УДК [53:378]:621.318.1
DOI https://doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2025.106.11

Лінчевський І. В., Пеклун В. Ф., Чурсанова М. В.

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД В ФІЗИЦІ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ІНДУКТИВНОСТІ ТОРОЇДАЛЬНОЇ КОТУШКИ З ФЕРОМАГНІТНИМ ОСЕРДЯМ

В роботі розглянуто застосування графоаналітичного методу при розв'язуванні задач з фізики, зокрема з розділу «Магнетизм», в закладі вищої освіти. Продемонстровано, що даний метод є ефективним дидактичним і дослідницьким підходом, особливо у випадках коли аналітичне отримання розв'язку задачі є неможливим або суттєво ускладненим.

Розглянуто приклад задачі про розрахунок індуктивності котушки з тороїдальним осердям із феромагнітного матеріалу. Величина індукції магнітного поля B і величина відносної магнітної проникності μ для феромагнетиків характеризуються нелінійними залежностями від напруженості поля H, аналітичного виразу для яких не існує. Застосування графоаналітичного методу у нашому прикладі включає наступні етапи: побудову графіка кривої намагнічування феромагнетику B(H) за довідниковими даними → визначення залежності диференціальної відносної магнітної проникності феромагнетику μ від напруженості поля H через тангенс кута нахилу дотичної до графіка B(H) при різних значеннях H → побудову графіка залежності μ(H)/H → визначення інтегралу від μ(H)/H у заданих межах через графічне обчислення площі криволінійної трапеції на графіку → використання отриманого числового значення у кінцевих розрахунках.

На відміну від спрощеної фізичної моделі котушки, де авторами пропонується використовувати усереднене значення відносної магнітної проникності, результат розрахунку визначається через функцію μ(H)/H, є більш коректним ніж за середнім значенням <μ> і дозволяє навчити студентів прийомам розрахунку магнітних параметрів з урахуванням нелінійної залежності μ(H). Розбіжності в отриманих результатах по розрахунку індуктивності за пропонованою методикою та за класичним методом з використанням <μ> суттєво залежать від меж між максимальним та мінімальним значеннями напруженості магнітного поля, що свідчить про те що графоаналітичний метод підвищує точність отриманих результатів.

Ключові слова: *графоаналітичний метод, графічний метод, фізика, магнетизм, індуктивність, феромагнетик, крива намагнічування, відносна магнітна проникність, тороїдальне осердя.*

Графоаналітичний метод у фізиці є однією із форм графічного метода, що поєднує візуалізацію фізичних залежностей із кількісним аналізом графіків для точного визначення величин. Він є ефективним засобом підвищення рівня розуміння навчального матеріалу, формування логічного мислення та розвитку навичок візуалізації фізичних процесів [1–3]. Даний метод в фізиці підсилює міжпредметні зв'язки з математикою, дозволяє підвищити графічну грамотність студентів, полегшує сприйняття фізичних закономірностей, розвиває інтуїцію, підвищує репрезентативність експериментальних даних, одержаних на основі лабораторних досліджень.

В нашому випадку графоаналітичний метод передбачає:

- побудову графіка залежності між фізичними величинами;
- визначення похідної (графічне знаходження як тангенса кута нахилу дотичної до графіка);
- обчислення площі під кривою для інтегрування;
- оцінювання похибок вимірювань на підставі вигляду кривої.

Мета статті – продемонструвати ефективність графоаналітичного методу під час розв'язування задач з фізики у випадках, коли аналітичне отримання розв'язку є неможливим або суттєво ускладненим. А саме, розглянемо приклад розрахунку індуктивності котушки з тороїдальним осердям із феромагнетику. Особливість даної задачі полягає в тому, що на практиці в трансформаторах, дроселях, котушках індуктивності, тощо, використовуються саме феромагнітні матеріали, але їх відносна магнітна проникність є складною функцією напруженості магнітного поля, аналітичний вираз якої невідомий та не може бути апроксимованим стандартними засобами. В таких випадках саме графоаналітичний метод дозволяє одержати результат та сприяє оволодінню студентами прийомами вирішення прикладних задач.

