Текстові задачі на уроках і в позаурочний час

Алгебра. 7–9 класи



ШКІЛЬНИЙ СВІТ
ЕКСПЕРТ
у галузі освіти

Бібліотека «Шкільного світу»

Бібліотека «Шкільного світу»
Заснована у 2003 р.

Світлана Лук'янова

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ НА УРОКАХ І В ПОЗАУРОЧНИЙ ЧАС

Алгебра 7—9 класи

Математика. Бібліотека

Київ
«Редакції газет природничо-математичного циклу»
2012

УДК 373.5.016:512](076.1)
ББК 74.262.214я721-4
Л84

Редакційна рада:
І. Соколовська, Л. Швець,
М. Мосієнко — канд. філол. наук,
Г. Кузьменко, О. Шатохіна

Текстові задачі на уроках і в позаурочний час : алгебра : 7—9 класи / Світлана Лук'янова. — К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. — 128 с. — (Бібліотека «Шкільного світу»).
ISBN 978-966-451-000-1.
ISBN 978-966-2755-13-8.

У книжці висвітлено загальні відомості про розв'язування текстових задач алгебраїчним методом та розглянуто особливості розв'язування деяких видів сюжетних задач. Методичні поради щодо навчання учнів та достатня кількість наведених розв'язань різноманітних задач стануть у пригоді при проведенні уроків, занять гуртка, підготовці до олімпіад.

Для вчителів математики та студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 373.5.016:512](076.1)
ББК 74.262.214я721-4

ISBN 978-966-451-000-1(б-ка «Шк. світу»)
ISBN 978-966-2755-13-8

© Лук'янова С. М., 2012
© ТОВ «Редакції газет природничо-математичного циклу», дополіграфічна підготовка, 2012

ЗМІСТ

Передмова....4

Розділ 1. Загальні відомості про розв'язування текстових задач алгебраїчним методом....6
1.1. Зальні правила розв'язування текстових задач....6
1.2. Етапи розв'язування текстових задач алгебраїчним методом....16
1.3. Складання рівняння за умовою задачі та пошук раціональних способів обрання невідомого....26
1.3.1. Схеми пошуку рівняння до задачі....26
1.3.2. Раціональні способи обрання невідомої....31
1.3.3. Як допомогти учням навчитися складати рівняння за змістом задачі?....37
1.3.4. Розв'язування задач з невизначеними невідомими....42
1.4. Оформлення запису розв'язування задач....47
1.5. Перевірка розв'язків текстових задач....50
1.6. Дослідження розв'язків. Текстові задачі з параметрами....62
1.7. Арифметичні способи й алгебраїчні моделі....68

Розділ 2. Розв'язування задач окремих видів....80
2.1. Задачі без різнойменних величин....80
2.1.1. Задачі на знаходження чисел та цифр числа....80
2.1.2. Сюжетні задачі, у яких використовується значення однієї і тієї самої величини....87
2.2. Задачі на роботу....93
2.3. Задачі на рух....107
2.4. Задачі на суміші (сплави, розчини)....120

Література....127

ПЕРЕДМОВА

Розв'язування задач — практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах або гри на фортепіано; навчитися йому можна, лише наслідуючи гарні зразки і постійно практикуючи.
Д. Пойа

Математична освіта є важливою складовою загальноосвітньої підготовки школярів. Місце математики в системі шкільної освіти визначається її роллю в інтелектуальному, соціальному і моральному розвитку особистості, розумінні будови і використанні сучасної техніки, розвитку економіки, інформаційно-комунікаційних технологій, сприйманні наукової картини світу і сучасного світогляду.

Відзначаючи особливу роль математики в сучасному світі, академік В. М. Глушков зазначав, що велика кількість галузей науки і техніки своїми успіхами значною мірою завдячують саме широкому використанню математичних методів. Тому не менш важливою метою навчання математики є науково правильне розуміння учнями особливостей відображення математикою явищ навколишнього світу, вміння будувати простіші математичні моделі реальних явищ і процесів та володіння математичним апаратом для їхнього дослідження.

Текстові сюжетні задачі (тобто задачі, у яких описано певний життєвий сюжет: явище, подію, процес) — це найдавніший вид шкільних задач. Вони завжди широко використовувалися і будуть використовуватися під час навчання математики. Ще до нашої ери вченим Стародавнього Єгипту, Вавилону, Китаю, Індії були відомі різноманітні як за сюжетами, так і за способами розв'язування текстові задачі. Їх розв'язували з суто практичною метою: навчити розв'язувати задачі, які часто зустрічаються в діяльності людини.

Завдяки працям видатного російського методиста В. А. Євтушенко (1836—1888) почали розглядати три функції використання задач у навчанні математики: 1) розвиток мислення учнів; 2) виведення математичних правил; 3) застосування цих правил під час розв'язування окремих практичних проблем. Ці три функції збереглися і до нашого часу, проте головним в сучасній шкільній математичній освіті стає використання процесу розв'язування текстових задач для ознайомлення учнів із суттю і практикою застосування математичного моделювання:

введення поняття математична модель і характеристика різних видів розв'язуючих моделей, розкриття суті етапів розв'язування прикладних задач і формування вмінь учнів на практиці застосовувати теоретичні знання про математичні методи, тобто створення сприятливих умов для подолання наявного протиріччя між отриманням учнями математичних знань у «чистому» вигляді та їхньою неспроможністю застосовувати ці знання на практиці.

Існують різні методи розв'язування текстових задач: арифметичний, алгебраїчний, геометричний, логічний, практичний. В основі кожного методу лежать математичні моделі різних видів. Наприклад, під час використання різних арифметичних способів моделями є числові вирази, якщо задача розв'язується геометричним методом, то використовуються діаграми чи графіки. Розв'язування задачі алгебраїчним методом передбачає знаходження відповіді на вимогу задачі за допомогою складання рівняння, системи рівнянь чи нерівностей. Одну і ту саму задачу можна розв'язати за допомогою різних розв'язуючих алгебраїчних моделей, якщо для їхнього складання використовувати різні співвідношення між даними і невідомими.

Основним періодом використання алгебраїчних моделей під час розв'язування текстових задач є курс алгебри 7—9-х класів.

Книжка продовжує розпочате автором у виданні «Розв'язування текстових задач арифметичними способами: 5—6 кл.» (Шкільний світ, 2006) висвітлення основних питань щодо загальної теорії розв'язування текстових задач (розділ 1). У ній також наведено зразки аналізу текстів різних видів сюжетних задач та описано етапи пошуку різноманітних розв'язуючих алгебраїчних моделей (розділ 2).

Маємо надію, що пропонована книжка стане в пригоді як нинішнім, так і майбутнім учителям.

розділ 1

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ

Процес розв'язування задачі є пошуком виходу зі скрути або шляхом обминання перешкоди — це процес досягнення мети, яка одразу не виглядає доступною.
Д. Пойа

1.1. ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Текстова задача — це сформульована звичайною мовою вимога знайти невідоме число чи значення деякої величини на основі даних співвідношень між числами або значеннями величин.

Текстові задачі можуть бути абстрактного змісту, коли у тексті залежності між числами описано словесно або з певним сюжетом.

Є чимало різноманітних сюжетів, які автори підручників і посібників використовують під час складання задач. Проте серед задач, що мають певну фабулу, доцільно окремо розглядати ті, в тексті яких описано кількісний аспект деякого явища або процесу, і цей опис суттєво впливає на пошук плану розв'язування (задачі на рух, роботу, купівлю тощо). Такі задачі називають *сюжетними*.

Навчити кожного учня розв'язувати будь-яку текстову задачу неможливо, адже щодо розв'язування більшості з них не має загальних правил. Проте подолати ці труднощі вдається для тих задач, фабули яких є добре відомими (типові задачі) і мають напрацьовані роками алгоритмічні приписи-поради щодо пошуку їхніх розв'язків.

Найповніший перелік загальних порад щодо розв'язування довільної задачі подано у відомій книзі Дьордья Пойа «Як розв'язувати задачу»

(табл. 1). Ми погоджуємось із думкою методистів, що хоча наведені в таблиці правила є доречними, проте їхньому застосуванню на практиці заважає велика кількість запитань (вивчити їх напам'ять важко, а при собі завжди мати таблицю-підказку — нереально).

Безперечним є й те, що навіть найкраще запам'ятовування порядку запитань цієї таблиці майже нічого не дасть учневі, якщо він не вміє розв'язувати задачі принаймні кількох найважливіших (чи найчастіше вживаних) типів (задачі на різні види руху об'єктів, задачі на виконання роботи, задачі на купівлю тощо).

Таблиця 1

Розуміння постановки задачі	
1. Потрібно уважно прочитати умову задачі й чітко зрозуміти її	Що невідомо? Що дано? З яких фактів складається умова? Чи можливо задовольнити умови? Чи є умова достатньою для визначення невідомого? Чи недостатня? Чи надмірна? Чи суперечна? Зробіть креслення. Введіть необхідні позначення. Поділіть умови на частини. Спробуйте записати їх
Складання плану розв'язання	
2. Потрібно знайти зв'язок між даними і невідомим. Якщо не вдається відразу встановити цей зв'язок, можна розглянути допоміжні задачі. Наприкінці необхідно скласти план розв'язання	Чи не зустрічалася вам раніше ця задача, хоча б у дещо іншій формі? Чи відома вам яка-небудь подібна задача? Чи не знаєте ви теореми, яка могла б бути корисною? Розгляньте невідоме! Спробуйте пригадати задачу з тим самим чи схожим невідомим. Ось задача, споріднена з поданою і вже розв'язана. Чи можна скористатися нею? Чи можна використати її результат? Чи можна використати метод її розв'язання? Чи слід увести який-небудь допоміжний елемент, щоб з'явилася можливість скористатися попередньою задачею? Чи можна інакше сформулювати задачу? Ще інакше? Поверніться до означень. Якщо не вдається розв'язати подану задачу, спробуйте спочатку скласти більш доступну подібну задачу. Більш загальну? Більш часткову? Аналогічну задачу? Чи можна розв'язати частину задачі? Збережіть лише частину умови, відкинувши решту: наскільки визначеним стане невідоме, як воно зможе змінюватися? Чи можна одержати щось корисне з даних? Чи можна ввести інші дані, з яких можливо було б визначити невідоме? Чи можна змінити невідоме або дані, або, якщо необхідно, і те й інше так, щоб нове невідоме і нові дані стали ближче один до одного? Чи всі дані ви використали? Чи всі умови? Чи взяли ви до уваги всі суттєві поняття, які містяться в задачі?

Закінчення

Виконання плану	
3. Потрібно виконати план розв'язання	Виконуючи план розв'язання, контролюйте кожен свій крок. Чи зрозуміло вам, що зроблений вами крок правильний? Чи можете ви довести, що він правильний?
Погляд назад (дослідження одержаного розв'язання)	
4. Потрібно дослідити одержане розв'язання	Чи можна перевірити результат? Чи можна перевірити хід розв'язування? Чи можна одержати той самий результат інакше? Чи можна було його побачити відразу? Чи можна скористатися цим результатом або методом розв'язання під час розв'язування іншої задачі?

Намагалися знайти універсальні настанови щодо розв'язування текстових задач й інші відомі вчені-математики.

Так Рене Декарт у своїй праці «Правила для керівництва розумом» писав, що до всіх задач можна застосовувати такі положення:

по-перше — задачі будь-якого виду зводяться до математичних задач;

по-друге — математичні задачі будь-якого виду зводяться до алгебраїчних задач;

по-третє — будь-яка алгебраїчна задача зводиться до розв'язування одного (єдиного) рівняння.

Декарт був не першим, хто намагався знайти вказівки в тернистій справі розв'язування текстових задач. Ескізи його ідей зустрічаються вже в єгипетських папірусах і вавилонських клинописних табличках, у китайських «Дев'яти книгах з математики» і «Математичному трактаті про продовження давніх методів», у книгах індійських математиків Брахмагупти і Бхаскари, у греків – Архімеда і Діофанта, у арабів – ал-Хорезмі та Омара Хайяма, у відомій «Книзі про абаку» Леонарда Фібоначчі й у не менш відомій «Вступ до аналітичного мистецтва» Франсуа Вієта.

Через певний час Декарт визнав, що є задачі, до яких його схему неможливо застосувати. Проте безперечним залишається його роль у розвитку аналітичного методу розв'язування задач. Коротко ідею цього методу можна представити у вигляді таких настанов.

1. Починаючи розв'язування задачі, ретельно проаналізуй її умову. Що потрібно знайти чи довести? Що відомо? Яка залежність між даними і шуканим? Нехай перелік даних і залежностей буде повним і детальним. Приймай за істинне дане лише те, що інтуїтивно зрозуміле

і логічно доведене, коли ж умова є досить складною, діли її на частини доти, поки вона на стане зрозумілою для тебе.

Для того щоб потім відтворити в своїй уяві цілісну умову задачі, дотримуйся порядку в міркуваннях, іди від простого до складного, від легкого до важкого, від інтуїції до логіки. Коли ж задача не піддається аналізу, не починай її розв'язання, не дій наосліп. Проте мобілізуй усі свої знання, увесь свій досвід для проникнення в суть задачі, зосередь усю свою увагу на фактах, про які в ній ідеться. Досліджуй все по порядку, не пропускай «дрібниць».

2. Коли попередній аналіз завершено, коли запитання стає зрозумілим, потрібно звільнити його від усього зайвого. Для цього добре використовувати буквені символи і креслення. Саме вони дають змогу створити таку модель, в якій невідомі й відомі є рівноправними. Для створення таких моделей потрібно перевести залежності між реальними величинами на мову чотирьох арифметичних дій. Виконуючи це, слід перевіряти правильність кожного кроку.

3. Таким чином, символічна буквена модель текстової задачі стане системою рівнянь, смисл кожного з яких зводиться до вираження одного й того самого значення деякої величини двома різними способами. Щоб задача мала визначений розв'язок, потрібно мати стільки рівнянь, скільки в задачі невідомих.

4. Досліджуй розв'язання задачі. Пройшовши шлях, кинь «погляд назад», інтуїтивний і дедуктивний.

Отже, щоб розв'язати довільну задачу, Рене Декарт радив після аналізу умови спочатку розглянути її як вже розв'язану і дати назви всім «лініям, які необхідні для її побудови, причому і відомим, і невідомим» [6, с. 14] (під лініями слід розуміти значення величин). Потім, не відділяючи відомі й невідомі лінії (величини), потрібно «оглянути труднощі» (це означає проаналізувати умову задачі, з'ясовуючи зв'язки між відомими і невідомими) у найбільш природному порядку. Так потрібно робити доти, поки не буде знайдено одне значення величини, яке можна виразити двома способами. Виконання цих настанов на практиці дуже нагадує знайомий нам розширений опис складання рівняння за текстом задачі. Наприклад:

Задача 1. Батько старший за сина на 26 років, а через 4 роки він буде старшим за нього у 3 рази. Скільки років зараз батькові?

Розв'язання

Припустимо, що зараз батькові x років. Тоді, оскільки він старший за сина на 26 років, то сину зараз $(x - 26)$ років. Через 4 роки батькові

буде $(x + 4)$ років, а синові – $((x - 26) + 4)$ років. Але в той самий час батько буде старший за сина у 3 рази, отже можна скласти таке рівняння:

$$x + 4 = 3((x - 26) + 4).$$

Отримане рівняння є математичною моделлю задачі.

Сформульовані Декартом методичні вказівки щодо розв'язування текстових задач стали широко відомі завдяки виходу книжок Дьордья Пойя.

Методичні вказівки Декарта доповнив новими положеннями Ісаак Ньютон. У своїй «Загальній арифметиці» він сформулював у розділі «Про наведення запитання до рівняння» такі ідеї:

1. Розпочинати розв'язування задач на складання рівнянь можна, лише маючи вагомий досвід щодо тотожних перетворень алгебраїчних виразів і розв'язування рівнянь.

2. Перед початком розв'язування текстових задач потрібно переконатися, що вони є аналітичними, тобто є можливість усі дані й залежності перекласти на мову алгебри.

3. Текстові задачі поділяються на дві великі групи: а) задачі, які допускають синхронний переклад зі звичайної мови на алгебраїчну (або паралельний запис частин тексту і відповідних їм алгебраїчних виразів); б) задачі, які не допускають синхронного перекладу. Для другої групи задач необхідним є переформулювання їхнього тексту з дотриманням смислу слів.

4. Вивчення задач — мистецтво, а головним методом вивчення є демонстрація (показ) зразків: «Мистецтво легше вивчати за допомогою прикладів, ніж за допомогою приписів» [16, с. 79—82].

5. Розв'язування задач іде тим швидше й вишуканіше, чим менше введено невідомих величин.

6. Для розв'язування задач «важко дати загальні приписи, і кожен повинен ... слідувати вказівкам власного розуму, я ж намагаюсь усетаки показати шлях початківцям. Це наслідування правил Декарта» [16, с. 103].

Для складання рівняння Ньютон пропонував позначити деяке невідоме (зазвичай це було шукане) буквою, а потім, використовуючи її, перекласти умову задачі мовою алгебри. Деталі перекладу Ньютон не роз'яснював, а показував у своїй книзі майже на вісімдесяти прикладах.

Задача 2. Один купець щороку збільшував на одну третину свій статок, зменшений на 100 фунтів стерлінгів, які щорічно витрачав

на свою сім'ю. через три роки його статок збільшився у два рази. Запитується, скільки грошей у нього було спочатку?

Процес складання рівняння Ньютон показує, записуючи ліворуч словесний текст задачі, а праворуч — переклад цього тексту алгебраїчною мовою.

Словесний текст		**Переклад алгебраїчною мовою**
У купця був статок ... ,	—	x.
із якого він у перший рік витратив 100 фунтів.	—	$x-100$.
Залишок він збільшив на одну третину.	—	$x-100+\frac{1}{3}(x-100)=\frac{1}{3}(4x-400)$.
Протягом другого року він знову витратив 100 фунтів	—	$\frac{1}{3}(4x-400)-100=\frac{1}{3}(4x-700)$.
і залишок знову збільшив на одну третину.	—	$\frac{1}{3}(4x-700)+\frac{1}{9}(4x-700)=\frac{1}{9}(16x-2800)$.
Протягом третього року він знову витратив 100 фунтів	—	$\frac{1}{9}(16x-2800)-100=\frac{1}{9}(16x-3700)$.
і залишок знову збільшив на одну третину.	—	$\frac{1}{9}(16x-3700)+\frac{1}{27}(16x-3700)=\frac{1}{27}(64x-14800)$.
Через три роки він став заможніший удвічі.	—	$\frac{1}{27}(64x-14800)=2x$.

Як видно з наведеного зразка, переклад зручно робити, якщо зміна обраного за x невідомого проходить послідовно або в тексті йдеться лише «про числа чи абстрактні відношення величин».

Набагато складніше користуватися таким перекладом, коли задача має ускладнений математичний зміст або в сюжеті розглядаються різні випадки деякого явища чи процесу.

У методичній літературі можна також зустріти й більш лаконічні поради щодо розв'язування окремих видів задач із використанням різних алгебраїчних моделей (рівняння першого степеня та їх системи,

квадратне рівняння, дробово-раціональне рівняння, нерівності, змішані системи тощо).

Зокрема пропонується правило, яке можна подати у вигляді таких кроків:

1) аналіз задачі (встановлення об'єкта дослідження; виявлення процесів, що описані в задачі, та величин, які їх характеризують; з'ясування залежностей між величинами тощо);

2) побудова структурної моделі задачі (граф-схеми, схеми-таблиці);

3) на основі складеної структурної моделі запис усіх співвідношень, що випливають із умови задачі, у вигляді системи рівнянь;

4) безпосереднє розв'язування отриманої системи рівнянь або згортання її в одне рівняння і подальше розв'язування цього рівняння.

Втілення описаного правила на практиці передбачає, що після проведення аналізу й побудови структурної моделі вводяться величини $x, y_1, y_2, ..., y_k$.

Це робиться так, щоб, використавши умову задачі, кожну з величин $y_1, y_2, ..., y_k$ можна було виразити через x і раніше введені величини. Крім того, значення величини y_k повинно бути відомим з умови, тобто $y_k = a$.

У результаті маємо таку систему:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x), \\ y_2 = f_2(x, y_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{k-1} = f_{k-1}(x, y_1, \ldots, y_{k-2}), \\ y_k = f_k(x, y_1, \ldots, y_{k-1}). \end{cases}$$

Якщо зіставити всі співвідношення та по черзі виразити y_2 через x і y_1 (тобто $y_2 = f_2(x, y_1) = f_2(x, f_1(x))$,), потім y_3 через x і т. д., то вираження останньої величини y_k через x буде результатом згортання даної системи рівнянь в одну залежність:

$$y_k = \varphi(x).$$

Якщо врахувати, що за умовою $y_k = a$, то для розв'язування задачі маємо рівняння:

$$\varphi(x) = a.$$

Алгебраїчна модель задачі у вигляді системи рівнянь повинна мати стільки рівнянь, скільки співвідношень у задачі, і таку кількість невідомих букв, скільки невідомих (допоміжних і шуканих) містять усі ці співвідношення.

Процес складання такої системи після аналізу текстової задачі, побудови деякої її репрезентативної моделі чи виділення з тексту окремих співвідношень не викликає особливих труднощів. Але, як правило, в результаті отримується система з великою кількістю рівнянь і невідомих, тому можуть виникнути труднощі саме з розв'язуванням системи.

Розглянемо виконання кроків наведеного правила на прикладі такої задачі.

Задача 3. Бригада лісорубів за планом мала щодня заготовлювати 100 м^3 лісу. Проте кожного дня лісоруби перевиконували план на 10 м^3, тому на 5 днів достроково завершили виконання плану. Скільки кубометрів лісу лісоруби мали заготовити за планом?

Розв'язання

У задачі описано процес виконання певної роботи, який представлено двома випадками: виконання завдання за планом і реальне виконання завдання.

Даний процес можна охарактеризувати трьома взаємопов'язаними величинами:

робота (A) – це кількість виготовленої продукції (або кількість продукції, яку планується виготовити);

продуктивність праці (p) – обсяг роботи (завдання), який виконує бригада за одиницю часу;

час (t), який виконується робота.

$$\boxed{\text{Робота}} = \boxed{\text{Продуктивність праці}} \times \boxed{\text{Час}}$$

$$\boxed{A = p \cdot t}$$

Значення величин з умови задачі можна охарактеризувати так:

1) продуктивність праці за планом (100 м^3);

2) реальна продуктивність праці (невідома);

3) час виконання роботи за планом (невідомий);

4) реальний час виконання роботи (невідомий);

5) робота, яку потрібно виконати за планом (шукана);

6) робота, яку фактично виконали (невідома).

Залежність між величинами цього процесу можна подати у вигляді розгорнутої формули.

Для виявлення співвідношень між значеннями велич розіб'ємо умову задачі на частини (кожна частина умови має відповідати одному співвідношенню) та охарактеризуємо кожне співвідношення.

1. *За планом мали щодня заготовлювати 100 м³ лісу* — це неявна залежність між запланованим обсягом роботи і часом, який потрібен для її виконання (зв'язок між значеннями величин 1), 3) і 5)).

2. *Перевиконували план на 10 м³* — явне співвідношення порівняння, тобто чітко видно, від чого і на скільки більше (зв'язок між 1) і 2)), і неявна залежність між виконаною роботою та часом, витраченим на її виконання (зв'язок між 2), 4) і 6)).

3. *На 5 днів достроково завершили* — явне співвідношення порівняння між часом, який мали працювати за планом, і реальним часом виконання роботи (зв'язок між 3) і 4)).

4. *Завершили виконання плану* — неявна залежність, яка встановлює рівність між запланованою роботою і роботою, що була виконана (зв'язок між 5) і 6)).

Запишемо виявлені співвідношення між значеннями величин у таблицю (табл. 2)

Таблиця 2

	Робота, м³		=	**Продуктивність праці, м³/день**	×	**Час виконання роботи, дні**
За планом	?	однакова	=	100	×	?
Фактично	?		=	?, на 10 >	×	?, на 5 >

За даною таблицею можна ввести основне й допоміжні невідомі (табл. 3).

Таблиця 3

	Робота, м³		=	**Продуктивність праці, м³/день**	×	**Час виконання роботи, дні**
За планом	x	однакова	=	100	×	y_1
Фактично	x		=	?, на 10 >	×	y_2, на 5 >

x — запланована робота

y_1 — кількість днів роботи за планом — $y_1 = \frac{x}{100}$.

y_2 — кількість днів реального виконання роботи — $y_2 = \frac{x}{100+10} = \frac{x}{110}$.

y_3 — кількість зекономлених днів (тобто різниця між плановим і фактичним часом роботи) — $y_3 = y_1 - y_2$.

Послідовно виражаючи допоміжні невідомі через x і раніше введені невідомі, отримаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x}{100}, \\ y_2 = \dfrac{x}{100+10} = \dfrac{x}{110}, \\ y_3 = y_1 - y_2 = \dfrac{x}{100} - \dfrac{x}{110}. \end{cases}$$

Оскільки за умовою задачі $y_3 = 5$, то маємо рівняння:

$$\frac{x}{100} - \frac{x}{110} = 5.$$

Як бачимо, є досить копіткою справою, користуючись наведеним правилом, спочатку записувати всі співвідношення, що випливають із умови задачі, у вигляді системи рівнянь, а потім розв'язувати цю систему, зважаючи на велику кількість змінних (чи згортати її в одне рівняння). Саме тому в такому розгорнутому вигляді наведене правило на практиці майже не використовується.

Проте цілком відмовлятися від намагань знайти загальні поради щодо розв'язування текстових задач алгебраїчним методом не слід: лаконічні й чіткі описи необхідних кроків зі складання алгебраїчних моделей, на наш погляд, були б гарною допомогою для учнів у їх навчанні використовувати алгебраїчний метод до розв'язування текстових задач різних сюжетів і різних математичних структур.

Під час навчання учнів застосовувати алгебраїчний метод до розв'язування задач слід пам'ятати про принцип наступності. Знання про структуру задачі, її елементи, етапи процесу розв'язування, які отримали учні, розв'язуючи задачі в 5—6-х класах арифметичними способами, не варто відкидати. Їх слід «підлаштувати» під новий метод, доповнивши та розширивши, якщо є необхідність.

Нагадаємо коротко деякі відомості із загальної теорії текстових задач.

Під *структурною будовою* задачі розуміють сукупність усіх величин (відомих і невідомих) та їхніх числових значень і систему математичних співвідношень між цими величинами, вказаних явно чи неявно в тексті.

З точки зору структурної будови, в кожній задачі можна виділити:

1) числові значення величин, які називають *відомими* або *даними*;

2) деяку систему *залежностей*, що розкривають характер зв'язків між відомими та невідомими;

3) *вимогу* або *запитання*, на які потрібно дати відповідь, розв'язуючи задачу.

Числові значення величин і наявні між ними залежності (кількісні та якісні характеристики об'єктів задачі та відношення між ними) називають *умовою* задачі. Як показує шкільна практика, значна частина учнів не розв'язує текстові задачі саме тому, що не може швидко та правильно виділити в тексті задачі її умову та вимоги.

Існують різні варіанти зв'язків між умовою та вимогою.

Задачу називають *визначеною*, якщо умов (даних і залежностей) стільки, скільки необхідно та достатньо, щоб отримати відповідь (тобто розв'язати задачу).

У *невизначеної задачі* умов недостатньо для отримання відповіді (такі задачі називають задачами *з недостатніми даними*).

Якщо в задачі є умови, які не використовуються під час розв'язування задачі обраним способом, то задачу називають *перевизначеною* або *з надлишковими даними.* Якщо зайва умова не суперечить решті умов, то задача має розв'язок.

1.2. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ

У розширеному вигляді розв'язування довільної текстової задачі можна подати як *послідовність таких етапів:*

1) аналіз задачі (предметно-змістовий або логіко-семантичний);

2) побудова представницької структурної, схематичної, табличної чи графічної моделі;

3) пошук способу розв'язування (складання плану розв'язування, математичної моделі тощо);

4) виконання плану і запис розв'язання;

5) перевірка розв'язку;

6) дослідження задачі та її розв'язання;

7) формулювання відповіді;

8) навчально-пізнавальний аналіз задачі та її розв'язання.

У шкільній практиці найчастіше текстові задачі розв'язують, використовуючи *такі чотири етапи*:

1) аналіз тексту задачі в поєднанні з побудовою структурної, схематичної чи графічної моделі;

2) складання плану розв'язування та пошук відповідної алгебраїчної моделі (складання плану є доречним, коли задача має ускладнену математичну структуру, а завершення розв'язування рівняння ще не означає

завершення розв'язування самої задачі, тобто, щоб дати відповідь на запитання задачі, потрібно ще виконати кілька арифметичних дій);

3) запис розв'язання;

4) перевірка відповідності отриманих розв'язків математичної моделі смислу (сюжету) текстової задачі і формулювання відповіді.

Як правило, детально на всіх етапах зупиняються лише під час розв'язування складних, проблемних задач або задач, що мають певне узагальнювально-теоретичне значення. Проте сучасна орієнтація шкільної математичної освіти на розкриття змісту математичного моделювання посилює значимість другого етапу — побудови моделі задачі.

Зауважимо, що під час розв'язування текстової задачі арифметичним способом складається числова модель, а алгебраїчний метод відповідно передбачає для знаходження розв'язку задачі складання рівняння, системи рівнянь чи нерівності (рідше змішаної системи).

Нагадаємо характеристики етапів розв'язування текстової задачі.

Аналіз задачі може проводитися у двох напрямках:

1) предметно-змістовий аналіз — декодування умови задачі в цілому, тобто створення уявного образу сюжету задачі;

2) логіко-семантичний аналіз — виявлення величин, їх значень і зв'язків, які задано в тексті задачі, розбиття тексту на елементарні умови та вимоги.

Результатом логіко-семантичного аналізу тексту є відповіді на запитання:

- Які величини характеризують кількісний аспект явищ, процесів або подій сюжету задачі?
- Скільки та які значення кожної величини задано явно чи неявно в тексті?
- Який характер кожної величини: відома, допоміжна невідома, шукана невідома?
- Якими співвідношеннями пов'язані між собою значення величин?
- Які значення є головними в кожному зі співвідношень, які слова-ознаки вказують на це?
- Як пов'язані між собою виявлені співвідношення?

Залежно від конкретної задачі аналіз може бути більш або менш розширеним. Детальний аналіз доцільно виконувати у разі, коли задача нового або складного сюжету чи структури.

