

Министерство просвещения СССР
Киевский государственный педагогический институт
имени А.М.Горького

З.А.РЕЗНИЧЕНКО

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ
И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ВОПРОСЫ
ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
/по специальности № 13.731 - методика
преподавания математики/

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова



100313743

Киев - 1971

Работа выполнена на кафедре математики Киевского
государственного педагогического института имени А.М.Горького

Научный руководитель – кандидат педагогических наук,
доцент СЕРГУНОВА О.П.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
профессор КОВАНЦОВ Н.И.

Кандидат педагогических наук,
доцент ЖУРБАС М.А.

Внешний отзыв – кафедра элементарной математики и методики
преподавания математики Черниговского государственного педагогического
института имени Т.Г.Шевченко.

Автореферат разослан 1971 г.

Защита диссертации состоится 1971 г.
на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического
института имени А.М.Горького /Киев – 30, Бульвар Шевченко,
22/24 /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Исторические решения XXIV съезда КПСС вооружили советский народ программой дальнейшей борьбы за построение коммунистического общества в нашей стране. Для ее осуществления нужен человек-созидатель, владеющий знаниями основ наук и вооруженный диалектико-материалистическим мировоззрением. Такого человека - строителя коммунистического общества должна воспитывать наша советская школа. В Постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР "О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы" указаны пути качественной перестройки системы обучения и воспитания учащихся в этом направлении. В первую очередь это выразилось в принятии новых программ. Содержание новых программ предметов математического цикла приблизилось к требованиям научно-технического прогресса и потребностям дальнейшего развития общественного производства.

Для эффективной реализации новой программы по математике старых традиционных методов обучения уже недостаточно, хотя полностью отказываться от них также нельзя. Существенным структурным элементом обучения математике в школе становятся факультативные занятия. Они точнее определяют объем математического образования, обязательного для всех учащихся.

Советская педагогика успешно разрабатывает конкретные пути осуществления новых задач. Это находит свое выражение в работах и выступлениях многих передовых ученых: А.Н.Колмогорова, А.И.Маркушевича, Я.С.Дубнова, Н.И.Кованцова, Н.Ф.Четверухина, А.В.Погорелова, И.Е.Шиманского, И.Ф.Тесленко, А.Ф.Семеновича, А.И.Фетисова, В.Г.Болтянского, И.М.Яглома и многих других.

На протяжении уже многих лет наиболее трудным в школе считается преподавание геометрии, и это привлекает пристальное внимание ученых-математиков и методистов. Новая программа по геометрии для средней школы, хотя и имеет некоторые недостатки, все же способствует повышению научного уровня преподавания геометрии, вносит в школу идею преобразований, а с ней и диалектику, что очень важно для связи этого предмета с жизнью.

Одной из наиболее важных тем школьного курса геометрии является тема "Параллельные прямые". Значение этой темы велико, оно никогда не потеряет своей значимости. Ее изучение в значительной степени развивает логическое мышление учащихся. При изучении параллельных прямых особенно четко подчеркивается связь между аксиомами и теоремами, между различными видами теорем и раскрывается содержание некоторых научных методов доказательств. Через нее прокладывается путь к изучению других геометрических систем, отличных от евклидовой. Все это способствует глубокому пониманию учащимися аксиоматического метода построения геометрии, которым, как мы полагаем, должно завершаться изучение геометрии в школе, ибо трудно согласиться с положением, что учащиеся, оканчивающие среднюю школу, имеют представление о геометрии, отделяющее их на два с лишним тысячелетия от современности.

При изучении этой темы в особенности тесно переплетаются вопросы комплексного применения принципов дидактики и воспитания с учетом их диалектического единства: научность здесь должна умело сочетаться с доступностью преподавания; изучение этой темы способствует развитию интереса учащихся к геометрии, способствует воспитанию патриотизма и чувства национальной гордости.

Тема "Параллельные прямые" и связанные с ней вопросы изучаются почти на протяжении всего курса геометрии. Новая программа по геометрии рекомендует начать ее изучение с IX класса. В IX-XI классах геометрия не выделяется в отдельный предмет, а изучается в общем курсе математики. Изучая геометрический материал, учащиеся этих классов должны получить некоторые сведения об основных геометрических понятиях, а также представление о простейших логических умозаключениях. На необходимость введения такого курса в школьное преподавание и на его значение указывали известные ученые-педагоги С.Е.Гурьев, Н.И.Лобачевский, С.А.Богомолов, А.М.Астрян, Н.А.Извольский, И.Н.Кавун, Н.Ф.Четверухин и многие другие.

Научной основой построения школьного курса геометрии по новой программе служат геометрические преобразования. Они применяются с целью, чтобы приблизить школьный курс геометрии к научным позициям. Но научное содержание геометрических преобразований весьма сложное, и поэтому при изучении школьного курса геометрии обоснованные при их помощи понятия постепенно уточняются и обобщаются. Переход на новые школьные программы по математике связан

с новизной в обосновании многих понятий, с трудностями в методике их преподавания и обще-дидактическим отношением к учебному материалу.

Диссертантом была поставлена задача:

1. Проанализировать развитие изложения темы "Параллельные прямые" в наиболее распространенных отечественных и зарубежных учебниках и учебных пособиях по геометрии.
2. Проследить за попытками отображения в учебной литературе новых идей в теории параллельных, связанных с открытием неевклидовых геометрий.
3. Проанализировать изложение темы "Параллельные прямые" в учебных пособиях для советской школы, а также трудности в методике преподавания этой тем.
4. Рассмотреть требования новой программы к преподаванию теории параллельных прямых и связанных с нею вопросов школьного курса геометрии.
5. Выделить и систематизировать учебный материал по теме "Параллельные прямые" для изучения в каждом классе, разработать методику его изучения на основе новых принципов построения школьного курса геометрии.
6. Исследовать восприятие учащимися IV-VI классов темы "Параллельные прямые" и вопросов, связанных с ней, на основе новых требований, предъявляемых к школе.
7. Отобрать и систематизировать необходимый учебный материал для проведения факультативных занятий по теме "Итоговый обзор геометрии. Понятие о неевклидовых геометриях и об аксиоматическом методе в геометрии". Исследовать потребности в изучении материала этих факультативных занятий, разработать наиболее эффективную методику их проведения с учащимися X класса.
8. Установить глубину усвоения учебного материала этих факультативных занятий учащимися.

Экспериментальная работа проводилась самим диссертантом и под его руководством в средней школе № 166 г.Киева, средней школе № 2 г. Ирпня и в средней школе с.Фурсы Белоцерковского района Киевской области.

