая, что ядро последовательности $\{t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k\}$ содержится в ядре последовательности $\{S_n\}$.

2. Если между членами ряда (1), произвольно вставить нули, т. е. «разбавить» ряд (1) нулями, то получим ряд

$$a_0 + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{p_0} + a_1 + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{p_1} + a_2 + 0 + \ldots + a_n + \underbrace{+ 0 + \ldots + 0}_{p_n} + a_{n+1} + 0 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m, \qquad (1')$$

который называют разбавленным рядом. Обозначим через

p_n ($p_n \geqslant 0$) количество нулей, вставленных в ряде (1′) между членами a_n и a_{n+1} ($n = 0,1,\ldots$), а через $S'_n = \sum_{m=0}^{n} a'_m$ его частные суммы. Тогда, если

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_n,\ S_{n+1},\ \ldots$$

есть последовательность частных сумм ряда (1), то

$$S_0,\ \underbrace{S_0,\ \ldots,\ S_0}_{p_0},\ S_1,\ \underbrace{S_1,\ \ldots,\ S_1}_{p_1}\ \ldots,\ S_n,\ \underbrace{S_n,\ \ldots,\ S_n}_{p_n},\ S_{n+1},\ \ldots$$

будет последовательностью частных сумм ряда (1′).

Разбавление ряда нулями не влияет на сходимость, однако отражается на суммируемости разбавленого ряда ([2], стр. 82—83).

Относительно суммируемости разбавленных рядов матричными методами вида (2) или (3) известно следующее.

1) Теорема В. М. Даревского ([3], теорема УП, стр. 578). Пусть дан регулярный метод $A = \|a_{nk}\|$. Какой бы ни был расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ всегда можно, путем вставления между его членами множества нулей, построить такой ряд, который не суммируется данным методом.

2) Теорема А. М. Олевского ([4], теорема I, стр. 701—703). Пусть задано произвольное счетное множество матриц Теплица и расходящийся на множестве E точек комплексной плоскости функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, члены которого ограничены на этом множестве. Тогда между членами этого ряда можно так вставить нули, чтобы полученный ряд не суммировался ни в одной точке множества E ни одной из заданных матриц.

Это — результаты отрицательного порядка. В реферируемой работе рассмотрены вопросы, связанные с возможностью суммирования разбавленных рядов. Некоторые результаты в этом направлении получены Н. А. Давыдовым ([5], теорема 2, стр. 136) и В. И. Мельником ([6] стр. 129) для случая полунепрерывной матрицы Абеля-Пуассона ($a_k(x) = (1-x)x^k$, $0 \leqslant x < 1$, $k = 0,1,\ldots$). Приведем результат В. И. Мельника: Произвольный ряд (1) может быть разбавлен нулями так, что разбавленный ряд (1′) будет суммироваться методом Абеля-Пуассона к наперед заданному конечному частичному пределу последовательности $\{S_n\}$. Существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что при любом разбавлении его нулями он не будет суммироваться

методом Абеля-Пуассона к числу, отличному от частичных пределов последовательности $\{S_n\}$.

3. Реферируемая работа состоит из трех глав. В 1-ой главе рассмотрены вопросы суммирования разбавленных рядов регулярными положительными дискретными матричными методами. Для удобства в формулировках теорем введены следующие определения.

Определение 1. Матрица A обладает свойством (P) (свойством разбавления), если любой ряд, последовательность частных сумм которого имеет конечный частичный предел S, можно так разбавить нулями, что разбавленный ряд будет A — суммироваться к числу S.