Аналіз умови задачі буде глибшим, послідовнішим, повнішим й ефективнішим, якщо пропонувати учням дотримуватися таких *кроків-порад*:

1) прочитай текст задачі та визнач, про який об'єкт, явище, подію або процес ідеться в її тексті;

2) визнач, які моменти (випадки, епізоди) цього явища (процесу) розглядаються;

3) назви величини, що характеризують (описують) цей процес;

4) знайди числові значення, які характеризують кожну з цих величин;

5) визнач, які величини відомі, а які — шукані;

6) з'ясуй співвідношення між даними величинами;

7) результат проведеного аналізу зобрази у вигляді схеми, таблиці, ілюстрації, графів тощо.

Розглянемо процес аналізу умови задачі на прикладі.

Задача 4. Катер пройшов відстань між двома пристанями *A* та *B* в обидва кінці за 2 год 10 хв, причому на рух за течією він витратив часу на 30 хв менше, ніж коли йшов проти течії. Чи вистачить туристам 4 год, щоб подолати цю відстань на плоту та вчасно дістатися до пункту *B*, якщо відстань між *A* та *B* становить 20 км?

1. *Предметно-змістовий аналіз.*

У задачі розглядається рух об'єктів за течією та проти течії річки. Йдеться про два об'єкти: катер і пліт.

Катер долає відстань між двома пристанями в двох напрямках: за течією та проти течії річки.

На подолання відстані від *A* до *B* і в зворотному напрямку йому потрібен різний час, оскільки його швидкість руху за течією річки більша за власну (тобто швидкість, з якою він може рухатися в стоячій воді, наприклад, по озеру) на швидкість річки, а фактична швидкість руху проти течії — менша від власної швидкості на ту саму швидкість течії.

Відомо, що пліт власної швидкості не має і може рухатися тільки за течією річки (тобто його власна швидкість дорівнює швидкості течії).

2. *Логіко-семантичний аналіз.*

Процес руху катера і плота можна охарактеризувати залежністю між трьома величинами: відстань (шлях), час і швидкість руху. Відстань дорівнює добутку швидкості на час, що був витрачений на її подолання.

Відстань	=	Швидкість	×	Час

У цій задачі явно дано значення шляху, який долають задані об'єкти. Витрати часу на подолання шляху від A до B (нехай цей напрямок збігається з напрямком руху течії річки) і на зворотний шлях (проти течії) невідомі, але відомі їхні сумарне значення та величина, на яку час руху за течією менший від часу руху проти течії. Невідомим є також час руху плота.

Про швидкості об'єктів, що рухаються, можна сказати таке:

1) власна швидкість катера — невідома;

2) швидкість течії річки (відповідно і швидкість руху плота) — невідома;

3) швидкість руху катера за течією — невідома;

4) швидкість руху катера проти течії — невідома.

У задачі шуканим є час руху плота, який потрібно буде порівняти з даною в умові величиною (4 год).

Між відомими та невідомими величинами є такі зв'язки (співвідношення):

1) швидкість руху за течією є сумою власної швидкості катера і течії річки;

2) швидкість руху проти течії є різницею власної швидкості катера і течії річки;

3) відома відстань руху за течією (20 км) є добутком часу та швидкості руху катера за течією;

4) відома відстань руху катера проти течії (20 км) є добутком часу і швидкості руху катера проти течії;

5) відома відстань руху плота за течією (20 км) є добутком часу його руху та швидкості течії.

Часто проведення аналізу збігається або є початком побудови *репрезентативної (представницької) моделі задачі.*

Побудова *репрезентативної* моделі сюжетної задачі може проводитися з різною метою:

1) для фіксації результатів аналізу тексту задачі, якщо побудова відбувається під час аналізу;

2) для переформулювання задачі (оскільки модель дає можливість подивитися на задачу з різних точок зору);

3) для пошуку способу розв'язування, тобто для знаходження розв'язуючої моделі (числового виразу, рівняння, нерівності тощо).

Незалежно від мети побудови, модель є одним із засобів, який полегшує сприймання та осмислення змісту задачі, виявлення найважливіших елементів, залежностей тощо. Крім того, самостійно виконаний учнями короткий запис умови дає можливість учителю з'ясувати, чи правильно вони розуміють залежності між відомими та невідомими величинами, чи всі зв'язки виявлено тощо.

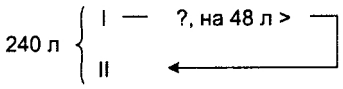
Зауважимо, що короткий запис умови не можна зводити до простого переписування тексту за допомогою скорочення кожного слова.

Найчастіше короткий запис умови задачі роблять у вигляді схеми, таблиці, діаграми чи графічної ілюстрації.

Схематичний запис — це спрощений запис умови задачі (з виділенням окремих логічних її частин) у наочній і зручній для сприймання формі, зокрема у вигляді: 1) числових даних і запитання задачі; 2) числових даних з коротким поясненням їх змісту.

Задача 5. У двох діжках 240 л води. Скільки води у першій діжці, якщо у ній на 48 л більше, ніж у другій діжці?

Схематичний запис



Табличний запис умови зручно використовувати для задач, в яких задано співвідношення — зв'язок між значеннями різних величин, або коли задачі мають сюжет (рух об'єктів і т. ін.), або є спільна робота (задачі на процеси) тощо.

Задача 6. Екскурсійний пароплав пройшов відстань по річці між двома пристанями *A* і *B* довжиною 360 км та повернувся назад, витративши на весь шлях 40 год 30 хв. Швидкість течії річки 2 км/год. З якою швидкістю рухався б пароплав по озеру?

Табличний запис

Рух	**Швидкість *v*, км/год**	**Час *t*, год**	**Відстань *S*, км**
За течією	?, $v_{вл} + v_т$	?	360
Проти течії	?, $v_{вл} - v_т$	?	360

Структурна презентаційна модель задачі є стрічковою діаграмою. Квадрати відповідають відомим, кола — невідомим значенням величин. Шукане невідоме можна позначити трикутником або колом, у середині якого є знак запитання.

Аналіз задачі для побудови презентаційної структурної моделі можна зробити так.

У задачі йдеться про рух в середовищі (рух за течією і проти течії). Про значення величин, що описують ці види руху можна сказати таке:

1) відстань між пристанями — відома (360 км);

2) власна швидкість пароплава — невідома;

3) швидкість течії річки — відома (2 км/год);

4) швидкість руху пароплава за течією — невідома;

5) швидкість руху пароплава проти течії — невідома;

6) час руху за течією — невідомий;

7) час руху проти течії — невідомий;

8) загальний час руху за течією та проти течії — відомий (40,5 год).

Між цими значеннями величин є такі співвідношення:

1) 1-е, 4-е і 6-е значення пов'язані співвідношенням — залежністю між відстанню, швидкістю руху та часом;

2) 1-е, 5-е і 7-е значення аналогічно пов'язані співвідношенням — залежністю між відстанню, швидкістю руху та часом;

3) 2-е, 3-е і 4-е значення пов'язані співвідношенням складання частин у ціле (додавання);

4) 2-е, 3-е і 7-е значення пов'язані співвідношенням віднімання від цілого його частини;

5) 6-е, 7-е і 8-е значення пов'язані співвідношенням складання частин у ціле (додавання).

Врахувавши, що деякі значення величин входять у різні співвідношення, можна скласти структурну модель задачі (рис. 1).

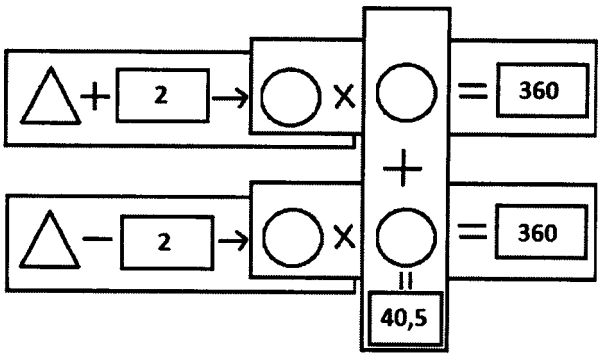


Рис. 1

Графічний запис сприяє кращому розумінню умови задачі та усвідомленню залежностей між даними і шуканими величинами, оскільки активізує зорове сприймання інформації.

Задача 7. За три дні на овочеву базу завезли 32,7 т картоплі. Першого дня завезли на 4,7 т картоплі більше, ніж другого, і на 2,3 т менше, ніж третього дня. По скільки тон картоплі завозили на базу кожного дня?

Графічний запис умови може бути такий (рис. 2).

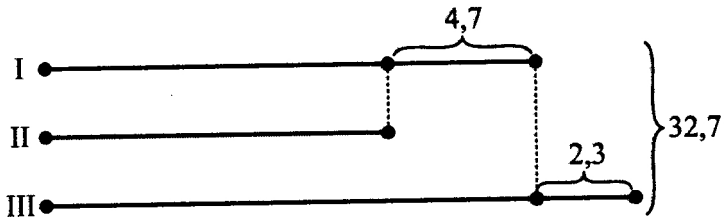


Рис. 2

Проте не слід надто захоплюватися графічними ілюстраціями. Вони не потрібні під час розв'язування нескладних задач або у випадках, коли задача належить до добре відомого учням виду й учні не тільки знайомі з видовими особливостями задачі, але й мають навички щодо її розв'язування з використанням алгебраїчного методу.

Графічну ілюстрацію не варто виконувати й тоді, коли її важко зробити, а процес її виконання є тривалим за часом і може навіть заплутати учня, а не допомогти йому в роз'ясненні зв'язків між величинами в умові задачі.

Зауважимо, що графічний запис умови задачі не можна ототожнювати з графічним методом розв'язування задач.

У деяких випадках можливе поєднання табличного запису умови задачі з рисунками чи ілюстраціями з метою конкретизації чи додаткового роз'яснення змісту задачі.

Для задач на рух іноді використовують *графічно-ілюстративні* презентаційні схеми, які добре відомі учням ще з початкової школи. Ці схеми використовувалися учнями й у 5—6-х класах під час розв'язування задач на різні види руху (рис. 3, 4).

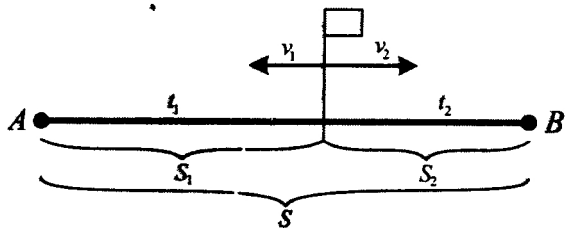


Рис. 3

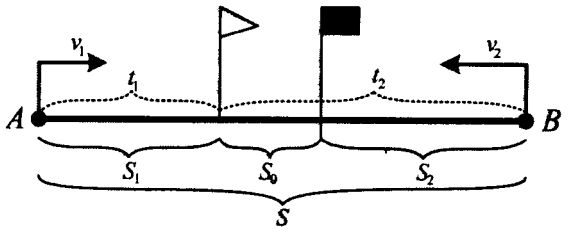


Рис. 4

Також схеми можуть стати у пригоді, коли потрібно «розбити» задачу на логічні частини (ситуації), які легко можна було б виразити за допомогою рівнянь, систем рівнянь чи нерівностей.

Задача 8. Пішохід, велосипедист і мотоцикліст рухались по шосе в одному напрямку кожний зі своєю постійною швидкістю. У той момент, коли пішохід і велосипедист були в селищі B, мотоцикліст відставав від них на 6 км. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, пішохід відстав від них на 3 км. На скільки кілометрів велосипедист обігнав пішохода в той момент, коли пішохід наздогнав мотоцикліста?

Розв'язання

У задачі нічого не сказано про швидкості пішохода, велосипедиста і мотоцикліста, крім того, що вони постійні й направлені в один і той самий бік. Будемо вважати, що всі об'єкти рухаються зліва направо. Цей напрям вкажемо стрілками на відповідних графічних схемах.

Введемо позначення: нехай швидкість пішохода k км/год, швидкість велосипедиста bk км/год, швидкість мотоцикліста ak км/год (a, b, k – деякі сталі, окрім того, a і b показують у скільки разів швидкості велосипедиста і мотоцикліста більші за швидкість пішохода).

Проаналізуємо тепер три випадки, про які йдеться в задачі.

Випадок 1. Пішохід і велосипедист перебувають в одній точці B. Мотоцикліст відстає від них на 6 км (тобто його можна помістити в точку A, яка знаходиться лівіше точки B), $AB = 6$ км.

Випадок 2. Мотоцикліст наздогнав пішохода в деякій точці, тобто вони обидва перемістились в точку C, яка лежить правіше точки B.

У цей момент велосипедист проїхав далі й знаходиться на деякій відстані від них у точці D.

Відстань BC і CD невідомі. Позначимо їх через x і y : $BC = x$, $CD = y$ (рис. 5).

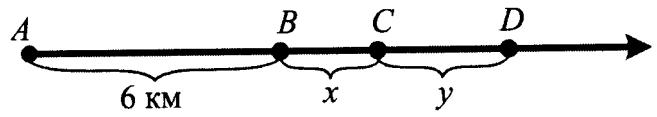


Рис. 5

Схема на рис. 5 дає можливість встановити такі зв'язки між величинами x, y і k, ak, bk:

1) якщо пішохід пройшов x км зі швидкістю k км/год, то це означає, що на шлях від пункту B до C він витратив $\frac{x}{k}$ год;

2) такий самий час був у дорозі й мотоцикліст, який подолав відстань від B до C, і ще шлях від A до B, тобто $\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}$;

3) такий самий час був у дорозі і велосипедист, який перемістився з точки B до D, тобто $\frac{x}{k} = \frac{x+y}{bk}$.

Отже , отримали рівності

$$\frac{x}{k} = \frac{x+6}{ak}, \quad (1) \qquad \frac{x}{k} = \frac{x+y}{bk}. \quad (2)$$

Виразимо x в кожній із рівностей

$$x = \frac{6}{a-1}, \quad (1^*) \qquad x = \frac{y}{b-1}. \quad (2^*)$$

Прирівняємо праві частини виразів (1*) і (2*): $\frac{6}{a-1} = \frac{y}{b-1}$.

Виразимо з отриманої рівності y:

$$y = \frac{6(b-1)}{a-1}. \qquad (3)$$

Випадок 3. Мотоцикліст наздогнав велосипедиста в деякій точці, яка знаходиться правіше D. Назвемо її точкою E. У цей час пішохід теж проїхав уперед до деякої точки F. З умови відстань від F до E дорівнює 3 км. Отже, відомо, що $FE = 3$, але про довжину відрізка BF нічого не сказано. Позначимо цю величину через z (рис. 6).

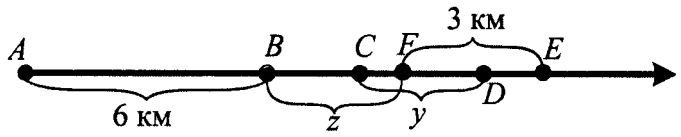


Рис. 6

Аналізуючи рис. 6, доходимо висновків:

1) від пункту A до пункту E мотоцикліст рухався зі швидкістю ak км/год і подолав відстань $6 + z + 3 = 9 + z$ (км), отже, перебував у дорозі $\frac{9+z}{ak}$ год;

2) за той самий час пішохід пройшов z км зі швидкістю k км/год, тобто $\frac{9+z}{ak} = \frac{z}{k}$, звідси

$$z = \frac{9+z}{a}; \qquad (4)$$

3) за той самий час велосипедист проїхав відстань від пункту B до E, тобто $(z + 3)$ км зі швидкістю bk км/год, тобто $\frac{3+z}{bk} = \frac{z}{k}$, або

$$z = \frac{3+z}{b}. \qquad (5)$$

З рівностей (4) і (5) виразимо a і b через z:

$$a = 1 + \frac{9}{z} \text{ і } b = 1 + \frac{3}{z}.$$

Підставимо отримані значення a і b у рівність (3) і отримаємо шукане значення y:

$$y=\frac{6(b-1)}{a-1}=\frac{6\left(1+\frac{3}{z}-1\right)}{1+\frac{9}{z}-1}=\frac{\frac{18}{z}}{\frac{9}{z}}=2.$$

Отже, велосипедист обігнав пішохода на 2 км в той момент, коли мотоцикліст наздогнав пішохода.

Наведений приклад розв'язування олімпіадної задачі про ситуації, що змінюються, наочно продемонстрував можливості графічних схем.

Отже, можна зробити висновок, що єдиних правил-орієнтирів щодо вибору тієї чи іншої форми короткого запису не можна запропонувати, оскільки на такий вибір впливає і фабула задачі, і складність її математичної структури, і попередній досвід учнів щодо використання певних схем до розв'язування окремих типів задач тощо.

Зауважимо також, що коротку умову до тексту задачі слід писати не тільки в молодших класах, коли учні задачі розв'язують за допомогою арифметичних способів. Схематичні зображення задач бувають дуже корисними і для учнів 7—9-х класів, оскільки дають можливість глибше проникнути в задачу, краще її зрозуміти. Коротку умову також слід записувати, коли важко виділити із тексту задачі речення, що розкривають функціональні залежності між величинами, чи коли виникають ускладнення щодо обрання невідомого.

Якщо всі терміни і залежності, описані в тексті задачі, не потребують додаткових уточнень і роз'яснень, то переходять до складання алгебраїчної моделі.

1.3. СКЛАДАННЯ РІВНЯННЯ ЗА УМОВОЮ ЗАДАЧІ ТА ПОШУК РАЦІОНАЛЬНИХ СПОСОБІВ ОБРАННЯ НЕВІДОМОГО

1.3.1. Схеми пошуку рівняння до задачі.

Задачі, які пропонуються учням під час їхніх перших кроків зі складання рівняння, добираються так, щоб одразу було зрозуміло, як слід обрати невідоме. Крім того, прозорим є і сам хід процесу складання рівняння (порядок пошуку співвідношень).

Наприклад, це можуть бути задачі, які розв'язуються арифметичним способом зворотних міркувань. Для задач такого типу нескладно подати процес складання рівняння у вигляді таблиці переходу від висловлювань, сформульованих українською мовою, до висловлювань мовою алгебри.

Задача 9. Учень задумав число, яке спочатку помножив на 5, а потім отриманий добуток зменшив на 12 і отримав задумане число. Яке число задумав учень?

Розв'язання

Позначимо невідоме задумане число через x і для перекладу з української мови на мову алгебри використаємо таблицю (табл. 4).

Таблиця 4

Кроки	Українською мовою	Мовою алгебри
1	Учень задумав число	x
2	Спочатку помножив на 5	$5x$
3	Отриманий добуток зменшив на 12	$5x - 12$
4	Отримав задумане число	$5x - 12 = x$

Як бачимо, процес складання рівняння за даним текстом є практично «дослівним» і не викликає особливих труднощів в учнів.

Наведемо інші зразки можливих міркувань під час складання рівняння за умовою задачі.

Задача 10. Нині мати старша від сина у 8 раз, а через 10 років вона буде старшою лише втричі. Скільки років сину нині?

Розв'язання

1 спосіб. Нехай вік сина нині x років, тоді вік матері буде $8x$ років, оскільки вона у 8 разів старша за сина.

Через 10 років вік сина буде $(x + 10)$ років, а вік матері $(8x + 10)$ років, що за умовою задачі втроє більший за вік сина, тобто дорівнює потроєному віку сина $3(x + 10)$ років. Складаємо рівняння.

$$8x + 10 = 3(x + 10).$$

2 спосіб запису міркувань для складання рівняння можна зробити у вигляді таблиці аналогічно до попередньої задачі (табл. 5).

Таблиця 5

Кроки	Українською мовою	Мовою алгебри
1	Нині вік сина невідомий	x
2	Вік матері у 8 разів більший	$8x$
3	Через 10 років вік сина	$x + 10$
4	Через 10 років вік матері	$8x + 10$
5	Вік матері дорівнює потроєному віку сина	$8x + 10 = 3(x + 10)$

3 спосіб. Позначимо нинішній вік сина через x років, тоді залежності між величинами можна представити у вигляді такої таблиці (табл. 6).

Таблиця 6

	Кількість років зараз	**Вік через 10 років**	**Залежність для складання рівняння**
Вік сина	x років	$(x + 10)$ років	
Вік матері	$8x$ років	$(8x + 10)$ років	у 3 рази старша

Заповнення такої таблиці проводиться поступово з обов'язковим усним коментарем усіх записів. Це необхідно робити для уникнення формального ставлення учнів до заповнення таких таблиць і для більшого осмислення ними зв'язків між величинами у текстах задач та залежності, яка обирається для складання рівняння.

Якщо задача має добре відомий учням сюжет без ускладненої структури, то іноді вчителі дозволяють учням не створювати презентаційні моделі, а одразу (після усного аналізу умови задачі) складати рівняння. Пошук учнями відповідної алгебраїчної моделі вчитель може супроводжувати направляючими запитаннями.

Задача 11. На весь шлях туди і назад із пункту A до B вершник витратив 14,5 год. Від A до B він рухався зі швидкістю 30 км/год, а назад повертався зі швидкістю 28 км/год. Знайдіть відстань між A і B.

Розв'язання

Учитель. Що приймемо за невідоме? Чому?

Очікувана відповідь. За x км приймемо відстань від A до B, бо відстань потрібно знайти.

Учитель. Знаючи відстань між A і B — x км і швидкість руху вершника від A до B 30 км/год та у зворотному напрямку від B до A — 28 км/год, чи можемо знайти час руху вершника в обох випадках?

Очікувана відповідь. Час руху вершника від A до B — $\frac{x}{30}$ год, а від B до A — $\frac{x}{28}$ год.

Учитель. Що відомо про загальний час руху вершника в обидва напрями, тобто про суму $\frac{x}{30}$ год і $\frac{x}{28}$ год?

Очікувана відповідь. За умовою весь час руху в обидва напрямки становить 14,5 год. Тобто сума $\frac{x}{30}$ год і $\frac{x}{28}$ год дорівнює 14,5 год.

Учитель. Складаємо рівняння $\frac{x}{30}+\frac{x}{28}=14{,}5$.

Складання рівняння у цій задачі проведено за такими кроками:

1) спочатку з'ясували, яку з невідомих величин слід прийняти як основну невідому (зауважимо, що, як правило, намагаються за основну невідому прийняти шукане значення деякої величини, тобто те, яке вимагається знайти запитанням задачі), і позначили цю невідому x (або іншою буквою);

2) виразили всі інші невідомі величини, про які йдеться в змісті задачі, через невідоме x і дані;

3) ґрунтуючись на залежності між відомими і невідомими величинами, склали рівняння.

Очевидно, що в залежності від виконання першого пункту наведеної вище схеми, тобто від того, яку з невідомих величин прийняли за основну невідому, залежить вигляд рівняння (див. 1.3.2).

У методиці навчання алгебри відомі дві евристичні схеми пошуку рівняння до задачі. Описані вище кроки є кроками схеми Шапошнікова — Вальцева. Цю схему використовують до розв'язування нескладних задач. Стисло її можна записати у такому вигляді:

1) позначити як x шукану величину (або одну із шуканих);

2) виразити через x інші величини;

3) скласти рівняння.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складніших задач. Вона забезпечує цілеспрямований вибір невідомої та вираження через неї потрібних величин, оскільки ставить перед учнем вимогу: відшукати у змісті задачі залежності, які дали б змогу встановити рівність між однойменними величинами.

Друга схема пошуку рівняння носить ім'я С. С. Бронштейна і представляє собою такі кроки:

1) аналіз залежностей між величинами (короткий запис умови, графічні схеми, таблиці) і з'ясування, числові значення яких величин можна зрівняти.

2) вибір невідомої величини (через яку зручно виразити величини, які будемо зрівнювати) і позначення її через x.

3) вираження через обране невідоме x і дані значень величин, які входять в обрані для зрівнювання залежності.

4) складання рівняння.

Розглянемо застосування цієї схеми на прикладі розв'язування наступної задачі.

Задача 12. Від пункту A до B велосипедист їхав зі швидкістю 16 км/год. А рухаючись у зворотному напрямку, він зменшив швидкість на 4 км, і тому на подолання всього шляху йому знадобилося на одну годину більше, ніж на шлях з A до B. Знайти відстань між пунктами A і B.

Розв'язання

1. Аналіз залежностей.

У змісті задачі дано різниці часу і швидкостей. Оскільки можна однією дією знайти швидкість, із якою рухався велосипедист у зворотному напрямку (16 – 4 = 12 (км/год)), тому вважаємо, що в задачі задано тільки одну основну залежність — різницю між часом руху велосипедиста від A до B і часом руху від B до A, а саме

(час від B до A) – (час від A до B) = 1 год, (1)

або, використовуючи загальноприйняті скорочені позначення,

$$t_{BA} - t_{AB} = 1.$$

2. Вибір невідомого.

Очевидно, що потрібно прийняти відстань між пунктами A і B за x км.

3. Вираження величин, що входять у залежність (1) через дані та x.

За умовою задачі в залежності (1) йдеться про час руху від A до B і від B до A, знаходимо їх:

час руху від A до B — $\frac{x}{16}$ годин; (2)

час руху від B до A — $\frac{x}{12}$ годин. (3)

4. Складання рівняння.

Отримані вирази (2) і (3) підставляємо в рівність (1) і отримуємо рівняння

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 1.$$

Задача 13. Два екскаватори вирили котлован для басейну за 24 дні. За скільки днів кожен екскаватор міг би вирити котлован, працюючи окремо, якщо перший екскаватор може виконати всю роботу в 1,5 рази швидше, ніж другий.

Розв'язання

1. Аналіз залежностей.

У змісті задачі є дві залежності:

1) залежність між часом, який потрібен кожному екскаватору для виконання роботи окремо —

$$\frac{\text{час II}}{\text{час I}} = 1{,}5\,; \qquad (1)$$

2) залежність, що виражає умову про повне виконання роботи двома екскаваторами, які працювали разом —

(робота I-го за 24 дні) + (робота II-го за 24 дні) = = (вся робота), (2)

або $A_1 + A_2 = 1$.

Приймемо залежність (2) за умову, за якою можна скласти рівняння.

2. Вибір невідомого.

Нехай час, необхідний екскаватору I для виконання усієї роботи, x год, тоді час, необхідний для екскаватора II, — $1{,}5x$ год.

3. Вираження величин, що входять у залежність (2) через дані та x.

Приймемо всю роботу, яку потрібно виконати, за 1 (якщо в тексті задачі не задано числове значення обсягу повної роботи, то можна або надати йому довільне значення — прийом припущення, або взяти всю роботу за одиницю — прийом умовної одиниці), тоді екскаватор I за 1 день виконує $\frac{1}{x}$ роботи, а екскаватор II — $\frac{1}{1{,}5x} = \frac{2}{3x}$ роботи. За 24 дні екскаватор I виконає $\frac{24}{x}$ роботи (3), а екскаватор II — $\frac{48}{3x} = \frac{16}{x}$ роботи (4).

4. Складання рівняння.

Отримані вирази (3) і (4) підставляємо в рівність (2) і матимемо рівняння

$$\frac{24}{x} + \frac{16}{x} = 1.$$

1.3.2. Раціональні способи обрання невідомої.

Порівнюючи процеси складання рівнянь з використанням вище вказаних двох схем, можна зауважити, що вибір основної невідомої величини є важливим.

Якщо за основну невідому приймають шукану, то після завершення розв'язування рівняння (тобто відповідної алгебраїчної моделі) одразу можна записувати відповідь текстової задачі. Проте часто таке обрання основної невідомої приводить до рівнянь ускладненого виду. Є значна кількість задач в шкільних підручниках, де за невідоме x потрібно брати допоміжну величину. Розглянемо приклади.

Задача 14. Із двох міст A та B, відстань між якими 360 км виходять назустріч один одному два потяги. Якщо другий потяг вийде на 1,5 год раніше, ніж перший, то потяги зустрінуться на середині шляху. Якщо потяги вийдуть із міст A і B одночасно, то через 5 год відстань між ними буде дорівнювати 90 км. Знайти швидкість кожного потягу.

Розв'язання

Крок 1. Аналіз залежностей.

1) Якщо потяги до зустрічі пройшли по 360 : 2 =180 км, то різниця між їхнім часом руху становить 1,5 год.

$$t_2 - t_1 = 1{,}5 \text{ (год)}. \qquad (1)$$

Якщо потяги виходять одночасно і перебувають у дорозі 5 год, то

$$S_1 + S_2 = 360 - 90 = 270 \text{ (км)}. \qquad (2)$$

Будемо вважати цю залежність базовою для складання рівняння.

Крок 2. Вибір невідомого.

Варіант 1. Приймемо швидкість руху потягу I за x км/год, тоді для вираження швидкості потягу II використаємо залежність (1).

Час, який витратив потяг I на проходження відстані 180 км, дорівнює

$$\frac{180}{x} \text{ год},$$

а потяг II витратив на цей шлях на 1,5 год більше, тобто

$$\frac{180}{x} + \frac{3}{2} \text{ (год)}.$$

Отже, потяг II рухався зі швидкістю

$$\frac{180}{\frac{180}{x} + \frac{3}{2}} = \frac{180 \cdot 2x}{360 + 3x} = \frac{120x}{x + 120} \text{ (км/год)}.$$

Крок 3. Вираження величин, що входять у залежність (2).

Для залежності (2) потрібно знайти відстані, які потяги подолали за 5 год. Відповідно вони будуть дорівнювати $5x$ км і $5 \cdot \frac{120x}{x+120}$ км.

Крок 4. Складаємо рівняння.

Використовуємо залежність (2):

$$5x + 5 \cdot \frac{120x}{x+120} = 270 \text{ або } 5x + \frac{600x}{x+120} = 270.$$

Очевидно, що складність у вираженні швидкості потягу II через швидкість потягу I виникла тому, що в умові немає прямої залежності між цими швидкостями (залежність задано опосередковано).

Розглянемо інший варіант вибору невідомого. Міркування на першому кроці аналогічні.

Крок 2. Вибір невідомого.

Варіант 2. Приймемо час, потрібний I для проходження 180 км, за x год, тоді потяг II на проходження цієї самої відстані витратить $(x + 1{,}5)$ год.

Отже, швидкість потягу I дорівнює

$$\frac{180}{x} \text{ км/год},$$

а швидкість потягу II —

$$\frac{180}{x+1{,}5} \text{ км/год}.$$

Крок 3. Вираження величин, що входять у залежність (2).

За 5 год потяг I подолав відстань

$$\frac{180}{x} \cdot 5 = \frac{900}{x} \text{ км},$$

а потяг II —

$$\frac{180}{x+1{,}5} \cdot 5 = \frac{900}{x+1{,}5} \text{ км}.$$

Крок 4. Складаємо рівняння.

$$\frac{900}{x} + \frac{900}{x+1{,}5} = 270 .$$

Розглянемо ще один приклад різних способів обрання основної невідомої.

Задача 15. Із двох аеродромів одночасно назустріч один одному вилітають гелікоптер і тренувальний літак. До зустрічі гелікоптер пролетів на 100 км менше, ніж літак. Після зустрічі решту шляху літак пролетів за 1 год 20 хв, гелікоптер за 3 год. Знайти відстань між аеродромами.