Диссертация состоит из введения, трех разделов и библиографии.

В первом разделе диссертации – "ТЕОРИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ В УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЕ РОССИИ И ЗАРУБЕЖНЫХ СТРАН", состоящем из семи параграфов, рассматриваются основные вопросы преподавания геометрии, связанные с изучением теории параллельных прямых, указывается роль и место аксиомы параллельности в школьном курсе геометрии и отражение этих вопросов в учебной литературе.

Обзор изложения темы "Параллельные прямые" в учебной литературе начинается с "Начал" Евклида. Теория параллельных прямых в этой книге построена на сравнительно высоком научном уровне, основой которого служит У постулат. Громоздкая формулировка и трудности, связанные с наглядными представлениями, явились причиной возникновения проблемы У постулата.

На протяжении многих веков теория параллельных прямых Евклида считалась научно необоснованной, и почти все математики пытались доказать У постулат. В математической литературе появляется целый поток разного рода "доказательств" У постулата. Это тормозило развитие и изучение геометрии. Проблема У постулата была окончательно решена в связи с открытием великого русского геометра Н.И.Лобачевского /1826/.

Во многих странах Западной Европы "Начала" почти до XVIII ст., а в отдельных странах – до XX ст. были не только единственным источником геометрических знаний, но и школьным учебником по геометрии, а несколько позже служили образцом для написания учебников. Особый интерес к "Началам" проявляется в Англии.

В школах России "Начала" Евклида никогда не были школьным учебником. Развитие учебной литературы по геометрии в России шло своим своеобразным путем. Первый оригинальный школьный курс геометрии на русском языке был написан в 1625 г., его автором был Ивашко Елизарьев. Теория параллельных прямых в нем излагалась на научной основе, с использованием У постулата.

Во второй половине XVIII ст. остро возрастает необходимость в специалистах, владеющих знаниями математики, и это вызывает появление двух различных направлений в учебной литературе. Одно из них – упрощение "Начал" Евклида путем улучшения стиля изложения и некоторых доказательств, улучшение объяснительного текста, дополнение учебного материала задачами и упражнениями практического содержания, но с неременным сохранением дедуктивного метода

изложения в духе Евклида. Такими пособиями в Англии были переводы "Начал", выполненные Робертом Симсоном и Джоном Плейфером. Теория параллельных прямых в этих учебниках была обоснована на утверждениях, равносильных У постулату, а также предлагались и его "доказательства". В Германии перевод "Начал" с той же целью был выполнен Г.Лоренцом. Подобные переводы "Начал", выполненные в это время в России Н.Г.Кургановым и другими авторами, не считались учебной литературой. В школах России широко пользовались учебниками, носившими узко-практический характер. Теория параллельных в них изучалась перед равенством треугольников, с включением "доказательств" У постулата.

Другое направление - требование создания совершенно нового учебника по геометрии, написанного специально для нужд школы. Значение такого учебника особенно подчеркивалось в призывах Ж.Даламбера, направленных на улучшение преподавания геометрии. Вопрос о решении проблемы У постулата также рассматривался Даламбером - в его работе "Parallèles" (1759).

В ответ на призывы Даламбера многие математики-педагоги начали особое внимание уделять школьному курсу геометрии. Это ярко выразилось в работах Э.Безу, С.Ф.Лакруа, А.М.Лекандра. В диссертации анализируется изложение сведений о параллельных прямых в этих учебниках и сопоставляются различные подходы к обоснованию их теории.

В конце XVIII ст. передовая педагогическая мысль России искала новые и своеобразные пути, которые соответствовали бы возрастающим потребностям в подготовке технических кадров. Наиболее оригинальным учебником этого периода является учебник Д.С.Анничкова "Теоретическая и практическая геометрия" /1780/. Теория параллельных прямых в нем строилась на основании их определения, как равноудаленных прямых, образованных движением прямой вдоль перпендикулярного к ней отрезка, а также на использовании 9-ой аксиомы, утверждающей равенство отрезков, образованных на параллельных прямых двумя перпендикулярами к одной из них. Система изложения была хаотичной и не устанавливала связи между отдельными теоремами и аксиомами.

В диссертации анализируются сведения о параллельных прямых в рукописях учебника по геометрии Л.Эйлера и отмечается, что проблема У постулата также не прошла мимо его внимания.

В первой половине XIX ст. в России начинается движение за реформу преподавания математики, которое характеризуется пред"явлением более высоких требований к преподаванию: 1/излагать учебный материал в доступной форме; 2/изучаемый материал должен согласовываться с возрастными и психологическими особенностями учащихся; 3/применение наглядности при изучении абстрактных понятий. В связи с этим назревает коренная перестройка не только методики изложения учебного материала, но и учебных пособий. Большой вклад в осуществление этой перестройки внесли Т.Ф.Осиповский, М.В.Остроградский, Н.И.Лобачевский и др.

В § 5 этого раздела подробно анализируется изложение теории параллельных прямых в "Курсе математики" Т.Ф.Осиповского /1814/ и "Руководстве начальной геометрии для военных учебных заведений" М.В.Остроградского /1885/, отмечаются удачные методические приемы и научность обоснования этой темы.

Огромное значение для развития и изучения геометрии имеют работы Н.И.Лобачевского. К вопросу об улучшении преподавания геометрии Н.И.Лобачевский подходил с материалистических позиций и при решении важных проблем дидактики в отношении между формальным и материальным содержанием обучения на первое место ставил реализм в преподавании, требовал сознательного и наглядного обучения с учетом возрастных особенностей учащихся, подчеркивал тесную связь изучения геометрии с практическим применением знаний. Н.И. Лобачевский считал, что тема "Параллельные прямые" в геометрии является одной из самых трудных, а поэтому уделял ей особое внимание. Он отмечал, что "... учение о параллельных не везде может быть строго, но должно убеждать только ощутительностью истины и простотою предположения, хотя и произвольного"¹. Правильное понимание роли аксиомы параллельности отразилось и на содержании его учебника "Геометрия" /1823/.

В первых главах "Геометрии" излагается абсолютная геометрия, не зависящая от У постулата, затем следует теория параллельных прямых, а за ней - темы о подобии фигур, о пропорциях, об измерении площадей. В "Обзрении преподавания чистой математики на 1825-1826 год" Н.И.Лобачевский предлагает программу по геометрии, и в ней уже не упоминается о проблеме У постулата, как-будто она

¹ Н.И.Лобачевский. Наставление учителям математики в гимназиях. "Труды института истории естествознания". Том II, АН СССР, 1948, стр. 557.

