

УДК 373:517

DOI <https://doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2026.111.26>

Чепок О. О.

orcid.org/0000-0001-8514-2769

Ювченко Н. М.

orcid.org/0009-0002-3176-8859

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ В КУРСАХ ГЕОГРАФІЇ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

У статті розглянуто можливості використання елементів аналітичної геометрії в курсах географії закладів загальної середньої освіти. Незважаючи на відсутність аналітичної геометрії як окремого розділу в курсах математики закладів загальної середньої освіти, її основні ідеї та методи широко застосовуються під час вивчення географічних координат, картографії, топографії, місцевого часу та просторових моделей. Проаналізовано зміст модельних навчальних програм і навчальних матеріалів з географії для 7–11 класів щодо використання координатного методу та інших математичних інструментів під час опанування географічного матеріалу. Можна зробити висновок, що система географічних координат є природним аналогом декартової системи координат, яку учні опановують на уроках математики. Наведено приклади задач на визначення координат діаметрально протилежних точок на земній кулі та обчислення різниці місцевого часу між населеними пунктами за їх географічною довготою. Особливу увагу приділено використанню прямокутної системи координат у проєкції Гаусса–Крюгера та роботі з топографічними картами для учнів 11 класу. Розкрито методику визначення прямокутних координат об'єктів за кілометровою координатною сіткою та встановлення їхнього географічного положення. Проведений аналіз підтверджує доцільність використання елементів аналітичної геометрії як засобу реалізації міждисциплінарних зв'язків між математикою та географією. Запропоновані приклади можуть бути використані для формування в учнів умінь застосовувати математичні методи під час розв'язування практико-орієнтованих географічних задач. Результати дослідження можуть бути використані вчителями математики та географії під час організації інтегрованого навчання, а також у процесі розроблення навчально-методичних матеріалів природничо-математичного спрямування.

Ключові слова: аналітична геометрія, географія, міждисциплінарні зв'язки, географічні координати, прямокутні координати, картографія, топографічна карта, проєкція Гаусса–Крюгера, координатний метод.

У курсах географії закладів загальної середньої освіти учні постійно працюють із картами, планами місцевості, географічними координатами, масштабами та різноманітними просторовими моделями. Сучасна географія дедалі більше спирається на кількісні методи дослідження та математичний апарат, що дає змогу більш точно описувати просторові об'єкти, явища й процеси. Хоча поняття аналітичної геометрії безпосередньо не входять до змісту курсів географії закладів загальної середньої освіти, але багато її елементів активно використовуються під час вивчення картографії, топографії, географічних координат, часових поясів та просторового аналізу територій.

Особливо важливу роль відіграє координатний метод, який дозволяє однозначно визначати положення об'єктів на поверхні Землі, обчислювати відстані між ними, аналізувати напрями та взаємне розташування географічних об'єктів. Під час роботи з картами учні фактично використовують елементи координатних систем, геометричних перетворень, масштабування та проєктування, що є складовими аналітичної геометрії. Приклади таких завдань демонструють практичне застосування математичних знань у природничих науках і сприяють усвідомленню міждисциплінарних взаємозв'язків [7].

Метою статті є розкриття можливостей використання елементів аналітичної геометрії в курсах географії закладів загальної середньої освіти.

Найпростішим прикладом застосування елементів аналітичної геометрії є введення системи географічних координат, якими учні володіють вже у 7-му класі НУШ [5].

Спочатку учні вивчають поняття географічних широти та довготи.

Географічна широта визначається як кутова відстань точки від екватора на північ або на південь, виражена в градусах. Значення широти змінюються від 0° на екваторі до 90° на Північному або Південному полюсі. Для визначення широти точки учні знаходять найближчу паралель з боку екватора, визначають кутову відстань від цієї паралелі до об'єкта та додають її до значення широти відповідної паралелі. Після цього вказують, у якій півкулі розташований об'єкт – Північній чи Південній (рис. 1) [1].