Зазвичай розрахунок індуктивності котушки з тороїдальним осердям роблять шляхом визначення магнітного потоку через поперечний переріз, або через енергію магнітного поля в осерді котушки [4]. Проблемам розрахунку магнітних параметрів у нелінійних магнітних середовищах присвячений ряд навчально-методичних праць Мілиха В.І. [5], де такі задачі вирішуються шляхом комп'ютерного моделювання (метод послідовних наближень, метод скінченних різниць).

Згадаємо, що існують програми, наприклад Coil64 [6], для розрахунку індуктивності он-лайн. Але при вивченні предмету загальна фізика у технічному університеті студентам необхідно розібратися з фізичною моделлю, зрозуміти, що в тороїдальному осерді виникає неоднорідне магнітне поле з напруженістю H за рахунок конструктивних особливостей котушки, а також наявність нелінійної залежності відносної магнітної проникності феромагнетику μ від напруженості поля H. В результаті автори методичних посібників при розв'язанні задач з визначення індуктивності котушок з тороїдальним осердям зазвичай вказують на відсутність феромагнетику, або пропонують використати наявність осердя з усередненим значенням відносної магнітної проникності [4].

Наша методика заснована на навчанні студентів використовувати набуті навички для визначення індуктивності котушки з феромагнітним осердям при умовах наявності сталого струму підмагнічування з урахуванням нелінійної залежності відносної магнітної проникності від напруженості магнітного поля $\mu(H)$ [7]. Таке завдання виникає, наприклад, при проектуванні дроселів, котушок індуктивності для різних радіоелектронних пристроїв. Отже, дана робота є ***актуальною***.

Відмітимо, що нелінійну залежність відносної магнітної проникності від напруженості магнітного поля $\mu(H)$ студенти, наприклад, можуть самостійно отримати при виконанні лабораторної роботи «Вивчення гістерезису феромагнітних матеріалів» [8], або скористатися відомими довідниковими залежностями індукції магнітного поля від його напруженості [9].

Дослідженню підлягає котушка індуктивності, зображена на рис.1.

Знаходимо індуктивність L за стандартною методикою, через повний магнітний потік Ψ_B, який створює струм I через поперечний переріз S осердя:

$$\Psi_B = LI, \tag{1}$$

де $\Psi_B = N\int\limits_s \vec{B}d\vec{S}$. Оскільки струм I – це струм провідності, то спочатку треба знайти напруженість магнітного поля H. Для цього скористаємося теоремою про циркуляцію вектора $\vec{H}$ [4]:

$$\oint\limits_{L_1} \vec{H}d\vec{l} = \Sigma I. \tag{2}$$

Замкнений контур L_1 вибираємо у вигляді кола радіуса r, рис.1. Тоді рівняння (2) набуває вигляду: $H2\pi r = NI$, де N – кількість витків. Відповідно, напруженість магнітного поля:

$$H = NI/2\pi r. \tag{3}$$

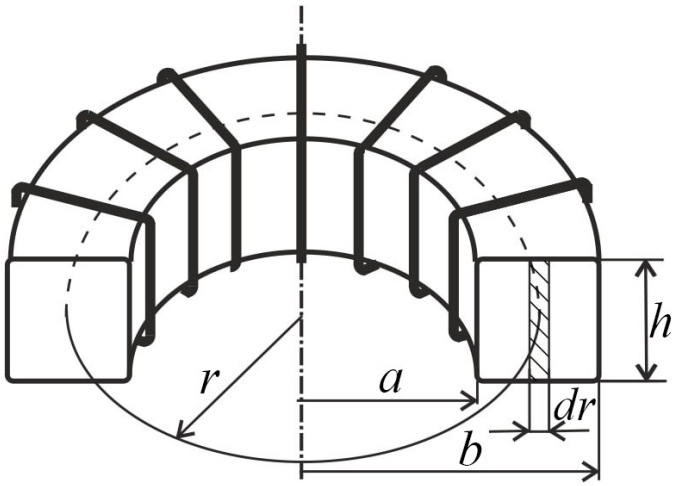


*Рис. 1. Конструкція котушки індуктивності з тороїдальним осердям: a, b – внутрішній та зовнішній радіуси осердя, h – його висота, r – радіус замкненого кола L_1, h*dr = dS – елементарна площа поперечного перерізу*