уже перестала для него существовать. Вероятно, уже тогда им были получены некоторые результаты исследования теории параллельных. Одновременно с изучением свойств плоских геометрических фигур Н.И.Лобачевский рекомендует рассматривать свойства фигур сферической геометрии. Более того, он предлагает рассматривать измерение площадей сферических треугольников раньше площадей фигур, "ограниченных прямыми линиями", ибо последнее связано с теорией параллельных линий, для которых необходим определенный постулат. Это говорит о том, что уже в то время он начал работать над своей "воображаемой геометрией".

Теория параллельных прямых в "Геометрии" изложена с использованием утверждения, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой не пересекаются; здесь приводится "доказательство" У постулата, данное Луи Бертраном, но Н.И.Лобачевский указывает на несовершенство этого доказательства.

Во второй половине XIX ст. в учебной литературе наблюдается новый период развития, связанный с обоснованием теории параллельных прямых на строго научной основе. Появляются новые методические трудности. При их решении определилось два направления. Это — сторонники традиционных методов, основанных на доказательствах У постулата /в России — Ф.Буссе, В.Я.Буныковский, А.Сокович, А.Андреев, Н.В.Бугаев и др., за рубежом — К.И.Беккер, А.Дженочки, Ж.Бертран и др./, и передовые ученые-педагоги, стоящие на позиции невозможности доказательства У постулата.

В 1862 г. были опубликованы "Элементы математики" Р.Бальцера. Во втором издании этой работы автор отказывается от "доказательства" Л.Бертрана и строит теорию параллельных прямых по Лобачевскому. Но его доказательства свойств и признаков параллельных прямых лишены строгости Лобачевского.

В 1864 г. в России была опубликована работа А.Ю.Давыдова "Элементарная геометрия в объеме гимназического курса", которая завоевала широкую популярность и выдержала 39 изданий. Этот учебник смело отражал идеи Лобачевского, выгодно отличаясь от других своей научностью. Для его создания автор использовал результаты новейших научных открытий, что особенно отразилось на изложении теории параллельных прямых.

Изложение теоретического материала в книге А.Ю.Давыдова построено дедуктивным методом. Аксиомой параллельности служит

утверждение: "Перпендикуляр и наклонная к одной прямой пересекаются". Оно используется для доказательства свойств и признаков параллельных прямых. Учебник написан мастерски, с использованием удачных методических приемов, с учетом возрастных особенностей учащихся. При доказательстве теорем четко выделяется условие и вывод теоремы, и лишь после этого следует само доказательство. Обращается внимание на различные методы доказательств, особенно на метод от противного /при доказательстве признаков параллельных/. Последние издания учебника содержат материал о неевклидовой геометрии.

В учебниках "Курс элементарной геометрии с практическими упражнениями для средних учебных заведений" А.Курбатова /1865/, в "Начальной геометрии" Е.М.Пржевальского /1878/ и некоторых других теория параллельных прямых излагалась с использованием У постулата. В "Начальной геометрии для средних учебных заведений" Б.Н.Беренса /1871/, в "Кратком руководстве геометрии" А.Воронова /1875/ и некоторых других учебниках того времени за аксиому параллельности принималось утверждение Д.Плейфера.

В конце XIX ст. в школьные учебники России проникают идеи неевклидовой геометрии. Первым таким произведением была "Элементарная геометрия в объеме гимназического курса" М.Е.Ващенко-Захарченко /1883/. В этой книге нашли отражение основные педагогические требования автора к изучению геометрии. Основу сознательного изучения геометрии он видел в четком построении теории параллельных прямых, как одной из наиболее сложных и интересных тем. Поэтому М.Е.Ващенко-Захарченко возвращается к дедуктивному методу Евклида. Теория параллельных прямых в его книге заканчивается ознакомлением с элементами геометрии Лобачевского.

В 1892 г. была напечатана "Геометрия" А.П.Киселева, которая завоевала себе заслуженную популярность на длительный период. В диссертации анализируется изложение сведений о параллельных прямых в различных изданиях этого учебника.

К концу XIX ст. научность построения теории параллельных прямых уже не вызвала никакого сомнения. В методике преподавания этой темы возникает вопрос о том, когда ее излагать. Одни педагоги и авторы учебников /А.Ю.Давыдов, А.П.Киселев, Э.Борель и др./ были сторонниками изложения этой темы до рассмотрения элементов

треугольника, другие - считали целесообразным излагать ее несколько позже. По существу, этот вопрос еще и сейчас не решен.

В начале XX ст. в странах Западной Европы происходила новая реформа в обучении. Ее обычно связывают с именем Ф.Клейна, изложившего в Меранской программе /1905/ новые требования к преподаванию математики. Эта реформа выразилась в новых принципах преподавания: в геометрии - изучение не должно носить формально-догматический характер, подчеркивалась необходимость в развитии наблюдательности и практических навыков учащихся, большое внимание уделялось развитию логического мышления.

В этот период основными зарубежными учебниками по геометрии были различные переработки "Начал" Лежандра, а позже - новые оригинальные учебники. Среди них особое место занимает учебник Э.Бореля. В нем широко использованы наглядность, интуиция, отражены новые идеи, доминирующие в современных геометрических исследованиях. Изучение параллельных прямых в книге Э.Бореля об"единялось с рассмотрением параллельного переноса. В диссертации подробно анализируется изложение этой темы и дается ее общая оценка.

Но педагоги того времени снова возвращаются к учебникам, построенным дедуктивным методом. Наиболее интересными из них были "Новые начала геометрии" Ш.Мерэ /1874/ и "Начала геометрии" К.Бурле /1908/. Теоретический материал в них излагался с широким применением прогрессивной идеи движения в геометрии /под параллельными прямыми подразумевались прямые, которые оставались инвариантными при смещении вдоль прямой/.

Это реформистское движение в России началось несколько раньше и в XX ст. проходило с участием многих передовых ученых: Д.М.Синцова, Н.А.Извольского, С.А.Богомолова, В.Ф.Кагана, А.Р.Кулишера, Б.К.Млодзеевского, С.И.Шохор-Троцкого и др. Важную роль сыграли Всероссийские съезды преподавателей математики /1912, 1914 гг./.. На этих съездах обращалось внимание на перестройку школьного курса математики, поднимался вопрос о введении пропедевтического курса геометрии и о научном обосновании школьного систематического курса геометрии /С.А.Богомолов, А.Р.Кулишер, Н.А.Извольский и др./.. Здесь затрагивались также вопросы изучения в школе элементов геометрии Лобачевского /П.А.Долгушин, Г.А.Грузинцев/.

