Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 28 (2026) 35–41
© Y. Voloshyn, V. Miskyi, R. Nikiforov, D. Pykhtar, G. Torbin
https://doi.org/10.31392/iscs.2026.28.035 UDC 519.21

Fractal properties of the set of partially non-normal numbers for factorial expansion

Yuliia Voloshyn[1,2], *Vadym Miskyi*[1,3], *Roman Nikiforov*[1,4], *Dmytro Pykhtar*[1,5], *Grygoriy Torbin*[1,6,7]

Фрактальні властивості множини частково анормальних чисел для факторіальної системи числення

Юлія Волошин, Вадим Міський, Роман Нікіфоров, Дмитро Пихтар, Григорій Торбін

Abstract. This paper is a continuation of the study of fractal properties of distributions of random variables with independent digits of the factorial expansion, as well as the application of the obtained results to metric and dimensional number theory. As previously proven in [16], the set $L(F)$ of essentially non-normal numbers for the Cantor factorial expansion is superfractal. The present work is focused on the superfractality of the set of particularly non-normal numbers for the factorial expansion.

Keywords: fractals, Hausdorff–Besicovitch dimension, Cantor series expansions, factorial expansion, partially non-normal numbers, essentially non-normal numbers, non-normal numbers, normal numbers

2020 Mathematics Subject Classification: 11K55, 28A80, 60G30

Анотація. Стаття є продовженням дослідження фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами факторіального розкладу та застосування отриманих результатів в метричній та розмірнісній теорії чисел. Як раніше було доведено [16], що для факторіального розкладу множина $L(F)$ суттєво анормальних чисел є суперфрактальною. Дана робота зосереджена на суперфрактальності множини частково анормальних чисел факторіального розкладу.

Ключові слова: фрактали, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, розклади Кантора, факторіальний розклад, частково анормальні числа, суттєво анормальні числа, анормальні числа, нормальні числа

[1] Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
[2] yu.p.voloshyn@udu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0009-3555-4250
[3] v.v.miskyi@udu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0005-0913-7200
[4] r.o.nikiforov@udu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0001-9553-3157
[5] d.m.pykhtar@udu.edu.ua
[6] g.m.torbin@udu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0003-3088-1614
[7] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine. torbin@imath.kiev.ua

1 Вступ

Великий інтерес до дослідження метричних, фрактальних та топологічних властивостей множин нормальних, квазінормальних, частково анормальних та суттєво анормальних чисел переважно викликаний виявленню для деяких з цих множин фрактального феномену: при нульовій мірі Лебега множина має повну розмірність Хаусдорфа-Безиковича; та топологічного феномену: при нульовій мірі Лебега множина є залишковою. Прикладом таких феноменів для різних систем числення є саме множини суттєво анормальних чисел. Піонерськими роботами у даному питанні є роботи [4, 14], де було доведено суперфрактальність та залишковість множини D_s анормальних чисел для класичного s-адичного розкладу. Ці роботи разом з роботами [5–9, 11–13, 15] відкрили цілий напрям досліджень властивостей підмножин анормальних чисел для різних символьних розкладів дійсних чисел (див. [1–3, 10] та огляди в цих статтях).

Дана робота зосереджена на факторіальному розкладі, тобто розкладі виду:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} = \Delta^C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \alpha_j \in \{0, 1, \ldots, n_j - 1\},$$

де $n_k = k + 1$.

Нехай $N_0(x, k)$ – кількість символів "0" серед перших k символів розкладу x. Аналогічно означимо $N_1(x, k), N_2(x, k), \ldots$. Якщо існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{N_{i_0}(x, k)}{k}$, то її називають «частотою появи символа "i_0" у факторіальному розкладі числа x» і позначають $\nu_{i_0}(x)$. За асимптотичною поведінкою символів певного розкладу розрізняють множини нормальних, квазінормальних, частково та суттєво анормальних чисел, породжених цим розкладом. Нехай $N_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Означення 1. Множина

$$N(F) = \left\{ x \,\middle|\, (\forall i \in N_0) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x, k)}{k} = 0 \right\}$$

називається множиною нормальних чисел, породжених факторіальним розкладом.

Означення 2. Множина

$$W(F) = \{x \mid (\forall i \in N_0) : \nu_i(x) \text{ існує і } (\exists j \in N_0) : \nu_j(x) \neq 0\}$$

називається множиною квазінормальних чисел, породжених факторіальним розкладом.

Означення 3. Множина

$$T(F) = \{x \mid (\exists i \in N_0) : \nu_i(x) \text{ не існує, та } (\exists j \in N_0) : \nu_j(x) \text{ існує}\}.$$

називається множиною частково анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом.

Означення 4. Множина

$$L(F) = \{x \mid (\forall i \in N_0) : \nu_i(x) \text{ не існує}\}.$$

називається множиною суттєво анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом.