З врахуванням, що радіус осердя знаходиться в межах $a \le r \le b$, це означає, що напруженість магнітного поля буде різною в межах поперечного перерізу S і залежить від радіусу $H(a) \ge H(r) \ge H(b)$, де

$$H(a) = NI/2\pi a; \qquad H(b) = NI/2\pi b. \tag{4}$$

Використаємо зв'язок між індукцією B та напруженістю магнітного поля: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м, μ – відносна магнітна проникність. Тут ми стикаємося з труднощами в визначені магнітної індукції. Для феромагнетиків індукція та відносна магнітна проникність залежать від напруженості магнітного поля H. В зв’язку з цим більшість авторів методичних видань обмежуються колом задач, де пропонують вважати осердя виконаним з діа – або парамагнетику. Тобто μ має стале значення. Для феромагнетиків першоосновою для визначення μ є крива намагнічування $B(H)$, приклад якої наведено на рис 2. для заліза ARMCO [7]. Залізо ARMCO (American Rolling Mill Company) використовується при виготовленні магнітопроводів сучасного електротехнічного обладнання – електромагнітів, трансформаторів, генераторів, електродвигунів, дроселів, реле, стабілізаторів тощо [7].

Виходячи з кривої намагнічування можна визначити статичну відносну магнітну проникність. Вона пропорційна тангенсу кута нахилу січної, проведеної з початку координат через відповідну точку на основній

кривій намагнічування $\mu(H)=\frac{B}{\mu_0 H}$. Граничне значення магнітної проникності при напруженості магнітного поля, що прямує до нуля, називають початковою магнітною проникністю $\mu_П$. Експериментально її визначають у слабких магнітних полях з напруженістю порядку 0,1 А/м.

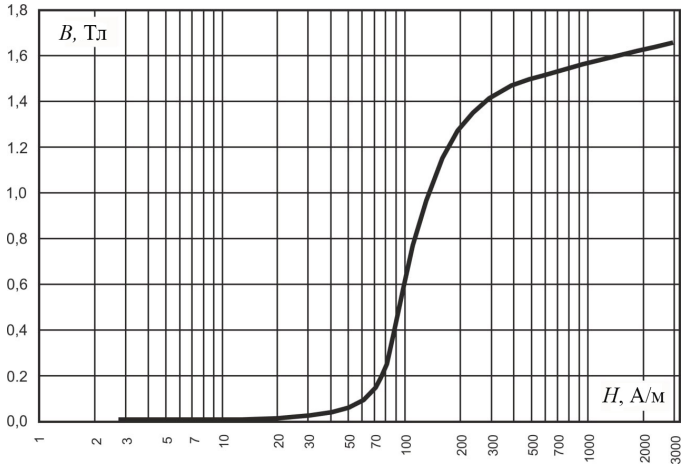


Рис. 2. Основна крива намагнічування технічно чистого заліза ARMCO [7]

Крутизну окремих ділянок кривої намагнічування характеризують диференціальною відносною магнітною проникністю, для визначення якої користуються формулою:

$$\mu(H)=\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial H}. \tag{5}$$

Відмітимо, що за наявності сталого магнітного поля підмагнічування ми використовуємо диференціальну відносну магнітну проникність. Результат знаходження залежності диференціальної магнітної проникності $\mu(H)$ у відповідності до графіку $B(H)$ за допомогою графоаналітичного методу наведено на рис.3.