В диссертации анализируется работа П.А.Долгушина "Систематический курс геометрии Лобачевского".

ческий курс геометрии для средних учебных заведений" /1912/, которая в направлении практического изучения элементов неевклидовых геометрий была первой в России. Материал приложения к этой книге "Об основаниях геометрии. Геометрия Евклида, Лобачевского, Римана" был довольно необычный, требовал значительной подготовки со стороны преподавателей математики. Это явилось одной из причин того, что книга П.А.Долгушина не получила широкого распространения. К тому же она была написана без надлежащего учета возрастных особенностей учащихся.

В первые годы советской власти начинается борьба за создание новой школы. Первые школьные программы призвали использовать идею геометрических преобразований. В это время для учащихся младших классов вводятся пропедевтические курсы геометрии. Появляются специальные учебники по геометрии, основной задачей которых было научить учащихся некоторым практическим навыкам /А.М.Астряба, М.Н.Иовлева, А.Р.Кулишера и др./. Наиболее интересным из них является "Наглядная геометрия" А.М.Астряба /1923/.

Были изданы разные систематические курсы геометрии /К.М.Рашевского, Н.М.Душина, Н.А.Извольского и др./. Теория параллельных прямых в "Геометрии на плоскости" Н.А.Извольского очень громоздка и мало понятна учащимся. При доказательстве методом от противного автор не раскрывает содержание этого метода; допускаются ошибки в определениях аксиомы и постулата.

Учебник Н.М.Душина "Курс элементарной геометрии" /1923/ написан с использованием идеи геометрических преобразований. Теория параллельных прямых в нем строится на использовании свойств параллельного переноса. Этот учебник пропагандирует широкое использование фюзионизма при изучении геометрии, но в то же время логическому обоснованию автор уделяет недостаточное внимание.

В § 6 первого раздела диссертации анализируется изложение материала о параллельных прямых в учебниках Н.А.Извольского и Н.М.Душина.

Особый интерес вызывает один из проектов школьной программы по геометрии /1923/ в соответствии с которым изучение систематического курса геометрии на первом году обучения в школе второй степени предлагалось начинать с темы "Параллельные прямые". В объяснительной записке указывалось, что исходным пунктом для определения понятия о параллельных прямых "может быть черчение таких прямых с помощью линейки и треугольников, некоторые же свойства

параллельных прямых могут быть об"яснены их симметричностью"¹. В программе ничего не говорится о роли и месте аксиомы параллельности в построении школьного курса геометрии. Таким образом, параллельные прямые предлагалось изучать с помощью наглядности и интуиции, и это значительно снижало научность изложения учебного материала. В силлабусе к проекту программы все это еще больше подчеркивалось.

В диссертации анализируется изложение теории параллельных прямых в "Курсе опытной геометрии" А.М.Астряба /1927/ - одном из лучших учебников периода лабораторного метода обучения в школе.

В 1932 г. была принята школьная программа, требующая единого изложения изучаемого материала, а также использования соответственных стабильных учебников. Изучение геометрии предлагалось начинать с VI класса, и в качестве стабильного учебника был назван "Систематический курс геометрии" Ю.О.Гурвица и Р.В.Гангнуса /1932/. В нем делалась попытка познакомить учащихся с историей У постулата и с существованием неевклидовых геометрий. В изложении учебного материала авторы допустили довольно много ошибок.

Советские ученые, передовые учителя и методисты подымали вопрос о необходимости перестройки школьных программ, выдвигали требование изучать математику на серьезном научном уровне /П.С.Александров, А.Н.Колмогоров, Н.Ф.Четверухин, А.В.Ланков и многие другие/. В это время неоднократно подчеркивались трудности в изложении темы "Параллельные прямые", а также отмечалось, что в школе не уделяется должное внимание раскрытию понятий аксиомы, теоремы и связи между ними.

В программах 1937/38 и последующих годов теорию параллельных прямых рекомендовалось излагать после изучения элементов треугольника. Ознакомление с аксиомой параллельности предлагалось в начале темы или /по желанию учителя/ при доказательстве признаков параллельности, - где она, по существу, впервые используется. Имена Евклида и Лобачевского не упоминались. Стабильным учебником в это время становится "Геометрия" А.П.Киселева.

Несколько позже появилась "Элементарная геометрия" Н.А.Глаголева /1944, 1954/. Содержание этого учебника более соответствовало

¹

Программы по математике для труд.школы II ступени. "Математика в школе". Сборник III, посвященный вопросам преподавания математики в трудовой школе 2 ступени. Л., 1925, стр. 36.

научным проблемам преподавания. Автор широко пользуется геометрическими преобразованиями. Теория параллельных прямых изучается раньше элементов треугольников. Эта перестановка придает изложению большую строгость, а также освобождает учителя от необходимости доказывать некоторые теоремы дважды, дает возможность для полного рассмотрения свойств треугольника, включая и сумму его внутренних углов. Учебник написан с учетом возрастных особенностей учащихся.

В диссертации подробно рассматривается изложение теории параллельных прямых в этой книге и отмечается ряд недостатков.

Идею Н.А.Глаголева изложения теории параллельных прямых несколько позже использовали Н.Н.Никитин и А.И.Фетисов в своей "Геометрии" для УІ-ІХ классов /1956/, а позже - Н.Н.Никитин в "Геометрии" для УІ-УІІ классов /1958/, являющейся и ныне действующим учебником. В диссертации анализируется изложение теории параллельных прямых в этих учебниках и дается их общая оценка.

Вторая глава диссертации - "МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ "ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ" В ІУ-УІ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ В СВЕТЕ ЗАДАЧ СОВРЕМЕННОЙ РЕФОРМЫ ШКОЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ". В ней рассматриваются различные вопросы методики изложения сведений о параллельных прямых, а также некоторых вопросов, тесно связанных с этой темой.

В соответствии с новой программой по математике учащиеся ІУ класса должны познакомиться с понятием параллельных прямых и их простейшими построениями с помощью чертежных инструментов. В У-м классе учащиеся знакомятся с понятием направленности прямых; изучаются некоторые свойства параллельных прямых. Аксиома параллельности /в сильной форме/ формулируется в виде основного свойства параллельных прямых. Сохраняется индуктивный характер изложения учебного материала: выводы формулируются на основе эмпирических наблюдений и практического опыта учащихся.