Розв'язання

Крок 1. Аналіз залежностей.

Нехай B — аеродром, з якого вилетів гелікоптер, A — аеродром, з якого вилетів літак (рис 7).

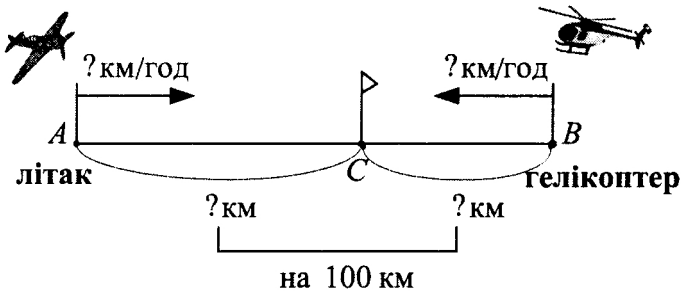


Рис. 7

В умові задачі є дві залежності: одна з них очевидна, інша — прихована, а саме:

1) **(шлях літака до зустрічі) – (шлях гелікоптера до зустрічі) = = 100 км,**

або $AC - BC = 100$ км (1);

2) оскільки гелікоптер і літак вилетіли одночасно, то до їхньої зустрічі час польоту літака дорівнює часу польоту гелікоптера (2).

Крок 2. Вибір основного невідомого.

Варіант 1. Нехай відстань між аеродромами A і B — x км (цю відстань потрібно знайти за умовою задачі).

Крок 3. Вираження величин, що входять у залежність (2).

Щоб знайти для (2) час польоту до зустрічі літака і гелікоптера, потрібно знати їхні швидкості й відстані, які вони подолали.

Для знаходження відстаней використаємо залежності $AC - BC =$ $= 100$ км і $AC + BC = x$, звідси $AC = \frac{x+100}{2}$ (км), $BC = \frac{x-100}{2}$ (км) (рис. 8).

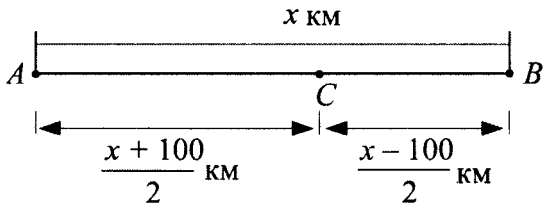


Рис. 8

За умовою відомий час руху літака після зустрічі, тобто він пролетів відстань $BC = \frac{x-100}{2}$ (км) за $1\frac{1}{3}$ год, а гелікоптер відстань $AC = \frac{x+100}{2}$ (км) за 3 год.

Отже, швидкість польоту літака буде

$$v_л = \frac{x-100}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3(x-100)}{8} \text{ км/год,}$$

а гелікоптера — $v_г = \frac{x+100}{6}$ км/год.

Знайдемо час польоту до зустрічі літака:

$$\frac{x+100}{2} : \frac{3(x-100)}{8} = \frac{4(x+100)}{3(x-100)} \text{ (год).}$$

Знайдемо час польоту гелікоптера:

$$\frac{x-100}{2} : \frac{x+100}{6} = \frac{3(x-100)}{x+100} \text{ (год).}$$

Крок 4. Складаємо рівняння.

$$\frac{4(x+100)}{3(x-100)} = \frac{3(x-100)}{x+100}.$$

Звідси

$$4(x+100)^2 = 9(x-100)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} 2(x+100) = 3(x-100); \\ 2(x+100) = -3(x-100). \end{array}\right.$$

З першого рівняння сукупності отримуємо $x = 500$ км. Друге рівняння не підходить за смислом задачі (числа $x + 100$ і $x - 100$ мають бути додатними).

Перевіркою переконуємося, що $x = 500$ км задовольняє умову задачі.

Зауваження. Найважчим моментом міркувань за цим варіантом є пошук вираження через x відстаней, які пролетіли до зустрічі літак і гелікоптер.

Варіант 2 вибору основного невідомого. Нехай відстань $BC = x$ км, тоді $AC = (x + 100)$ км, $AB = (2x + 100)$ км (рис. 9).

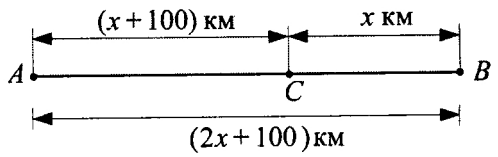


Рис. 9

Крок 3. Проводячи аналогічні до попереднього розв'язування міркування, маємо:

час польоту літака після зустрічі — $1\frac{1}{3}$ год, його швидкість — $v_л = \frac{x}{1\frac{1}{3}} = \frac{3x}{4}$ км/год;

час польоту гелікоптера після зустрічі — 3 год, його швидкість — $v_г = \frac{x+100}{3}$ км/год;

час польоту літака до зустрічі — $t_л = \frac{x+100}{\frac{3x}{4}} = \frac{4(x+100)}{3x}$ год;

час польоту гелікоптера до зустрічі: $t_г = \frac{x}{\frac{x+100}{3}} = \frac{3x}{x+100}$ год.

Крок 4. Складаємо рівняння.

$\frac{4(x+100)}{3x} = \frac{3x}{x+100}$, $4(x+100)^2 = 9x^2$, $x_1 = 200, x_2 < 0$.

За смислом задачі підходить тільки корінь x_1. Звідси $AB = 500$ км.

Варіант 3 вибору основного невідомого. Оскільки літак і гелікоптер із аеродромів вилетіли одночасно, то час їхнього польоту до зустрічі однаковий, позначимо його через x год.

Позначимо на схемі час польоту до зустрічі й час для завершення польоту: вгорі для літака, внизу для гелікоптера (рис 10).

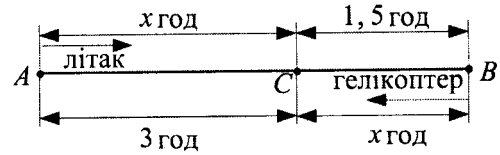


Рис. 10

Оскільки літак і гелікоптер летять із постійною швидкістю, то подолана ними відстань буде прямо пропорційною витраченому на її подолання часу. Маємо залежності:

$$\text{для літака } \frac{AC}{CB} = \frac{x}{1\frac{1}{3}}, \quad (1),$$

$$\text{для гелікоптера } \frac{AC}{CB} = \frac{3}{x}. \quad (2)$$

Прирівнюючи (1) і (2), складаємо рівняння. Маємо: $\frac{x}{1\frac{1}{3}} = \frac{3}{x}$.

Звідси $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — не підходить за смислом задачі.

Отже, гелікоптер відстань CB пролетів за 2 год, а відстань AC — за 3 год (відомо з умови).

Оскільки відстань від A до C більша на 100 км за відстань від C до B і на її проходження витрачено на 3 – 2 = 1 (год) більше, то робимо висновок, що швидкість гелікоптера 100 км/год, а відстань від A до B: $100 \cdot 5 = 500$ (км).

Зауважимо, що хоча третій варіант обрання невідомого дав нам можливість створити найпростіше рівняння, проте для значної частини учнів він є складним з огляду на те, що під час складання рівняння ми не використовуємо всі дані з умови (різниця подоланих відстаней 100 км) і залежності. Радимо цей спосіб пропонувати для самостійного опрацювання учням, які цікавляться математикою.

1.3.3. Як допомогти учням навчитися складати рівняння за змістом задачі?

Це запитання турбує багатьох вчителів, і шкільна практика має на нього різноманітні відповіді. Звичайно, потрібно постійно розв'язувати текстові задачі з розширеним коментарем кожного кроку, кожного етапу. Крім того, сучасні вчителі успішно використовують такі вправи.

Вправа 1. Одне з чисел прийняли за x. Використовуючи наведені нижче схеми, складіть вираз, який потрібно записати замість знака «?».

а) I – x ←
II – ? на 12 більше (менше) ┘

б) I – x на 12 більше (менше) ┐
II – ? ←

в) I – x ←
II – ? у 5 раз більше (менше) ┘

г) I – x у 5 раз більше (менше) ┐
II – ? ←

Вправа 2. 1) За даними схемами складіть рівняння. 2) Придумайте текст задач, для яких складені вами рівняння будуть розв'язуючими моделями.

а) I – y
II – $5y$ } 35

б) I – $x+5$
II – x } 25

в) I – x ←
II – $x+32$ у 5 раз більше ┘

I – x у 5 раз менше ┐
II – $x+32$ ←

г) I – x на 32 менше ┐
II – $5x$ ←

I – x ←
II – $5x$ на 32 більше ┘

Вправа 3. Порівняйте схеми а) і б), в) і г). Прокоментуйте спосіб складання рівнянь за цими схемами. Придумайте текст задачі за даними схемами.

а) I – x
II – $x+6$ } 70

$x+(x+6)=70$

б) I – $x-6$
II – x } 70

$(x-6)+x=70$

в) I – x ←
II – $70-x$ на 6 більше ┘

$x+6=70-x$

г) I – $70-x$ на 6 менше ┐
II – x ←

$70-x+6=x$

Вправа 4. У шкільній бібліотеці на двох поличках стоять 70 книжок. Скільки книжок стоїть на другій полиці, якщо відомо, що їх у 6 разів більше, ніж на першій?

Завдання. Проаналізуйте схематичні записи змісту задачі, охарактеризуйте величини і зв'язки між ними, що зустрічаються в змісті задачі. Встановіть, яка залежність (співвідношення між величинами) стала базовою для складання рівняння. Яке з рівнянь вам було б простіше скласти? Чому? Яке з рівнянь для вас найлегше розв'язати? Чому?

а) I – x
II – $6x$ } 70

$x+6x=70$

б) I – $x:6$
II – x } 70

$\frac{x}{6}+x=70$

в) I – x ←
II – $70-x$ у 6 раз більше ┘ } 70

$6x=70-x$

г) I – $70-x$ у 6 раз менше ┐
II – x ← } 70

$(70-x)\cdot 6=x$

Для кращого запам'ятовування учнями залежностей між величинами, що характеризують різні сюжети (різні види руху, одноосібна та спільна робота, задачі на суміші й сплави, задачі на відсоткові залежності тощо), та розвитку учнівських умінь виражати одні величини через інші доречно пропонувати завдання, сформульовані в тестовій формі (обрання відповіді за змістом задачі)

Вправа 5. Прочитайте умову задачі. Серед наведених нижче відповідей оберіть правильну для неї.

1. Яким співвідношенням пов'язані цифри a і b двоцифрового числа (a — цифра десятків), якщо в результаті ділення цього числа на суму його цифр матимемо частку 4 і остачу 3?

А. $ab = 4(a+b)+3$. Б. $ab = 3(a+b)+4$.

В. $10a+b = 3(a+b)+4$. Г. $10a+b = 4(a+b)+3$.

2. Турист пройшов 3 км по шосе і 6 км польовою дорогою. По шосе він ішов зі швидкістю x км/год, а польовою дорогою — на 2 км/год меншою. За який час турист пройшов увесь шлях?

А. За $\left(\frac{3}{x-2}+\frac{6}{x}\right)$ год. Б. За $\left(\frac{x-2}{6}+\frac{x}{3}\right)$ год.

В. За $\left(\frac{x-2}{3}+\frac{x}{6}\right)$ год. Г. За $\left(\frac{6}{x-2}+\frac{3}{x}\right)$ год.

3. Катер пройшов 18 км за течією річки, а потім — 20 км проти течії. За який час він пройшов увесь шлях, якщо власна швидкість катера 20 км/год, а швидкість течії — x км/год?

А. За $\left(\frac{18}{20+x}+\frac{20}{20-x}\right)$ год. Б. За $\left(\frac{20+x}{18}+\frac{20-x}{20}\right)$ год.

В. За $\left(\frac{18}{20-x}+\frac{20}{20+x}\right)$ год. Г. За $\left(18(20+x)+20(20-x)\right)$ год.

4. Спочатку катер ішов a км за течією річки, а потім удвічі більшу відстань — по озеру, в яке впадає річка. Власна швидкість катера v км/год, швидкість течії річки — c км/год. Катер на весь рейс витратив ... .

А. $\left(\frac{a}{v-c}+\frac{2a}{v}\right)$ год. Б. $\left(\frac{a}{v+c}+\frac{2a}{v-c}\right)$ год.

В. $\left(\frac{a}{v-c}+\frac{2a}{v+c}\right)$ год. Г. $\left(\frac{a}{v+c}+\frac{2a}{v}\right)$ год.

5. Є два сплави міді і цинку масою x кг і y кг із відсотковим вмістом міді p % і q % відповідно. Сплави переплавили. Маса цинку в новому сплаві дорівнює ... .

А. $\left(\frac{xp}{100}+y\left(1-\frac{q}{100}\right)\right)$ кг. Б. $\left(x\left(1-\frac{p}{100}\right)+\frac{yq}{100}\right)$ кг.

В. $\frac{x(1-p)+y(1-q)}{100}$ кг. Г. $\left(x\left(1-\frac{p}{100}\right)+y\left(1-\frac{q}{100}\right)\right)$ кг.

Наведені тестові завдання можна пропонувати як у паперовому варіанті, так із використанням мультимедійної дошки або індивідуальних комп'ютерів.

Згодом наведені вище вправи можна ускладнити і дати їх у формі завдань, які пропонуються на ЗНО.

Вправа 6. У лівому стовпчику названо величини, які потрібно знайти, а у правому — у довільному порядку наведено буквені вирази для цих величин. Сполучіть відрізками величини і буквені вирази, що їм відповідають.

(*Зауважимо, що кількість виразів у другому стовпчику повинна бути більшою за кількість заданих словесним описом величин, або слід пропонувати такі варіанти, щоб одному словесному формулюванню відповідало два вирази.*)

1. З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали велосипедист і мотоцикліст. Швидкість велосипедиста x км/год. Швидкість мотоцикліста більша за швидкість велосипедиста на 30 км/год. Відстань між містами A і B 120 км.

1.	Час руху велосипедиста з A до B (год).		А.	$\frac{120}{x}-\frac{120}{2x+30}$.
2.	Час руху мотоцикліста з B до A (год).		Б.	$\frac{120x}{2x+30}$.
3.	Час руху велосипедиста і мотоцикліста до їхньої зустрічі (год).		В.	$\frac{120}{x}:\frac{120}{x+30}$.
4.	Час руху велосипедиста до міста B після зустрічі з мотоциклістом (год).		Г.	$\frac{120}{x+30}$.
5.	Відстань, яку проїхав велосипедист до зустрічі з мотоциклістом (км).		Д.	$\frac{120}{x}:\frac{120}{x+30}$.
6.	Відстань, яку проїхав мотоцикліст до міста A від місця зустрічі з велосипедистом (км).		Е.	$\frac{120}{2x+30}$.
7.	Відношення часу руху велосипедиста до часу руху мотоцикліста.		Ж.	$\frac{120}{x}$.

8.	Відстань, яку проїхав велосипедист після зустрічі.		З.	$120-\frac{120x}{2x+30}$.
			І.	$120-\frac{120(x+30)}{2x+30}$.

(*Слід звернути увагу учнів на те, що відстань, яку проїхав до зустрічі велосипедист, дорівнює відстані, яку після зустрічі проїхав мотоцикліст.*)

2. Два токарі за планом повинні виготовити 600 деталей. Вони працюють з постійною швидкістю, і перший за одну годину виготовляє x деталей, а другий — на 10 деталей більше, ніж перший.

1.	Час, за який, працюючи окремо, перший токар може виконати все завдання (год).		А.	$\frac{600}{2x+10}$.
2.	Час, за який, працюючи окремо, другий токар може виконати все завдання (год).		Б.	$\frac{600}{x}$.
3.	Час, за який, працюючи разом, токарі виконають усе завдання (год).		В.	$2+\frac{600-2x}{2x+10}$.
4.	Різниця часу, необхідного кожному з токарів для виконання завдання окремо (год).		Г.	$\frac{600-2x}{x+10}$.
5.	Загальний час роботи токарів, якщо кожен з них виконає половину завдання окремо (год).		Д.	$\frac{600}{x+10}$.
6.	Час роботи другого токаря, якщо він, хоч і працював менше від першого, але завершив завдання одночасно з ним, а все завдання було виконано за 2 год.		Е.	$\frac{300}{x}+\frac{300}{x+10}$.
7.	Загальний час роботи токарів, якщо перші 2 год працював тільки перший, а решту деталей обидва токарі виготовляли разом.		Ж.	$\frac{600-x}{2x+10}$.
			З.	$\frac{600}{x}-\frac{600}{x+10}$.

3. Дві друкарки мали надрукувати рукопис роману, що складався із 600 сторінок. Швидкість роботи друкарок була однаковою: перша щодня друкувала x сторінок, а друга – на 2 сторінки менше.

1.	Кількість днів, необхідна першій друкарці, щоб самостійно надрукувати весь рукопис.		А.	$\frac{300}{x}+\frac{300}{x-2}$.
2.	Кількість днів, необхідна другій друкарці, щоб самостійно надрукувати увесь рукопис.		Б.	$\frac{600}{2x-2}$.
3.	Різниця в часі, що необхідний кожній із друкарок, щоб надрукувати рукопис окремо.		В.	$\frac{600-2x}{x-2}$.
4.	Кількість днів, необхідна для спільного друкування рукопису.		Г.	$\frac{600}{x}-\frac{600}{x-2}$.
5.	Кількість днів спільної роботи, якщо кожна надрукує половину рукопису.		Д.	$\frac{600}{x}$.
6.	Кількість днів роботи другої друкарки, якщо вона сама завершувала друкувати рукопис, після того, як перша друкарка самостійно пропрацювала 2 дні.		Е.	$\frac{604-4x}{x-2}$.
7.	Кількість днів роботи другої друкарки, якщо вона сама завершувала друкувати рукопис, після того, як разом із першою друкаркою вона пропрацювала 2 дні.		Ж.	$\frac{600}{x-2}-\frac{600}{x}$.
			З.	$\frac{600}{x-2}$.

1.3.4. Розв'язування задач з невизначеними невідомими.

У наведених вище сюжетних задачах невідомі значення величин ми розподіляли на два види:

1) *шукані* — це ті невідомі, про необхідність знаходження значень яких сказано у вимозі або запитанні задачі;

2) *допоміжні (проміжні)* невідомі — це ті невідомі, значення яких не є шуканими, але їхні значення можна й треба знайти під час використання арифметичних способів розв'язування текстових задач або вони потрібні для складання рівняння, тобто для розв'язування задачі (пошуку шуканого).

Крім того, серед розглянутих нами задач були задачі (7, 12), які містили *невизначені невідомі*.

Невизначені невідомі — це ті невідомі, значення яких не визначені умовами задачі і їх не можна знайти в процесі розв'язування задачі, але без них неможливо встановити співвідношення між іншими значеннями величин (відомими і невідомими). Різницю між числом невідомих

і числом співвідношень називають *степенем невизначеності* задачі з невизначеними невідомими.

Серед способів, які використовуються під час розв'язування такого виду задач, виділимо найуживаніші:

1) заміна невизначених невідомих довільними числами (таких замін повинно бути не більше, ніж степінь невизначеності задачі);

2) спосіб уведення умовної одиниці (його ще називають способом зведення до одиниці або способом вимірювання одиницею);

3) спосіб зміни результатів дій при зміні компонентів дій (схожий на спосіб фальшивого положення, використовують частіше під час розв'язування задач арифметичними способами);

4) спосіб застосування властивостей пропорційних величин;

5) спосіб складання системи рівнянь і виключення в процесі її розв'язування невизначених невідомих (у складеній системі кількість невідомих більша від кількості рівнянь).

Задача 16 (задача Ньютона). Трава на лузі скрізь росте однаково густо і швидко. Відомо, що 70 корів з'їли всю траву на лузі за 24 дні, а 30 корів — за 60 днів. За скільки днів з'їли б усю траву на цьому лузі 20 корів?

Розв'язання

Аналіз змісту задачі. На перший погляд, задача має п'ять відомих (числові дані в тексті щодо кількості корів і кількості днів) і одне невідоме (кількість днів у третьому випадку), яке є шуканим.

Проте уважне читання тексту наштовхує на думку, що важливими для знаходження шуканого є також відомості про кількість трави, яку з'їдає кожна корова щодня; про кількість трави, яка щодня виростає на лузі; й нарешті важливо знати кількість трави, яка була спочатку на лузі.

Нехай на лузі спочатку було a одиниць трави і щодня виростало на лузі b одиниць трави.

1. Через 24 дні на лузі, за умови, що 24 дні ніхто траву не їв, її було $(a + 24b)$ одиниць (1).

2. Нехай кожна корова за день з'їдає c одиниць трави, тоді за 24 дні 70 корів з'їдять $70 \cdot 24 \cdot c$ одиниць трави (2).

Оскільки за умовою задачі всю траву, що була й виросла за 24 дні (1), з'їли 70 корів (2), то можна скласти рівняння

$$a + 24b = 70 \cdot 24 \cdot c. \qquad (3)$$

3. Аналогічно міркуючи для випадку, коли траву їдять 30 корів упродовж 60 днів, отримуємо рівняння

$$a+60b=30\cdot 60\cdot c. \qquad (4)$$

4. Аналогічно міркуючи для випадку, коли траву мають з'їсти 20 корів за невідому кількість днів, які позначимо через y, отримуємо рівняння

$$a+yb=20\cdot y\cdot c. \qquad (5)$$

5. Об'єднуємо рівняння (3), (4) і (5) у систему з чотирма невідомими, з яких три — a, b, c — невизначені невідомі.

$$\begin{cases} a+24b=70\cdot 24\cdot c, \\ a+60b=30\cdot 60\cdot c, \\ a+yb=20\cdot y\cdot c. \end{cases}$$

6. Якщо від рівняння (4) відняти рівняння (3), то матимемо $3b=120c$, отже,

$$b=\frac{10c}{3}. \qquad (6)$$

7. Замість b у рівняння (3) підставляємо $\frac{10c}{3}$ і отримуємо, що

$$a=1600c. \qquad (7)$$

8. Отримані вирази (6) і (7) підставляємо в рівняння (5), маємо:

$$1600c+\frac{10}{3}yc=200yc \qquad (8).$$

Отримуємо рівняння

$$1600+\frac{10}{3}y=200y.$$

Звідси $y=96$ днів.

Розглянемо для прикладу ще одну задачу, яка зустрічається в сучасних збірниках задач підвищеної складності.

Задача 17 (задача Льюїса Керрола, автора відомої книги «Аліса в країні чудес»). Перший кур'єр вийшов з пункту A і рухається до пункту B. Одночасно з ним назустріч йому з B вийшов другий кур'єр. Після зустрічі перший кур'єр до пункту B добирався 16 год, а другий до пункту A — 9 год. Скільки часу кожний кур'єр витратив на весь шлях від A до B (від B до A).

Розв'язання

Аналіз. Розіб'ємо текст задачі на два випадки залежно від того, про який рух йдеться. Нехай відстань між пунктами A і B дорівнює S, швидкість першого кур'єра — v_1, швидкість другого — v_2.

1. Нехай кур'єри зустрілись через t годин після початку руху. Враховуємо, що швидкість їхнього зближення дорівнює $(v_1 + v_2)$ і отримуємо рівняння:

$$(v_1 + v_2)t = S. \quad (1)$$

2. Перший кур'єр до зустрічі йшов t годин, а після зустрічі 16 год. Отже, всього він рухався $(t + 16)$ год зі швидкістю v_1. Оскільки за цей час він пройшов усю відстань від A до B, то можемо скласти рівняння:

$$v_1(t+16) = S. \quad (2)$$

3. Аналогічно міркуємо: другий кур'єр до зустрічі йшов t годин, а після зустрічі — 9 год. Отже, всього він рухався $(t + 9)$ год зі швидкістю v_2. Оскільки за цей час він пройшов усю відстань від B до A, то можемо скласти рівняння:

$$v_2(t+9) = S. \quad (3)$$

4. Рівняння (1), (2) і (3) об'єднуємо в систему:

$$\begin{cases} (v_1 + v_2)t = S, \\ v_1(t+16) = S, \\ v_2(t+9) = S. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему аналогічно до попередньої задачі, отримуємо $t^2 = 144$. Врахувавши, що $t > 0$, маємо $t = 12$ год.

5. Знаходимо час, який потрібен першому кур'єру на шлях від A до B: $12 + 16 = 28$ (год). Другому кур'єру вдалося подолати шлях від B до A за $12 + 9 = 21$(год).

Під час розв'язування деяких задач може виникнути ситуація, що однозначно визначити всі невідомі з системи рівнянь неможливо, але шукана комбінація цих невідомих водночас є однозначною.

Задача 18. Учень витратив деяку суму грошей на купівлю портфеля, ручки й книжки. Коли б портфель коштував у 5 разів дешевше, ручка — у 2 рази дешевше, а книжка — у 2,5 рази дешевше, ніж насправді, то та сама покупка коштувала б 80 грн. Коли б портфель коштував у 2 рази дешевше, ручка – у 4 рази дешевше, а книжка – у 3 рази дешевше, то за ту саму покупку школяр заплатив би 120 грн. Скільки насправді коштує вся покупка і за що заплачено більше — за портфель чи ручку?

Розв'язання

Нехай x грн, y грн, z грн — ціна портфеля, ручки і книжки відповідно. Для кращого розуміння змісту задачі складемо таблицю (табл. 7).

Таблиця 7

Покупка	Портфель	Ручка	Книжка	Вартість, грн
Реальна покупка	x	y	z	?, шукана
I умовна покупка	$\frac{x}{5}$	$\frac{y}{2}$	$\frac{z}{2,5}$	80
II умовна покупка	$\frac{x}{2}$	$\frac{y}{4}$	$\frac{z}{3}$	120

1. Перша і друга умовні покупки дають два рівняння, які об'єднуємо в систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=80, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=120 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x+5y+4z=800, \\ 6x+3y+4z=1440. \end{cases}$$

Отже, маємо систему двох рівнянь з трьома невідомими. Необхідно знайти лише вартість усієї покупки, тобто величину $x + y + z$.

Додамо рівняння системи, отримаємо:

$$8x + 8y + 8z = 2240 \text{ або } x + y + z = 280.$$

Отже, вартість усієї покупки 280 грн.

2. Порівняємо між собою величини x та y. Виключаючи величину z зі системи рівнянь, знаходимо:

$$2x - y = 320 \text{ або } x + (x - y) = 320.$$

Оскільки $x > 0, y > 0, z > 0$ і $x + y + z = 280$, то зрозуміло, що $x < 280$.

Отже, $x - y > 40$, тобто $x > y$.

Відповідь. Вартість усієї покупки 280 грн.; портфель дорожчий за ручку.

Ще однією підказкою до розв'язування таких задач може бути природа об'єктів, про які йдеться в змісті задачі. Наприклад, швидкість чи шлях не можуть набувати від'ємного значення, кількість людей — ціле невід'ємне число.

Задача 19. Перукар одержував за стрижку однієї жінки 80 грн, чоловіка — 20 грн , а дитини — 10 грн. За 480 грн він підстриг 12 людей. Скільки жінок, чоловіків і дітей він підстриг?

Розв'язання

Нехай x, y, z — кількість підстрижених жінок, чоловіків і дітей відповідно. Тоді згідно з умовою задачі маємо систему:

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ 80x+20y+10z=480 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+y+z=12, \\ 8x+2y+z=48. \end{cases}$$

Виразимо невідомі y, z через x:

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ 7x+y=36; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=36-7x, \\ z=6x-24. \end{cases}$$

Оскільки x, y, z — цілі невід'ємні числа, то з першого рівняння випливає, що $x \le 5\frac{1}{7}$, а з другого — $x \ge 4$.

Якщо $x = 4$, то $y = 8$, $z = 0$.

Якщо $x = 5$, то $y = 1$, $z = 6$.

Відповідь. 5 жінок, 1 чоловік, 6 дітей або 4 жінки і 8 чоловіків.

1.4. ОФОРМЛЕННЯ ЗАПИСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Зазвичай під час розв'язування текстових задач на складання рівнянь запис є не таким детальним, як було зроблено в попередніх задачах. Найчастіше вчителі обмежуються описом обрання невідомого та скороченими нотатками міркувань щодо підстав для складання рівняння. Існує три способи опису розв'язання задачі:

1) запис-перелік етапів складання рівняння;

2) розгорнутий запис (зв'язний літературний виклад вираження всіх величин та залежностей між ними);

3) табличний запис.

Розглянемо на прикладі однієї задачі недоліки та переваги вказаних способів.

Задача 20. Бригада планувала засіяти 120 га за певний час. Але перевиконуючи заплановану щоденну норму на 10 га, завершила роботу на 2 дні раніше. Визначте, скільки гектарів засівала бригада щодня.

Скорочений запис умови задачі подамо в таблиці (табл. 8).

Таблиця 8

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи A, га	Час t, дні	Денна продуктивність p, га
За планом	120	?	?
Насправді	120	?, на 2 менше	?, на 10 більше

Процес, описаний у задачі, — виконання роботи.

Формула, що виражає основні зв'язки між величинами цього процесу — $A = p \cdot t$.

Для учнів варто додатково пояснити термін *продуктивність праці*, тобто обсяг роботи, що виконується за одиницю часу (іноді його називають *швидкістю виконання роботи*).

Спосіб 1. Запис-перелік.

За планом мали засіяти за x днів.

Насправді засіяли за $(x-2)$ дні.

За планом щодня мали засівати $\frac{120}{x}$ га.

Насправді щодня засівали $\frac{120}{x-2}$ га.

За умовою задачі щодня засівали на 10 га більше, ніж планували.

Отже, $\frac{120}{x-2}$, більше, ніж $\frac{120}{x}$ на 10.

Складаємо рівняння $\frac{120}{x-2}-\frac{120}{x}=10$.

Спосіб 2. Розгорнутий запис.

Нехай планували засіяти 120 га за x днів, тоді реально засіяли за $(x-2)$ дні. Щоденно мали засівати за планом по $\frac{120}{x}$ га, а насправді щодня засівали по $\frac{120}{x-2}$ га.

За умовою задачі щодня засівали на 10 га більше, ніж планували.

Отже, $\frac{120}{x-2}$ більше, ніж $\frac{120}{x}$ на 10.

Складаємо рівняння $\frac{120}{x-2}-\frac{120}{x}=10$.

Спосіб 3. Табличний запис (табл. 9).

Таблиця 9

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи, га	Час, дні	Денна продуктивність, га
За планом	120	x	$\frac{120}{x}$
Насправді	120	$x-2$	$\frac{120}{x-2}$, на 10 >

Порівнюючи ці способи опису пошуку рівняння, можна зробити висновок, що найзручнішою (на перший погляд) є таблиця. Вона є наочнішою, вимагає менше часу для свого заповнення (особливо коли йдеться про розв'язування задачі певного типу, тобто задачі на рух, роботу, суміші чи сплави тощо), а вимога заповнити всі коміри таблиці впорядковує процес міркувань учнів і робить його послідовнішим.