Географічна довгота визначається як кутова відстань точки на схід або захід від нульового (Гринвіцького) меридіана. Її значення змінюються від 0° до 180° у східному або західному напрямку. Для знаходження довготи учні визначають найближчий до точки меридіан з боку нульового меридіана, обчислюють кутову відстань від нього до об'єкта та додають її до значення довготи цього меридіана. Після цього зазначають, у якій півкулі знаходиться об'єкт – Східній чи Західній (рис. 2) [1].

Кожній точці на земній поверхні ставиться у відповідність таким чином впорядковану пару чисел – географічних координат цієї точки: географічних широти та довготи. Наприклад, географічні координати Києва: 50°27'16" пн. ш., 30°31'25" сх. д.

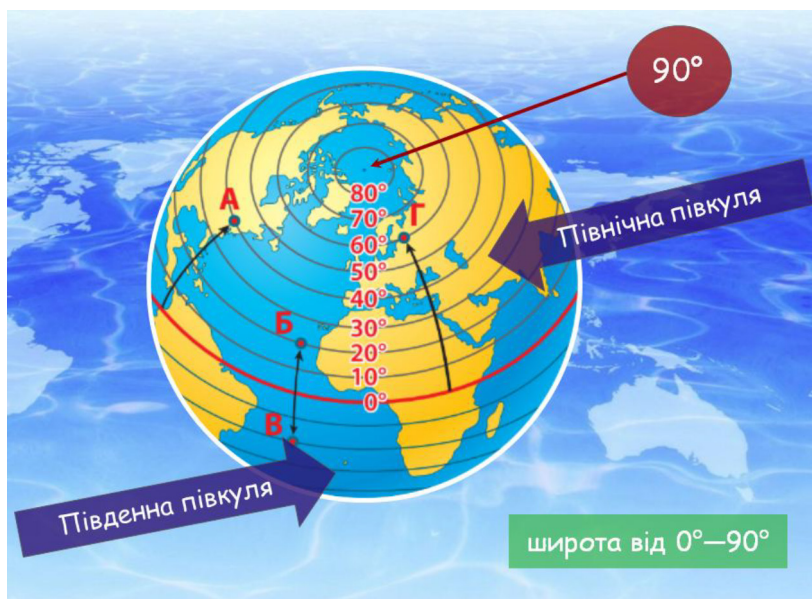


Рис. 1. Визначення географічної широти

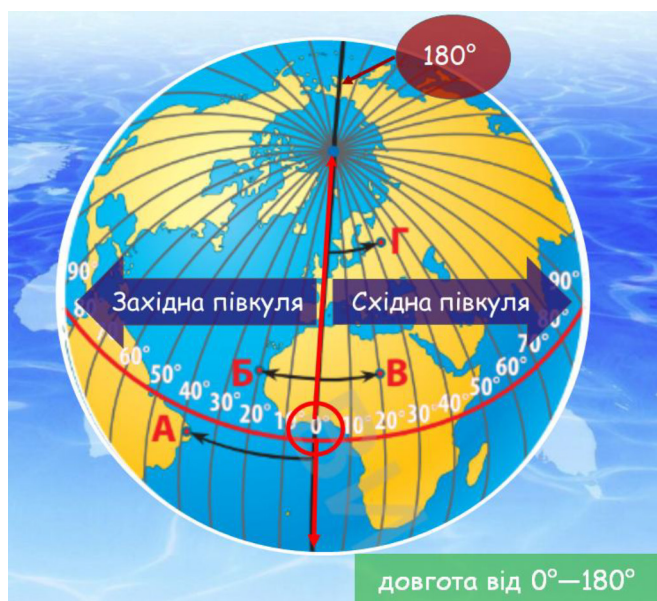


Рис. 2. Визначення географічної довготи

За своєю суттю така система є аналогом прямокутної декартової системи, яку учні вивчають на уроках математики наприкінці 6-го класу [4].

Наведемо приклад типової задачі на знаходження відстані між двома точками за допомогою географічних координат.