В систематическом курсе геометрии УІ класса изучение тем "Параллельные прямые" продолжается, но программа не дает четких указаний на содержание и план ее изложения, лишь отмечается, что свойства параллельных прямых и параллельный перенос должны стать основой школьного курса геометрии.

Различные исследования советских ученых - математиков и психологов /П.С.Александрова, Н.Ф.Четверухина, Н.Н.Моластера, А.Ф.Семеновича, Д.Б.Эльконина и др./показали, что познавательные способности наших учащихся теперь значительно выше, чем в прежние годы. Практический опыт диссертанта подтвердил, что учащиеся ІУ-У клас-

сов вполне могут усваивать несложный геометрический материал абстрактного характера.

Изложение геометрического материала должно строиться преимущественно на принципах наглядности. Это хорошо согласуется с практической деятельностью учащихся, развивает их интерес к изучению геометрии, стимулирует активность и самостоятельность. К абстрактным геометрическим понятиям необходимо подходить постепенно, путем использования их различных интерпретаций. Целый ряд свойств геометрических фигур устанавливается при решении конкретных задач с использованием построений, выполняемых при помощи простейших чертежных инструментов. Сопоставляя полученные результаты, учащиеся делают первые умозаключения, основанные на наблюдении, интуиции и личном опыте.

Изучение геометрического материала строится с привлечением элементов стереометрии, и это способствует развитию пространственного воображения и логического мышления учащихся. С первых уроков учащиеся должны понять, что они изучают пространственные формы реального мира.

Существенной методической трудностью этого курса геометрии является то, чтобы, пользуясь наглядностью, не способствовать возникновению в учащихся мысли, что все геометрические факты легко обосновываются личным опытом, с помощью практики. Поэтому изучаемый здесь теоретический материал должен охватывать довольно узкий круг вопросов.

Проведенная экспериментальная работа показала, что нет необходимости знакомить учащихся IX класса с понятием теоремы и тем более — аксиомы. Они психологически еще недостаточно подготовлены к восприятию этой информации. С понятием теоремы наиболее целесообразно знакомить учащихся X класса, делая это на первых уроках при повторении свойств смежных и вертикальных углов. Необходимо сразу же после введения этого понятия объяснить учащимся структуру теоремы и в дальнейшем постоянно возвращаться к этому вопросу.

Лучшему усвоению и более глубокому пониманию доказательства геометрических теорем учащимися X класса способствует проведение с ними специальной подготовительной работы. Внимание учащихся обращается на то, что после каждого построения, сравнения или измерения они обязательно делают определенные умозаключения, выражающие некоторые закономерности. Эти выводы не могут быть произвольными. Они являются отражением действительности, которая познается опытом. Но иногда эти выводы могут быть несправедливыми,

а поэтому они требуют научного обоснования, приобретающего форму логического доказательства.

Изучение темы "Параллельные прямые" в У классе проводилось нами по такому плану:

1. Взаимное расположение прямых на плоскости, проходящих через две, три и одну точку. Понятие пучка прямых; понятие направленности прямых /подчеркивается, что каждой прямой пучка соответствует определенное направление/; понятие угла направленности прямых. Все это способствует лучшему пониманию учащимися природы взаимного расположения прямых, а в дальнейшем – лучшему усвоению понятия вектора.

2. Определение параллельных прямых, как прямых одного направления. Их существование подтверждается практическими задачами на построение пучков параллельных прямых.

3. Существование бесконечного множества параллельных прямых определенного направления /оно устанавливается с помощью соответственных построений; все эти прямые как бы покрывают собой плоскость/.

4. Формулируется аксиома параллельности /в сильной форме/ – основное свойство параллельных прямых.

5. Рассматриваются некоторые другие свойства параллельных прямых. Они строго не доказываются, их изучение связано с использованием свойств параллельного переноса.

6. Доказывается теорема о сумме внутренних углов треугольника /с использованием свойств углов с одинаково направленными и противоположно направленными сторонами/.

Тема "Параллельные прямые" в У классе излагается несколько узко. Это вызвано самим методом преподавания. Более детальное рассмотрение сведений о параллельных прямых, на научной основе, должно проводиться в УІ классе.

Исследования показали, что преподавание геометрии в УІ классе требует особого внимания к методам изложения материала, которые должны соответствовать переходу от наглядной геометрии /ІУ–У классы/ к систематическому курсу, имеющему целью показать преимущества научного доказательства перед доказательствами, основанными на опыте, подготовить учащихся к пониманию логического обоснования геометрии.

Изучение геометрии в УІ классе необходимо начинать с беседы о предмете и методе геометрии и о ее историческом развитии /в доступной для учащихся этого возраста форме/. Ознакомление учащихся с именами известных математиков ХУІІІ–ХІХ ст., внесших значительный

вклад в развитие геометрии, а также с именами математиков современности, совершающих новые открытия, способствует правильному формированию представлений о геометрии как развивающейся науке и стимулирует интерес к ее изучению в школе.

В соответствии с новой программой по математике тема "Параллельные прямые" приобретает особое значение. Она служит основой для изучения других тем /прежде всего "Четырехугольники и их свойства", "Подобие фигур"/.

Приступая к изучению темы "Параллельные прямые", учащиеся VI класса должны получить достаточные знания элементов логической структуры геометрии. Они должны понимать абстрактный характер основных понятий, четко представлять различие между аксиомой и теоремой, а также знать о взаимосвязи между этими понятиями. Они должны владеть определенным количеством аксиом /их перечень зависит от логической системы, на которой будет строиться школьный курс геометрии¹.

Известно, что школьный курс геометрии VI-VII классов не может быть построен на строго логической основе, ибо учащиеся этих классов психологически не подготовлены к такому построению. Они не владеют достаточной степенью абстрагирования и имеют незначительный жизненный опыт. Но для глубокого усвоения геометрии все же необходимо, чтобы учащиеся хорошо знали структуру теорем, были знакомы с видами теорем и понимали взаимосвязь между ними. Изучение различных видов теорем развивает познавательную заинтересованность учащихся, показывает им диалектический путь в познании, способствует развитию логического мышления, демонстрирует силу аксиоматического метода в математике. В практике преподавания геометрии на этот материал до последнего времени не обращается надлежащее внимание /к тому же школьные учебники не отражают его в достаточной мере/. В результате этого в учащихся не всегда формируется правильное понимание ни цели, ни самого смысла доказательств. Доказательства теорем зачастую заучиваются чисто механически. Некоторые учащиеся не могут провести доказательство известной им теоремы, если видоизменить чертеж или даже буквенные обозначения на нем. Все это говорит о необходимости заложить еще в VI классе определенный фундамент логического обоснования геометрии. § 6

¹ Нам не известны экспериментальные данные о построении школьного курса геометрии на системе аксиом Вейля, а соответствующие исследования не входили в наши задачи. В своей работе мы пользовались системой аксиом, близкой к системе аксиом Д.Гильберта.