Таблиця є певною компактною схемою і добре засвоюється. Щоб її скласти (зокрема визначити кількість потрібних для даної умови задачі стовпчиків і рядків, дати їм відповідну назву та заповнити кожну її комірку), учні повинні добре уявляти, які величини потрібні будуть для складання рівняння, які між ними залежності. Тому використовувати табличний запис для оформлення розв'язання задач краще після засвоєння учнями особливостей задач даного типу.

Під час розв'язування перших задач нового типу краще використовувати для оформлення пояснень запис-перелік. Через дві-три однотипні задачі, які були розв'язані учнями самостійно, вчитель може показати перехід від запису-переліку до табличного запису пояснення.

Для цього певну типову задачу спочатку розв'язують з використанням запису-переліку, а потім вчитель показує, як цей запис можна перетворити у таблицю. Такий поступовий перехід дає можливість зробити надалі процес створення табличних записів не формальним (за зразком-шаблоном), а осмисленим, з повним усвідомленням учнями своїх дій.

Варто зазначити, що табличний запис може стати в пригоді, коли вчитель хоче продемонструвати учням можливості алгебраїчного методу щодо складання різних видів рівнянь чи систем рівнянь до тієї самої текстової задачі.

Наприклад, для наведеної вище задачі можна було б скласти такі табличні записи і відповідні їм математичні моделі.

Нехай за невідоме x прийняли не кількість днів, а денну продуктивність праці за планом. Тоді таблиця матиме такий вигляд (табл. 10).

Таблиця 10

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи, га	Час, дні	Денна продуктивність, га
За планом	120	$\frac{120}{x}$	x
Насправді	120	$\frac{120}{x+10}$, на 2 <	$x + 10$

Використавши порівняння кількості днів, потрібних за планом для засівання поля, і кількості днів, які реально бригада використала для виконання всієї роботи, складаємо рівняння:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = 2.$$

Зауважимо, що, порівнюючи таблиці, слід звернути увагу учнів на таке: залежно від того, яке з невідомих значень величин прийняли за x, змінюється обрання залежності, котру використовують для складання рівняння.

Тепер нехай за невідоме x прийняли кількість днів, а за y денну продуктивність праці за планом. Тоді таблиця буде такою (табл. 11).

Таблиця 11

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи, га	Час, дні	Денна продуктивність, га
За планом	120	x	y
Насправді	120	$x - 2$	$y + 10$

Врахувавши формулу $A = p \cdot t$, та умову, що в обох випадках обсяг виконуваної роботи 120 га, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 120, \\ (x-2)(y+10) = 120. \end{cases}$$

1.5. ПЕРЕВІРКА РОЗВ'ЯЗКІВ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Довільний розв'язок текстової задачі є розв'язком її алгебраїчної моделі, проте не кожен розв'язок алгебраїчної моделі є розв'язком задачі.

Математична мудрість

Основна мета етапу *перевірки розв'язку* задачі є з'ясування того, чи отриманий розв'язок задовольняє всі її умови.

Під час розв'язування текстових задач арифметичними способами перевірку виконують, щоб виявити можливі помилки в обчисленнях, неточності в логічних міркуваннях. Із часом, під час вивчення методу рівнянь, перевірка після розв'язання задачі дає можливість з'ясувати правильність математичної моделі, неточність у побудові якої може призвести до помилкового розв'язку.

Перевірка може бути *прямою* та *непрямою*, *повною* і *неповною*. Під час *повної перевірки* переконуємося, що знайдені значення шуканих величин можуть бути розв'язком, бо задовольняють усі умови.

Неповна перевірка передбачає перевірку виконання тільки деяких умов. Зрозуміло, що такий вид перевірки є менш надійним, ніж повний, оскільки можна не помітити, наприклад, обчислювальну помилку.

Непряму перевірку можна виконати за допомогою складання та розв'язування оберненої задачі, коли знайдене шукане стає даним, а одне з даних — шуканим. Якщо під час розв'язування оберненої задачі отримуємо значення, яке збігається з вибраним даним, то роблять висновок, що початкова задача розв'язана правильно.

Оскільки для текстової задачі, що має кілька умов, можна скласти різні обернені задачі, то для перевірки розв'язку намагаються обрати таку з цих обернених задач, яку найлегше розв'язати.

Розв'язування задачі різними способами також є непрямою перевіркою.

Завдання з розв'язування задач різними способами можна використовувати для перевірки правильності отриманого розв'язку або для дослідження використаного способу обрання базової залежності для складання математичної моделі, зокрема оцінювання її переваг у порівнянні з іншими моделями.

Крім того, слід пам'ятати, що фізичні величини, про які йдеться в змісті текстової задачі, завжди підпорядковуються певним обмеженням, які в умові задачі явно не вказуються, проте їх можна ввести відповідно до смислу сюжету задачі.

Наприклад, невід'ємним числом має бути швидкість об'єкта, час його руху, відстань, яку він подолав; кількість працівників, що виконали певну роботу, виражає тільки натуральне число; температура води в градусах Цельсія (при нормальному тиску) є величиною в межах від 0° до 100°; кількість води в діжці після переливання (чи кількість книжок після перестановки з однієї полиці на іншу тощо) невід'ємна.

Узагалі, під час розв'язування сюжетних задач арифметичними способами відповідність проміжних результатів дій, тобто проміжних невідомих, одразу перевіряється на їхню відповідність предметній області, з якої розглядаються фізичні величини.

Під час розв'язування задач алгебраїчним методом зустрічаються випадки, коли після розв'язування відповідного рівняння одразу видно, який з отриманих коренів слід відкинути у зв'язку із його невідповідністю смислу задачі. Найчастіше це трапляється після розв'язування сюжетних задач за допомогою квадратних рівнянь, які мають від'ємний корінь.

Так само пишуть, що корінь рівняння не підходить, якщо шукають, наприклад, швидкість пішохода, а отримали корінь рівняння хоча й додатний, проте його значення явно не відповідає смислу задачі: наприклад, швидкість пішохода не може дорівнювати 125 км/год.

Проте іноді трапляються задачі, в яких, на перший погляд, відповідь розв'язаної математичної моделі не викликає підозр, і лише перевірка з врахуванням смислу фізичних величин, що введені за умовою задачі, дає можливість знайти і «відкинути» сторонні корені (зазвичай це пряма перевірка, яку називають «розігруванням сюжету»). Розглянемо такі задачі.

Задача 21. У трьох баках разом було 56 л бензину. У першому баку на 10 л було більше, ніж у другому. Після того, як з першого бака перелили в третій 26 л, у другому й третьому баках бензину стало порівну. Скільки було бензину спочатку в першому баку?

Розв'язання

Словесний текст		**Переклад алгебраїчною мовою**
Нехай у першому баку до переливання було	—	x л
у другому баку було	—	$(x - 10)$ л
у третьому баку до переливання було	—	$(56 - x - (x - 10))$ л
у третьому баку після переливання стало	—	$(56 - x - (x - 10) + 26)$ л

Врахувавши умову, що після переливання у другому й третьому баках бензину стало порівну, отримуємо рівняння:

$$x - 10 = 56 - x - (x - 10) + 26.$$

Звідси $x = 34$.

На перший погляд, отриманий корінь рівняння відповідає смислу задачі, адже він є невід'ємним, а саме це є критерієм для фізичної величини, що виражає кількість чого-небудь (у даному випадку кількість

літрів бензину в баку). Проте якщо проаналізувати всі фізичні величини, про які йдеться в задачі, то стане зрозуміло, що вона не має розв'язків.

Справді, за смислом задачі можна виділити такі величини:

x — кількість бензину (в літрах) у першому баку до переливання;

y_1 — кількість бензину в другому баку;

y_2 — кількість бензину в третьому баку до переливання;

y_3 — кількість бензину в першому баку після переливання;

y_4 — кількість бензину в третьому баку після переливання;

y_5 — різниця між кількістю бензину в другому і третьому баках після переливання.

Усі числа $x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ повинні бути невід'ємними.

Перевіримо, чи виконуються ці обмеження, якщо $x = 38$:

$y_1 = x - 10 = 34 - 10 = 24$ — число додатне;

$y_2 = 56 - x - y_1 = 56 - 34 - 24 = -2$ — число від'ємне.

Зрозуміло, що подальша перевірка не потрібна, корінь рівняння $x = 34$ треба відкинути, оскільки він не підходить за смислом задачі, а у відповідь записати «задача не має розв'язків».

Задача 22 (фізика). Ракета стартує і рухається вертикально вгору з прискоренням 10 м/с^2 і влучає в ціль (літак супротивника) на висоті 18 км. Через який час після старту ракети звук вибуху зафіксує наземна станція стеження, що знаходиться на відстані 24 км від пускової установки (рис. 11)? Швидкість звуку взяти $\frac{1}{3}$ км/с.

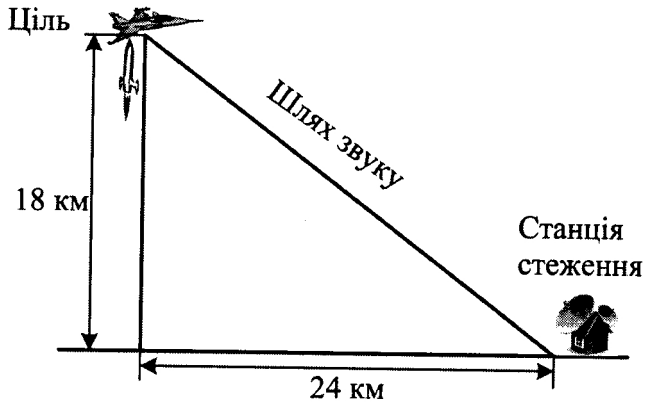


Рис. 11

Розв'язання

1. Оскільки вибух відбувся на висоті 18 км, а між станцією стеження і пусковою установкою 24 км, то ціль від станції стеження знаходилась на відстані $\sqrt{24^2+18^2}=30$ км, а час від вибуху до фіксування звуку на станції буде $30:\frac{1}{3}=90$ с.

2. Якщо прийняти за x час, який пройшов від моменту стару ракети до моменту фіксування на станції звуку вибуху, то поцілення відбулося через $(x-90)$ с після старту ракети.

Використавши формулу $S=\frac{at^2}{2}$, знайдемо відстань, яку пройшла ракета за цей час: $\frac{10(x-90)^2}{2}$ м.

За умовою задачі ця відстань дорівнює 18 км = 18 000 м. Отже, можемо скласти рівняння:

$$\frac{10(x-90)^2}{2}=18\,000.$$

Матимемо два корені: $x_1 = 150$, $x_2 = 30$.

Перевірка. Хоча ці два корені й додатні, проте слід врахувати, що після вибуху звук іде 90 с. Отже, $x = 30$ не підходить за смислом задачі (це фактично перевірка часу, який пройшов від початку старту ракети до потрапляння в ціль: $x - 90 = 30 - 90 = -60$).

Наведені приклади розв'язування задач дають можливість переконатися в необхідності проведення перевірки отриманих розв'язків алгебраїчних моделей щодо їх відповідності смислу задачі.

Крім того, на цих прикладах можна прослідкувати характер міркувань під час проведення такого виду перевірки: використовуючи знайдене значення x, послідовно обчислюються значення величин, які входять в задачу, і звертається увага на смислові обмеження. Смислові обмеження можна записувати або у вигляді нерівностей, або словесно. У випадках, коли смислові обмеження порушено, корінь рівняння не є розв'язком задачі.

Проте іноді така перевірка по суті є перевіркою складеної математичної моделі (рівняння), а не самої задачі. Тоді виникає ситуація, коли правильне розв'язування неправильно складеного рівняння дає неправильну відповідь до задачі.

Задача 23. Учень планував прочитати книжку, що мала 200 сторінок за певний час. Але, читаючи кожного дня на 5 сторінок більше, він скоротив термін читання на 2 дні. Скільки днів учень читав книжку?

Розв'язання

Подамо скорочений запис умови задачі в таблиці (табл. 12).

Таблиця 12

Читає	Всього сторінок, A	Кількість днів, t	Читає щодня, p
За планом	200	?	?
Насправді	200	?, на 2 менше	?, на 5 більше

Приймемо за x днів кількість днів, що реально витратив учень на читання книжки. Виразимо через x інші невідомі й отримаємо нову таблицю (табл. 13).

Таблиця 13

Читає	Всього сторінок, A	Кількість днів, t	Читає щодня, p
За планом	200	$x + 2$	$\frac{200}{x+2}$
Насправді	200	x	$\frac{200}{x}$, на 5 більше

Використаємо умову, що кожного дня читає учень на 5 сторінок більше і складемо рівняння:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5 .$$

Коренями цього рівняння є $x_1 = 8$, $x_2 = -10$ (не задовольняє умову задачі).

Після цього значна частина учнів одразу пише відповідь: *8 днів*.

Серед решти учнів, які намагаються зробити перевірку для $x = 8$ непоодинокими є такі міркування:

1) 200 : 8 = 25 (стор.) — читав учень щодня фактично;

2) 8 + 2 = 10 (д.) — стільки днів учень планував читати книжку;

3) 200 : 10 = 20 (стор.) — стільки сторінок мав читати учень за планом;

4) 25 – 20 = 5 (стор.), що відповідає умові задачі, отже, отримане значення $x = 8$ відповідає умові задачі.

Якщо проаналізувати зроблену перевірку, то знаходження різниці між результатами першої і третьої дії, тобто між $200:8=\frac{200}{8}$ і $200:10=\frac{200}{8+2}$ — це просто підстановка у ліву частину рівняння $x=8$.

Отже, фактично ми підставляли знайдений корінь у рівняння і перевіряли саме правильність його розв'язання.

З метою уникнення таких ситуацій потрібно робити перевірку так, щоб під час виконання останньої дії в перевірці шукали відповідь на запитання, яке б не стосувалося залежності, за якою склали рівняння. Тобто для даної задачі слід брати до уваги таке: оскільки рівняння складали за різницею сторінок щоденного читання, то в перевірці слід було б останньою дією отримати різницю днів запланованого терміну читання і реального:

1) 200 : 8 = 25(стор.) — читав учень щодня фактично;

2) 20 + 5 = 25 (стор.) — мав читати за планом;

3) 200 : 20 = 10 (д.) — стільки учень планував читати днів;

4) 10 – 8 = 2 (д.) — стільки реально днів він зекономив, що відповідає умові задачі.

З метою полегшення правильного пошуку способу перевірки, можна запропонувати учням в таблиці виділяти залежність, яка є базовою для складання рівняння темним кольором, тоді інша залежність (світліший колір) і буде основною для перевірки.

Ще одним поширеним способом перевірки є *складання обернених задач*. Цей спосіб використовується для перевірки правильності отриманих розв'язків задач як арифметично, так і алгебраїчним методом.

Задача 24. Зараз батькові років на 5 більше, ніж сума років усіх трьох його синів. Через 10 років батько буде удвічі старшим за старшого сина, через 20 років батько буде удвічі старшим за середнього сина, а через 30 років батько буде удвічі старшим за молодшого сина. Скільки років зараз батькові й кожному з його синів?

Розв'язання

Якщо позначити через u, x, y, z число років батька і його синів, починаючи з найстаршого, відповідно, то можна скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+z=u-5, \\ 2(x+10)=u+10, \\ 2(y+20)=u+20, \\ 2(z+30)=u+30. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо, що зараз батькові 50 років, а його синам 20, 15 і 10 років відповідно. Щоб перевірити правильність отриманого розв'язку, складемо і розв'яжемо таку обернену задачу.

Задача 25 (обернена до задачі 24). Зараз батькові 50 років, і він на 5 років старший від суми років трьох його синів. Через 10 років батько буде вдвоє старший за старшого сина, через 20 років — вдвоє старший за середнього сина. Через скільки років він буде вдвоє старший за молодшого сина?

Розв'язання

Через 10 років батькові буде 60 років, а його старшому синові — 60 : 2 = 30 років. Отже, зараз йому 30 – 10 = 20 років.

Через 20 років батькові буде 70 років, а його середньому синові 70 : 2 = 35 років. Отже, зараз синові 35 – 20 = 15 років.

Молодшому сину зараз 50 – (20 +15) – 5 = 10 років.

Якщо через x років батько стане вдвічі старший за молодшого сина, то $50 + x = 2(10 + x)$. Звідси $x = 30$, а це збігається з умовою задачі.

Для задач з невизначеними невідомими під час непрямої перевірки доречно використовувати прийом доозначення умови, тобто введення деяких додаткових числових значень, або розв'язувати задачу іншим способом.

Задача 26. Інженер щодня приїжджає на вокзал, де о певній годині його забирає автомобіль і відвозить на завод. Одного разу він приїхав на вокзал на 1 год раніше від визначеного часу і вирішив не чекати автомобіль, а пішов йому назустріч. Зустрівши автомобіль, він сів у нього і приїхав на завод на 20 хв раніше, ніж звичайно. У скільки разів автомобіль їде швидше, ніж інженер іде пішки?

Розв'язання

Нехай v км/год — швидкість, із якою пішки рухається інженер, тоді xv км/год — швидкість автомобіля, яка у x разів більша від швидкості інженера (x — шукане невідоме).

У той момент, коли інженер приїхав на вокзал на 1 год раніше, ніж його мав забирати автомобіль, той був від вокзалу на відстані $S_1 = xv$ км.

Рухаючись назустріч, пішохід і автомобіль наближалися зі швидкістю $(v+xv)=v(1+x)$ км/год і зустрілися через $\frac{vx}{v(1+x)}=\frac{x}{1+x}$ год.

У момент зустрічі автомобіль був від вокзалу на відстані $\frac{vx}{(1+x)}$ км. Щоб подолати цю відстань двічі (доїхати до вокзалу і повернутися назад), йому потрібно $\frac{2vx}{(1+x)}:xv=\frac{2}{1+x}$ год, що за умовою дорівнює 20 хв $=\frac{1}{3}$ год.

Складаємо рівняння: $\frac{2}{1+x}=\frac{1}{3}$.

Звідси $x=5$.

Отже, швидкість автомобіля у 5 разів більша за швидкість пішої ходи інженера.

Перевірка. Розв'яжемо задачу іншим способом. Нехай звичайно інженер приїжджає на вокзал о 8 год ранку. У день, який розглядається, він прибув на вокзал о 7 год, а оскільки на завод він приїхав на 20 хв раніше, ніж звичайно, то автомобіль також був у дорозі на 20 хв менше, ніж завжди. Отже, на 10 хв менше автомобіль витратив на дорогу до вокзалу і на 10 хв — на зворотний шлях. Це означає, що автомобіль зустрів інженера о 7 год 50 хв.

Робимо висновок: щоб пройти відстань від вокзалу до місця зустрічі, інженер витратив 50 хв. Автомобіль цей шлях проїжджає за 10 хв, тобто у 5 разів витрачає менше часу, а це означає, що його швидкість у 5 разів більша.

Якщо для розв'язування задачі було використано алгебраїчну модель, яка містила нерівність, то перевірка може бути *повною* і *неповною*.

Задача 27. Якщо мандрівник-велосипедист буде в день проїжджати на 20 км більше, ніж зараз, то за 8 днів він проїде відстань, меншу за 1000 км. Коли ж він буде щодня проїжджати на 2 км менше, ніж зараз, то за 10 днів він проїде понад 1000 км. Скільки кілометрів він проїжджає зараз щодня?

Розв'язання

Нехай зараз мандрівник щодня долає y км. Подамо умову у вигляді таблиці (табл. 14).

Таблиця 14

	Щоденна швидкість	Кількість днів	Відстань
I умова зміни	$y + 20$	8	менша за 1000 км
II умова зміни	$y - 2$	10	більше за 1000 км

Складаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 8(y+20) < 1000, \\ 10(y-2) > 1000. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $102 < y < 105$.

Пряма неповна перевірка. Візьмемо довільне значення для y із знайденого проміжку.

Нехай $y = 103$, тобто зараз мандрівник проїжджає в день 103 км. Тоді у першому випадку зміни зі щоденною швидкістю (103 + 20) км він за 8 год проїде 984 км, що менше, ніж 1000 км. У другому випадку зі щоденною швидкістю (103 – 2) км за день, він за 10 днів проїде 1010 км, що більше, ніж 1000 км. Отже, число 103 задовольняє усім залежностям в умові задачі й може бути одним з її розв'язків.

Повна перевірка може бути проведена так.

Нехай денна швидкість мандрівника задовольняє подвійну нерівність $102 < y < 105$. Тоді, проїжджаючи в день на 20 км більше, він матиме швидкість у межах $122 < y < 125$, тобто найбільше її значення буде менше, ніж 125 км. Отже, за 8 днів він проїде менше, ніж $125 \cdot 8 = 1000$ км.

Якщо, він проїжджатиме в день на 2 км менше, то матиме швидкість у межах $101 < y < 103$. За 10 днів проїде більше, ніж $101 \cdot 10 = 1010$ км, і тим паче більше, ніж 1000 км.

Робимо висновок, що будь-які значення y з проміжку (102; 105) задовольняють умову задачі.

Ще одним способом перевірки розв'язку задачі є спосіб прикидки правильної відповіді.

Суть способу полягає у встановленні меж для шуканого невідомого. Цей спосіб дає змогу «грубо» оцінити правильність отриманого розв'язку задачі й, якщо в результаті прикидки не буде встановлено, що деякі з отриманих значень невідомих не задовольняють умову задачі, то проведення перевірки потрібно зробити знову, але вже використати інший спосіб.

Задача 28. Із міста A до міста B через кожні півгодини виїжджають три велосипедисти. Перший їде зі швидкістю 10 км/год, другий —

8 км/ год. Знайти швидкість третього велосипедиста, якщо відомо, що він обігнав першого велосипедиста на 4 год пізніше, ніж другого.

Розв'язання

У задачі описано рух навздогін. Цей вид руху характеризує швидкість зближення, яка є різницею швидкостей об'єктів, що беруть участь у русі.

Нехай x км/год — швидкість третього велосипедиста, тоді його швидкість зближення з першим велосипедистом буде $(x - 10)$ км/год, а з другим — $(x - 8)$ км/год. Першого велосипедиста третій наздожене через $\frac{10}{x-10}$ год, а другого $\frac{4}{x-8}$ год.

Враховуємо, що третій велосипедист обігнав першого велосипедиста на 4 год пізніше, ніж другого і складаємо рівняння:

$$\frac{10}{x-10} - \frac{4}{x-8} = 4 \text{ або } 2x^2 - 39x + 180 = 0 .$$

Коренями цього рівняння є $x_1 = 12$, $x_2 = 7{,}5$. На перший погляд, ці числа відповідають змісту задачі.

Перевірка. Робимо прикидку: швидкість третього велосипедиста повинна бути більшою за швидкість кожного з інших, інакше він не зможе їх наздогнати. Отже, робимо висновок, що x_2 – сторонній корінь.

Як видно із наведених прикладів, одним із способів, що допомагає уникнути помилкових сторонніх коренів, є уточнення алгебраїчної моделі в результаті знаходження області допустимих значень невідомих. Це можна робити й одразу після складання рівняння.

Задача 29. На двох турбазах, кожна з яких може прийняти не більше 1000 туристів, на початку тижня було 200 і 300 чоловік відповідно. Щодня на турбазу, де спочатку було 200 чоловік, приїжджає 90 туристів, а там, де було спочатку 300 чоловік, — 80 туристів. Через скільки днів на турбазах буде однакова кількість туристів?

Розв'язання

Складання рівняння за умовою не становить труднощів:

$$300 + 80x = 200 + 90x,$$

де x – кількість днів, яка потрібна для того, щоб кількість туристів на обох турбазах стала однаковою.

Коренем рівняння є $x = 10$. Проте проста прикидка показує, що вже через 9 днів на обох турбазах не буде вільних місць:

$$200 + 90 \cdot 9 > 1000 \text{ і } 300 + 80 \cdot 9 > 1000.$$

Отже, задача не має розв'язку.

Можна зауважити, що наштовхнути на думку про необхідність перевірки може наявність у тексті задачі числових даних (як у задачі 29), які не беруться до уваги під час складання рівняння, або неявних залежностей, що характеризують процес чи явище, про які говориться в умові задачі 28.

Для таких задач іноді можна після аналізу умови перед складанням алгебраїчної моделі записати змістові обмеження.

Задача 30. У першу посудину ємністю 6 л налили 4 л 70-відсоткового розчину сірчаної кислоти, а у другу, такої самої ємності, — 3 л 90-відсоствового. Скільки літрів розчину з другої посудини потрібно перелити в першу, щоб отримати 80-відсотковий розчин сірчаної кислоти?

Розв'язання

Аналіз обмежень шуканого розв'язку задачі. Оскільки в першій посудині вже є 4 літри розчину, тому долити можна не більше, ніж 2 л.

Для складання рівняння використаємо формулу для знаходження концентрації суміші

$$C = \frac{\frac{m_1 C_1}{100} + \frac{m_2 C_2}{100}}{m_1 + m_2} \cdot 100 = \frac{m_1 C_1 + m_2 C_2}{m_1 + m_2},$$

де C_1 — концентрація першого розчину, m_1 — його маса; C_2 і m_2 — концентрація і маса другого розчину.

Рівняння $\frac{4 \cdot 0,7 + x \cdot 0,9}{4 + x} = 0,8$ має корінь $x = 4$, який не може бути розв'язком задачі, з огляду на знайдене обмеження ($x \le 2$).

Перевірку розв'язків текстових задач часто порівнюють із доведенням під час розв'язування задач на побудову. Вона є важливим елементом процесу розв'язування текстових задач, яким не потрібно нехтувати. Перевірка потрібна не лише для того, щоб уникнути неправильних (чи неповних розв'язків) текстової задачі, які можуть з'явитися, по-перше, в результаті допущення помилок у розрахунках чи логічних міркуваннях, а по-друге, із-за неточності, наближеності самих алгебраїчних моделей.

Широкі можливості є у перевірки для розвитку мислення учнів. Вона сприяє зокрема розвитку таких якостей, як зворотність мислення, критичність (вміння знаходити свої помилки), допомагає також глибшому вивченню та усвідомленню залежностей між різними величинами.

Звичайно немає потреби проводити перевірку після розв'язування кожної задачі, але й нехтувати нею не потрібно. На жаль, у сучасних шкільних підручниках мізерна кількість цікавих задач, які доречно було б використати саме для перевірки отриманих розв'язків алгебраїчної моделі на відповідність смислу задачі.

Завершується перевірка формулюванням словесної відповіді на запитання чи вимогу задачі. Якщо під час перевірки було виявлено умови, при яких ця відповідь має смисл, то вони також повинні вказуватися у відповіді.

1.6. ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Основною метою розв'язування сюжетних задач є не просто знаходження учнями відповіді на поставлені в тексті задачі запитання. Головним у розв'язуванні задач є те, щоб учні набули певних знань, розвинули в себе певні вміння та здібності, виробили загальні корисні звички і навички.

Саме тому при підсумку обговорення проведеного розв'язування його аналіз і дослідження мають не менше значення, ніж власне розв'язання, а іноді навіть більше, оскільки є можливість:

1) виявити недоліки використаного способу розв'язування;

2) виконати пошук раціональніших шляхів складання розв'язуючої математичної моделі;

3) виявити особливості даної задачі, зіставити її розв'язання з раніше розв'язаними задачами; встановити зв'язки між способами та прийомами, що були використані в процесі розв'язування даної задачі, й можливістю їх реалізації під час розв'язування інших задач, тобто проаналізувати можливість узагальнення даної задачі.

Дослідження можливе під час розв'язування самої задачі, коли відбувається перевірка коренів, отриманих в результаті розв'язання алгебраїчної моделі, на їх відповідність смислу задачі. Але основна частина дослідження при розв'язуванні текстових задач припадає на розв'язування задач з параметрами.

Зауважимо, що більшість задач із шкільних підручників належать до задач з «реалізованою ситуацією», тобто в задачі мається на думці, що ситуація, яка описується в тексті, вже мала місце.

У задачах «потенційного характеру» (другий вид задач) зазвичай потрібно вияснити питання, чи може відбутися та чи інша подія,

чи можна виконати ту чи іншу дію. Саме ці обставини і спонукають до проведення додаткового дослідження.

Нагадаємо розв'язання задачі 21. За формулюванням її слід віднести до задач з реалізованою ситуацією, яка не має розв'язку через хибність умов (зауважимо, що в умові задачі не ставиться під сумнів можливість реальності ситуації і немає вимоги виконати перевірку). Якщо дещо змінити текст, то можна отримати вже не задачу з реалізованою ситуацією, а задачу, що має потенційний характер. І запитання в цій задачі підказуватиме необхідність проведення додаткових міркувань.

Задача 31. Потрібно розлити у три баки 56 л бензину. Скільки бензину потрібно налити у перший бак, щоб у ньому було на 10 л більше, ніж у другому, а після переливання з нього у третій бак 26 л, у другому і третьому баках бензину стало порівну?

Розв'язання

Припустимо, що бензин розлили відповідно до вимог в умові задачі, тоді у першому баку a л бензину, і це число a задовольняє рівняння, яке отримали під час розв'язування задачі 18. Це рівняння має єдиний корінь 34, отже, в першому баку міститься 34 л бензину.

Очевидно, що розв'язування задачі не завершено, оскільки ми не можемо стверджувати, що для виконання всіх умов задачі потрібно налити 34 л у перший бак. Пов'язано це перш за все з тим, що звичайною мовою слово «потрібно» (рос. «надо») часто має смисл близький за смислом з математичним терміном «необхідно і достатньо». Отже, було встановлено лише, що коли вже бензин налили потрібним чином, то в першому баку буде 34 л. Проте залишається незрозумілим, чи буде розлито бензин, як потрібно, якщо в перший бак налили 34 л бензину.

Після додаткових міркувань визначаємо, що для виконання всіх вимог задачі, у третій бак доведеться налити 4 л бензину, а це неможливо. Отже, можна зробити висновок: розлити бензин так, як вимагається в умові задачі неможливо. А це означає, що у відповідь потрібно записати «задача не має розв'язку».

Розглянемо приклад дослідження задачі потенційного характеру, в умові якої є один параметр.

Задача 32. Є два зливки олова й міді. Маса першого 3 кг і відсотковий вміст міді в ньому 40 %, маса другого зливка 7 кг і вміст міді 30 %. Якої маси потрібно взяти шматки цих зливків, щоб після переплавки отримати 8 кг сплаву, що вміщує r % міді?

Розв'язання

Нехай взяли x кг першого зливка та $(8-x)$ кг другого, і після їх переплавки отримали сплав, у якому вміст міді r %.

Тоді можемо скласти рівняння $40x+30(8-x)=8r$.

Це рівняння має єдиний розв'язок $x=0,8r-24$.