Приклад 1 [1]. Точка M має географічні координати 52° північної широти та 38° східної довготи. Визначте географічні координати точки K , яка розташована діаметрально протилежно до точки M на Земній кулі.

Розв'язання: Спочатку знайдемо географічну широту точки K $\varphi_M = \varphi_K = 52^\circ$ як вертикальні, звідки випливає, що географічна широта точки K становить 52° пд.ш. (рис. 3).

Тепер визначимо географічну довготу точки K . Кут λ_M та $\Delta\lambda$ є вертикальними, тому $\lambda_M = \Delta\lambda = 38^\circ$. Кут λ_K є суміжним до кута $\Delta\lambda$, тому $\lambda_K = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$ (рис. 4). Отже, географічна довгота точки K становить 142° зх.д.

Відповідь: Точка K має географічні координати: 52° пд.ш. і 142° зх.д.

У 8 класі під час вивчення теми «Час на Землі» учні знайомляться з поняттям місцевого часу та його залежністю від географічної довготи. Добою називають проміжок часу між двома послідовними найвищими положеннями Сонця над меридіаном певної точки спостереження. Оскільки вздовж одного меридіана Сонце перебуває в однаковому положенні, місцевий час на всіх точках цього меридіана є однаковим [6].

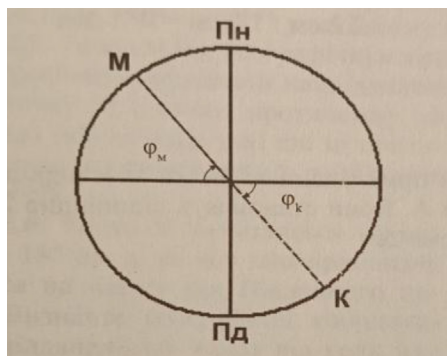


Рис. 3. Знаходження широти діаметрально протилежної точки на Земній кулі

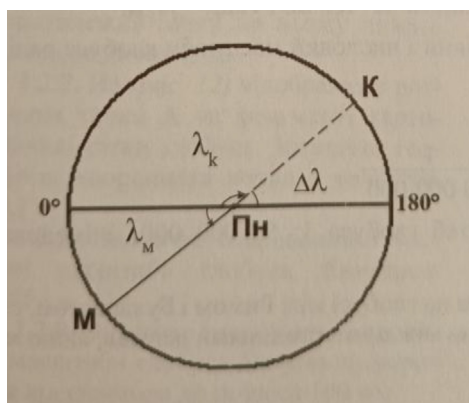


Рис. 4. Знаходження довготи діаметрально протилежної точки на Земній кулі

Через обертання Землі навколо своєї осі місцевий час на різних меридіанах відрізняється. Земля здійснює повний оберт на 360° за 24 години, тому за 1 годину вона повертається на 15° , а різниця в 1° довготи відповідає 4 хвилинам часу. Це дозволяє розв'язувати задачі на визначення різниці місцевого часу між населеними пунктами [6].

Приклад 2. [6]. Визначте різницю у місцевому часі між Чернівцями (26° сх.д.) і Миколаєвом (32° сх.д.).

Розв'язання: Спочатку знайдемо різницю градусів географічної довготи: $32^\circ - 26^\circ = 6^\circ$. За пропорцією (оскільки 1° довготи відповідає 4 хвилинам часу) знайдемо, що 6° відповідає $6^\circ \cdot 4 \text{ хв}/^\circ = 24$ хвилини.

Відповідь: Різниця місцевого часу між Чернівцями та Миколаєвом становить 24 хвилини. Оскільки Миколаїв знаходиться східніше, Сонце досягає там меридіана раніше, тому місцевий час у Миколаєві випереджає місцевий час у Чернівцях на 24 хвилини.

Відповідно до навчальної програми «Географія. 10–11 класи. Рівень стандарту», у 11 класі вивчається курс «Географічний простір Землі», який передбачає формування в учнів умінь працювати з картографічними матеріалами, географічними та прямокутними координатами, топографічними картами і просторовими моделями територій [2].