второго раздела диссертации посвящен именно этому вопросу.

Методика изучения параллельных прямых в VI классе на основе геометрических преобразований изложена в § 7. Если проанализировать школьные учебники по геометрии, то нетрудно заметить, что изложение почти всех тем начинается с рассмотрения свойств изучаемых геометрических фигур. Некоторые из этих свойств, наиболее существенные, выделяются в признаки. Они формулируются в виде теорем, обратных по отношению к тем, в которых говорится об этих свойствах. И лишь одна тема "Параллельные прямые" не подчинена этой традиции, и на протяжении многих лет этот удачный методический подход к изучению геометрии в школе нарушается. Основная причина этого состоит в недостаточном изучении вопроса о разных видах теорем и их логической связи.

В учебнике Н.Н.Никитина "Геометрия" предлагается следующий план изложения этой темы:

1. Определение параллельных прямых.
2. Свойство двух перпендикуляров к одной прямой /в учебнике не подчеркивается, что это - теорема о существовании параллельных прямых/.
3. Углы, образованные двумя разными прямыми с общей секущей.
4. Признаки параллельности.
5. Аксиома параллельности /в учебнике она называется аксиомой Евклида/.
6. Зависимость между углами, образованными двумя параллельными прямыми и их общей секущей.
7. Изучение некоторых свойств параллельных прямых.

В диссертации предлагается иной план изложения этой темы, который вполне согласуется с новой программой и является более эффективным при изучении не только этой темы, но и всего курса геометрии VI класса:

1. Дается определение параллельных прямых: "Две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными". Практика преподавания показала, что это определение наиболее согласуется с психологическим развитием учащихся.

2. Формулируется "основное свойство" параллельных прямых /сильная форма аксиомы параллельности/. Сообщаем учащимся, что это утверждение является аксиомой параллельности.

3. Кратко, в доступной для учащихся форме рассказываем о У постулате и его истории, а также о роли Н.И.Лобачевского в

решении проблемы У постулата.

4. Разъясняем вопрос о происхождении аксиом, о их значении и указываем на то, что существуют различные геометрические системы, отличающиеся своими аксиомами. Обращаем внимание учащихся на то, что на поверхности сферы аксиома параллельности не выполняется, если под прямыми понимать окружности больших радиусов. В то же время некоторые другие аксиомы /уже известные учащимся/ на этой поверхности выполняются.

Сообщаем, что геометрия Лобачевского имеет свою аксиому параллельности, отличающуюся от аксиомы параллельности изучаемой в школе геометрии. Аксиома параллельности Лобачевского на уроках не формулируется /с ней можно познакомить учащихся несколько позже - на занятии кружка или на математическом вечере/.

5. Доказывается теорема о существовании параллельных прямых /с рассмотрением метода от противного и объяснением его сущности/. Особое внимание уделяется выполнению чертежа, не допускающего искажений и не противоречащего представлениям о прямой линии.

6. Изучаются свойства параллельных прямых: 1/если параллельные прямые имеют общую точку, то они совпадают; 2/каждую из прямых линий можно рассматривать как две совпавшие параллельные прямые; 3/если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой; 4/расстояния между параллельными прямыми, взятые в одном направлении, равны между собой. При этом используются геометрические преобразования и аксиома параллельности.

Рассматривается ряд практических задач.

7. Вводится понятие противонаправленных лучей и доказывается прямая и обратная теорема о их симметричности относительно середины отрезка, соединяющего их вершины.

8. Рассматриваются углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей. Практически /при помощи модели/ устанавливается попарное равенство соответственных или накрест лежащих углов и их неравенство в случае, когда секущая пересекает непараллельные прямые.

9. Доказывается теорема о соотношении между углами, полученными при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой. Эта теорема состоит из четырех частей, каждая из которых доказывается при помощи поворота и центральной симметрии. В работе даются методические рекомендации, направленные на лучшее запоминание названий углов и усвоение этих доказательств. Как следствие из этой теоремы формулируется свойство перпендикуляра к одной из параллельных

прямых.

10. Доказывается обратная теорема /признаки параллельности двух прямых/.

11. В процессе изучения этого теоретического материала рассматривается серия упражнений на применение указанных теорем.

12. Проводится повторение всех рассмотренных сведений о параллельных прямых. Выделяются наиболее существенные из них - те, по отношению к которым справедливы обратные утверждения /признаки параллельности прямых/.

Такое повторение помогает учащимся не только лучше усвоить свойства и признаки параллельных прямых, но также способствует лучшему пониманию логической структуры геометрии.

13. Изучаются свойства углов с соответственно параллельными и взаимно перпендикулярными сторонами. Теоретические сведения о параллельных прямых сочетаются со специально подобранными упражнениями на вычисление и на доказательство.

14. Сведения о параллельных прямых находят широкое применение при изучении параллелограммов и трапеций, что, в свою очередь, связано с приобретением учащимися сведений о необходимых и достаточных условиях и усвоением связи между ними, а также с прямой и обратной теоремами.

Методике изложения этих вопросов посвящен § 8 второго раздела диссертации.

15. Изучение параллелограммов начинается с понятия и свойств полосы.

16. Изучение свойств и признаков параллелограмма, а также его отдельных видов /прямоугольника, ромба, квадрата/ и их свойств проводится с широким применением свойств полосы, симметрии и поворота.

17. Теорема Фалеса доказывается при помощи свойств оси и центра симметрии полосы. Эта теорема позже используется для доказательства свойств средней линии треугольника.

18. На основе свойств полосы, теоремы Фалеса и геометрических преобразований учащиеся знакомятся с понятием трапеции и свойствами ее средней линии.

Три параграфа второго раздела /§ 2, 5, 9/ посвящены анализу изложения сведений о параллельных прямых в пробных учебниках для IX-XI классов школ СССР и некоторых зарубежных учебниках математики.

Результаты проведенной экспериментальной работы показали, что наглядный курс геометрии IX—X классов необходим. Он становится прочной базой для изучения систематического курса геометрии. Учащиеся IX—X классов с большим интересом и довольно успешно овладевают геометрическим материалом. В диссертации обосновывается целесообразность компактного изучения геометрического материала в курсе математики IX—X классов.