Виконуючи перевірку за смислом задачі, потрібно переконатися в тому, що, справді, коли взяти $(0,8r-24)$ кг першого сплаву і $(32-0,8r)$ кг другого, то після переплавки отримаємо сплав із вмістом міді r %.

Очевидно, що вказані кількості можна взяти тоді і тільки тоді, коли має розв'язок така система нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le 0,8r-24 \le 3, \\ 0 \le 32-0,8r \le 7. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, матимемо $31,25 \le r \le 33,75$.

Тобто, коли r не задовольняє останню нерівність, то потрібний сплав із заданих зливків утворити неможливо.

Відповідь. Якщо $31,25 \le r \le 33,75$, то потрібно взяти $(0,8r-24)$ кг першого сплаву і $(32-0,8r)$ кг другого.

Під час розв'язування задачі 32 можна було одразу записати відповідні обмеження і врахувати їх під час розв'язування. У такому випадку робити перевірку було б не потрібно.

Хочемо зазначити, що, як правило, отримуючи під час розв'язування алгебраїчних моделей сюжетних текстових задач від'ємні корені, ми пишемо, що вони не задовольняють умову задачі (за винятком задач про вимірювання температури). Проте під час розв'язування задач з параметрами (особливо задач потенційного виду) бувають випадки, коли за смислом задачі допускається розгляд від'ємних значень певної величини. Областю допустимих значень невідомої величини при цьому буде множина дійсних чисел, а від'ємному розв'язку алгебраїчної моделі надають певне трактування: його абсолютна величина дає відповідь на запитання, яке за смислом протилежне запитанню сформульованому у тексті.

Задача 33. Батькові a років, синові b років. Через скільки років батько буде у k разів старший за свого сина?

Розв'язання

Припустимо, що через x років батько буде у k разів старший за сина. У той момент батькові буде $(a+x)$ років, а синові $(b+x)$ років.

Складаємо рівняння:

$$a+x=k(b+x). \qquad (1)$$

Якщо $k-1\neq 0$, то це рівняння має розв'язок $x=\frac{a-kb}{k-1}$.

Дослідження. За змістом задачі:

1) $a > b > 0$ (батько старший за сина);

2) $k > 1$, оскільки k виражає відношення більшого додатного числа до меншого;

3) $b + x > 0$ (вік сина виражається додатнім числом).

Додатний розв'язок. Оскільки $k > 1$, $k - 1 > 0$, то чисельник дробу також повинен бути додатним: $a-kb>0$, $\frac{a}{b}>k$.

Співвідношення $\frac{a}{b}>k$ показує, що батько буде старшим за сина через кілька років, якщо відношення віку батька до віку сина в даний момент більше k (неправильний дріб зменшується, якщо до чисельника і знаменника додається одне і те саме число).

Нульовий розв'язок. Оскільки $k-1\neq 0$, то $x = 0$, якщо $a-kb=0$, тобто коли $\frac{a}{b}=k$, а це означає, що відповідне співвідношення між віком батька і сина є у даний момент.

Від'ємний розв'язок. При $k - 1 > 0$ розв'язок буде від'ємним за умови $a-kb<0$, тобто $\frac{a}{b}<k$.

Отже, від'ємний розв'язок ми отримаємо, якщо відношення між віком батька і сина в даний час менше заданого, а це означає, що потрібне відношення вже було раніше.

Відповідь.

1. Якщо $\frac{a}{b}>k$, батько буде старшим за сина в k разів через

$$\frac{a-kb}{k-1} \text{ років.}$$

2. Якщо $\frac{a}{b}=k$, батько зараз у k разів старший за сина.

3. Якщо $\frac{a}{b}<k$, батько був старший за сина в k разів $\frac{kb-a}{k-1}$ років тому.

Зауваження. Дослідження умов, при яких рівняння (1) не має розв'язків або має нескінченну кількість розв'язків ми не перевіряємо, оскільки $k > 1$.

Якщо проаналізувати розв'язання цієї задачі, то можна зауважити, що співвідношення між параметрами та обмеженнями областей допустимих значень параметрів і шуканої величини, які визначають можливість розв'язання задачі, можна встановити за смислом задачі (під час аналізу її сюжету та залежностей між величинами). Так у попередній задачі зі сюжету випливають умови, при яких задача має смисл: 1) батько завжди старший за сина: $a > b$; 2) відношення віку батька до віку сина завжди більше одиниці: $k > 1$; 3) $x > -b$, b років тому сина ще не було.

Під час дослідження знайденого розв'язку рівняння можуть бути встановлені додаткові співвідношення між параметрами, які визначають умови розв'язання задачі.

Задача 34. В одній цистерні a відер води, а в другій b відер. Щогодини в першу цистерну доливають m відер, а в другу n відер. Через скільки годин кількість відер води в обох цистернах буде рівною?

Розв'язання

Припустимо, що через x год кількість води у цистернах зрівняється. Тоді у першій цистерні води буде $(a+mx)$ відер води, а у другій $(b+nx)$.

Складаємо рівняння: $a+mx=b+nx$.

Якщо $m-n\neq 0$, то розв'язком рівняння є $x=\dfrac{b-a}{m-n}$.

Дослідження. За змістом задачі $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$, $n > 0$. Крім того, або $x > -\dfrac{a}{m}$ ($\dfrac{a}{m}$ год тому в першій цистерні не було води) за умови $-\dfrac{a}{m} > -\dfrac{b}{n}$ ($\dfrac{b}{n}$ год тому не було води в другій цистерні), або $x > -\dfrac{b}{n}$ (за умови $-\dfrac{b}{n} > -\dfrac{a}{m}$).

Додатній розв'язок можливий у двох випадках:

1) $b-a > 0$ і $m-n > 0$. Звідси $b > a$ і $m > n$: у даний момент у другій цистерні води більше, і в неї щогодини доливають меншу кількість води, саме тому кількість води в цистернах може зрівнятися через деякий час.

2) $b-a < 0$ і $m-n < 0$. Звідси $b < a$, $m < n$: у даний момент у другій цистерні води менше, і в неї щогодини доливають більшу кількість води, саме тому кількість води в цистернах може зрівнятися через деякий час.

Нульовий розв'язок буде за умови $m-n\neq 0$, $b-a=0$. Звідси $m\neq n$, $b=a$: якщо щогодини у цистерни наливають різну кількість води, то рівна кількість води може бути тільки в даний момент.

Від'ємний розв'язок можливий у двох випадках:

1) $b-a>0$ і $m-n<0$. Звідси $b>a$ і $m<n$. Тоді зробимо висновок, що при меншій кількості води у першій цистерні нині й при меншій кількості води, що в неї доливають щогодини, однакова кількість води у цистернах могла бути тільки раніше (до теперішнього моменту).

Оскільки у даний момент у другій цистерні води більше і до неї щогодини доливають більше води, то однакова кількість води в обох цистернах могла бути раніше лише у тому випадку, коли наповнення другої цистерни почали б пізніше.

Отже, $\frac{b}{n}<\frac{a}{m}$ або $-\frac{b}{n}>-\frac{a}{m}$.

Перевіримо отриманий розв'язок за умовою задачі:

$$x>-\frac{b}{n};\ \frac{b-a}{m-n}>-\frac{b}{n},$$

оскільки $m-n<0$, то $bn-an<bn-bm$ або $an>bm$. Звідси $\frac{a}{m}>\frac{b}{n}$.

Остання нерівність виражає відношення між параметрами, за яким момент зрівнювання кількості води в цистернах міг настати: від'ємний розв'язок рівняння (при $b-a>0$ і $m-n<0$) дає розв'язок задачі.

2) $b-a<0$ і $m-n>0$. Звідси $b<a$ і $m>n$. Після проведення аналогічних до попереднього випадку міркувань і перевірки отриманого розв'язку рівняння одержимо, що момент зрівнювання кількості води у двох цистернах міг настати при $\frac{b}{n}>\frac{a}{m}$.

Нескінченна кількість розв'язків. Якщо $b-a=0$ і $m-n=0$, тобто $b=a$ і $m=n$, то будь-яке значення x буде задовольняти рівняння. Рівність $b=a$ вказує на те, що води в обох цистернах у даний момент порівну, а рівність $m=n$ показує, що в цистерни щогодини виливають однакову кількість води. Саме тому в будь-який час у цистернах буде однакова кількість води.

Рівняння не має розв'язків. Якщо $b-a\neq 0$ і $m-n=0$, то рівняння не має розв'язків. Дані співвідношення виражають умови, при яких зрівнювання кількості води у цистернах неможливе.

Відповідь.

1. Якщо $b > a$ і $m > n$ або $b < a$ і $m < n$, то рівна кількість води у цистернах буде через $\frac{b-a}{m-n}$ год.

2. Якщо $a = b$ і $m \neq n$, то кількість води у цистернах є рівною в даний момент.

3. Якщо $b > a$, $m < n$ і $\frac{a}{m} > \frac{b}{n}$ або $b < a$, $m > n$ і $\frac{b}{n} > \frac{a}{m}$, то рівна кількість води у цистернах була $\left|\frac{b-a}{m-n}\right|$ годин тому назад.

Аналіз розв'язань наведених задач дає змогу намітити такі кроки розв'язування задач з параметрами.

1. Складання й розв'язування рівняння.

2. Дослідження розв'язку рівняння:

а) визначення області допустимих значень параметрів і співвідношень між ними, за умови виконання яких задача має розв'язок;

б) визначення області допустимих значень шуканої величини, які задовольняють умову задачі;

в) знаходження можливих випадків розв'язків рівняння та їх смислу;

г) відбір розв'язків рівняння, які дають визначену (певну) відповідь на запитання задачі.

1.7. АРИФМЕТИЧНІ СПОСОБИ Й АЛГЕБРАЇЧНІ МОДЕЛІ

Однією з причин тих труднощів, з якими стикаються учні при розв'язування задач із використанням алгебраїчного методу, і труднощів, які відчувають учителі, навчаючи учнів складати різних видів алгебраїчні моделі до текстових задач, є недооцінка ролі й значення арифметичного розв'язування задач, невміння (а іноді й небажання) встановити зв'язки в етапах арифметичного й алгебраїчного шляхів пошуку розв'язку задачі.

Загальновідомий факт, що арифметичне розв'язування задачі може бути замінене алгебраїчним, але не всяке алгебраїчне розв'язування можна замінити на арифметичне, оскільки арифметичне обмежується застосуванням тільки чотирьох основних дій.

Як правило (але ж у кожного правила є свої винятки), задачі, в яких алгебраїчні моделі зводяться до квадратних рівнянь чи рівнянь вищих

степенів, арифметичними способами розв'язати не можна. Усі ж текстові задачі, що зводяться до лінійних рівнянь або систем лінійних рівнянь можна розв'язати арифметично.

Зауважимо, що, з точки зору математики як науки, вивчення операцій над величинами, вираженими буквами, не може передувати вивченню операцій над числами, бо буква є результатом узагальнення числа, під буквою розуміють величину, що вимірюється числом. Саме тому шкільне розв'язування задач повинно починатися з арифметичних способів, які, на думку багатьох вітчизняних і зарубіжних видатних педагогів і вчених, є інтелектуальною та психологічною базою для вивчення алгебри та алгебраїчного способу розв'язування сюжетних задач.

При вивченні теоретичного курсу алгебри часто використовують числові (арифметичні) аналогії для індуктивного й евристичного засвоєння різноманітних правил, властивостей, законів.

Корисно такі аналогії шукати також і для арифметичного та алгебраїчного розв'язувань текстових задач. При цьому слід підкреслювати їхні схожі та відмінні риси, аналізувати переваги і недоліки. Для цього можна пропонувати завдання щодо розв'язування задачі за допомогою рівняння, а перевірку виконувати арифметичним способом.

Не слід допускати протиставлення арифметичного і алгебраїчного розв'язань задачі, адже є задачі, для яких арифметичний спосіб є природнішим. Нагадаємо відому задачу про чотирьох друзів.

Задача 35. Четверо друзів купили катер. Перший вніс $\frac{1}{2}$ суми, внесеної іншими; другий – $\frac{1}{3}$ суми, внесеної іншими; третій – $\frac{1}{4}$ суми, внесеної іншими, а четвертий вніс 1300 грн. Скільки коштує катер?

Розв'язання

(арифметичне)

З умови задачі випливає, що перший вніс $\frac{1}{3}$ вартості катера, другий – $\frac{1}{4}$, третій – $\frac{1}{5}$. Тоді всі троє друзів внесли $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ вартості катера. Четвертий вніс 1300 грн, що становить $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ вартості катера.

Отже, катер коштує $1300 : \frac{13}{60} = 6000$ (грн).

Відповідь. Катер коштує 6000 грн.

Цим способом розв'яжуть задачу учні 6-го класу, а от алгебраїчне розв'язання, яке наведене нижче, викликає труднощі й у семикласників, і у восьмикласників.

Розв'язання

(алгебраїчне)

Якщо позначити кількість грошей, яку вніс кожен з друзів, через x, y, z відповідно, то отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+z+1300}{2}, \\ y = \dfrac{x+z+1300}{3}, \\ z = \dfrac{x+y+1300}{4} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x = y+z+1300, \\ 3y = x+z+1300, \\ 4z = x+y+1300. \end{cases}$$

Отже, на нашу думку, слід виявити точки дотику арифметичного та алгебраїчного розв'язувань задачі та всіляко сприяти уникненню ситуацій щодо їх протиставлення.

По-перше, бажано завжди пам'ятати, що планомірна, цілеспрямована, систематична робота з розв'язування текстових задач арифметичними способами є підґрунтям майбутнього алгебраїчного методу.

Арифметична аналогія, до якої нерідко звертаються при розв'язуванні задач, допомагає зрозуміти, осмислити логіку розв'язування алгебраїчних задач, бо вона є доступнішою для осмислення математичної суті процесів і явищ, ніж логіка розв'язування алгебраїчним методом. По-справжньому глибоко і свідомо засвоюють алгебраїчний метод розв'язування текстових задач лише ті учні, які свого часу отримали необхідні відомості про задачу, її структуру, етапи розв'язування та достатньо тренували своє мислення за допомогою арифметичного розв'язування задач.

Процес алгебраїчного розв'язування задач (тобто процес складання рівнянь) є послідовним арифметичним розв'язуванням задач з буквеними даними. Отже, арифметичні розв'язування готують учнів до алгебраїчних. Крім того, арифметичне розв'язування задачі в загальному вигляді (буквене арифметичне розв'язування) має велике практичне значення, бо вказує шлях раціонального розв'язування задач з параметрами.

Розглянемо приклади застосування на практиці *використання арифметичного розв'язування для засвоєння алгебраїчного методу.*

При розв'язуванні задач різними арифметичними способами учителі часто використовують для пошуку способу розв'язування різного виду графічні схеми та короткий запис умови у вигляді таблиці. Цю практику слід продовжити і на перших уроках алгебри: використовувати знайомі учням схеми для обрання невідомого і пошуку рівняння. Також можна пропонувати такі завдання.

Задача 36. Периметр трикутника 48 см. Друга його сторона на 4 см менша за першу, а третя на 8 см більша за першу. Поставте логічні запитання та розв'яжіть утворену задачу.

Зауваження. Якщо позначити сторони трикутника відповідно через *a, b* і *c*, то умову цієї задачі, залежно від поставленого запитання, можна зобразити різними схемами (рис. 12—14).

На рис. 12 довжини сторін порівнюються з першою стороною. Тому її доцільно використати у випадку вираження невідомих довжин другої та третьої сторони через першу. А умову слід доповнити таким запитанням: *Яку довжину має перша сторона трикутника?*

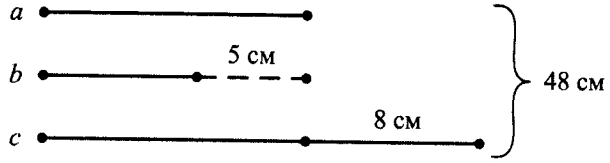


Рис. 12

На рис. 13 звертається увага на порівняння довжин першої та третьої сторін із довжиною другої сторони, а на схемі рис. 14 — довжини першої та другої сторони. Отже, до схеми на рис 13 доречно поставити запитання: «Яку довжину має друга сторона трикутника?», а до схеми на рис. 14 — «Яку довжину має третя сторона трикутника?»

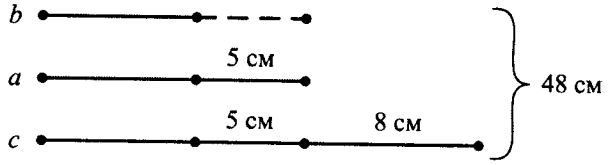


Рис. 13

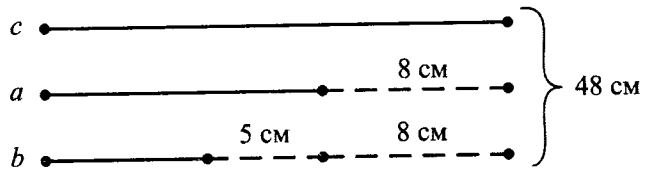


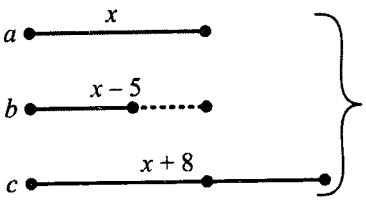
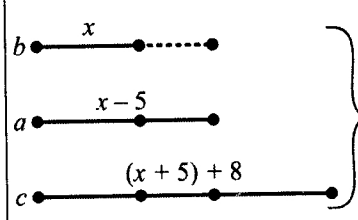
Рис. 14

Перевага використання конкретної схеми буде відчутною у випадку, коли в тексті задачі є вимога знайти довжину тільки однієї зі сторін.

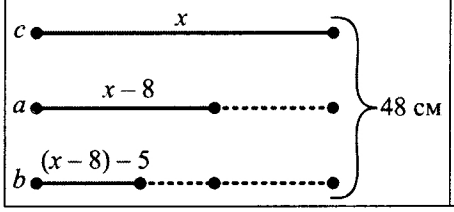
Пам'ятаємо, що короткий запис умови — не самоціль, а лише допоміжний засіб під час розв'язування задач. Якщо учні задачу розв'язують без неї, то не доцільно вимагати від них складання структурної або графічної схеми. Навпаки, варто пропонувати завдання на складання задачі за даною графічною схемою.

Пошук невідомого і складання рівняння відповідно до можливих запитань задачі можна представити у вигляді такої таблиці (табл. 15).

Таблиця 15

Графічна схема після обрання основного невідомого	**Запитання і рівняння**
	*Яку довжину має перша сторона трикутника?* $x + (x - 5) + (x + 8) = 48$
	*Яку довжину має друга сторона трикутника?* $x + (x + 5) + ((x + 5) + 8) = 48$

Продовження

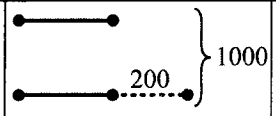
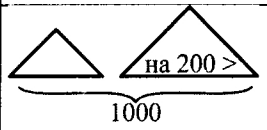
Графічна схема після обрання основного невідомого	Запитання і рівняння
	*Яку довжину має третя сторона трикутника?* $x + (x - 8) + ((x - 8) - 5) = 48$

Ускладнити це завдання можна, запропонувавши учням поміркувати над тим, яку зі схем доцільно обрати, якщо ставиться вимога знайти довжину найменшої чи найбільшої сторони.

Оскільки арифметичні способи розв'язання мають багато спільного із алгебраїчним ходом міркувань, то в учителя з'являється можливість провести паралелі між етапами розв'язування задач за допомогою арифметики і алгебри, використовуючи таблицю (наприклад, табл. 16).

Задача 37. На двох токах разом було 1000 т зерна. Скільки зерна було на кожному току, якщо на першому його було на 200 т менше, ніж на другому?

Таблиця 16

Етапи розв'язування	Арифметичний спосіб	Алгебраїчний метод
Аналіз задачі: виділення умов, вимог; встановлення зв'язків між відомими і невідомими величинами; складання графічної схеми; підведення під тип	 Задача відноситься до задач на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею	 1000
Пошук плану	Оскільки визначено тип задачі, то можна використати типовий прийом розв'язання: виключення одного із невідомих (наприклад, більшого)	1. Позначимо кількість зерна на першому току x т. 2. Виразимо кількість зерна на другому току через зерно на першому. 3. Знаючи, що всього було 1000 т зерна, складемо рівняння

Етапи розв'язування	Арифметичний спосіб	Алгебраїчний метод
Реалізація плану	Припустимо, що на кожному току кількість зерна була однакова, наприклад, як на першому. Тоді на обох токах разом було 1000 – 200 = 800 т зерна. Отже, на першому току було 800: 2 = 400 т зерна, а на другому — 400 + 200 = 600 т зерна	Нехай на першому току було x т зерна, тоді на другому — $(x + 200)$ т. Разом було $x+ (x + 200)$ т зерна, що за умовою дорівнює 1000 т. Складаємо рівняння: $x + x + 200 = 1000$. $2x = 1000 – 200$, $2x = 800$, $x = 800 : 2$, $x = 400$ на першому, а на другому току — 400 + 200 = 600 т зерна
Контроль і корекція розв'язування	Перевіримо, чи отримані результати відповідають умові: 400 + 600 = 1000 т. Можемо для перевірки розв'язати задачу іншим способом, виключаючи менше невідоме	Перевірка: 400 + 600 = 1000 т. Можемо для перевірки розв'язати задачу склавши інше рівняння. Наприклад, через y т позначити зерно на другому току, тоді матимемо $y – 200 + y = 1000$.

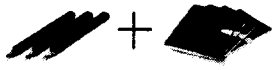
Така таблиця наочно продемонструє зв'язок арифметичного способу виключення одного з невідомих через заміну його іншим з урахуванням зв'язку між ними (різницевого чи кратного порівняння) і складанням рівняння та схожість міркувань при арифметичному і алгебраїчному розв'язуванні.

Хорошою допомогою під час пошуку алгебраїчної моделі можуть стати ілюстративні схеми, які учні звикли використовувати під час розв'язування задач такими арифметичними способами, як спосіб зрівнювання даних, спосіб зрівнювання шуканих, спосіб заміни тощо.

Задача 38. Перший раз Марійка за 3 олівці і 4 блокноти заплатила 26 грн, а другий — за 7 таких самих олівців і 6 блокнотів заплатила 44 гривні. Яка ціна одного олівця і одного блокноту?

Використовуємо таблицю (табл. 17).

Таблиця 17

	3 олівці й 4 блокноти — 26 грн
	7 олівців і 6 блокнотів — 44 грн

Розв'язання задачі алгебраїчним методом і відповідні їм етапи розв'язання даної задачі арифметичним методом можна також занести у таблицю (табл. 18)

Таблиця 18

Розв'язання задачі

Арифметичним способом	Алгебраїчним методом
3 олівці й 4 блокноти — 26 грн, 7 олівців і 6 блокнотів — 44 грн	Нехай x грн — ціна олівця, y грн — ціна блокнота. За умовою задачі маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 3x+4y=26, \\ 7x+6y=44. \end{cases}$
Зрівнюємо кількість олівців у двох покупках. Тоді в зміненій першій покупці було придбано: 21 олівець і 28 блокнотів за 182 грн, а в другій зміненій покупці — 21 олівець і 18 блокнотів за 132 грн	Помножимо обидві частини першого рівняння на 7, а другого — на 3. Отримаємо: $\begin{cases} 21x+28y=182, \\ 21x+18y=132. \end{cases}$
Знаходимо, на скільки більше блокнотів **було б** куплено першого разу: 28 – 18 = 10 (шт.). Знаходимо, на скільки більше **заплатили б** за першу покупку: 182 – 132 = 50 (грн)	Віднімемо почленно від першого рівняння друге. Отримаємо: $\begin{cases} 21x+24y=182, \\ 10y=50. \end{cases}$
Знаходимо, скільки коштує один блокнот: 50 : 10 = 5 (грн)	Знаходимо невідоме: $y = 50 : 10$; $y = 5$

Відповідь. Блокнот коштує 5 грн.

Заповнення такого виду таблиць сприяє кращому усвідомленню учнями як кроків зі складання систем лінійних рівнянь за текстом задачі, так і допомагає краще розібратися і запам'ятати способи розв'язування систем з лінійними рівняннями.

Можна також запропонувати учням розв'язати добірку задач з однаковими числовими даними і заповнити порівняльну таблицю (табл. 19).

Таблиця 19

Текст задачі	**Арифметичне розв'язання**	**Алгебраїчне розв'язання**
2 олівці і 3 зошити коштують 1,3 грн, а 2 олівці й 1 зошит —70 к. Скільки коштує один олівець і один зошит?	Використаємо **спосіб виключення невідомого шляхом віднімання**. 2 о. і 3 з. — 130 к. 2 о. і 1 з. — 70 к. ——————— 2 з. — 60 к. 60 : 2 = 30 к. — 1 зошит. 70 – 30 = 40 к. —2 олівці; 40 : 2 = 20 к. — 1 олівець	Нехай олівець коштує x к., а зошит — y к. Складаємо систему: $\begin{cases} 2x+3y=130, \\ 2x+y=70. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=130, \\ 2y=60; \end{cases}$ $2y = 60$, $y = 60 : 2$; $y = 30$ (1 зош.) $2x + 30 = 70$; $2x = 70 - 30$; $2x = 40$; $x = 40 : 2$; $x = 20$

Попереднє поєднання арифметичного і алгебраїчного розв'язувань є природним і зрозумілим, оскільки арифметичне розв'язування задач передує вивченню алгебраїчного методу і доцільно, користуючись принципом наступності у навчанні, «попередні, вже засвоєні знання і навички» використовувати для формування «майбутніх». Саме тому, на перший погляд, незвичним здається використання алгебраїчного методу для пошуку арифметичного шляху розв'язування задачі.

Як відомо, арифметичні способи тривалий час не використовували в шкільній практиці навчання математики у 5—6-х класах. Учнів одразу намагалися навчити розв'язувати задачі «більш загальним і універсальним» алгебраїчним методом. Колишні учні зараз стали вчителями, і значна їх частина впевнено може використовувати алгебраїчний метод, але відчуває труднощі під час пошуку арифметичного розв'язання текстової задачі. Саме їм адресовані поради, які можна зустріти у методичній літературі, щодо використання алгебраїчного розв'язання для знаходження арифметичного.

По-перше, слід звернути увагу на вид складеного за умовою рівняння, якщо він не підказує арифметичний шлях розв'язування задачі, то потрібно розв'язувати отримане рівняння, не виконуючи дій між даними числами, а лише намічати їх. Отриманий в результаті числовий вираз для невідомого буде фактично числовою моделлю даної задачі.

По-друге, по складеній числовій моделі слід сформулювати запитання і розгорнути числову модель у впорядкований ланцюжок дій.

Розглянемо на конкретних задачах приклади можливих міркувань.

Задача 39. Після завершення театрального спектаклю 174 глядачі вирішили додому добиратися пішки, а решта поїхали на трамваях у 18 вагонах, причому у кожен вагон сідало на 5 чоловік більше, ніж було в ньому місць. Якби глядачі, що їхали з театру на трамваях, сідали у вагони за кількістю місць, то знадобилось би ще 3 вагони, причому в останньому залишилось би 6 вільних місць. Скільки всього глядачів було в театрі?

Етапи розв'язання задачі алгебраїчним методом і відповідні етапи розв'язання задачі арифметичним способом показані в таблиці (табл. 20).

Таблиця 20

Розв'язання задачі	
Алгебраїчним методом	**Арифметичним способом**
Нехай у кожному трамваї було x місць. Тоді у кожний вагон спочатку сідало по $(x + 5)$ осіб, а всього пасажирів було $(x + 5) \cdot 18$ осіб. Якщо в вагон трамвая сідає по x осіб, то кількість пасажирів буде $(x \cdot 21 - 6)$ осіб. Тоді за умовою задачі маємо рівняння: $(x + 5) \cdot 18 = x \cdot 21 - 6$. Перетворимо його: $21x - 18x = 90 + 6$ або $3x = 96$	Якщо в кожний вагон сідало на 5 осіб більше, ніж було в ньому місць, то всього у 18 вагонах було на $5 \cdot 18 = 90$ (осіб) більше, ніж місць. У 3 додаткові вагони ввійшло 90 осіб і залишилось ще 6 вільних місць. Отже, у трьох вагонах всього було $90 + 6 = 96$ (місць)
Знаходимо невідоме: $x = 96 : 3$, $x = 32$	Знаходимо число місць в одному вагоні: $96 : 3 = 32$ (місця)

Використовуючи дані цієї таблиці, отримуємо арифметичне розв'язання задачі:

1) $5 \cdot 18 = 90$ (осіб) — на стільки осіб більше, ніж місць було в 18 вагонах;

2) $90 + 6 = 96$ (м.) — стільки місць у трьох вагонах;

3) $96 : 3 = 32$ (м.) — стільки місць в одному вагоні;

4) $32 + 5 = 37$ (осіб) — було в кожному з вагонів пасажирів спочатку;

5) $37 \cdot 18 = 666$ (осіб) — стільки глядачів поїхало на трамваях;

6) $666 + 174 = 840$ (осіб) — всього глядачів було в театрі.

Відповідь. 840 осіб.

Задача 40. Із пункту A в пункт B вийшов екскурсійний катер і рухався зі швидкістю 24 км/год. Із цього самого пункту A на 8 год раніше вийшов буксир з баржами, що рухався зі швидкістю 8 км/год. Буксир прийшов у пункт B на 16 год пізніше, ніж катер. Знайдіть відстань між пунктами A і B.

Таблиця 21

Розв'язання задачі

Алгебраїчним методом	Арифметичним способом
Нехай x год — час руху катера з пункту A в пункт B, тоді відстань, яку він пройшов, $24x$ км. Час руху буксира $(8 + x + 16)$ год, а відстань, яку він пройшов, $(8 + x + 16) \cdot 8$ км. За умовою задачі складаємо рівняння: $24x = (8 + x + 16) \cdot 8$	Катер і буксир з баржами пройшли одну і ту саму відстань
Перетворюємо рівняння: $24x - 8x = (8 + 16) \cdot 8$, $(24 - 8)x = (8 + 16) \cdot 8$	Знайдемо, на скільки годин більше був у дорозі буксир, ніж катер: $8 + 16$. Знайдемо, шлях, що пройшов буксир за 24 год: $8 \cdot (8 + 16)$. Знайдемо, на скільки кілометрів у годину швидкість катера більша від швидкості буксира: $24 - 8$
Знаходимо невідоме: $x = \frac{(8+16) \cdot 8}{24-8}$	Знаходимо час руху катера: $\frac{(8+16) \cdot 8}{24-8}$

Використовуючи правий стовпчик таблиці, отримуємо арифметичне розв'язання задачі:

1) $8 + 16 = 24$ (год) — на стільки годин більше був у дорозі буксир, ніж катер;

2) $8 \cdot 24 = 192$ (км) — шлях, який буксир пройшов за 24 год;

3) 24 – 8 = 16 (км/год) — на стільки кілометрів у годину швидкість катера більша від швидкості буксира;

4) 192 : 16 = 12 (год) — час руху катера із пункту A в пункт B;

5) 24 · 12 = 288 (км) — відстань між пунктами А і В.