Для знаходження повного магнітного потоку, врахуємо, що відповідно (3) $dr=\frac{-NI}{2\pi H^2}dH$. Знак мінус пояснюється тим, що зі зростанням радіусу r напруженість поля спадає, тоді потік:

$$\Psi_B = N\int_s \mu(H)\mu_0 H h dr = \frac{\mu_0 h N^2 I}{2\pi}\int_{H(b)}^{H(a)}\frac{\mu(H)}{H}dH. \tag{6}$$

З врахуванням формули (1) індуктивність може бути визначена як:

$$L = \frac{\mu_0 h N^2}{2\pi}\int_{H(b)}^{H(a)}\frac{\mu(H)}{H}dH. \tag{7}$$

Оскільки в нашому розпорядженні відсутній аналітичний вираз $\mu(H)$, то скористаємося графоаналітичним методом визначення інтегралу у виразі (6). Для цього спочатку побудуємо графік, де по осі ординат відкладаємо $\frac{\mu(H)}{H}$, а по осі абсцис напруженість поля H. Не забуваємо, що межі змін $H(r)$ знаходяться в інтервалі $H(a)\geq H(r)\geq H(b)$. Подібний графік, побудований відповідно до графіку $\mu(H)$, зображено на рис.3. Для підвищення точності графік бажано виконати на міліметровому папері.

Розрахунковий приклад. За умовою завдання котушка намотана на тороїдальному осерді, рис.1, з заліза ARMCO. Основна крива намагнічування задана на рис.2. Розміри осердя: внутрішній та зовнішній радіуси a = 2см, b = 5см, висота h = 4см. Кількість витків N = 30. Сила струму підмагнічування I = 0.3А. Визначимо індуктивність котушки.

Розв'язання задачі.

За формулою (4) визначаємо межі зміни напруженості поля підмагнічування, що в наведеному прикладі складає $H(a)$=72А/м; $H(b)$=28,6А/м. Знайдені крайні значення напруженості поля відкладаємо на рис.3 і будуємо криволінійну трапецію на графіку $\frac{\mu(H)}{H}$, яка показана штриховою лінією. Далі за клітинками визначаємо площу цієї трапеції, яка відповідає значенню інтегралу $\int_{H(b)}^{H(a)}\frac{\mu(H)}{H}dH = 1{,}09\cdot 10^3$. За виразом (6) отримаємо $\Psi_B = 2{,}59$мВб. Відповідно формулі (7) індуктивність L=8,63мГн.

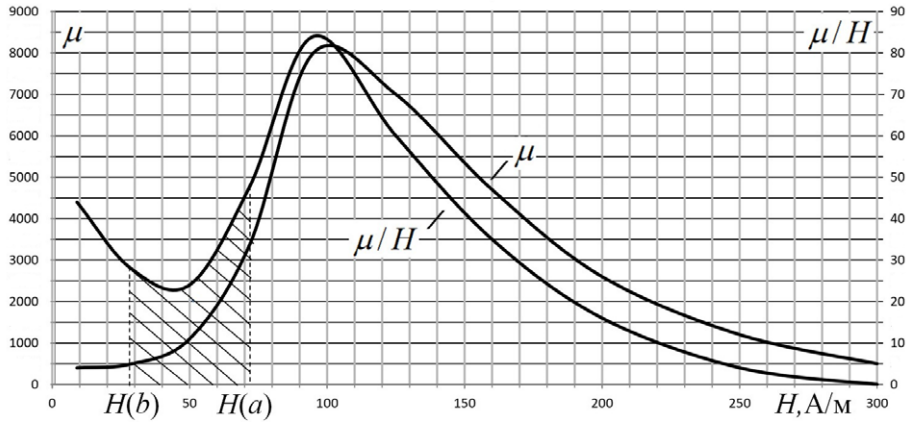


Рис. 3. Залежність відносної диференціальної магнітної проникності μ(H) та функції μ(H) / H від напруженості поля для заліза ARMCO

Для прикладу, зміна струму підмагнічування до I=0.5А призводить до зміни потоку $\Psi_B = 95.4$мВб та значення індуктивності L=31мГн. За класичним підходом знаходження індуктивності котушки з тороїдальним осердям, де використовується середнє значення відносної магнітної проникності $\langle\mu\rangle$, індуктивність обчислюємо за формулою:

$$L = \frac{\langle\mu\rangle \mu_0 h N^2}{2\pi} \ln\frac{b}{a}, \qquad (8)$$

де $\langle\mu\rangle = \frac{\int_{H(b)}^{H(a)} \mu dH}{H(a) - H(b)}$. Підрахунки індуктивності за формулою (8) дають результати 9.4мГн при струмі 0.3А, та 37.9мГн при струмі 0.5А.