Значна частина цих умінь ґрунтується на використанні математичних методів, зокрема елементів аналітичної геометрії.

Одним із найважливіших напрямів застосування аналітичної геометрії є картографія. Під час вивчення способів зображення земної поверхні учні знайомляться з картографічними проєкціями, за допомогою яких сферична поверхня Землі переноситься на площину карти. З математичної точки зору цей процес є геометричним перетворенням координат, що дозволяє відобразити об'єкти реального світу на плоскому аркуші карти із збереженням певних геометричних властивостей [3].

Особливе місце в курсі посідає робота з топографічними картами, де використовуються прямокутні координати. На відміну від географічних координат, які задаються широтою та довготою, прямокутні координати визначають положення точки на площині за допомогою двох числових значень. Така система є практичним застосуванням декартової системи координат, яка вивчається в курсі математики та аналітичної геометрії.

Основою такої системи є проєкція Гаусса-Крюгера, у якій поверхню Землі поділяють на шестиградусні координатні зони. Для кожної зони створюють окрему систему плоских прямокутних координат. За вісь X приймають осьовий меридіан відповідної зони, а за вісь Y приймають лінію екватора. Після проєктування на площину ці лінії стають взаємно перпендикулярними осями координат [3].

Координата X характеризує відстань точки від екватора і фактично показує її положення у напрямку північ-південь. Координата Y визначає віддаленість точки від осьового меридіана відповідної зони. Для

унікнення від'ємних значень координати Y початок відліку умовно зміщують на 500 км на захід від осового меридіана. Тому точки, розташовані на схід від осового меридіана, мають координату Y більшу за 500 км, а точки на захід – меншу за 500 км. (рис. 5).

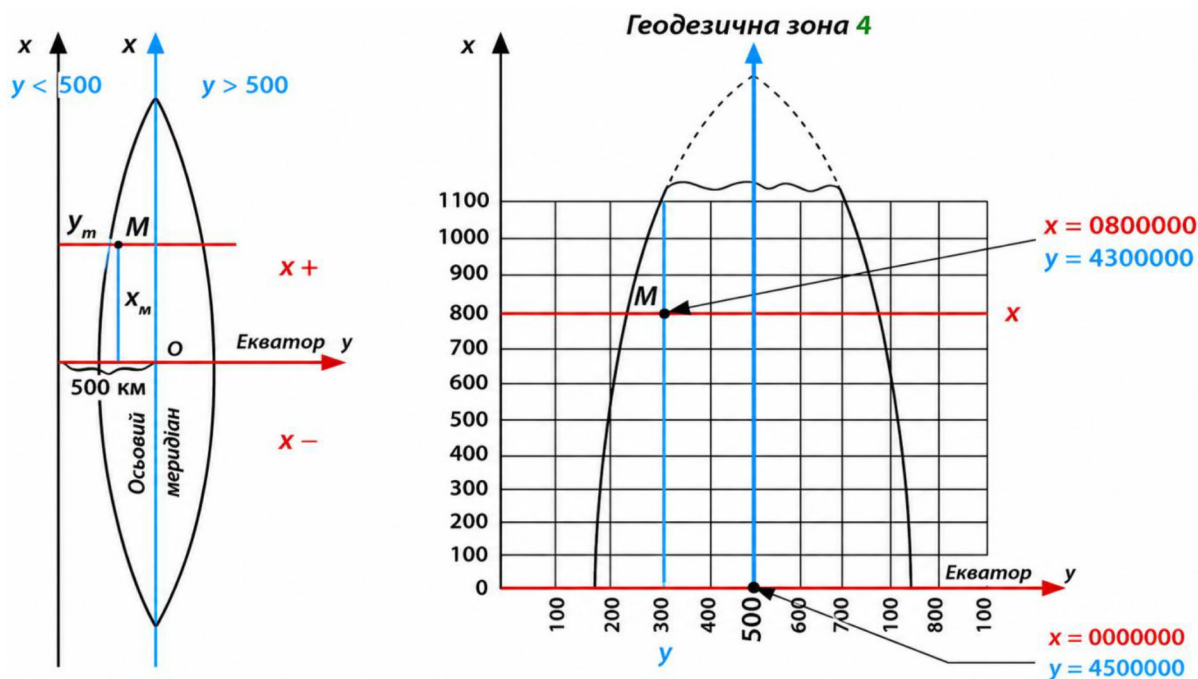


Рис. 5. Прямокутна система координат у проекції Гаусса-Крюгера [3]