Відповідь. 228 км.

Складання аналогічних таблиць допоможе знайти арифметичне розв'язання і для інших алгебраїчних моделей. Проте слід пам'ятати, що розв'язування деяких лінійних рівнянь дуже непросто розтлумачити відповідними поясненнями під час арифметичного розв'язання.

розділ 2

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОКРЕМИХ ВИДІВ

Метод розв'язування є хорошим, якщо з самого початку ми можемо передбачити — і далі підтвердити це, — що, слідуючи цьому методу, ми досягнемо мети.
Лейбніц

2.1. ЗАДАЧІ БЕЗ РІЗНОЙМЕННИХ ВЕЛИЧИН

Текстові задачі на складання рівняння можна поділити на дві групи: без різнойменних величин та з різнойменними величинами. До першої групи відносяться задачі з абстрактними числовими даними (задачі на відновлення чисел) або з однойменними величинами, математична структура яких дозволяє віднести ці задачі до таких типів: знаходження чисел за їх сумою та різницею; знаходження чисел за сумою (різницею) і кратним відношенням; пропорційне ділення; змішування; «було-стало» тощо.

Розглянемо приклади розв'язання деяких задач першої групи.

2.1.1. Задачі на знаходження чисел та цифр числа.

Попередньо зауважимо, що при розв'язуванні задач на числові залежності можна використовувати такі відомості.

1. Якщо натуральне число A має n цифр, то

$$A = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — кількість одиниць, десятків, сотень, ... відповідно.

Тобто десятковий запис двоцифрового числа записуємо $\overline{ab} = 10a + b$, трицифрового — $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ і т. д.

2. Число можна «розбити» на доданки — числа, записані цифрами початкового числа у незміненому порядку:

$$\overline{abcd} = \overline{a000} + \overline{bcd} = 1000 \cdot a + \overline{bcd} \text{ і т. п.}$$

3. Якщо при діленні натурального числа a на натуральне число b отримали неповну частку q і остачу r, то $a = bq + r$, $0 \le r < b$.

Задача 41. Деяке трицифрове число закінчується цифрою 1. Якщо цю цифру перенести з останнього місця на перше, не змінюючи при цьому порядок решти цифр, то отримане нове число буде на 90 менше, ніж шукане. Знайти це трицифрове число.

Розв'язання

Нехай шукане число $\overline{mn1}$ ($m \neq 0$), тоді нове число — $\overline{1mn}$.

За умовою задачі

$$\overline{mn1} - \overline{1mn} = 90. \qquad (1)$$

Врахувавши, що для шуканого числа m — цифра сотень, а n — цифра десятків, маємо $\overline{mn1} = 100m + 10n + 1$. Аналогічно для нового числа $\overline{1mn}$ запишемо $\overline{1mn} = 100 + 10m + n$. Врахуємо рівність (1) і складемо рівняння:

$$(100m + 10n + 1) - (100 + 10m + n) = 90.$$

Проаналізувавши складене рівняння, робимо висновок, що $n = 1$. Звідси $m = 2$. Отже, шукане число 211.

Відповідь. 211.

Задача 42. Якщо двоцифрове число поділити на суму його цифр, то частка буде дорівнювати 4, а остача 3. Якщо це саме число поділити на добуток його цифр, то частка буде 3, а остача 5. Знайти це число.

Розв'язання

Нехай x — цифра десятків, а y — цифра сотень. За умовою задачі складаємо два рівняння та об'єднуємо їх в систему:

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y) + 3, \\ 10x + y = 3xy + 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 10x + y = 3xy + 5. \end{cases}$$

Звідси $2x^2 - 5x + 1 = 0$ і $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Другий корінь не задовольняє умову задачі. Знаходимо $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Відповідь: 23.

Задача 43. Знайти шестицифрове ціле число, яке починається з цифри 1, і таке, що, коли переставити цю цифру в кінець числа, то утвориться число, втричі більше шуканого.

Розв'язання

Особливість цієї задачі полягає в тому, що ми не будемо шукати кожну цифру окремо, адже це неможливо: за умовою — 5 невідомих цифр і тільки одна залежність.

Нехай шукане число $\overline{1abcde} = 100000 + \overline{abcde} = 100000 + x$, де $\overline{abcde} = x$.

Число, яке отримали після перестановки, —

$$\overline{abcde1} = 10 \cdot \overline{abcde} + 1 = 10x + 1.$$

За умовою шукане число $10000 + x$ утричі менше, ніж число після перестановки, тобто ніж число $10x + 1$. Складаємо рівняння:

$$3(10000 + x) = 10x + 1,\ x = 42\ 857.$$

Отже, шукане число 142 857.

Перевірка. Задачу можна розв'язати іншим способом, який є традиційним для числових головоломок на кшталт «відгадай, які букви позначають які цифри». Для цього достатньо записати множення чисел $\overline{1abcde}$ і 3 у стовпчик.

$$\begin{array}{r} 1abcde \\ \times\quad\ 3 \\ \hline abcde1 \end{array}$$

Міркуючи «з кінця», знаходимо, що $e = 7$, $d = 5$, $c = 8$, $b = 2$, $a = 4$.

Відповідь. 142 857.

Задача 44. Знайти число, знаючи, що коли до нього додати 6 і утворену суму поділити на 3, то частка буде на стільки більша від невідомого числа, на скільки 2 більше, ніж $\frac{2}{3}$ невідомого числа.

Розв'язання

Позначимо невідоме число через x. Тоді після додавання до нього числа 6 і ділення отриманої суми на 3 маємо частку $\frac{x+6}{3}$.

Різниця між часткою $\frac{x+6}{3}$ і шуканим числом x буде $\frac{x+6}{3} - x$ (1).

Різниця між числом 2 і $\frac{2}{3}x$ буде $2 - \frac{2}{3}x$ (2).

Оскільки за умовою задачі (1) = (2), то складаємо рівняння

$$\frac{x+6}{3} - x = 2 - \frac{2}{3}x.$$

Розв'язуючи рівняння, отримуємо тотожність $2 = 2$.

Отже, x може бути довільним числом.

Для перевірки за умовою правильності отриманого розв'язку достатньо частку представити як суму дробу і цілого числа 2: $\frac{x+6}{3}=\frac{x}{3}+2$.

А потім виконати віднімання $\left(\frac{x}{3}+2\right)-x=2-\frac{2}{3}x$.

Відповідь. Довільне число.

Задача 45. Чисельник звичайного дробу на 1 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 1, а до знаменника 6, то одержимо дріб, який становитиме 50 % від початкового. Знайти цей дріб.

Розв'язання

Словесний текст		**Переклад алгебраїчною мовою**
Чисельник дробу	—	x.
Знаменник дробу	—	$x+1$.
Дріб	—	$\frac{x}{x+1}$.
Чисельник збільшили на 1, а знаменник на 6, то одержали дріб	—	$\frac{x+1}{(x+1)+6}=\frac{x+1}{x+7}$. (1)
Від початкового дробу 50 %	—	$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{50}{100}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{2}$. (2)
За умовою (1) = (2), складаємо рівняння	—	$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{x+1}{x+7}$.

Розв'язавши рівняння, знайдемо $x_1=1,\ x_2=2$.

Розглядаємо для перевірки два випадки.

Якщо $x = 1$, то $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$, а його 50 % це $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (3). Дріб після змін — $\frac{1+1}{1+7}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ (4). Оскільки (3) = (4), то $\frac{1}{2}$ шуканий дріб.

Якщо $x = 2$, то $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$, а його 50 % це $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ (5). Дріб після змін — $\frac{x+1}{x+7}=\frac{2+1}{2+7}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ (6). Оскільки (5) = (6), то $\frac{2}{3}$ шуканий дріб.

Відповідь. $\frac{1}{2}$ або $\frac{2}{3}$.

Серед задач на знаходження чисел зустрічаються задачі з альтернативними умовами, тобто такі задачі, під час розв'язування яких необхідно розглядати кілька можливих варіантів умови, а відповідь записувати лише після того, як усі можливі варіанти будуть досліджені.

Задача 46. Сума трьох чисел дорівнює 100. Сума двох з них дорівнює 80, а перше число на 20 більше від другого. Знайти ці числа.

Розв'язання

Позначимо шукані числа x, y, z (x — перше число, y — друге, z — третє). За умовою їхня сума дорівнює 100, отже, можна скласти перше рівняння:

$$x+y+z=100.$$

З умови також відомо, що різниця між першим і другим числом становить 20. Звідси маємо ще одне рівняння

$$x-y=20.$$

В умові чітко не вказано, сума яких саме чисел дорівнює 80. Отже, третє рівняння для майбутньої системи рівнянь може мати вигляд або $x+y=80$, або $x+z=80$, або $y+z=80$.

Математична модель задачі є сукупністю трьох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=100,\\x-y=20,\\x+y=80;\end{cases}\\\begin{cases}x+y+z=100,\\x-y=20,\\x+z=80;\end{cases}\\\begin{cases}x+y+z=100,\\x-y=20,\\y+z=80;\end{cases}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=50,\\y=30,\\z=20;\end{cases}\\\begin{cases}x=40,\\y=20,\\z=40;\end{cases}\\\begin{cases}x=20,\\y=0,\\z=80.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. 1) 50; 30; 20; 2) 40; 20; 40; 3) 20; 0; 80.

Задача 47. Знайти відношення двох чисел, якщо відомо, що різниця першого числа і 10 % другого числа становить 50 % суми другого числа і 50 % першого числа.

Розв'язання

Словесний текст		Переклад алгебраїчною мовою
Нехай перше число	—	x.
Друге число	—	y.
10 % другого числа	—	$\frac{y}{100}\cdot 10 = 0{,}1y$.
Різниця між першим числом і 10 % другого числа	—	$x - 0{,}1y$. (1)
50 % першого числа	—	$0{,}5x$.
Сума другого і 50 % першого числа	—	$y + 0{,}5x$.
50 % суми другого числа з 50 % першого	—	$0{,}5(y + 0{,}5x)$. (2)
(1) = (2), складаємо рівняння	—	$x - 0{,}1y = 0{,}5(y + 0{,}5x)$.

Розв'язуємо рівняння:

$$x - 0{,}1y = 0{,}5y + 0{,}25x,\ 0{,}75x = 0{,}6y,\ \frac{x}{y} = \frac{0{,}6}{0{,}75} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Відповідь. 0,8.

Значна частина числових задач допускає можливість розв'язати задачу не тільки алгебраїчним методом, а ще й різними арифметичними способами. У таких випадках можна правильність виконаного алгебраїчного розв'язання перевірити за допомогою арифметичного.

Задача 48. Число 80 розбили на дві нерівних числа так, щоб половина більшого числа була на 10 більша від меншого числа. Чому дорівнює кожне з чисел?

Розв'язання 1

Для пошуку відповідної розв'язуючої моделі можна використати графічну схему і запис у вигляді таблиці.

Позначимо через x менше із шуканих чисел (табл. 22).

Таблиця 22

Пояснення	Позначення
Менше з шуканих чисел	x
Половина більшого числа	$x + 10$
Ціле більше число	$2(x + 10)$
Сума двох шуканих чисел	$2(x + 10) + x$

Графічна схема може бути такою (рис. 15)

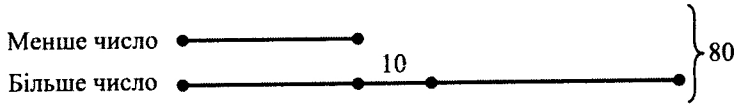


Рис. 15

Складаємо рівняння $2(x + 10) + x = 80$.

Розв'язання 2

Позначимо через y більше з шуканих чисел (табл. 23).

Таблиця 23

Пояснення	Позначення
Більше із шуканих чисел	y
Менше із шуканих	$\frac{y}{2}-10$
Сума двох шуканих чисел	$y+\left(\frac{y}{2}-10\right)$
Складаємо рівняння	$y+\left(\frac{y}{2}-10\right)=80$

Графічна схема може бути такою (рис. 16)

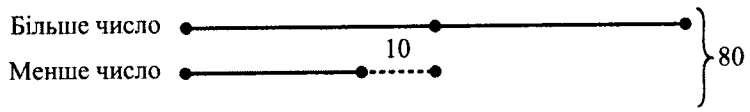


Рис. 16

Розв'язання 3

Число 80 — це сума двох доданків, і половина одного з них більша від другого на 10 (рис. 17).

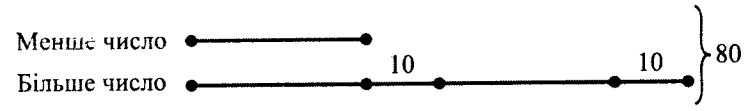


Рис. 17

Отже, перший цілий доданок буде більший за другий доданок на $10 \cdot 2 = 20$. Отримали задачу на знаходження двох чисел за їх сумою і різницею. Таку задачу учні вміють розв'язувати чотирма різними арифметичними способами.

Розв'язання 4

За умовою половина одного числа на 10 більша за друге число, коли ж від обох половин більшого числа відняти по 10, то кожна з них дорівнюватиме меншому числу.

Сума двох доданків зменшиться на $10 \cdot 2 = 20$ і буде дорівнювати $80 - 20 = 60$.

Отримане число 60 — це сума трьох рівних між собою чисел, кожне з яких дорівнює меншому шуканому числу.

Отже, $60 : 3 = 20$ менше з шуканих чисел. Відповідно більше шукане число буде $80 - 20 = 60$.

Розв'язання 5

За умовою половина одного числа на 10 більша за друге число. Якщо до меншого числа додати 10, то воно дорівнюватиме половині більшого числа.

Сума двох доданків збільшиться на 10 і стане $80 + 10 = 90$.

Отримане число 90 дорівнює сумі трьох рівних між собою доданків, кожен з яких дорівнює половині більшого числа.

Отже, $(90 : 3) \cdot 2 = 60$ — більше з шуканих чисел. Відповідно менше шукане число буде $80 - 60 = 20$.

Відповідь. 20, 60.

2.1.2. Сюжетні задачі, в яких використовується значення однієї і тієї самої величини.

Два значення однієї величини можна пов'язати одним з наступних відношень: різницеве порівняння (більше на ..., менше на ...); кратне порівняння (більше в ... разів, менше в ... разів); відсоткове відношення (становить ... %); дріб (частина) від числа. Зауважимо, що порівняння за допомогою відсоткового відношення і поняття «дріб від числа» є окремими випадками кратного порівняння. Крім того, п'ятим способом вираження зв'язку між величинами є сумування двох значень величини.

Задача 49. У хлопчика в руках кілька олівців. Якщо він перекладе один олівець з правої руки в ліву, то в обох руках олівців стане порівну.

Якщо він з лівої руки перекладе в праву 2 олівці, то в правій руці олівців буде в два рази більше, ніж у лівій. Скільки олівців тримає хлопчик у кожній руці?

Зауваження. Якщо дещо змінити текст задачі, то задача перетвориться у суто числову про знаходження двох чисел. А саме:

Задумали два числа. Якщо від першого числа відняти 1, а до другого додати 1, то результати дій будуть рівними. Якщо від другого числа відняти 2, то утвориться число у два рази менше, ніж сума першого числа і числа 2. Які числа задумали?

Розв'язання 1

(*розв'язуюча модель — система рівнянь із двома невідомими*)

Позначимо кількість олівців у правій руці через x, а у лівій — через y.

Після того як із правої руки в ліву переклали один олівець, у правій стало $(x - 1)$ олівців, а у лівій — $(y + 1)$ олівців. За умовою після першого перекладання олівців у обох руках їх кількість однакова, маємо рівняння:

$$x - 1 = y + 1. \qquad (1)$$

Коли з лівої руки 2 олівці переклали в праву, то у правій стало $(x + 2)$ олівці, а у лівій залишилося $(y - 2)$ олівців. Оскільки в лівій руці після другого перекладання стало у 2 рази менше олівців, ніж у правій, то маємо друге рівняння:

$$x + 2 = 2(y - 2). \qquad (2).$$

Об'єднуємо рівняння (1) і (2) в систему

$$\begin{cases} x - 1 = y + 1, \\ x + 2 = 2(y - 2). \end{cases}$$

Звідси $x = 10$, $y = 8$.

Розв'язання 2

(*розв'язуюча модель — рівняння з одним невідомим*)

Для кращого аналізу залежностей умови складемо таблицю змін, розбивши умову на два випадки ***A*** і ***B*** (табл. 24).

Таблиця 24

***A*. Перекладають 1 олівець**					***B*. Перекладають 2 олівці**			
	Було	Зміни	Стало			Було	Зміни	Стало
Права рука	?	– 1	?	Порівну	Права рука	?	+ 2	?, у 2 рази >
Ліва рука	?	+ 1	?		Ліва рука	?	– 2	?

Аналіз таблиці показує, що в умові задачі дві залежності, які пов'язують кількість олівців у правій і лівій руках: «порівну» (випадок *A*) і «у 2 рази більше» (випадок *B*). Отже, якщо для введення невідомого обираємо залежність із випадку *A*, то рівняння складаємо на базі залежності випадку *B*. Коли ж спочатку використовуємо для зв'язку між невідомими залежність *B*, то складання рівняння виконуємо на основі випадку *A*.

Спосіб 1. Аналізуємо випадок A. Нехай після першої зміни в правій і лівій руках стало по x олівців, тоді до змін у правій руці було $(x + 1)$ олівець, а у лівій — $(x - 1)$ олівців. Після другої зміни у правій руці стало $((x + 1) + 2)$ олівців, а в лівій — $((x - 1) - 2)$ олівців. Враховуючи залежність випадку *B*, складаємо рівняння:

$$(x+1)+2=2((x-1)-2).$$

Звідси $x = 9$. А це означає, що після першого перекладання у кожній руці стало по 9 олівців. Отже, спочатку у правій руці було 10 олівців, а у лівій — 8 олівців.

Спосіб 2. Аналізуємо випадок B. Нехай після другої зміни у лівій руці стало x олівців, тоді у правій — $2x$ олівців. Подальше пояснення проведемо у вигляді заповнення таблиці: спочатку заповнюємо клітинки випадку *B*, а потім *A* (табл. 25).

Таблиця 25

A. Перекладають 1 олівець					**B. Перекладають 2 олівці**			
	Було	Зміни	Стало			Було	Зміни	Стало
Права рука	$2x - 2$	-1	$(2x - 2) - 1$	Порівнюємо	Права рука	$2x - 2$	$+2$	$2x$
Ліва рука	$x + 2$	$+1$	$(x + 2) + 1$		Ліва рука	$x + 2$	-2	x

Складаємо рівняння $(2x - 2) - 1 = (x + 2) + 1$.

Можливий ще й такий спосіб міркування, коли за невідоме x приймають не допоміжне невідоме, як у попередніх випадках, а одне з шуканих.

Спосіб 3. Для зручності опис складання рівняння розіб'ємо на кроки.

1. Нехай у правій руці у хлопчика було x олівців.

2. Аналізуємо випадок *B*. Якщо в праву руку з лівої перекласти 2 олівці, то у правій руці стане $(x + 2)$ олівців.

3. Тепер у правій руці в 2 рази більше олівців, ніж у лівій, отже, у лівій руці $\frac{x+2}{2}$ олівців.

4. До перекладання у лівій руці було $\frac{x+2}{2}+2$ олівців.

5. Аналізуємо випадок *А*. Після перекладання з правої в ліву руку одного олівця в правій руці олівців стало $(x-1)$, а у лівій руці — $\left(\frac{x+2}{2}+2\right)+1=\frac{x+2}{2}+3$ олівців.

6. За умовою олівців стало порівну, складаємо рівняння $x-1=\frac{x+2}{2}+3$.

Розв'язуємо рівняння і знаходимо, що $x = 10$. Отже, у правій руці було спочатку 10 олівців.

Відповідь. 10 олівців у правій руці і 8 олівців у лівій.

Під час розв'язування попередньої задачі використали прийом зворотних міркувань, який часто застосовують для розв'язування задач виду «було-стало» (задачі на перекладання). У цих задачах важливим є наявність трьох значень: початкова кількість, зміна кількості й нова (залишкова) кількість. Для складання рівняння потрібно порівняти яким-небудь чином два значення із вказаних трьох.

Задача 50. В одному мішку було 68,6 кг цукру, а в другому — 70 кг. З другого мішка взяли цукру втричі більше, ніж з першого, і тоді в першому залишилось у півтора рази більше цукру, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

Розв'язання

Нехай з першого мішка взяли x кг цукру. Заповнюємо таблицю (табл. 26) і складаємо рівняння.

Таблиця 26

	Було, кг	Зміни	Стало
Перший мішок	68,6	$-x$	$68,6-x$, у 1,5 раз >
Другий мішок	70	$-3x$	$70-3x$

$68,6-x=1,5\cdot(70-3x)$, $x = 10,4$.

Отже, з першого мішка взяли 10,4 кг. Тоді з другого мішка — $3\cdot10,4=31,2$ (кг).

Відповідь. 10,4 кг; 31,2 кг.

Задача 51. Стрічку завдовжки 40 м поділили на дві частини у відношенні 2 : 3. Визначте довжину кожної частини.

Розв'язання

Спосіб 1. Нехай x м — спільна міра довжин двох частин, на які поділили стрічку. Тоді довжина першої частини — $2x$ м, а другої — $3x$ м. Довжина всієї стрічки $(2x + 3x)$ м, що за умовою дорівнює 40 м. Складаємо рівняння.

$$2x + 3x = 40,\ x = 8.$$

Знаходимо довжини першої і другої частин: $8 \cdot 2 = 16$ (м), $8 \cdot 3 = 24$ (м).

Відповідь. 16 м, 24 м.

Зауважимо, що цей спосіб добре засвоюється учнями, оскільки нагадує їм відомий арифметичний спосіб умовної частини.

Спосіб 2. За умовою довжини частин відносяться як 2 : 3. Це означає, що перша частина дорівнює $\frac{2}{3}$ другої. Якщо позначити довжину другої частини через x м, то довжина першої буде $\frac{2}{3}x$ м.

За умовою довжина усієї стрічки 40 м. Складаємо рівняння

$$\frac{2}{3}x + x = 40.$$

Спосіб 3. Позначимо довжину першої і другої частин стрічки x м і y м відповідно. За умовою можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Найбільше труднощів в учнів викликають задачі, в яких відношення величин подається у вигляді відсотків. Пов'язано це з хибними аналогіями, які можуть виникнути в них під час відсоткових порівнянь.

Учні звикли встановлювати зворотні зв'язки під час порівняння (різницевого чи кратного) так: якщо число A більше за число B на 30, то відповідно число B менше за число A на 30. Тому іноді вони вважають, що коли число A більше від числа B на 30 %, то число B менше від числа A на 30 % також. Такі міркування неправильні, оскільки в кожному з цих випадків 30 % береться від різних чисел: у першому випадку за 100 % слід брати число B, а у другому число A і 30 % від B не дорівнюють 30 % від A ($A \neq B$).

Задача 52. Мотузку завдовжки 22 м розрізали на дві частини так, що одна з них виявилась на 20 % довшою, ніж друга. Знайти довжину кожної частини.

Розв'язання

Аналіз задачі. У тексті задачі сказано, що перша частина розрізаної мотузки виявилась на 20 % довшою, ніж друга. Це означає, що за 100 % слід брати другу частину, а перша частина більша від другої на 20 % другої частини, тобто вона становить 120 %. Якщо учні помилково беруть за 100 % першу частину, а другу за 80 %, то це означає, що перша частина більша від другої на 20 % першої частини. Отже, починаючи аналіз задач на відсотки слід встановити, яке із значень (яке з чисел) вважаємо за 100 %, тобто від якого числа беруться відсотки.

Ще однією помилкою може бути тлумачення довжини всієї мотузки за 100 %, а потім відповідно першої частини і другої 60 % і 40 %.

Складання розв'язуючої моделі. Нехай довжина другої частини мотузки x м, тоді першої буде $1{,}2x$ м (120 % від x). Складаємо рівняння:

$$x + 1{,}2x = 22,\ x = 10.$$

Отже, довжина другої частини 10 м, а першої $1{,}2 \cdot 10 = 12$ (м).

Відповідь. 10 м, 12 м.

Зауважимо, що можна було б довжину першої частини прийняти за x м, тоді довжина другої була б $(22 - x)$ м. А рівняння мало б вигляд

$$\frac{x}{22 - x} = 1{,}2\ .$$

Задача 53. Після двох послідовних знижень ціни на одне й те саме число відсотків ціна книжки впала з 30 грн до 19 грн 20 к. На скільки відсотків зменшувалась ціна книги кожного разу?

Розв'язання

Нехай число відсотків, на яке зменшувалася ціна книжки кожного разу, — x. Заповнюємо таблицю (табл. 27) і складаємо рівняння.

Таблиця 27

Пояснення	Позначення
Число відсотків, на скільки кожного разу зменшувалась ціна книжки	x
Перша знижка	$0{,}3x$
Ціна книжки після першої знижки	$30 - 0{,}3x$
Друга знижка	$\frac{30 - 0{,}3x}{100} \cdot x = \frac{(30 - 0{,}3x)x}{100}$

Продовження

Пояснення	Позначення
Ціна книжки після другої знижки	$30-0,3x-\frac{(30\ -\ 0,3x)x}{100}$

Складаємо рівняння $30-0,3x-\frac{(30\ -\ 0,3x)x}{100}=19,2$.

Для складання рівняння використано метод обернених задач. Проте можливі й інші способи складання алгебраїчної моделі (наприклад, системи рівнянь).

Задача 54. Ціну на іграшковий м'яч знижено на стільки відсотків, скільки гривень коштував м'яч до зниження ціни. На скільки відсотків була знижена ціна на м'яч, якщо нова ціна м'яча — 16 грн.

Розв'язання

Приймемо, що ціна м'яча була знижена на x % (x грн — початкова ціну м'яча до зниження). Ціна м'яча у гривнях знизилась на

$$x\cdot\frac{x}{100}=\frac{x^2}{100}\text{ грн.}$$

Нова ціна м'яча стала $x-\frac{x^2}{100}$, що за умовою дорівнює 16.

Складаємо рівняння:

$$x-\frac{x^2}{100}=16,\ x^2-100x+1600=0,\ x_1=20, x_2=80.$$

Перевірка. Якщо x = 20, то початкова ціна була 20 грн і її мали знизити на 20 %: $20-20\cdot0,2=20-4=16$ (грн).

Якщо x = 80, то початкова ціна була 80 грн і її мали знизати на 80 %: $80-80\cdot0,8=80-64=16$ (грн).

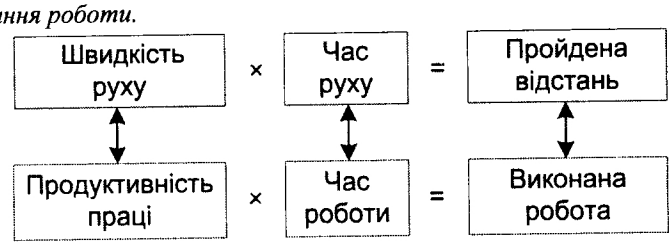
Відповідь. 20 % або 80 %.

2.2. ЗАДАЧІ НА РОБОТУ

У фізиці поняття «робота» визначається як добуток сили на переміщення, а сама робота називається *механічною*. У підручниках з математики також є чимало задач, які можна об'єднати тематикою «виконання роботи», але з іншим змістовим означенням: як добуток продуктивності праці на проміжок часу, протягом якого виконується ця робота. До задач цього виду відносяться задачі, в яких один або кілька робітників (механізмів) виконують певну роботу за певний час. Залежно від даних потрібно визначити: через який час вони завершать

роботу (виконають завдання); продуктивність праці; обсяг виконаної роботи.

Для успішного засвоєння учнями способів розв'язування різних видів задач на виконання роботи слід провести аналогію між двома процесами (рухом та виконанням роботи) і величинами, що їх характеризують. Для цього на прикладах розв'язування різних сюжетних задач можна пояснити, що продуктивність праці визначає кількість роботи, яку виконано за одиницю часу, тобто *фактично є швидкістю виконання роботи.*



Залежність між величинами даного процесу можна подати у вигляді формули.

Якщо ввести буквені позначення: *робота* — A, *час* — t, *продуктивність праці* (робота, виконана за одиницю часу) — p, то $A = p \cdot t$.

Використовуючи правила, як знаходити невідомий множник, ділене, дільник, отримаємо похідні формули: $p = \frac{A}{t}$, $t = \frac{A}{p}$.

Спосіб оформлення розв'язання задачі досить часто впливає на правильність її розв'язання. Зазвичай розв'язання задач на роботу оформлюють у вигляді таблиці або описово і розв'язують за допомогою рівнянь або їхніх систем, інколи розв'язують арифметично, використовуючи допоміжні запитання.

Задачі на роботу бувають двох основних типів, коли працює один робітник, і на спільну роботу, в яких ідеться про кількох працівників. Також розрізняють задачі, в яких відомий обсяг роботи (тобто названо кількість виготовленої в штуках продукції тощо), і задачі, де йдеться просто про виконану роботу, але чітко не вказано її обсяг (наприклад, заповнення басейну, виконання замовлення тощо). Зрозуміло, що саме другий випадок є важчим для розуміння учнів. Ускладнення виникають під час аналізу умови, і з метою їх уникнення слід пропонувати учням спочатку розв'язувати задачі, де предметно вказано обсяг виконуваної роботи, тобто зазначено скільки всього сторінок потрібно надрукувати друкаркам, скільки деталей потрібно зробити робітникам. Для того

щоб учні більш свідомо проводили аналіз умови і пошук алгебраїчної моделі, можна запропонувати їм на початку запису розв'язування зазначати, про який саме вид роботи йдеться в тексті.

Розглянемо приклади розв'язання задач із відомим обсягом роботи.

Задача 55. Один завод мав виготовити 720 верстатів, а другий за той самий термін — 660 верстатів. Перший завод, виготовляючи щодня на 10 верстатів більше від другого, виконав замовлення на два дні раніше строку, а другий завод, виготовивши 22 верстати понад план, закінчив роботу на один день раніше строку. Скільки верстатів виготовляв щодня кожний завод?

Розв'язання

Подамо умову задачі в таблиці (табл. 27).

Таблиця 27

	Обсяг роботи	Виготовлено щодня	Кількість днів роботи
Завод I	720	?, на 10 >	?, на 2 дн. < строку
Завод II	660 + 22	?	?, на 1 дн. < строку

Процес, описаний у задачі, — виготовлення верстатів двома заводами.