Определение 2. Матрица $A = \| a_k \| (A = \| a_k(x) \|)$ называется матрицей класса (R), если существует система столбцов K: $[l_\nu ; m_\nu] (\nu = 1,2,\ldots)$ этой матрицы такая, что

$$l_\nu < m_\nu < l_{\nu+1} (\nu = 1,2,\ldots),\ m_\nu - l_\nu \to \infty\ (\nu \to \infty),\ \lambda_n = \max_{k \in K} |a_{nk}| \to 0\ (n \to \infty)\ (\lambda(x) = \max_{k \in K} |a_k(x)| \to 0\ (x \to x_0).$$

В § 1 доказана

Теорема 1. Для того чтобы положительная матрица $A = \| a_{nk} \|$ обладала свойством (P), необходимо и достаточно, чтобы она была T-матрицей класса (R). Если положительная T-матрица $A = \| a_{nk} \|$ принадлежит классу (R), а последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ неограничена, то этот ряд можно так разбавить нулями, что A-средние разбавленного ряда будут иметь бесконечный предел.

Вопрос о возможности разбавления ряда нулями так, чтобы разбавленный ряд A — суммировался к числу S, отличному от всех частичных пределов последовательности частных сумм этого ряда, решается следующим предложением.

Теорема 2. Для каждой регулярной положительной матрицы $A = \| a_{nk} \|$ существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что ни при каком разбавлении его нулями нельзя добиться A — суммируемости разбавленного ряда к числу, отличному от частичных пределов последовательности частных сумм этого ряда. Указан класс матриц $A = \| a_{nk} \|$, обладающих свойством (P) и таких, что никаким разбавлениям никакого ряда нельзя добиться A-суммируемости разбавленного ряда к числу, отличному от всех частичных пределов последовательности частных сумм этого ряда.

В § 2 доказана теорема 2, обобщающая один результат Агнью ([7], теорема 3, а также [1], стр. 234).

Известно ([2], стр. 82—83), что для некоторых рядов и матриц $A = \| a_{nk} \|$ при помощи разбавления ряда нулями можно получить разбавленный ряд, A-суммируемый к числу S, отличному от всех частичных пределов последовательности частных сумм разбавляемого ряда. В § 3 доказано более общее утверждение:

Теорема 4. Для каждого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ существует регулярная положительная матрица $A = \| a_{nk} \|$ такая, что для любого наперед заданного конечного z принадлежащего ядру R последовательности $\{S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\}$ частных сумм этого ряда, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ можно так разбавить нулями, что разбавленный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a'_m$ будет A-суммироваться к z. Если $z \in R$ есть бесконечно удаленная точка, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ можно так разбавить нулями, что A-средние $\{t'_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S'_k\}$ разбавленного ряда будут иметь бесконечный предел.

В § 4 доказана теорема 5, устанавливающая класс рядов с ограниченными частными суммами, для которого матрицей A, обладающей свойствами теоремы 4, является матрица средних арифметических ($a_{nk} = \frac{1}{n+1}$ для $k = 0,1, \ldots n$; $a_{nk} = 0$ для $k > n$, $n = 0,1, \ldots$).

В главе II рассмотрены особенности суммирования разбавленных рядов неположительными матричными методами. Выяснено, что и неположительные T-матрицы $A = \| a_{nk} \|$ класса (R) обладают свойством (P) (теорема 6, § 1). однако, в отличие от положительных матриц, условие принадлежности матрицы к классу (R), будучи достаточным, не является необходимым для того, чтобы неположительная T-матрица обладала свойством (P). Необходимость условия принадлежности матрицы $A = \| a_{nk} \|$ к классу (R) сохраняется для тех матриц, у которых $\sum_{k=0}^{\infty} | a_{nk} | \to 1$ $(n \to \infty)$. Более того, свойством (P) обладают и некоторые нерегулярные неположительные матрицы (пример такой матрицы приведен в § 2).

В § 3 рассмотрен вопрос в суммировании регулярными матричными методами разбавленных функциональных рядов. Для таких рядов доказана

Теорема 8. Если регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$ принадлежит классу (R), члены $f_n(z)$ $(n = 0,1, \ldots)$ функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{4}$$

ограничены на множестве E точек комплексной плоскости, т. е. $|f_n(z)| \leqslant M_n$ для всех $z \in E$ и если $S_{n_k}(z) = \sum_{i=0}^{n_k} f_i(z) \to f(z)$ $(k \to \infty)$ для $z \in E_1 \subseteq E$, то ряд (4) можно так разбавить нулями, что разбавленный ряд $f_0(z) + 0 + \ldots + 0 + f_1(z) + 0 + \ldots + 0 + f_2(z) + 0 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^*(z)$ будет A-суммироваться к $f(z)$ на множестве E_1.