Вагомим результатом у дослідженні даного питання для факторіального розкладу є робота [16], де було досліджено метричні та фрактальні властивості нормальних та суттєво аномальних чисел. Зокрема, було отримано наступні результати:

Теорема 1. *У факторіальній системі числення для λ-майже всіх дійсних чисел $x \in [0;1]$ має місце рівність*

$$\nu_i(x) = 0, \quad \forall i \in N_0$$

Теорема 2. *Множина $L(F)$ суттєво анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом, є суперфракталом, тобто її міра Лебега дорівнює нулю, але*

$$\dim_H L(F) = 1.$$

Дана робота має на меті дослідити питання щодо суперфрактальності множини $T(F)$ частково анормальних чисел.

2 Про суперфрактальність множини частково анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом

Теорема 3. *Множина $T(F)$ частково анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом, є суперфракталом, тобто її міра Лебега дорівнює нулю, але*

$$\dim_H T(F) = 1.$$

Доведення. Перше твердження теореми випливає безпосередньо з нормальних властивостей факторіальної системи числення.

Для доведення основного твердження теореми (про фрактальні властивості множини $T(F)$) розглянемо зчисленну послідовність множин Y_m.

$$Y_m := \left\{ x : x = \Delta^F_{\underbrace{0\alpha_{1,1}...\alpha_{m,1}}_{\text{перша серія}}\underbrace{223\alpha_{1,2}...\alpha_{2m,2}}_{\text{друга серія}}\underbrace{2222334\alpha_{1,3}...\alpha_{4m,3}}_{\text{третя серія}}...} \right.$$
$$\left. \underbrace{\overbrace{2...2}^{2^{k-1}}\overbrace{3...3}^{2^{k-2}}\overbrace{4...4}^{2^{k-3}}...(k)(k)(k+1)\alpha_{1,k}...\alpha_{2^{k-1}\cdot m,k}...}_{k-\text{та серія}} \right\}$$

де $\alpha_{i,j}$, $i \in \{1, ..., 2^{j-1} \cdot m\}$ можуть набувати всіх дозволених символів з відповідного алфавіту, крім 0 та 1.

З побудови множини Y_m легко бачити, що частоти символів 0 та 1 дорівнюють нулю. Використовуючи стандартні міркування, нескладно показати (див., наприклад, [2, 4, 5]), що всі інші символи не мають частоти. Отже, $Y_m \subset T(F)$, $\forall m \in N$.

Позначимо:

- A_k — множина номерів позицій, на яких стоять фіксовані символи у k-тій серії;
- B_k — множина номерів позицій, на яких стоять "плаваючі" символи $\alpha_{i,k}$ у k-тій серії.

Зокрема, $A_1 = \{1\}, B_1 = \{2, 3, ..., m+1\}, A_2 = \{m+2, m+3, m+4\}, ...$

.

Нехай $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Нехай t_k — номер позиції, на якій закінчується k-та серія, тоді

$$t_k = 2^k \cdot (m+2) - k - m - 2.$$

Нехай s_k — номер позиції, на якій закінчується k-та серія фіксованих символів. Тоді

$$s_k = 2^{k-1} \cdot (m+4) - k - m - 2.$$

Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини Y_m розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{(k+1)!},$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають:

- одне фіксоване значення (описане в конструкції множини V_m) з імовірністю 1, якщо $k \in A$;
- а при $k \in B$ набувають значення $0, 1$ з імовірністю 0; значення $2, 3, ..., k$ з ймовірностями $\dfrac{1}{k-1}, \dfrac{1}{k-1}, ..., \dfrac{1}{k-1}$.

Очевидно, що Y_m співпадає зі спектром S_ξ випадкової величини ξ. Тому за теоремою 6 роботи [16] :

$$\dim_H Y_m = \dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)},$$

де m_j — кількість ненульових ймовірностей у розподілі випадкової величини ξ_j. Тобто $m_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j \in A, \\ j-1, & \text{якщо } j \notin A. \end{cases}$

Тому

$$\dim_H Y_m = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{s_k})}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{s=1}^{k-1} \ln\left(\prod\limits_{j\in B_s} (n_j - 2)\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{l=1}^{k-1} \ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-l}} (n_j - 2)\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})}.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}(n_j-2)\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}=\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}n_j\cdot\dfrac{n_j-2}{n_j}\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}=$$

$$=\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}n_j\right)+\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}\dfrac{n_j-2}{n_j}\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}=$$

$$=\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}n_j\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}+\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}}\left(1-\dfrac{2}{n_j}\right)\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}.$$