Изучение темы "Параллельные прямые" в XI классе по разработанному нами плану более эффективно по сравнению с обычно принятым. Оно повышает общий уровень логического мышления учащихся, способствует лучшему пониманию и усвоению учебного материала.

Т р е т ь и й р а з д е л диссертации посвящен методике проведения факультативных занятий на тему "Итоговый обзор геометрии. Понятие о неевклидовых геометриях и аксиоматическом методе в геометрии" в X классе средней школы. Здесь рассматриваются вопросы итогового изучения параллельных прямых в школе, непосредственно связанного с ознакомлением учащихся с элементами неевклидовых геометрий и затрагивающего важные вопросы преподавания школьного курса геометрии, имеющие отношение к обоснованию геометрии и аксиоматическому методу ее построения.

Вопрос о необходимости познакомить учащихся с аксиоматическим методом построения геометрии подымался еще на I Всероссийском съезде преподавателей математики /проф. С.А. Богомолов, 1912г./ . Преподаватели П.А. Долгушин и Г.А. Грузинцев выступили в то время с конкретными предложениями, направленными на осуществление изучения элементов геометрии Лобачевского в школе. В 1925 г. С.А. Богомолов выдвинул предложение о проведении факультативных занятий в школе и назвал целый ряд тем, среди которых должное место занимают элементы сферической геометрии и геометрии Лобачевского. Лишь теперь все эти предложения нашли некоторое отражение в школьной программе.

Новая программа по геометрии ограничивается изучением материала евклидовой геометрии, но ей рекомендуется проведение факультативных занятий /по выбору учителя/ на тему "Вопросы неевклидовых геометрий и аксиоматического метода в геометрии" /12 час./ . Целью этих занятий является ознакомление учащихся с элементами сферической геометрии, с аксиоматическим методом и элементами геометрии Лобачевского.

Вопросы, рассматриваемые на факультативных занятиях, новы и довольно сложные для нашей школы. В этом направлении на протяжении

многих лет работали и сейчас работают лишь отдельные энтузиасты /В.Ф.Каган, Н.Н.Иовлев, Б.В.Кутузов, И.Ф.Тесленко и некоторые другие/. Популяризацией элементов неевклидовых геометрий в настоящее время занимаются передовые советские ученые /Н.И.Кованцов, Б.А.Розенфельд, А.Ф.Семенович, А.И.Фетисов, И.М.Яглом и др./. Опыту изучения оснований геометрии в средней школе посвящена кандидатская диссертация В.Е.Шевченко¹.

Проведенное нами исследование показало, что занятия по теме указанного факультатива были бы безусловно полезны всем учащимся X класса. Эти занятия способствуют формированию представлений о научных концепциях, учат логически мыслить, играют немалую роль в философской подготовке учащихся.

В диссертации дается обоснование целесообразности проведения этих факультативных занятий по такому плану:

1. Исторический обзор развития геометрии.
2. Возникновение аксиоматического метода. "Начала" Евклида.
3. Элементы сферической геометрии.
4. Современный аксиоматический метод построения геометрии.

Аксиомы соединения и их следствия.

. Аксиомы порядка и их следствия.

Аксиомы конгруэнтности и их следствия.

7. Аксиомы непрерывности и параллельности, их следствия.

8. Геометрические системы, отличные от геометрии Евклида. Модели этих геометрий, понятие интерпретации.

9. Значение открытия геометрии Лобачевского. Понятие о доказательстве непротиворечивости геометрии Лобачевского.

10. Элементы геометрии Лобачевского.

При рассмотрении всего этого материала мы встретились со многими методическими трудностями, заключающимися прежде всего в плохом понимании учащимися абстрактного характера основных понятий и соотношений между ними /отчасти это объясняется тем, что учащиеся, с которыми проводилась экспериментальная работа, изучали геометрию по старым программам/. Для преодоления этого препятствия мы широко пользовались различными интерпретациями основных понятий. Подчеркивалась необходимость абстрагирования для установления общих свойств /определенных законов/, которые необходимы для непосредственного применения их на практике. Подчеркивалось, что абстрактные

¹ В.Е.Шевченко. Опыт изучения оснований геометрии /аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии Лобачевского/ в средней школе. Киев, 1970.

понятия являются продуктом длительного эмпирического развития геометрии: "От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике - таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности"¹.

При изучении аксиоматического метода построения геометрии указывалось на его значение как сильного научного метода обоснования математики. Аксиомы - это результат многовекового человеческого опыта познания мира и его явлений: "Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом"².

В результате проведенного эксперимента мы пришли к выводу о целесообразности ознакомления учащихся с системой аксиом, близкой к системе аксиом Д. Гильберта и состоящей из пяти групп аксиом. Это позволяет в дальнейшем в значительной мере облегчить переход к системе аксиом геометрии Лобачевского путем замены лишь одной аксиомы параллельности. Общее количество аксиом невелико /21/, их формулировка приобретает наиболее простую и понятную словесную форму, а их содержание вполне понятно учащимся. На факультативных занятиях рассматривалось доказательство наиболее интересных теорем абсолютной геометрии аксиоматическим методом. Более детально изучалась первая группа аксиом и ее следствия.

Для лучшего понимания и усвоения учебного материала проводились специальные практические занятия с учащимися: они находили в школьном курсе планиметрии теоремы абсолютной геометрии и отмечали в доказательстве этих теорем моменты применения интуиции. Эти же теоремы доказывались затем учащимися аксиоматическим методом, со строгой фиксацией каждого логического шага в построении доказательства.

При изучении элементов сферической геометрии на факультативных занятиях особое внимание обращалось на основные понятия сферической геометрии, на понятие сферического расстояния, на элементы и свойства простейших геометрических фигур /сферического двугрульника и треугольника/. При изучении подчеркивалось, что на сферической поверхности нет параллельных прямых, а поэтому не выполняется аксиома параллельности. Свойства сферических треугольников изучаются с использованием понятий и свойств трехгранника, а также

¹ В.И. Ленин. Полное собрание сочинений. Том 29. Философские тетради. Госполитиздат. М., 1963, стр. 152.

² Там же, стр. 172.

полярного треугольника. Особое внимание обращалось на сумму внутренних углов сферического треугольника и на понятие дефекта сферического треугольника.