Висновки. В роботі використано графоаналітичний метод при розв’язуванні задач з фізики, зокрема з розділу «Магнетизм», в закладі вищої освіти. Продемонстровано, що даний метод є ефективним дидактичним і дослідницьким підходом, особливо у випадках коли аналітичне отримання розв’язку задачі є неможливим або суттєво ускладненим. Розглянуто приклад задачі про розрахунок індуктивності котушки з тороїдальним осердям із феромагнітного матеріалу, яка піднімає проблеми визначення магнітних параметрів у нелінійних магнітних середовищах. Застосування графоаналітичного методу у нашому прикладі включає наступні етапи: побудову графіка кривої намагнічування феромагнетику $B(H)$ за довідниковими даними → визначення залежності диференціальної відносної магнітної проникності феромагнетику μ від поля підмагнічування H через тангенс кута нахилу дотичної до побудованого графіка при різних значеннях H → побудову графіка залежності $\mu(H)/H$ → визначення інтегралу від $\mu(H)/H$ у заданих межах через графічне обчислення площі криволінійної трапеції на графіку → використання отриманого числового значення у кінцевих розрахунках.

Методичні підходи з використанням графоаналітичного методу у визначенні індуктивності котушок з феромагнітним тороїдальним осердям дозволили врахувати залежність відносної магнітної проникності від напруженості сталого поля підмагнічування. На відміну від спрощеної фізичної моделі котушки, де авторами пропонується використовувати усереднене значення відносної магнітної проникності, результат розрахунку визначається через функцію $\frac{\mu(H)}{H}$, є більш коректним ніж за середнім значенням <μ> і дозволяє навчити студентів прийомам розрахунку магнітних параметрів з урахуванням нелінійної залежності $\mu(H)$. Розбіжності в отриманих результатах по розрахунку індуктивності за нашою методикою та за класичним методом з використанням <μ> суттєво залежать від меж між максимальним та мінімальним значеннями напруженості магнітного поля.

Розглянутий приклад демонструє, що графоаналітичний метод на заняттях з фізики – це не лише ілюстрація, а форма навчальної діяльності, яка формує ключові компетентності (природничу та математичну) та сприяє більш глибокому розумінню предмета і одержанню навиків розв’язання прикладних задач.

Використана література:

1. Величко С.П., Сальник І.В. Графічний метод дослідження природних явищ у навчанні фізики : навчальний посібник для студентів педагогічних вищих навчальних закладів освіти. Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2002. 167 с.
2. Susac A., Bubic A., Martinjak P., Planinic M., Palmovic M. Graphical representations of data improve student understanding of measurement and uncertainty: An eye-tracking study. *Physical Review Physics Education Research*. 2017. Vol. 13 (2), P. 020125. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020125
3. Stefanel A. Graph in Physics Education: From Representation to Conceptual Understanding. *Mathematics in Physics Education* / G. Pospiech, M. Michelini, BS. Eylon (eds). Cham : Springer, 2019. pp 195–231. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_9
4. Serway R. A., Jewett J. W., Jr. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics (8th ed.). Belmont, CA : Brooks/Cole, Cengage Learning Inc., 2010. 1558 p.

5. Мілих В. І. Розрахунки магнітних полів в електротехнічних пристроях : навчальний посібник. Харків, 2021. 136 с.
6. Coil64 програма КСОМАТ, Лтд. URL : https://calc.komcat.net.ua/inductance.html.
7. ARMCO® Pure Iron High Purity Iron Product Data Bulletin. AK Steel International, 2022. Pp. 1–20. URL : https://www.aksteel.nl/files/downloads/clf_productdata__armco_pure_iron_pdb_euro_final_072022_92.pdf
8. Скіцько І. Ф., Бруква Н. М. Фізика. Електромагнетизм. Оптика : лабораторний практикум : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 428 с.
9. Лінчевський І. В., Хіст В. В. Фізика : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 141 с.