На топографічних картах прямокутна система координат подається у вигляді **кілометрової сітки**, утвореної горизонтальними та вертикальними лініями, проведеними через кожен кілометр. Горизонтальні лінії відповідають значенням координати X , а вертикальні – координати Y . Кожний квадрат сітки має відомі координати своїх сторін, що дає змогу точно визначити положення будь-якого об'єкта.

Для знаходження прямокутних координат точки спочатку визначають квадрат кілометрової сітки, у якому вона розташована. Потім знаходять значення нижньої горизонтальної та лівої вертикальної ліній цього квадрата. Від точки опускають перпендикуляри на відповідні сторони квадрата та за допомогою масштабу карти визначають відстані до них у метрах. Отримані значення додають до координат ліній сітки. У результаті координати точки записують у вигляді впорядкованої пари семизначних чисел.

Найпоширеніші завдання такої тематики наведено далі.

Приклад 3. [3] Нехай на фрагменті карти координата X точки T на 800 менша за координату X точки A (рис. 6), а координата Y точки T на 750 більше за координату Y точки A . Знайдіть прямокутні та географічні координати точки T .

Розв'язання. За рисунком 6 можна визначити прямокутні координати точки A : $X_A = 6\,067\,470$; $Y_A = 4\,311\,650$. Тоді

$$X_T = 6\,067\,470 - 800 = 6\,066\,670;$$

$$Y_T = 4\,311\,650 + 750 = 4\,312\,400.$$

Щоб визначити географічні координати точки T , знаходимо її положення на фрагменті карти за прямокутними координатами. Точка T розташована в квадраті кілометрової сітки між горизонтальними лініями 66 і 67 та вертикальними лініями 12 і 13. За рамкою карти наближено визначаємо її географічні координати:

$$\varphi_T \approx 54^\circ 41' 24'' \text{ пн.ш.},$$

$$\lambda_T \approx 18^\circ 05' 30'' \text{ сх.д.}$$

Відповідь: $X_T = 6\,066\,670$, $Y_T = 4\,312\,400$; $\varphi_T \approx 54^\circ 41' 24''$ пн.ш., $\lambda_T \approx 18^\circ 05' 30''$ сх.д.

Приклад 4. [3] За даними рис. 7, на якій меридіани і паралелі проведено через кожні 15° , виконайте наступні завдання:

I. Визначте відстань між точками D і F (у км) та між A і B (у км).

II. Визначте координати точок C і E , а також координати діаметрально протилежних до них точок C' і E' .

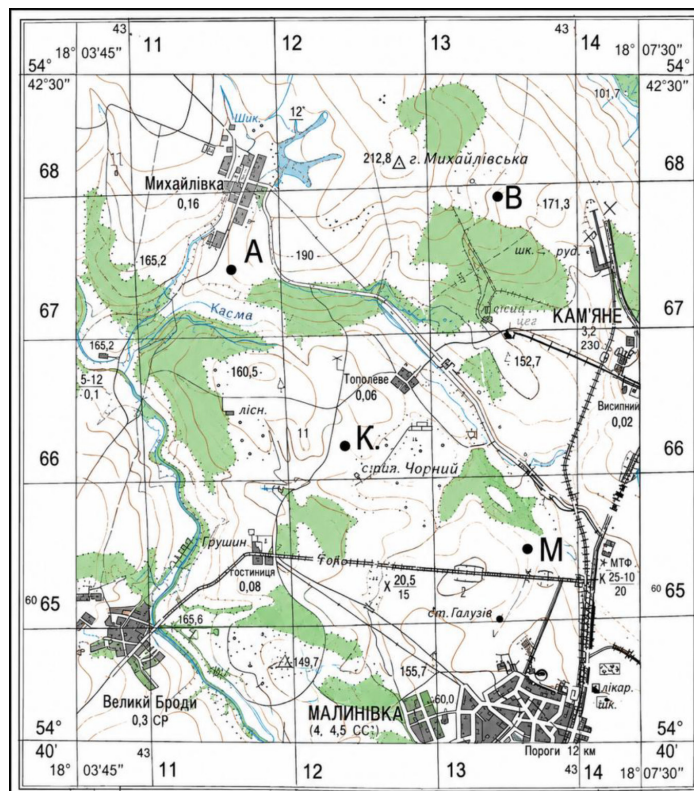


Рис. 6. Фрагмент топографічної карти з кілометровою координатною сіткою

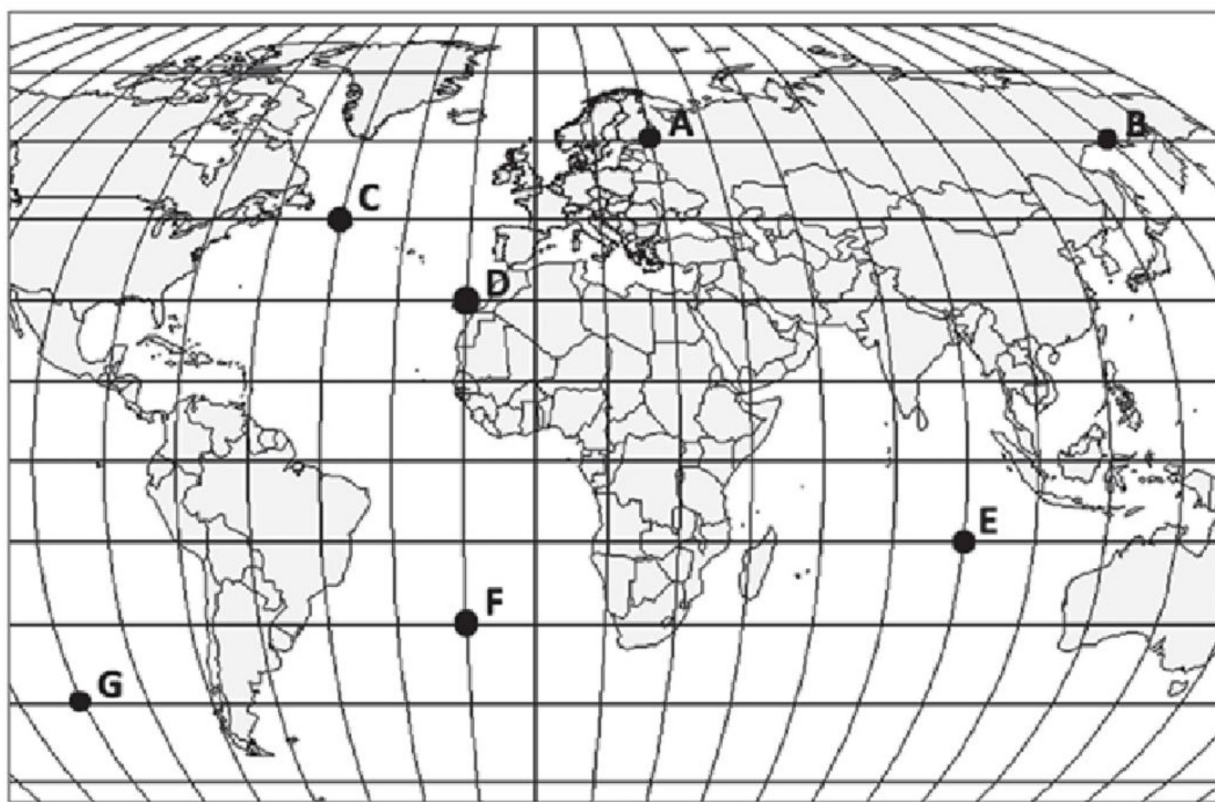


Рис. 7. Карта світу

Розв'язання.