Позначимо через x кількість верстатів, що їх щодня виготовляв другий завод. Тоді, за умовою задачі, кількість верстатів, які виготовляв щоденно перший завод, буде $(x + 10)$. За цих умов перший завод виконав замовлення за $\frac{720}{x+10}$ днів, а другий завод за $\frac{682}{x}$ дні.

Перший завод виконав замовлення на 2 дні раніше строку, тобто робота була розрахована на $\frac{720}{x+10}+2$ днів. Другий завод закінчив роботу на один день раніше строку, тобто робота була розрахована на $\frac{682}{x}+1$ днів.

Оскільки для обох заводів був встановлений однаковий термін виконання замовлення, то маємо рівняння:

$$\frac{720}{x+10}+2=\frac{682}{x}+1,\ x^2+48x-6820=0,\ x_1=62,\ x_2=-110.$$

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, $x = 62$, тобто другий завод щодня виготовляв 62 верстати. Перший завод щоденно виготовляв 62 + 10 = 72 (верстати).

Відповідь. 72 верстати, 62 верстати.

Залежно від обрання основних невідомих розв'язуюча алгебраїчна модель може представляти собою або дробово-раціональне рівняння, або систему рівнянь. Прикладом такої задачі може слугувати задача 20 з розділу 1. Нагадаємо її скорочений запис у табличному вигляді.

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи A, га	Час t, дні	Денна продуктивність p, га
За планом	120	?	?
Насправді	120	?, на 2 менше	?, на 10 більше

Як видно з таблиці, в задачі йдеться про два відповідні значення (за планом насправді, тобто фактично) трьох величин: кількість днів, кількість гектарів, які засівають щодня, і загальна кількість засіяних гектарів. Для цих значень у таблиці відведено 6 комірок, 4 з яких містять знак запитання, а 2 заповнені.

У будь-яку з незаповнених комірок можна поставити букву x і, використавши залежності між відомими і невідомими, заповнити виразами зі зміною (чи змінними) інші комірки, причому одну з них — двома способами. Прирівнявши два вирази з одного вічка, ми одержимо потрібне рівняння.

Для кращого усвідомлення особливостей складання обраної алгебраїчної моделі можна пропонувати групам учнів розв'язати задачу різними способами, а за допомогою мультимедійного комплексу продемонструвати їх у порівнянні (рис. 18).

Починаючи розв'язувати задачі на роботу, також доречно нагадати учням, як задачі такого виду розв'язуються за допомогою арифметичних способів. При цьому особливу увагу потрібно приділити моменту введення умовної одиниці, якою позначають невизначений обсяг роботи. Попервах замість прийняття усієї роботи за 1, можна надавати їй деякого значення A.

Задача 56. За планом бригада повинна була покласти кахель за 36 днів. Якщо б робітники щодня клали на 6 м^2 менше, то всю роботу вони б виконали за 40 днів. Скільки квадратних метрів кахлю бригада повинна була класти щодня? Чи можна знайти загальну площу поверхні, яку потрібно було закласти кахлем?

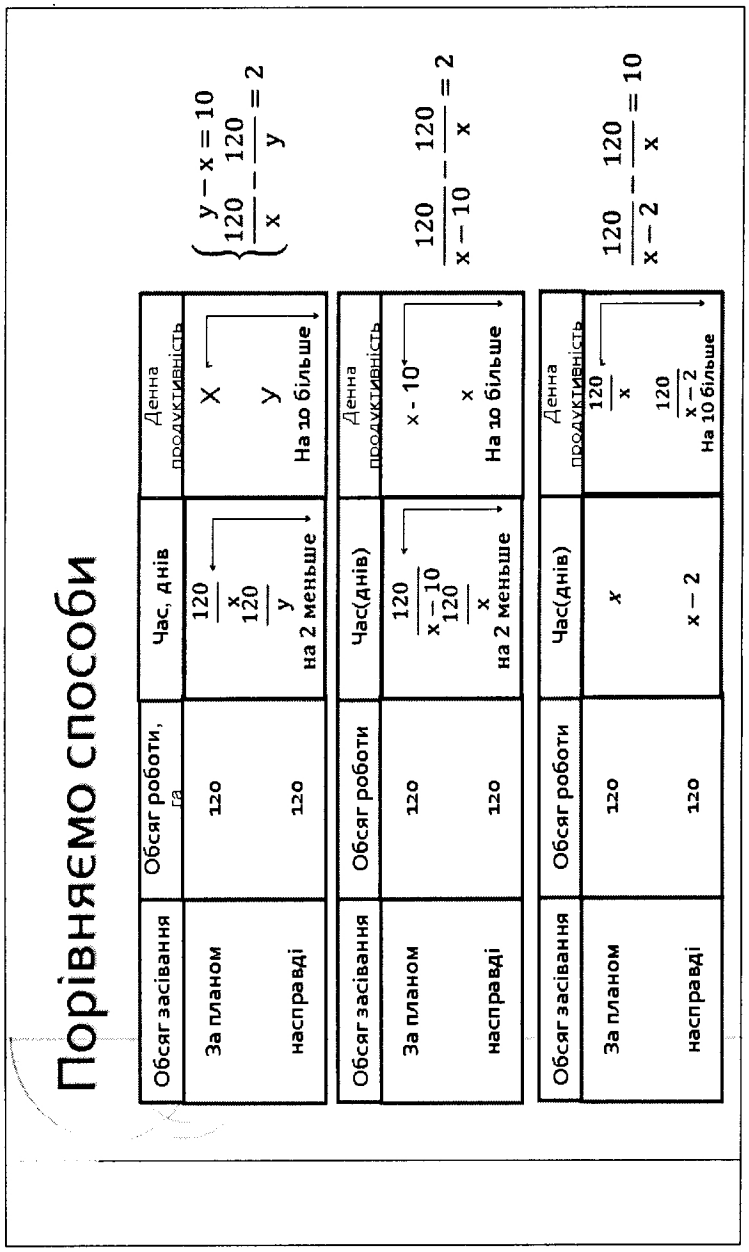

Порівняємо способи
Обсяг засівання
Обсяг роботи, га
Час, днів
Денна продуктивність
За планом
120
120/x
X
y
На 10 більше
насправді
120
120/y
на 2 менше
Обсяг засівання
Обсяг роботи
Час(днів)
Денна продуктивність
За планом
120
120/(x − 10)
x - 10
x
На 10 більше
насправді
120
120/x
на 2 менше
Обсяг засівання
Обсяг роботи
Час(днів)
Денна продуктивність
За планом
120
x
120/x
насправді
120
x − 2
120/(x − 2)
На 10 більше
{ y − x = 10
{ 120/x − 120/y = 2
120/(x − 10) − 120/x = 2
120/(x − 2) − 120/x = 10

Рис. 18

Розв'язання
(арифметичне)

1. $1:36=\frac{1}{36}$ — частина роботи, яку слід було виконати за 1 день;

2. $1:40=\frac{1}{40}$ — частина роботи, яка була б виконана при змінах;

3. $\frac{1}{36}-\frac{1}{40}=\frac{1}{360}$ — частина роботи, що припадає на 6 м^2;

4. $6:\frac{1}{360}=2160$ (м^2) — загальна площа поверхні, яку потрібно було закласти кахлем;

5. 2160 : 36 = 60 (м^2) — повинна була закладати кахлем бригада за 1 день.

Розв'язання даної задачі арифметичними способами потребує значних обчислень, що підкреслює перевагу способу розв'язування задач за допомогою рівняння.

Розв'язання
(алгебраїчне)

Використаємо табличний запис умови (табл. 28) і перших кроків розв'язання задачі (числа у дужках таблиці вказують порядок заповнення таблиці).

Таблиця 28

	A	*p*	*t*
За планом	(5) $36x$	(3) x	(1) 36
При змінах	(6) $40(x-6)$	(4) $x-6$	(2) 40

Оскільки обсяг роботи *A* не змінюється, то складаємо рівняння:

$$36x = 40(x-6).$$

Розв'язавши його, ми знаходимо продуктивність праці за планом (тобто кількість квадратних метрів кахлю, які бригада повинна була класти щодня) — 60 м^2. Тоді загальна площа підлоги, яку потрібно було закласти кахлем буде:

$$36x = 36 \cdot 60 = 2160 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь. 60 м^2, 2160 м^2.

Тепер розглянемо задачі на спільну роботу. Для зручності аналізу умови форма таблиці може бути дещо іншою.

Задача 57. Два столяри, працюючи разом, можуть виготовити шафу-купе за 4 дні. За скільки днів може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо одному потрібно на 6 днів менше, ніж другому?

Розв'язання

Приймемо обсяг запланованої роботи (виготовлення шафи) за A (табл. 29).

Таблиця 29

	Час, за який виконує роботу A кожен столяр окремо, дні	Продуктивність праці кожного столяра	Спільна продуктивність праці
Столяр I	x	$\frac{A}{x}$	$\frac{A}{4}$
Столяр II	$x + 6$	$\frac{A}{x+6}$	

Складемо рівняння, враховуючи, що сума продуктивностей праці кожного столяра окремо — це їх продуктивність праці разом:

$$\frac{A}{x}+\frac{A}{x+6}=\frac{A}{4} \text{ або } \frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}.$$

Розв'язуємо отримане рівняння і знаходимо, що перший столяр шафу-купе може виготовити за 6 днів, а другий — за $x + 6 = 6 + 6 = 12$ (днів).

Відповідь. 6 днів, 12 днів.

У випадку, коли зміст задачі ускладнюється, то табличний запис умови доповнюється новими стовпчиками.

Задача 58. Одній друкарці для друкування рукопису потрібно на 10 год більше, ніж другій. Перша друкарка працювала 12 год, а потім її змінила друга, яка працювала 9 год. Загалом будо надруковано $\frac{3}{5}$ рукопису. За скільки годин може надрукувати цей рукопис кожна друкарка, працюючи самостійно?

Розв'язання

Приймемо обсяг запланованої роботи, тобто друкування рукопису, за A (табл. 30).

Таблиця 30

	Час виконання роботи A кожною друкаркою окремо, дні	Продуктивність праці кожної друкарки	Кількість відпрацьованих днів кожною друкаркою	Виконаний обсяг роботи кожною друкаркою	Кількість виконаної роботи
Перша друкарка	$x+10$	$\frac{A}{x+10}$	12	$\frac{A}{x+10}\cdot 12=\frac{12A}{x+10}$	$\frac{3}{5}A$
Друга друкарка	x	$\frac{A}{x}$	9	$\frac{A}{x}\cdot 9=\frac{9A}{x}$	

Складаємо рівняння:

$$\frac{12A}{x+10}+\frac{9A}{x}=\frac{3}{5}A \text{ або } \frac{12}{x+10}+\frac{9}{x}=\frac{3}{5}.$$

Відповідь. Другій друкарці на надрукування рукопису самостійно потрібно 30 год, а першій — 40 год.

У методичній літературі можна зустріти не тільки горизонтально розміщений табличний запис, а й «вертикальний». На думку деяких вчителів, він краще алгоритмізує дії учня під час розв'язування задач на спільну роботу. Таблиця заповнюється згори вниз, а останній рядок зазвичай дає можливість скласти рівняння.

Задача 59. Дві бригади повинні були виконати замовлення за 15 днів. Після 10 днів спільної роботи перша бригада отримала нове завдання, тому друга бригада закінчувала виконання замовлення ще 8 днів. За скільки днів могла б виконати замовлення кожна бригада, працюючи окремо?

Розв'язання

Нехай перша бригада виконує замовлення за x днів, а друга бригада – за y днів. Приймемо всю роботу за одиницю (табл. 31).

Таблиця 31

	I бригада	**II бригада**	**Разом**
Час виконання всієї роботи	x	y	15
Продуктивність праці	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{15}$ або $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

Продовження

	I бригада	II бригада	Разом
Кількість відпрацьованих днів кожною бригадою	10	10 + 8	—
Виконаний обсяг роботи	$\frac{10}{x}$	$\frac{18}{y}$	1 або $\frac{10}{x}+\frac{18}{y}$

За комірками, в яких зроблено два записи, складаємо два рівняння і об'єднуємо їх у систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15},\\ \frac{10}{x}+\frac{18}{y}=1.\end{cases}$$

Звідси $x = 40$, $y = 24$.

Відповідь. 40 днів, 24 дні.

Задача 60. Іван і Петро можуть разом перекопати город за 7 год, Іван і Василь — за 8 год, а Петро і Василь — за 9 год. Скільки годин їм знадобиться, щоб перекопати город, якщо до роботи вони стануть утрьох?

Розв'язання

Нехай Іван, працюючи самостійно, перекопає весь город за x год, Петро — за y год, а Василь — за z год. Приймаємо всю роботу за одиницю.

Тоді продуктивність праці Івана $\frac{1}{x}$ га/год, Петра — $\frac{1}{y}$ га/год, а Василя — $\frac{1}{z}$ га/год.

Нам відомо, що Іван з Петром увесь город перекопають за 7 год, тобто маємо перше рівняння:

$$7\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \text{ або } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \qquad (1)$$

Іван і Василь виконають дану роботу за 8 год, маємо:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8}. \quad (2)$$

Петро з Василем на це витратять 9 год, що означає:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9}. \quad (3)$$

Об'єднуємо отримані рівняння (1)—(3) у систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7},\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8},\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9}.\end{cases}$$

Додавши почленно рівняння системи, отримаємо:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9} \text{ або } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{25}{126}.$$

Сума $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ — це спільна продуктивність праці Івана, Петра і Василя, тому час, за який вони виконують всю роботу, буде дорівнювати:

$$1:\frac{25}{126}=\frac{126}{25}=5{,}04 \text{ (год)}.$$

Оскільки в задачі не вимагається знайти скільки годин кожному знадобиться для перекопування городу, то задачу вважаємо розв'язаною.

Відповідь. 5,04 год.

Одним з поширених сюжетів задач на спільну працю є «задачі на труби». Хочемо зауважити, що фізики часто критикують ці задачі, стверджуючи, що за умови роботи відвідних і наповнюючих труб, не можна використовувати просту алгебраїчну суму (порушення законів гідродинаміки). Саме ця причина спонукала в минулому авторів підручників зменшити кількість задач вказаного типу. Ці задачі відомі учням із курсу арифметики і частина міркувань при алгебраїчному розв'язуванні проводиться за аналогією.

Задача 61. Два насоси, працюючи разом, можуть наповнити басейн за 10 год. Після чотирьох годин спільної роботи перший насос зупинили, а другий наповнив решту басейну за 18 год. За скільки годин кожний з насосів, працюючи окремо, міг би наповнити басейн?

Розв'язання
(арифметичне)

1. Яку частину басейну наповнюють обидва насоси за 1 год?

$$1:10=\frac{1}{10}\ \text{(част. бас.)}.$$

2. Яку частину басейну наповнюють обидва насоси за 4 год?

$$\frac{1}{10}\cdot 4=\frac{2}{5}\ \text{(част. бас.)}.$$

3. Яку частину басейну наповнює другий насос за 18 год?

$$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\ \text{(част. бас.)}.$$

4. За скільки годин другий насос, працюючи окремо, може наповнити басейн?

$$18:\frac{3}{5}=30\ \text{(год)}.$$

5. Яку частину басейну наповнює другий насос за 1 год?

$$1:30=\frac{1}{30}\ \text{(част. бас.)}.$$

6. Яку частину басейну наповнює перший насос за 1 год?

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{30}=\frac{1}{15}\ \text{(част. бас.)}.$$

7. За скільки годин може наповнити басейн перший насос, працюючи окремо?

$$1:\frac{1}{15}=15\ \text{(год)}.$$

Розв'язання
(алгебраїчне)

Нехай першому насосу для самостійного наповнення басейну потрібно x год, а другому – y год. Тоді за 1 год перший насос заповнює $\frac{1}{x}$ частину басейну, а другий насос — $\frac{1}{y}$. Разом за 1 год насоси заповнюють $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ або $\frac{1}{10}$ частину басейну. За 4 год насоси разом заповнять

на $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 4$ частини. За 18 год другий насос сам заповнить $\frac{18}{y}$ частин басейну. Усього було заповнено весь басейн.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10},\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 4+\frac{18}{y}=1.\end{cases}$$

Відповідь. Працюючи окремо, перший насос наповнить басейн за 15 год, а другий — за 30 год.

Зауваження. Задачі 61 і 63 схожі за міркуваннями, проте розв'язання системи із 63 простіше, оскільки є можливість у другому рівнянні одразу позбутися змінної x. Доречно демонструвати учням різні способи складання рівнянь у задачах на спільну роботу.

Задача 62. До басейну підведено дві труби — перша подає воду, друга — відвідна, причому через першу трубу басейн наповнюється на 2 год довше, ніж через другу вода з басейну виливається. При заповненому на третину басейні були відкриті обидві труби, і басейн спорожнів через 8 год. За скільки годин тільки через першу трубу може наповнитися басейн, і за скільки годин тільки через другу трубу може вилитися вода з повного басейну?

Розв'язання

Нехай V м^3 — об'єм басейну, x м^3/год — продуктивність труби, через яку подається вода, а y м^3/год — труби, через яку вода виливається. Тоді $\frac{V}{x}$ год — час, необхідний для заповнення басейну, а $\frac{V}{y}$ год — час, необхідний для виливання води з басейну. За умовою задачі: $\frac{V}{x}-\frac{V}{y}=2$.

Оскільки продуктивність відвідної труби більша за продуктивність труби, через яку подається вода, то при відкритті обох труб буде виливатися вода і третина басейну спорожніє за час $\frac{V}{3}:(y-x)$, що за умовою задачі дорівнює 8 год.

Отже, умова задачі може бути записана у вигляді системи двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} \frac{V}{x}-\frac{V}{y}=2, \\ \frac{V}{3}:(y-x)=8 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{V}{x}-\frac{V}{y}=2, \\ \frac{V}{y-x}=24. \end{cases}$$

У задачі необхідно знайти $\frac{V}{x}$ і $\frac{V}{y}$. Виділимо в рівняннях комбінацію невідомих $\frac{V}{x}$ і $\frac{V}{y}$, записавши систему у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{V}{x}-\frac{V}{y}=2, \\ \frac{y}{V}-\frac{x}{V}=\frac{1}{24}. \end{cases}$$

Увівши нові змінні $\frac{V}{x}=a$ і $\frac{V}{y}=b$, отримуємо наступну систему:

$$\begin{cases} a-b=2, \\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{24}. \end{cases}$$

Підставивши в друге рівняння вираз $a=b+2$, отримаємо рівняння відносно b:

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{b+2}=\frac{1}{24}.$$

Розв'язавши це рівняння, матимемо $b=6$ год. Тоді $a=6+2=8$ год.

Відповідь. Басейн наповнюється за 8 год, спорожнюється за 6 год.

Задача 63. Танкер заповнюється нафтою за допомого кількох насосів рівної продуктивності. Їх вмикають послідовно один за одним через рівні проміжки часу, і вони працюють до наповнення танкера. Якщо б усі насоси ввімкнули одночасно, то вони заповнили б танкер за 15 год. Скільки часу працював насос, якого увімкнули першим, якщо насос, якого увімкнули останнім, працював 10год?

Розв'язання

Нехай n — число насосів, x — час роботи (в годинах) насоса, увімкнутого першим, d — інтервал (в годинах) між послідовними моментами ввімкнення решти насосів.

З умови задачі випливає:

$$x-(n-1)d=10. \qquad (1)$$

Час роботи всіх насосів дорівнює

$$x+(x-d)+...+(x-(n-1)d)=nx-\frac{n(n-1)}{2}d.$$

Крім того, відомо, що для наповнення танкера потрібно $15n$ год роботи насосів, відповідно маємо друге рівняння

$$nx-\frac{n(n-1)}{2}d=15n. \qquad (2)$$

З рівняння (1) маємо $(n-1)d=x-10$. Підставимо це у рівняння (2):

$$nx-\frac{n(x-10)}{2}=15n \text{ або } x-\frac{x-10}{2}=15.$$

Звідси $x = 20$.

Відповідь. Насос, увімкнений першим, працював 20 год.

Розв'язуючи задачі ускладненого змісту, іноді корисно використовувати загальні позначення продуктивності праці кожного з робітників, часу їхньої роботи.

Задача 64. Два робітники мали виконати замовлення. Спочатку один пропрацював третину того часу, який потрібний другому для виконання всієї роботи, потім другий пропрацював третину того часу, який би витратив перший на виконання всієї роботи. Після цього виявилось, що виконано $\frac{5}{6}$ всієї роботи. Знайдіть, скільки часу потрібно було б для виконання роботи кожному робітнику окремо, якщо разом вони можуть виконати її за 1 год 20 хв.

Розв'язання

Нехай x і y — число годин, які потрібно першому і другому робітнику відповідно, щоб виконати все замовлення самостійно. Позначимо обсяг всієї роботи через A. Тоді $p_1=\frac{A}{x}$ — продуктивність першого, $p_2=\frac{A}{y}$ — продуктивність другого робітника. За умовою задачі складемо перше рівняння:

$$p_1\cdot\frac{y}{3}+p_2\cdot\frac{x}{3}=\frac{5}{6}A. \qquad (1)$$

Враховуючи, що, працюючи разом, вони можуть виконати все замовлення за 1 год 20 хв = $\frac{4}{3}$ год, складаємо рівняння:

$$\frac{4}{3}(p_1 + p_2) = A. \qquad (2)$$

Об'єднуємо рівняння (1) і (2) у систему.

$$\begin{cases} p_1 \cdot \frac{y}{3} + p_2 \cdot \frac{x}{3} = \frac{5}{6}A, \\ \frac{4}{3}(p_1 + p_2) = A \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{A}{x} \cdot \frac{y}{3} + \frac{A}{y} \cdot \frac{x}{3} = \frac{5}{6}A, \\ \frac{4}{3}\left(\frac{A}{x} + \frac{A}{y}\right) = A. \end{cases}$$

Після перетворень отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2{,}5xy, \\ x + y = \frac{3}{4}xy. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4{,}5xy, \\ x + y = \frac{3}{4}xy; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{3}{4}xy\right)^2 = 4{,}5xy, \\ x + y = \frac{3}{4}xy; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 8, \\ x + y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ y = 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ y = 2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь. 2 год, 4 год.

2.3. ЗАДАЧІ НА РУХ

Задачам на рух відведено значне місце у добірці текстових задач, які розв'язують у школі. Труднощі, що виникають під час їхнього розв'язування, пов'язані з багатьма обставинами, зокрема з великою різноманітністю типів задач: на зустрічний рух, на рух у протилежних напрямках з одного пункту, в одному напрямку з одного або різних пунктів (одночасний початок руху чи ні), на рух із запізненням чи випередженням графіку руху, на рух за течією й проти течії, на рух по колу, а також на рух одного предмета щодо іншого.

У шкільних задачах розглядають лише рівномірний рух, для якого роблять такі допущення.

1. Рух на окремих ділянках вважається рівномірним; при цьому пройдений шлях визначається за формулою $s = vt$.

2. Повороти тіл, що рухаються, вважаються миттєвими, тобто відбуваються без витрат часу; при цьому так само вважають, що швидкість змінюється миттєво.

3. Якщо тіло рухається за течією річки, то його швидкість (відносно берега) дорівнює швидкості тіла в стоячій воді (власній швидкості тіла) і швидкості течії річки, а якщо тіло рухається проти течії річки, то його швидкість (відносно берега) дорівнює відповідно різниці між власною швидкістю і швидкістю течії. Якщо в умові задачі мова йде про рух плота, то припускають, що пліт рухається зі швидкістю річки.

До задач на *зустрічний рух* відносяться задачі, в яких розглядають об'єкти, що починають рухатися назустріч один одному з пунктів (стартових точок), котрі знаходяться на певній відстані. Залежно від умови, в таких задачах *потрібно визначити*: 1) час руху об'єктів до зустрічі, якщо відомі їх швидкості і відстань між пунктами; 2) відстань між пунктами, якщо відомі швидкості та час руху до зустрічі кожного з об'єктів; 3) швидкість руху одного з об'єктів, якщо відома відстань, час руху до зустрічі і швидкість руху другого об'єкта; 4) відстань, яка буде між об'єктами через певний час після початку руху, якщо відомі швидкості та відстань між пунктами.

Для кращого засвоєння вміння розв'язувати задачі на *зустрічний рух* треба, щоб учні брали до уваги такі їхні особливості:

1) при одночасному початку руху об'єктів час руху до моменту зустрічі однаковий для обох;

2) якщо зустріч відбулася, то об'єкти на момент зустрічі разом пройшли всю відстань між пунктами;

3) за одиницю часу об'єкти зближаються на відстань, що дорівнює сумі їхніх швидкостей (таку відстань прийнято називати *швидкістю зближення*).

Нагадаємо, що під час розв'язування задач на зустрічний рух арифметичними способами досить часто використовували графічні ілюстрації (див рис. 3, 4, розділ 1). Вважаємо, що такі схеми, як допоміжний засіб, можна також використовувати під час розв'язування задач алгебраїчним методом. Проте якщо учні можуть знайти розв'язуючу алгебраїчну модель без допоміжних засобів, то не потрібно їх їм нав'язувати.

Розв'язування задач на *рух у різних напрямках із віддаленням* не викликатиме особливих труднощів, якщо провести аналогію між ними та задачами на зустрічний рух і встановити, що після зустрічі

два об'єкти рухаються з тими самими швидкостями до своїх стартових точок (тобто пунктів, з яких починався їхній рух). При цьому за кожну годину (або іншу одиницю часу) вони, рухаючись у протилежних напрямках, віддаляються на відстань, що дорівнює сумі їхніх швидкостей.

До задач *на рух в одному напрямку* належать задачі, в яких об'єкти рухаються в одному напрямку і починають свій рух з одного або різних пунктів (стартових точок) одночасно або неодночасно. Залежно від умови задачі потрібно знайти: 1) за який час один об'єкт наздожене другий; 2) на якій відстані від даного пункту один об'єкт наздожене інший; 3) якою буде відстань між двома об'єктами через певний час тощо.

Для уникнення труднощів під час розв'язування задач на рух в одному напрямку слід домогтися міцного усвідомлення та засвоєння учнями таких залежностей.

1. При одночасному виході з одного й того самого пункту відстань між об'єктами, що рухаються в одному напрямку, з часом збільшується, якщо швидкості об'єктів різні. Збільшення відстані між рухомими об'єктами за одиницю часу дорівнює різниці їхніх швидкостей.

2. Якщо два об'єкти одночасно починають рух в одному напрямку з двох різних пунктів (причому об'єкт, що має більшу швидкість, рухається навздогін іншому), то відстань між об'єктами зменшується, тобто вони зближаються. Їхнє зближення за одиницю часу дорівнює різниці швидкостей, з якими вони рухаються.

3. Об'єкт, що має більшу швидкість, наздоганяє об'єкт з меншою швидкістю за стільки одиниць часу, скільки разів різниця між швидкостями цих об'єктів вміщується у відстані, що їх відокремлює в момент початку спільного руху. Аналогічно, об'єкт з більшою швидкістю випереджає об'єкт з меншою швидкістю на певну відстань на стільки одиниць часу, скільки разів різниця між швидкостями об'єктів уміщується у цій відстані.

4. Якщо два об'єкти починають рух в одному напрямку з двох різних пунктів і один об'єкт наздоганяє перший, то різниця між відстанями, пройденими об'єктами, дорівнює відстані між цими пунктами.

5. Якщо при неодночасному виході з одного пункту один об'єкт наздоганяє інший, то обидва об'єкти проходять до цього моменту однакові відстані.

Для кращого усвідомлення учнями названих залежностей доцільно використовувати відповідні графічні ілюстрації, зокрема схему руху навздогін (рис. 19) та схему руху з відставанням (рис. 20).

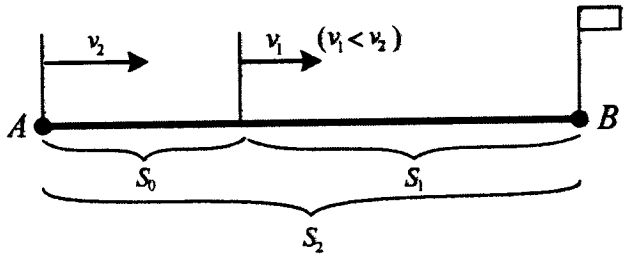


Рис. 19

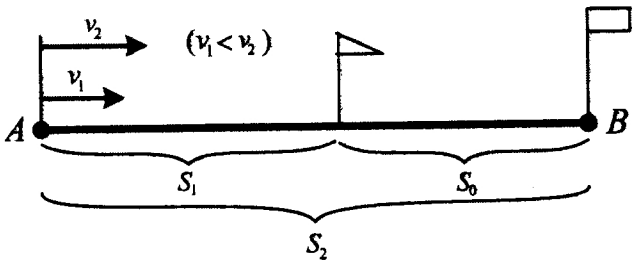


Рис. 20

Крім того, різні випадки руху в одному напрямку слід розглядати в певній послідовності. Як показує досвід, найкраще почати з випадку одночасного виходу двох об'єктів із різних пунктів за умови, що другий має більшу швидкість, а отже, через певний час наздоганяє перший об'єкт руху. Цей випадок простіше засвоюється учнями, оскільки в умові є відстань, що розділяє об'єкти до початку руху. Далі краще розглядати задачі з одночасним виходом об'єктів із одного пункту, але з різними швидкостями. Завершити вивчення задач на рух в одному напрямку слід розглядом задач, у яких об'єкти починають рух не одночасно.

Зауважимо, що проведення нескладних міркувань дозволяють до двох попередніх типів задач на рух звести задачі, в сюжеті яких описується *рух по колу.* Справді, рух об'єктів по замкненій траєкторії в одному напрямку — рух навздогін (рис. 21).

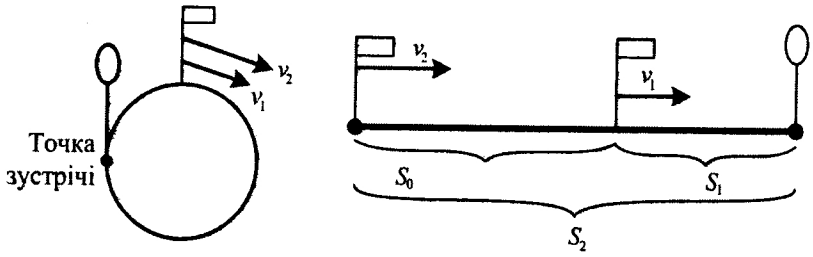


Рис. 21

А рух з однієї точки у різних напрямках — рух назустріч (рис. 22).