References:

1. Velychko S. P., Salnyk I. V. (2002). Hrafichnyy metod doslidzhennya pryrodnykh yavyshch u navchanni fizyky : navchal′nyy posibnyk dlya studentiv pedahohichnykh vyshchykh navchal′nykh zakladiv osvity [Graphical method of studying natural phenomena in teaching physics: textbook for students of pedagogical higher educational institutions]. Kirovograd : V. Vynnychenko RVTS KDPU. 167 p. [in Ukrainian].
2. Susac A., Bubic A., Martinjak P., Planinic M., Palmovic M. (2017). Graphical representations of data improve student understanding of measurement and uncertainty: An eye-tracking study. *Physical Review Physics Education Research*. Vol. 13 (2). P. 020125. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.13.020125
3. Stefanel A. (2019). Graph in Physics Education: From Representation to Conceptual Understanding. In: *Mathematics in Physics Education* / G. Pospiech, M. Michelini, BS. Eylon (eds). Springer, Cham. pp. 195–231. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_9
4. Serway R. A., Jewett J. W., Jr. (2010). Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics (8th ed.). Belmont, CA : Brooks/Cole, Cengage Learning Inc. 1558 p.
5. Milykh V. I. (2021). Rozrakhunky mahnitnykh poliv v elektrotekhnichnykh prystroyakh : navchal′nyy posibnyk [Calculations of magnetic fields in electrical devices: textbook]. Kharkiv. 136 p. [in Ukrainian]
6. Coil64 program KSOMAT, Ltd. URL : https://calc.komcat.net.ua/inductance.html [in Ukrainian]
7. ARMCO® Pure Iron High Purity Iron Product Data Bulletin. AK Steel International. (2022). Pp. 1–20. URL : https://www.aksteel.nl/files/downloads/clf_productdata__armco_pure_iron_pdb_euro_final_072022_92.pdf
8. Skitsko I. F., Brukva N. M. (2024). Fizyka. Elektromahnetyzm. Optyka : laboratornyy praktykum : navchal′nyy posibnyk Physics. Electromagnetism. Optics : laboratory practice : textbook]. Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 428 p. [in Ukrainian].
9. Linchevskyi I. V., Khist V. V. (2023). Fizyka : navchal′nyy posibnyk [Physics: textbook]. Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 141 p. [in Ukrainian].

I. Linchevskyi, V. Peklun, M. Chursanova. Graph-analytical method in physics for calculating the inductance of a toroidal coil with a ferromagnetic core.

The article discusses the use of the graph-analytical method for solving problems in physics, in section "Magnetism", at a higher education institution. It demonstrates that this method is an effective didactic and research approach, especially when obtaining an analytical solution to the problem is impossible.

An example of calculating the inductance of a coil with a toroidal core made of ferromagnetic material is considered. The magnetic flux density B and the relative magnetic permeability μ for ferromagnets are characterized by nonlinear dependencies on the field strength H, for which no analytical expression is known. The application of the graph-analytical method in our example includes the following steps: plotting the magnetization curve of the ferromagnet B(H) according to reference data → determining the dependence of the differential relative magnetic permeability of the ferromagnet μ on the field strength H through the slope of the tangent to the graph B(H) at different values of H → plotting the dependence μ(H)/H → determining the integral of μ(H)/H within the specified limits through graphical calculation of the area of the curvilinear trapezoid on the graph → using the obtained numerical value in the final calculations.

Unlike the simplified physical model of the coil, where the average value of μ is used, our calculation result is determined through the function μ(H)/H, is more correct than that with the average value <μ> and allows students to learn the methods of calculating magnetic parameters taking into account the nonlinear dependence μ(H). The differences in the obtained results for calculating inductance using the proposed method and the classical method with <μ> significantly depend on the boundaries between the maximum and minimum values of the magnetic field strength, which indicates that the graph-analytical method increases the accuracy of the obtained results.

Key words: *graph-analytical method, graphical method, physics, magnetism, inductance, ferromagnet, magnetization curve, relative magnetic permeability, toroidal core.*

Дата першого надходження рукопису до видання: 03.09.2025
Дата прийнятого до друку рукопису після рецензування: 31.10.2025
Дата публікації: 28.11.2025