I. Використаємо твердження, що уздовж паралелі довжину дуги r на 1° можна обчислити за допомогою формули $r = 111 \cdot |\cos \varphi|$ (км).

Тоді $DF = 111 \cdot \cos 60^\circ = 6660$ (км), $AB = 111 \cdot |\cos 120^\circ| = 6660$ (км). Отже, $DF = AB$. Зауважимо, що через спотворення на карті відстані між цими точками не виглядають рівними.

II. За рис. 7 можна визначити координати точки С, а саме 45° пн.ш., 45° зх.д. тоді координати точки С' становлять 45° пд.ш., 135° сх.д. ($180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$).

Аналогічно, координати точки Е за картою рис. 7 становлять 15° пд.ш., 90° сх.д., а координати Е' становлять 15° пн.ш., 90° зх.д.

Відповідь: I. $DF = AB = 6660$ км. II. С: 45° пн. ш., 45° зх.д., С': 45° пд.ш., 165° сх.д. Е: 15° пд.ш., 90° сх.д., Е': 15° пн.ш., 90° зх.д.

Висновки. Елементи аналітичної геометрії посідають важливе місце в курсах географії закладів загальної середньої освіти, хоча часто використовуються без прямого введення відповідної математичної термінології. Робота з географічними та прямокутними координатами, картографічними проєкціями, топографічними картами й кілометровою сіткою демонструє практичне значення координатного методу. Такі завдання сприяють розвитку просторового мислення учнів і формують стійкі міжпредметні зв'язки між географією та математикою.

Використана література:

1. Запотоцький С. П., Зінкевич М. В., Титар Н. М., Петринка Л. В., Горовий О. В., Миколів І. М. Географія: підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти / за наук. ред. К. В. Мезенцева, І. С. Круглова. Тернопіль: Астон, 2024. 304 с.
2. Географія. 10–11 класи. Рівень стандарту: навчальна програма для закладів загальної середньої освіти / Міністерство освіти і науки України. Київ, 2022. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2022/08/15/navchalna.programa-2022.geography-10-11-standart.pdf> (дата звернення: 05.07.2026).
3. Гілецький Й. Р. Географічні задачі та їх розв'язування: посібник для учителів географії та учнів. Тернопіль: Мандрівець, 2019. 136 с.
4. Істер О. С. Математика. 5–6 класи: модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти. Київ: Міністерство освіти і науки України, 2021. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Matem.5-6-kl.Ister.14.07.pdf> (дата звернення: 05.07.2026).
5. Коберник С. Г., Коваленко Р. Р., Гільберг Т. Г., Даценко Л. М. Модельна навчальна програма «Географія. 6–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 12.07.2021 № 795 (у редакції наказу Міністерства освіти і науки України від 09.02.2022 № 143). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Prirod.osv.galuz/Neohrafiya/Neohrafiya.6-9%20kl.Kobernik.ta.in.06.05.22.pdf> (дата звернення: 05.07.2026).
6. Гільберг Т., Довгань А., Савчук І. Робочий зошит з курсу «Географія»: навчальний посібник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2025. 88 с.
7. Чепок О. О., Ювченко Н. М. Математичні методи в курсах географії закладів загальної середньої освіти. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи»: збірник тез доповідей. 2025. С. 171–173.

References:

1. Zapototskyi S. P., Zinkevych M. V., Tytar N. M., Petrynka L. V., Horovyi O. V., Mykoliv I. M. (2024). Neohrafiia: pidruchnyk dlia 7 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geography. Textbook for Grade 7 of General Secondary Education Institutions]. / za nauk. red. K. V. Mezentseva, I. S. Kruhlova. Ternopil: Aston, 304 s. [in Ukrainian].
2. Neohrafiia. 10–11 klasy. Riven standartu: navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Geography. Grades 10–11. Standard Level: Curriculum for General Secondary Education Institutions]. / Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy. Kyiv, 2022. URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2022/08/15/navchalna.programa-2022.geography-10-11-standart.pdf> (data zvernennia: 05.07.2026). [in Ukrainian].
3. Hiletskyi Y. R. (2019). Neohrafichni zadachi ta yikh rozvyazuvannia: posibnyk dlia uchyteliv heohrafiy ta uchniv [Geographical Problems and Their Solutions. A Guide for Geography Teachers and Students]. Ternopil: Mandrivets, 136 s. [in Ukrainian].
4. Ister O. S. (2021). Matematyka. 5–6 klasy: modelna navchalna prohrama dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Mathematics. Grades 5–6: Model Curriculum for General Secondary Education Institutions]. Kyiv: Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy, URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Matem.5-6-kl.Ister.14.07.pdf> (data zvernennia: 05.07.2026) [in Ukrainian].
5. Kobernik S. H., Kovalenko R. R., Hilberh T. H., Datsenko L. M. Modelna navchalna prohrama “Neohrafiia. 6–9 klasy” dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Model Curriculum “Geography. Grades 6–9” for General Secondary Education Institutions]. Zatverdzheno nakazom Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 12.07.2021 № 795 (u redaktsii nakazu Ministerstva osvity i nauky Ukrainy vid 09.02.2022 № 143). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Prirod.osv.galuz/Neohrafiya/Neohrafiya.6-9%20kl.Kobernik.ta.in.06.05.22.pdf> (data zvernennia: 05.07.2026). [in Ukrainian].
6. Hilberh T., Dovhan A., Savchuk I. (2025). Robochyi zoshyt z kursu “Neohrafiia”: navchalnyi posibnyk dlia 8 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Workbook for the Course “Geography”: Educational Guide for Grade 8 of General Secondary Education Institutions] Kyiv: Heneza, 88 s. [in Ukrainian].
7. Chepok O. O., Yuvchenko N. M. (2025). Matematychni metody v kursakh heohrafiy zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Mathematical Methods in Geography Courses of General Secondary Education Institutions]. Materialy Vseukrainskoi naukovopraktychnoi konferentsii “Nastupnist u navchanni matematyky v umovakh reformy zahalnoi serednoi osvity: realii ta perspektyvy”: zbirnyk tez dopovidei. S. 171–173. [in Ukrainian].

O. Chepok, N. Yuvchenko. Application of elements of analytic Geometry in Geography courses of general secondary education institutions

The article examines the possibilities of applying elements of analytic geometry in geography courses of general secondary education institutions. Although analytic geometry is not studied as a separate topic in school mathematics courses, its fundamental ideas and methods are widely used in the study of geographic coordinates, cartography, topography, local time, and spatial models. The content of model curricula and educational materials in geography for Grades 7–11 is analyzed with regard to the use of the coordinate method and other mathematical tools in learning geographic concepts. It is shown that the system of geographic coordinates serves as a natural analogue of the Cartesian coordinate system studied in mathematics classes. Examples of tasks involving the determination of coordinates of diametrically opposite points on the Earth and the calculation of local time differences between settlements based on their geographic longitude are presented. Particular attention is paid to the use of the rectangular coordinate system in the Gauss–Krüger projection and to work with topographic maps in Grade 11. The methodology for determining rectangular coordinates of objects using a kilometre grid and identifying their geographic location is described. The conducted analysis confirms the expediency of using elements of analytic geometry as a means of implementing interdisciplinary links between mathematics and geography. The proposed examples can be used to develop students' abilities to apply mathematical methods while solving practice-oriented geographic problems. The results of the study may be useful for mathematics and geography teachers in organizing integrated learning and developing educational and methodological materials of a natural-science and mathematical orientation.

Key words: analytic geometry, geography, interdisciplinary links, geographic coordinates, rectangular coordinates, cartography, topographic map, Gauss–Krüger projection, coordinate method.

Дата першого надходження статті до видання: 10.07.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 01.09.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 25.09.2026



Стаття поширюється на умовах
ліцензії відкритого доступу
CC BY 4.0