Теорема 8 в некотором смысле дополняет упомянутый выше результат А. М Олевского для случая одной Т-матрицы класса (R). Сформулированы следствия этой теоремы, касающиеся суммирования разбавленных ортогональных рядов, в частности, рядов Фурье.

Глава III посвящена вопросам суммирования разбавленных рядов полунепрерывными матричными методами. В § 1 установлено, что теорема 6 в чистом виде не переносится на полунепрерывные матричные методы. Для них справедлива

Теорема 9. Для того чтобы регулярная полунепрерывная матрица $A = \| a_k(x) \|$ класса (R) обладала свойствами (P) достаточно, чтобы для каждого $0 < X < x_0$ и $0 < \varepsilon < 1$ существовал номер $N = N(X; \varepsilon)$ такой что

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

для всех $x \in [0; X]$.

На примере одной регулярной положительной полунепрерывной матрицы показано, что условие (5), не вытекающее из условий регулярности матрицы, существенно для справедливости утверждения теоремы 9.

В § 2 доказана

Теорема 10. Для каждой полунепрерывной матрицы $A = \| a_k(x) \|$

а) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| < \infty$ для всех $x \in [0; +\infty)$;

б) $\lim_{x \to \infty} a_k(x) = 0$ для каждого фиксированного K;

в) $\lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = 1$,

существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что ни при каком разбавлении его нулями разбавленный ряд не будет A-суммироваться к числу, отличному от частичных пределов последовательности частных сумм этого ряда.

Следствиями этой теоремы являются теорема 2 и аналогичная ей теорема 7 главы II.

В § 3 для функции $S(y)$, определенной на $[0; +\infty)$, введено понятие «разбавленной» функции и сформулированы два предложения (теоремы 11 и 12), относящиеся к суммированию «разбавленных» функций интегральными методами. Их доказательство аналогично доказательству теорем 9 и 10 соответственно.

Результаты этой работы докладывались на городском семинаре по теории функций (г. Киев, апрель 1967 г.) и в межвузовской летней научной школе по теории суммируемости, организованной в пос. Заречном возле г. Свердловска (июль, 1967 г.).

Основное содержание диссертации отражено в работах [8]—[9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., 1960.

[2] Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.

[3] В. М. Даревский, О некоторых вопросах в теории расходящихся рядов, Мат. сб. т. 7(49), № 3, 1940, стр. 549—587.

[4] А. М. Олевский, О линейных методах суммирования, ДАН СССР, 1958, 120, № 4, стр. 701—703.

[5] Н. А. Давыдов, Обобщение второй теоремы Абеля, УМЖ, 1955, т. X, вып. 3 (65), стр. 135—138.

[6] В. И. Мельник, Суммирование разбавленных рядов методом Абеля-Пуассона, Украинский математический журнал, 1965, № 6, т. 17, стр. 129—131.

[7] Agnew R. P, A Simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence, Bulletin of the American Mathematical Society, 52, (1946), стр. 128—132.

[8] В. Ф. Власенко, Суммирование разбавленных рядов регулярными положительными матричными методами, Украинский математический журнал, 1967, т. 19, № 3, стр. 11—20.

[9] В. Ф. Власенко, Одна теорема о суммировании разбавленных рядов, Матем. заметки, т. 2, № 3 (1967), стр. 257—266.

БФ 19835. 14/XII-67 г. Формат 60×90¹/₁₆. Объем 0,75 печ. л.
Зак. 3497—150.

Киевская типография № 7 Комитета по печати при Совете Министров
УССР Главполиграфпром