Изучение теоретического материала сопровождалось решением специально подобранных упражнений с широким использованием разнообразных наглядных пособий. Опыт показал, что даже заранее изготовленные цветные таблицы или диапозитивы не могут обеспечить достаточных представлений учащихся о взаимном расположении элементов сферической поверхности. Намного лучшие результаты дает применение объемных проволочных моделей и изображений, выполняемых на больших надувных шарах. В диссертации даются замечания о методике применения наглядности при изучении элементов сферической геометрии.

Еще при изучении группы аксиом соединения учащиеся получают понятие о параллельных прямых. Их существование легко доказать, пользуясь известным следствием абсолютной геометрии /"два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются"/, но для обоснования теории параллельных прямых /их свойств и признаков/ уже необходима специальная аксиома. В диссертации излагается опыт ознакомления учащихся с построением теории параллельных прямых в "Началах" Евклида. Учащиеся узнают об истории У постулата и знакомятся с некоторыми попытками его доказательств /Дж.Валлиса, А.М.Лежандра, Дж.Плейфера/. Особый интерес представляют исследования Дж.Саккери, И.Ламберта, К.Ф.Гаусса, Я.Бойяи, Н.И.Лобачевского. Необходимо подчеркнуть приоритет нашего соотечественника в решении вопроса о У постулате.

Рассказ о теории параллельных прямых в плоскости Лобачевского методически целесообразно начинать с выяснения расположения прямых пучка с действительной вершиной по отношению к заданной прямой, не принадлежащей этому пучку. Это приводит к формулировке аксиомы параллельности Лобачевского, частным случаем которой является аксиома параллельности Плейфера. На основании этих двух различных аксиом строятся совершенно различные геометрические системы, отличающиеся друг от друга теорией параллельных и материалом, тесно связанным с ней. Учащиеся с удовлетворением воспринимают тот факт, что со значительной частью геометрии Лобачевского они уже знакомы /абсолютная геометрия/ и в дальнейшем с большим вниманием изучают новые сведения об этой геометрии.

При изучении элементов геометрии Лобачевского на факультативных занятиях встречаются методические трудности, заключающиеся в изображении чертежей и понимании основных понятий. Учащиеся недоумевают, почему при рассмотрении полной теории параллельных точки

и прямые ведут себя несколько иначе, чем обычно. Поэтому важно сразу же рассеять представление учащихся об одинаковости природн основных понятий и подчеркнуть, что речь идет о совершенно разных понятиях, для которых сохраняется лишь одинаковость терминологии. "Возможно, — пишет проф. Н.И.Кованцов, — если бы мы назвали все геометрические образы геометрии Лобачевского иначе, чем в геометрии Евклида, то не было бы и недоразумений. Но следует помнить, что такое изменение терминологии могло бы быть выполненным лишь для того, чтобы при изучении геометрии Лобачевского нам не мешали известные факты геометрии Евклида. Никакой обязанности в этой замене нет — терминология в геометрии Лобачевского такая же законная, как и в геометрии Евклида"¹.

Для более эффективного изучения геометрии Лобачевского, а также для глубокого понимания аксиоматического метода в геометрии предлагаем учащимся рассмотреть вопросы построения разных моделей геометрических систем, что связано с основными требованиями к системам аксиом и в свою очередь проливает свет на понимание природы основных понятий.

Раскрываем учащимся сущность требований непротиворечивости и независимости системы аксиом, знакомим с методами их доказательств. Непротиворечивость геометрии Евклида доказывается при помощи построения арифметической модели.

Исследования показали, что учащимся X класса нет надобности предлагать проверку всех аксиом, хотя при желании это можно было бы осуществить. Математический аппарат этой модели несколько громоздкий, требует сравнительно много времени для изложения материала, и к тому же эта проверка не приносит учащимся большой пользы. В своей практике мы ограничивались проверкой лишь одной аксиомы параллельности.

Перед изучением элементов геометрии Лобачевского необходимо ознакомить учащихся с одной из простейших поверхностей, несущей на себе геометрию Лобачевского — псевдосферой, а также с моделью Э.Бельтрами, на которой выполняется проверка аксиомы параллельности Лобачевского и некоторых других аксиом. Делается вывод о непротиворечивости геометрической системы Лобачевского.

После этой предварительной подготовки учащиеся с интересом рассматривают простейшие теоремы о свойствах параллельных и расходящихся прямых, сравнивая их со свойствами параллельных прямых

¹ М.И.Кованцов. Проективная геометрия. "Выща школа". К., 1969, стр. 317 /перевод наш — З.Р./.

евклидовой геометрии и выполняя проверку некоторых из них на модели Бельтрами - Кэли - Клейна. Некоторые данные о построении этой модели постулируем.

Основные результаты наших исследований были изложены нами и получили одобрение на Республиканском научно-методическом семинаре, работающем при кафедре элементарной математики и методики математики Киевского пединститута имени А.М.Горького, на научных конференциях этого института, на областных семинарах и курсах повышения квалификации преподавателей математики, на районных учительских конференциях /Киевская область/.

Изготовленный по нашему сценарию учебный диафильм по математике "Обзор развития геометрии" /Укркинохроника, Киев, 1970/, который предназначается для использования на факультативных занятиях в X классе, получил хорошие отзывы от преподавателей математики.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора:

1. О разных интерпретациях геометрии Лобачевского /на укр. языке/. В кн.: "Наукові записки Київського педагогічного інституту ім. О.М.Горького". Вып. II, Киев, 1957.
2. Итоговый обзор курса геометрии /на укр. языке/. Журн. "Радянська школа", Киев, № 4, 1969.
3. Вопросы неевклидовых геометрий и аксиоматического метода на факультативных занятиях в средней школе /на укр. языке/. В кн.: "Методика викладання математики" /республіканський науково-методический збірник/. Вып. 6, К., "Радянська школа", 1970.
4. Итоговый обзор курса геометрии /на укр. языке/. Раздел книги "Математика" /пособие для факультативных занятий в X классе/. К., "Радянська школа", 1970.
5. Об изучении параллельных прямых по новой программе. В "Сборнике научных трудов молодых ученых КТЭИ". Вып. III, часть I, Киев, 1970.
6. Элементы геометрии Лобачевского в школьном курсе математики /на укр. языке/. В кн.: "Методика викладання математики" /республіканський науково-методический збірник/. Вып. 7, К., "Радянська школа", 1971.

БФ 20989. Подписано к печати 29/IV- 1971 г. Заказ В 129.
Формат 60 х 90/16. Тираж 200 экземпляров.

Лаборатория офсетной печати Института экономики АН УССР.
Киев, ул Садовая, 1/14.