Оцінимо окремо

$$\prod_{j\in B_{k-1}}\left(1-\frac{2}{n_j}\right)=\prod_{j=s_{k-1}+1}^{t_{k-1}}\frac{n_j-2}{n_j}=$$

$$=\frac{s_{k-1}-1}{s_{k-1}+1}\cdot\frac{s_{k-1}}{s_{k-1}+2}\cdot\frac{s_{k-1}+1}{s_{k-1}+3}\cdot\frac{s_{k-1}+2}{s_{k-1}+4}\cdot\ldots\cdot\frac{t_{k-1}-3}{t_{k-1}-1}\,\frac{t_{k-1}-2}{t_{k-1}}=$$

$$=\left(\frac{s_{k-1}-1}{t_{k-1}-1}\right)\cdot\frac{s_{k-1}}{t_{k-1}}.$$

Оскільки

$$s_{k-1}=2^{k-2}(m+4)-k-m-1,$$
$$t_{k-1}=2^{k-1}(m+2)-k-m-1,$$

то

$$\frac{s_{k-1}}{t_{k-1}}\to\frac{m+4}{2m+4}\ (\text{при } k\to\infty).$$

Отже,

$$\ln\prod_{j\in B_{k-1}}\left(1-\frac{2}{n_j}\right)\to\ln\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)^2=\ln\left(\frac{1}{4}\left(\frac{m+4}{m+2}\right)^2\right)=\text{const}(m).$$

Тому

$$\frac{\ln\prod\limits_{j\in B_{k-1}}\left(1-\dfrac{2}{n_j}\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}\to 0\quad(k\to\infty).$$

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{\ln\prod\limits_{j\in B_{k-l}}\left(1-\dfrac{2}{n_j}\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}\to 0\quad(k\to\infty).$$

Як показано в роботі [16]:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-l}} n_j\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}=\frac{m}{2^l\cdot(m+4)}.$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-1}} (n_j-2)\right)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{s_k})}=\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{m}{2^l\cdot(m+4)}=\frac{m}{m+4}.$$

Оскільки $Y_m\subset T(F), \forall m\in N$, то їх об'єднання має ту ж властивість. Оскільки $\sup\limits_m \dim_H(Y_m)=\sup\limits_m\dfrac{m}{m+4}=1$, то $\dim_H(T(F))=1$. □

Подяка Ця робота була частково підтримана грантом від Simons Foundation (1290607, Torbin G.) і Міністерством освіти і науки України (проєкти «Мультифрактальний аналіз ймовірнісних розподілів та їх застосування для моделювання складних динамічних систем» № 0122U000048 та «Динаміки комплексних систем на різних часових шкалах» № 0120U101662.

Література

[1] Albeverio S., Garko I., Ibragim M., Torbin G. 2017. Non-normal numbers: full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 141(2):1–19.

[2] Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G. 2014. On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényif-expansions generated by piecewise linear functions. *Bull. Sci. math.*, 138:440–455.

[3] Albeverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G. 2017. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. *Mathematische Nachrichten*, 290(8–9):1163–1176.

[4] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2005. Topological and fractal properties of subsets of real numbers which are not normal. *Bull. Sci. math.*, 129(8):615–630.

[5] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2005. Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(9):1263–1281.

[6] Baek I.S., Olsen L. 2010. Baire category and extremely non-normal points of invariant sets of IFS's. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27(3):935–943.

[7] Barreira L., Saussol B., Schmeling J. 2002. Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis. *Isr. J. Math.*, 97(2):410–438.

[8] Barreira L., Schmeling J. 2000. Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension. *Isr. J. Math.*, 116:29–70.

[9] Eggleston H.G. 1949. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 20:31–36.

[10] Hyde J., Laschos V., Olsen L., Petrykiewicz I., Shaw A. 2010. Iterated Cesaro averages, frequencies of digits, and Baire category. *Acta Arith.*, 144(3):287–293.

[11] Olsen L. 2004. Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 136(1):139–165.

[12] Olsen L. 2004. Applications of multifractal divergence points to some sets of d-tuples of numbers defined by their N-adic expansion. *Bull. Sci. Math.*, 128:265–289.

[13] Olsen L., Winter S. 2003. Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures. *J. Lond. Math. Soc.*, 67(1):103–122.

[14] Pratsiovytyi M., Torbin G. 1995. Superfractality of the set of numbers having no frequency of n-adic digits, and fractal probability distributions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 47(7):1113–1118.

[15] ˇSalát T. 1966. A remark on normal numbers. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 11:53–56.

[16] Волошин Ю., Міський В., Нікіфоров Р., Пихтар Д., Торбін, Г. 2025. Про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для факторіального розкладу. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 27:36–47.

[17] Волошин Ю., Метіль В., Гулак Т. 2026. Про лебегівську структуру та фрактальні властивостіспектра розподілів випадкових величин з незалежними символами субгеометричних розкладів Кантора. *Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків*, Київ, 7–8 травня 2026 р.

[18] Волошин Ю., Пихтар Д., Торбін, Г. 2026. Про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для геометричних розкладів Кантора та їх узагальнень. *Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків*, Київ, 7–8 травня 2026 р.

[19] Волошин Ю., Торбін, Г. 2026. Метричні, фрактальні та топологічні властивості множин квазінормальних, частково анормальних та суттєво анормальних чисел для факторіального розкладу. *Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків*, Київ, 7–8 травня 2026 р.