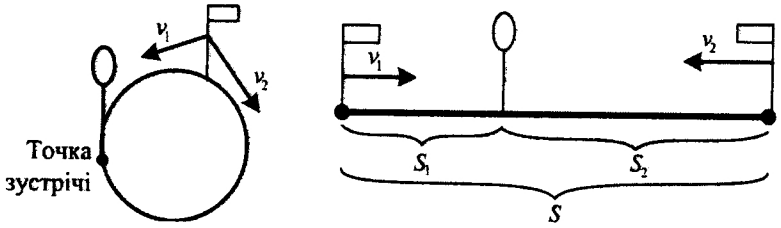


Рис. 22

Проте більша частина вчителів рекомендує своїм учням робити для розв'язування задач на рух за допомогою алгебраїчних моделей табличний запис умови задачі й, аналізуючи залежності між відомими і невідомими, заповнювати комірки таблиці та складати рівняння.

Задача 65. На середині дороги між станціями A і B товарний поїзд був затриманий на 10 хв. Щоб своєчасно прийти до B, машиністові довелося початкову швидкість поїзда збільшити на 6 км за годину. Знайти початкову швидкість поїзда, якщо відомо, що відстань між станціями дорівнює 60 км.

Розв'язання

У задачі описано рух із затримкою в дорозі. Початкову швидкість поїзда (у км/год) позначимо x (це основне невідоме). Для зручності й більшої наочності шукані і допоміжні невідомі величини запишемо у вигляді таблиці (табл. 32)

Таблиця 32

Рух	S	v	t
І половина дороги	30	x	$\frac{30}{x}$
ІІ половина дороги	30	$x+6$	$\frac{30}{x+6}$

Щоб прийти на станцію B за розкладом, поїзд повинен був на другій половині дороги ліквідувати відставання у часі, яке сталося через затримку на 10 хв. Отже, другу половину дороги він пройшов за менший час, ніж першу, і різниця в часі становить 10 хв або $\frac{1}{6}$ год. На першу половину дороги витрачено $\frac{30}{x}$ год, а на другу $\frac{30}{x+6}$ год. Різниця між цими величинами дорівнює $\frac{1}{6}$. Складаємо рівняння:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+6}=\frac{1}{6},$$

$x_1 = 30$; $x_2 = -36$ — не підходить за умовою задачі.

Відповідь. 30 км/год.

Задача 66. Два пішоходи йдуть назустріч один одному. Один з пункту A, другий з пункту B. Перший вийшов із пункту A на 6 годин пізніше, ніж другий з B, і при зустрічі виявилось, що він пройшов на 12 км менше другого. Продовжуючи після зустрічі шлях далі з такою самою швидкістю, перший приходить у B через 8 годин, а другий в A через 9 годин. Знайти швидкість кожного пішохода.

Розв'язання

Позначимо шлях, який пройшов перший пішохід до зустрічі, через x км і заповнимо таблицю: стрілками показано порядок заповнення комірок таблиці під час аналізу умови задачі (табл. 33).

За умовою задачі $\frac{9(x+12)}{x}$ більше, ніж $\frac{8x}{x+12}$ на 6.

Складаємо рівняння: $\frac{9(x+12)}{x}-\frac{8x}{x+12}=6$, $x=36$.

Отже, другий пішохід після зустрічі пройшов 36 км, а рухався він із швидкістю 36 : 9 = 4 (км/год). Перший після зустрічі пройшов 36 + 12 = 48(км), і його швидкість була 48 : 8 = 6 (км/год).

Таблиця 33

Рух		S	T	v
До зустрічі	I	x	$\frac{8x}{x+12}$	$\frac{x+12}{8}$
	II	$x+12$	$\frac{9(x+12)}{x}$	$\frac{x}{9}$
Після зустрічі	I	$x+12$	8	$\frac{x+12}{8}$
	II	x	9	$\frac{x}{9}$

Відповідь. 4 км/год, 6 км/год.

Задача 67. Шлях між пунктами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску зі швидкістю, на 6 км/год більшою, ніж на підйомі, проходить шлях від A до B за 2 год 40 хв, а зворотний, від B до A, на 20 хв швидше. Визначте швидкість велосипедиста на підйомі й на спуску та довжину підйому в напрямі від A до B, якщо довжина всього шляху дорівнює 36 км.

Розв'язання

Нехай швидкість велосипедиста на підйомі v км/год, а довжину підйому від A до B позначимо через x км. За умовою задачі заповнимо таблицю (табл. 34) для кожного із випадків руху (від A до B і від B до A).

Таблиця 34

Рух		v	t	S
Від A до B	**Підйом**	v	$2\frac{2}{3}$	x
	Спуск	$v+6$		$36-x$
Від B до A	**Підйом**	v	$2\frac{1}{3}$	$36-x$
	Спуск	$v+6$		x

З цієї таблиці випливає така система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v}+\dfrac{36-x}{v+6}=2\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{36-x}{v}+\dfrac{x}{v+6}=2\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Після перетворень отримуємо рівняння $\dfrac{36}{v+6}+\dfrac{36}{v}=5$. Звідси $v_1=12,\ v_2=-\dfrac{18}{5}$.

Від'ємний корінь відкидаємо, оскільки він не задовольняє умову задачі.

Визначаємо швидкість велосипедиста на спуску $12+6=18$ (км/год) і довжину підйому від A до B з рівняння $\dfrac{x}{12}+\dfrac{36-x}{18}=2\dfrac{2}{3}$, $x=24$.

Відповідь. Швидкість велосипедиста на підйомі 12 км/год, на спуску — 18 км/год, довжина підйому 24 км.

Задача 68. Пароплав проплив 100 км за течією річки і 64 км проти течії за 9 год. Іншого разу, рухаючись із тією самою швидкістю, за той самий час він проплив 80 км за течією і 80 км проти течії. Знайти швидкість пароплава в стоячій воді і швидкість течії річки.

Розв'язання

Нехай у стоячій воді пароплав рухався зі швидкістю x км/год, а швидкість течії була y км/год. Тоді швидкість пароплава за течією $x+y$ км/год, а проти течії $x-y$ км/год. Складаємо таблицю (табл. 35).

Таблиця 35

Рух		S	v	t	Увесь витрачений час
I	За течією	100	$x+y$	$\dfrac{100}{x+y}$	9
	Проти течії	64	$x-y$	$\dfrac{64}{x-y}$	
II	За течією	80	$x+y$	$\dfrac{80}{x+y}$	9
	Проти течії	80	$x-y$	$\dfrac{80}{x-y}$	

За таблицею складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{100}{x+y}+\dfrac{64}{x-y}=9, \\ \dfrac{80}{x+y}+\dfrac{80}{x-y}=9. \end{cases}$$

Звідси $x = 18, y = 2$.

Зауваження. Іноді вчителі пропонують брати за основні інші невідомі. Наприклад, швидкість за течією позначати x км/год, а швидкість проти течії — y км/год. Тоді система рівнянь матиме дещо спрощений вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{100}{x}+\dfrac{64}{y}=9, \\ \dfrac{80}{x}+\dfrac{80}{y}=9. \end{cases}$$

Проте після знаходження розв'язків цієї системи потрібно буде ще виконати дві арифметичні дії, тобто врахувати, що

$$v_{\text{власна}} = \frac{v_{\text{за течією}} + v_{\text{проти течії}}}{2}.$$

Відповідь. 18 км/год, 2 км/год.

Задача 69. З міста A в місто B виїжджає велосипедист, а через 3 год з міста В виїжджає назустріч йому мотоцикліст, швидкість якого в три рази більша за швидкість велосипедиста. Мотоцикліст і велосипедист зустрічаються посередині між A і B. Якщо б мотоцикліст виїхав не через три, а через дві години після початку руху велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до A. Знайти відстань між A і B.

Розв'язання

Позначимо відстань між пунктами A і B через S (км). Швидкості велосипедиста і мотоцикліста — через $v_{\text{в}}$ (км/год) і $v_{\text{м}}$ (км/год) відповідно. Запишемо умову задачі і рівняння, відповідно до цих умов, у вигляді таблиці, покроково аналізуючи умову задачі (табл. 36).

Таблиця 36

Умова задачі	Рівняння
Швидкість мотоцикліста у три рази більша, ніж швидкість мотоцикліста	$v_м = 3v_в$
Мотоцикліст і велосипедист зустрічаються посередині між A і B, причому мотоцикліст виїхав із B на 3 год пізніше, ніж велосипедист з міста А.	$\frac{\frac{S}{2}}{v_в} = \frac{\frac{S}{2}}{v_м} + 3$
Коли б мотоцикліст виїхав через 2 год після початку руху велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до A.	$\frac{\frac{S}{2} - 15}{v_в} = \frac{\frac{S}{2} + 15}{v_м} + 2$

Використовуючи перше рівняння, друге та третє можна записати в систему:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{2v_в} = \dfrac{S}{6v_в} + 3, \\ \dfrac{S-30}{2v_в} = \dfrac{S+35}{6v_в} + 2. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи маємо $v_в = \frac{S}{9}$. Підставивши його у друге рівняння системи отримаємо рівняння для знаходження величини S: $\frac{3S-180}{S} = 2$.

Звідси $S = 180$ км.

Відповідь. 180 км.

Задача 70. З пункту A в пункт B о 8 год виходить швидкий потяг. У цей самий час з B в A виходять пасажирський і кур'єрський поїзди, причому швидкість пасажирського в 2 рази менша від швидкості кур'єрського. Швидкий поїзд прибуває в пункт B о 13 год 50 хв, а зустрічає кур'єрський не раніше ніж о 10 год 30 хв того самого дня. Знайдіть час прибуття пасажирського поїзда в пункт A, якщо відомо, що між моментами зустрічей швидкого поїзда з кур'єрським і швидкого поїзда з пасажирським минає не менше 1 год.

Розв'язання.

Нехай відстань між містами дорівнює S км, швидкість швидкого поїзда дорівнює v км/год швидкість пасажирського поїзда — u км/год. Тоді швидкість кур'єрського поїзда дорівнюватиме $2u$ км/год, час

зустрічі швидкого і пасажирського поїздів — $\frac{S}{v+u}$ год, а час зустрічі швидкого та кур'єрського поїздів — $\frac{S}{v+2u}$ год.

Враховуючи, що швидкий поїзд прибуває в пункт B о 13 год 50 хв, тобто через 5 год 50хв після початку свого руху, маємо рівняння:

$$\frac{S}{v}=\frac{35}{6}. \qquad (1)$$

Оскільки швидкий поїзд зустрічається з кур'єрським поїздом не раніше 10 год 30 хв ранку (тобто не менше, ніж через 2 год 30 хв), то отримуємо нерівність:

$$\frac{S}{v+2u}\geq\frac{5}{2}. \qquad (2)$$

Між моментами зустрічей швидкого поїзда з кур'єрським і швидкого поїзда з пасажирським проходить не менше 1 год, тому запишемо ще одну нерівність:

$$\frac{S}{v+u}-\frac{S}{v+2u}\geq 1. \qquad (3)$$

Перетворимо (2) і (3), виділивши відношення $\frac{S}{v}$:

$$\frac{\frac{S}{v}}{1+2\frac{u}{v}}\geq\frac{5}{2},\ \frac{\frac{S}{v}}{1+\frac{u}{v}}-\frac{\frac{S}{v}}{1+2\frac{u}{v}}\geq 1.$$

Підставляючи в ці нерівності значення відношення $\frac{S}{v}$ з (1) і виконавши перетворення, отримуємо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases}\frac{u}{v}\leq\frac{2}{3},\\ 12\left(\frac{u}{v}\right)^2-17\cdot\frac{u}{v}+6\leq 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{u}{v}\leq\frac{2}{3},\\ \frac{2}{3}\leq\frac{u}{v}\leq\frac{3}{4}.\end{cases}$$

Остання система має один розв'язок: $\frac{u}{v}=\frac{2}{3}$.

У задачі потрібно знайти час прибуття пасажирського поїзда в пункт A, тобто величину $\frac{S}{u}$:

$$\frac{S}{u}=\frac{S}{v}\cdot\frac{v}{u}=\frac{35}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}\text{ (год).}$$

Отже, пасажирський поїзд витрачає на дорогу 8 год 45 хв і прибуває в пункт A о 16 год 45 хв.

Відповідь. Прибуття о 16 год 45 хв.

Задача 71 (старовинна задача). Два селища розміщені на одному березі річки. З одного селища в друге вирушає посильний, який повинен отримати там пакет і повернутися назад. Посильний може або пройти весь шлях туди й назад пішки, або проплисти цей шлях річкою на човні, власна швидкість якого дорівнює швидкості посильного. При якому способі пересування посильний повернеться раніше?

Розв'язання

Нехай S — відстань між селищами, x — швидкість руху посильного (вона ж і є швидкістю човна в стоячій воді), y — швидкість течії річки. Тоді час, витрачений посильним на весь шлях туди і назад, дорівнює $\frac{2S}{x}$ (1), а час, необхідний для руху на човні, як за течією, так і проти течії річки, дорівнює $\frac{S}{x+y}+\frac{S}{x-y}=\frac{2Sx}{x^2-y^2}$ (2). Значення виразу (2) більше від (1), бо $\frac{2Sx}{x^2-y^2}>\frac{2Sx}{x^2}=\frac{2S}{x}$.

Отже, посильний повернеться раніше в тому випадку, коли піде пішки.

Зауваження. Здавалось би, час повернення посильного повинен бути однаковим при пересуванні як пішки, так і на човні: адже течія річки половину шляху відносить човен назад, а другу половину вперед. Однак «додатна дія» течії триває за часом менше, ніж «від'ємна», а отже, загальний ефект від впливу течії річки на час повернення посильного буде від'ємним.

Відповідь. Посильний повернеться раніше, якщо піде пішки.

Задача 72 (з альтернативними умовами). Два поїзди вирушають одночасно (перший — з міста A, другий — з міста B), рухаються в одному напрямку й одночасно прибувають на станцію C. Якщо б один з поїздів збільшив швидкість на 20 км/год, а інший — на 25 км/год, то вони так само прибули б на станцію C одночасно. Знайти відношення швидкостей першого і другого поїздів.

Розв'язання

Нехай міста A, B і C розміщені, як зображено на рис. 23.



Рис. 23

Уведемо позначення: $S_1 = AB$, $S_2 = BC$, x км/год — швидкість першого поїзда, y км/год — швидкість другого поїзда. Тоді $\frac{x}{y}$ — шукане відношення.

За умовою задачі матимемо дві системи рівнянь, кожна з яких відповідає певному випадку.

Випадок 1. Перший поїзд збільшив швидкість на 20 км/год, а другий — на 25 км/год:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{x} = \dfrac{S_2}{y}, \\ \dfrac{S_1+S_2}{x+20} = \dfrac{S_2}{y+25}. \end{cases} \qquad (1)$$

Випадок 2. Перший поїзд збільшив швидкість на 25 км/год, а другий — на 20 км/год:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{x} = \dfrac{S_2}{y}, \\ \dfrac{S_1+S_2}{x+25} = \dfrac{S_2}{y+20}. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язуючи ці системи, слід пам'ятати, що лише за умови $x > y$ є можливим одночасне прибуття поїздів на станцію C. Тому для розв'язків цих систем додатково робимо перевірку $\frac{x}{y} > 1$.

Розв'язок системи (1) не підходить, а із системи (2) матимемо: $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Аналогічно розглядається другий можливий випадок розташування міст A, B і C (рис. 24)



Рис. 24

Використовуючи ті самі позначення, також отримаємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{S_2 - S_1}{x} = \dfrac{S_2}{y}, \\ \dfrac{S_2 - S_1}{x+20} = \dfrac{S_2}{y+25}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{S_2 - S_1}{x} = \dfrac{S_2}{y}, \\ \dfrac{S_2 - S_1}{x+25} = \dfrac{S_2}{y+20}. \end{cases} \quad (3)$$

Проводимо аналогічні міркування і отримуємо $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{5}$.

Відповідь. $\dfrac{5}{4}$ або $\dfrac{4}{5}$.

2.4. ЗАДАЧІ НА СУМІШІ

Серед текстових задач особливе місце займають задачі на суміші, розчини і сплави, які називають іще задачами на відсотковий (процентний) вміст або концентрацію. Такі задачі часто зустрічаються на практиці, а також під час вивчення хімії, фізики.

Ці задачі можна розв'язувати складанням рівнянь або їх систем за схемою, дуже близькою до тієї, що застосовується в задачах на рух чи роботу.

Кажучи про суміші, розчини і сплави, використовуватимемо термін «суміш» незалежно від її вигляду (тверда, рідка, газоподібна, сипуча тощо). Суміш складається з «чистої речовини» і «домішок». Що є «чиста речовина», визначається в кожній задачі окремо, проте при цьому всі останні речовини, складові суміші, відносять до домішок.

Долею (α) чистої речовини в суміші називається відношення кількості чистої речовини (m) в суміші до загальної кількості (M) суміші за умови, що вони виміряні однією і тією самою одиницею маси або об'єму: $\alpha = \dfrac{m}{M}$. Звідси матимемо: $m = \alpha M$, $M = \dfrac{m}{\alpha}$.

Поняття долі чистої речовини в суміші можна вводити таким умовним записом:

$$\text{Доля чистої речовини в суміші} = \frac{\text{Кількість чистої речовини в суміші}}{\text{Загальна кількість суміші}}.$$

Концентрацією розчину (відсотковим вмістом чистої речовини в суміші (c)) називають його долю, виражену відсотковим відношенням:

$$c = \alpha \cdot 100\%,\ \alpha = \frac{c}{100\%}.$$

Під час розв'язування задач на суміші слід пам'ятати, що при сполученні (роз'єднанні) сумішей з однією і тією самою чистою речовиною, кількості чистої речовини і загальні кількості сумішей додаються (віднімаються). Додавати і віднімати долі й процентний вміст не можна.

Коротко охарактеризуємо основні кроки розв'язування задач на суміші.

1. *Вибір чистої речовини.* З речовин, що фігурують в умові задачі, вибирається одна як чиста речовина. Найчастіше вибирають речовину, про яку йдеться у вимозі задачі, або речовину, про долю якої в умові є найбільше інформації. При цьому, якщо α — доля чистої речовини, то $(1 - \alpha)$ — доля домішок.

2. *Перехід до доль.* Якщо в задачі є відсотковий (процентний) вміст, його слід перевести в долі й надалі працювати лише з долями.

3. *Аналіз (відстежування) стану суміші.* На кожному етапі зміни суміші (додавання, вилучення) необхідно описувати її стан за допомогою трьох основних величин m, M, α.

4. *Вибір основного невідомого (чи невідомих).* Найчастіше за невідомі величини обирають ті, які потрібно знайти, але інколи доцільно позначати невідомими деякі проміжні величини, через які легко виражаються шукані.

5. *Складання рівняння.* В результаті перетворень суміші, описаних в задачі, отримують її кінцевий стан, який характеризується величинами m, M, α, що містять невідомі.

Розв'язуючи задачі на концентрацію кислот і сплавів, треба пояснити учням, що міцність кислоти або спирту звичайно виражається в сотих долях, або відсотках, які в цьому випадку називають градусами.

Задача 73. Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим і отримали 600 г 15-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину було узято?

Розв'язання

Нехай першого розчину взяли x г, тоді другого $(600 - x)$ г. Заповнимо таблицю (табл. 37)

Таблиця 37

Стан суміші	m, (г)	M, г	α
I	$0,3x$	x	0,3
II	$0,1(600-x)$	$600-x$	0,1
I + II	$0,3x+0,1(600-x)$	600	0,15

Використавши формулу $m = \alpha M$ для зафарбованих комірок, матимемо рівняння

$$0,3x + 0,1(600 - x) = 0,15 \cdot 600,\ x = 150.$$

Отже, 30-відсоткового взяли 150 г, а 10-відсоткового — 450 г.

Зауваження. Можна було б розв'язати цю задачу за допомогою системи рівнянь, якщо прийняти масу першого розчину за x г і другого — за y г, тоді таблиця зв'язків матиме такий вигляд (табл. 38)

Таблиця 38

Стан суміші	m, (г)	M, г	α
I	$0,3x$	x	0,3
II	$0,1y$	y	0,1
I+II	$0,3x+0,1y$	$x+y$	0,15

Задача зводиться до розв'язування системи

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0,3x + 0,1y = 0,15(x + y). \end{cases}$$

Відповідь. 150 г, 450 г.

Якщо в задачі йдеться про два розчини однієї і тієї самої речовини, то для складання рівняння використаємо формулу для знаходження концентрації суміші

$$c = \frac{\frac{M_1c_1}{100} + \frac{M_2c_2}{100}}{M_1 + M_2} \cdot 100 = \frac{M_1c_1 + M_2c_2}{M_1 + M_2},$$

де c_1 — концентрація першого розчину, M_1 — його маса; c_2 і M_2 — концентрація і маса другого розчину.

Якщо в отриманій формулі поділити чисельник і знаменник правої частини на M_2, то дістанемо формулу $c = \dfrac{\frac{M_1}{M_2}c_1 + c_2}{\frac{M_1}{M_2} + 1}$.

З цієї формули видно, що концентрація суміші двох розчинів (сплавів) залежить лише від того, в якому відношенні компоненти ввійдуть до суміші.

Задача 74. Маємо два різних сплави міді й свинцю. Якщо взяти 1 кг першого сплаву та 1 кг другого сплаву і переплавити їх, то отримаємо сплав, що містить 65 % міді. Відомо, що коли взяти два шматки першого і другого сплавів, які мають сумарну масу 7 кг, і переплавити їх, то отримаємо сплав, що містить 60 % міді. Яку масу міді отримаємо в сплаві, якщо переплавити шматок першого сплаву масою, що дорівнює масі шматка другого сплаву та шматка другого сплаву, маса якого дорівнює масі шматка першого сплаву?

Розв'язання

Нехай c_1 і c_2 — відсотковий вміст міді в першому і другому сплавах відповідно (тобто концентрації міді дорівнюють $\frac{c_1}{100\%}$ і $\frac{c_2}{100\%}$ відповідно), маса шматка першого сплаву – x кг, другого — y кг . Використовуючи наведену вище формулу, заповнимо таблицю (табл. 39).

Таблиця 39

Умова задачі	Рівняння
Переплавлення 1 кг першого сплаву і 1 кг другого сплаву дає сплав, що містить 65 % міді	$\frac{1\cdot\frac{c_1}{100}+1\cdot\frac{c_2}{100}}{1+1}=\frac{65}{100}$
Сумарна маса шматків першого і другого сплавів дорівнює 7 кг	$x+y=7$
Якщо переплавити шматки першого і другого сплавів, то отримаємо сплав, що містить 60 % міді	$\frac{x\cdot\frac{c_1}{100}+y\cdot\frac{c_2}{100}}{x+y}=\frac{60}{100}$

Об'єднуємо рівняння в систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1\cdot\frac{c_1}{100}+1\cdot\frac{c_2}{100}}{1+1}=\dfrac{65}{100}, \\ x+y=7, \\ \dfrac{x\cdot\frac{c_1}{100}+y\cdot\frac{c_2}{100}}{x+y}=\dfrac{60}{100}; \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1+c_2=130, \\ x+y=7, \\ xc_1+yc_2=420. \end{cases}$$

Система має чотири невідомих і три рівняння. Усі чотири невідомих з такої системи визначити не можна. Однак масу міді (m), що міститься в сплаві, отриманого при сумісній переплавці шматка першого

сплаву масою y та шматка другого сплаву масою x, знайти можна: $m = \frac{yc_1 + xc_2}{100}$.

Помножимо перше рівняння системи на друге і від отриманого добутку віднімемо третє рівняння, матимемо:

$yc_1 + xc_2 = (c_1 + c_2)(x + y) - (xc_1 + yc_2) = 130 \cdot 7 - 420 = 490$.

Відповідь. 4,9 кг.

Інколи стан суміші в задачі характеризується не відсотковим вмістом або долею того або іншого компонента суміші, а відношенням між ними. Тоді також вибирається чиста речовина і стан суміші слід описати в долях від загальної її кількості.

Задача 75. Деякий сплав складається з двох металів, що входять у нього у відношенні 1 : 2, а інший містить ті самі метали у відношенні 2 : 3. Скільки частин кожного сплаву потрібно взяти, щоб отримати третій сплав, що містить ті самі метали у відношенні 17 : 27?

Розв'язання

Нехай x — кількість I сплаву, а y — кількість II сплаву. Величини x і y не можуть бути знайдені однозначно, а лише з точністю до пропорційного множника (відношення $x : y$). Заповнюємо таблицю (табл. 40)

Таблиця 40

Стан суміші	m	M	α
I	$\frac{1}{3}x$	x	$\frac{1}{3}$
II	$\frac{2}{5}y$	y	$\frac{2}{5}$
I + II	$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$	$x + y$	$\frac{17}{44}$

Отримуємо рівняння $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = \frac{17}{44}(x + y)$. Звідси $\frac{x}{y} = \frac{9}{35}$.

Відповідь. 9 частин першого сплаву і 35 другого.

Серед задач на сплави окреме місце займають задачі на «проби». Попередньо слід пояснити учням, що пробою дорогоцінних металів називається вагомий вміст золота, срібла або платини в одиниці сплаву, з якого виготовлено злиток чи ювелірну прикрасу (від лат. *probo* — випробовую, оцінюю).

Задача 76. Визначити пробу сплаву срібла з міддю, знаючи, що, сплавивши його з 3 кг чистого срібла, отримують сплав 900-ї проби, а сплавивши його з 2 кг сплаву 900-ї проби, отримують сплав 840-ї проби.

Розв'язання

Нехай сплав містить x кг срібла і y кг міді. Сплавивши його з 3 кг чистого срібла, отримаємо рівняння:

$$\frac{x+3}{x+y+3}=0{,}900. \qquad (1)$$

Сплавивши його з 2 кг сплаву 900-ї проби, отримаємо чистого срібла $(x+2\cdot 0{,}9)$, спільна маса сплаву буде $(x+y+2)$ кг.

Звідси випливає, що друге рівняння матиме вигляд

$$\frac{x+1{,}8}{x+y+2}=0{,}840. \qquad (2)$$

Об'єднуємо рівняння (1) і (2) у систему:

Отже, отримаємо систему в спрощеному вигляді:

$$\begin{cases} x+3=0{,}9(x+y+3), \\ x+1{,}8=0{,}84(x+y+2). \end{cases}$$

Звідси, $x=2{,}4$ і $y=0{,}6$.

Тоді маса сплаву 3 кг, а його проба дорівнює 800.

Відповідь. 800.

Задача 77. Злиток сплаву золота й срібла масою 1,06 кг при зануренні у воду стає легшим на 70 г. Скільки в цьому сплаві золота і срібла, якщо відомо, що золото «втрачає» при зануренні у воду $\frac{1}{19}$ своєї маси, а срібло 10 %?

Розв'язання

Нехай маса чистого золота x кг, а маса срібла — у кг. Тоді $x+y=1060$ (г).

При зануренні у воду буде «загублено» $\frac{x}{19}$ г золота та $\frac{y}{10}$ г срібла.

Звідси отримуємо друге рівняння: $\frac{x}{19}+\frac{y}{10}=70$.

Отримуємо систему: $\begin{cases} x+y=1060, \\ \frac{x}{19}+\frac{y}{10}=70. \end{cases}$

Звідси $x=760$, $y=300$.

Відповідь. У сплаві 760 г золота і 300 г срібла.

Хочемо зауважити, що коли використати відношення компонентів, які входять до сумішей, розчинів, сплавів, то можна до розв'язування задач на змішування (утворення нових розчинів) застосувати пропорції для складання рівняння. Деталі про цей спосіб учні дізнаються під час розв'язування задач арифметичними способами.

Задача 78. Змішали 60-відсотковий розчин сірчаної кислоти з 25-відсотковим її розчином і отримали 700 г 40-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину взяли?

Розв'язання

I	x	60 %	Зменшити на 20 %
		40 %	
II	$700 - x$	25 %	Збільшити на 15 %

Отримуємо рівняння $\frac{x}{700-x} = \frac{15}{20}$. Звідси $x = 300$.

Відповідь. Першого розчину треба взяти 300 г, другого — 400 г.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Барыбин К. С.* Методика преподавания алгебры: Пособие для учителей — М.: Просвещение, 1965. — 344 с.

2. *Бевз Г. П.* Методика розв'язування алгебраїчних задач у 6—8 класах: Посіб. для вчителів. — К.: Рад. шк., — 1975. — 239 с.

3. *Бевз В. Г.* Практикум з історії математики: Навч. посібник для студ. фіз-мат. фак. пед. унів. — К: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. — 312 с.

4. *Болтянский В. Г.* Нужна ли проверка при решении текстовых задач на составление уравнений // Математика в школе. — 1971. — № 3, С. 42—45.

5. *Галицкий М. Л.* Сборник задач по алгебре: учеб. пособ. для 8—9 кл. с углуб. изучен. матем. / М. Л. Галицкий, А. М. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. — 12-е изд. — М.: Просвещение, 2006. — 301 с.

6. *Декарт Р.* Рассуждение о методике с приложениями. — М.: Просвещение, 1953. — 204 с.

7. *Демидова Т. Е., Тонких А. П.* Теория и практика решения текстовых задач: Учеб. пособ. для студ. высш. учеб. заведений. — М.: «Академия», 2002. — 288 с.

8. *Дорофеев Г. В.* Проверка решения текстовых задач // Математика в школе. — 1972. — № 3, С. 37—45.

9. *Дубинчук О. С.* Про культуру математичних записів у восьмирічній школі. — К.: Рад. шк., — 1961. — 113 с.

10. *Дубинчук О. С., Мальований Ю. І.* Методика викладання алгебри в 7—9 класах: Посіб. для вчителя. — К.: Рад. шк., — 1991. — 254 с.

11. *Кипнис И. М.* Задача на составление уравнений и неравенств. — М.: Просвещение, 1980. — 63 с.

12. *Лук'янова С. М.* Розв'язування текстових задач арифметичними способами: 5—6 кл. — К.: Шкіл. світ, 2006. — 128 с.

13. *Островский А. И., Кордемский Б. А.* Геометрия помогает арифметике. — М.: Физматгиз, 1960. — 167 с.

14. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика. — М.: Просвещение, 1948.

15. *Фридман Л. М.* Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика: Учеб. пос. для учит. и студ. педвузов и колледжей. — М.: Шк. пресса, 2002. — 208 с.

16. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы / Под ред. В. И. Благодатских. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

Науково-виробниче видання

Бібліотека «Шкільного світу»

***Лук'янова** Світлана Михайлівна*

Текстові задачі на уроках і в позаурочний час
Алгебра. 7—9 класи

Формат 60·84/16.
Умовн. друк. арк. 7,44. Наклад 1000 пр.
Зам. № 2422.

ТОВ «Редакції газет природничо-математичного циклу»
01014, м. Київ, вул. Тимірязєвська, 2
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 777 від 21.01.2002

Видрукувано з готових діапозитивів в ПП «Житомирська облдрукарня»
10014, м. Житомир, вул. Мала Бердичівська, 17
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ЖТ № 1 від 06.04.2001