МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П.ДРАГОМАНОВА

На правах рукопису

ЖУК Ірина Володимирівна

УДК 373.5.091.3:51

РОЗВИТОК УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ВИКОНУВАТИ НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

ДИСЕРТАЦІЯ

на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
ШВЕЦЬ Василь Олександрович
кандидат педагогічних наук,
професор

Київ – 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ…..……..….. 4

ВСТУП……...……. 5

РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Наближені обчислення в старшій школі ……..…… 18

1.1.1. Проблема вивчення наближених обчислень в старшій школі в наукових дослідженнях: ретроспективний аналіз….……... 18

1.1.2. Досвід вивчення наближених обчислень в старшій школі…… 35

1.2. Мета і зміст вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої школи…….. 46

1.3. Психолого-педагогічні передумови вивчення наближених обчислень в старшій школі…… 53

Висновки до першого розділу……. 60

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

2.1. Особливості вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої школи……..… 63

2.1.1. Структура змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи …….……. 63

2.1.2. Методичні коментарі до структури змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи…… 70

2.2. Наближені обчислення під час вивчення теми «Функції, рівняння та нерівності»……. 83

2.3. Наближені обчислення під час вивчення степеневої, тригонометричної, логарифмічної та показникової функцій…….. 94

2.3.1. Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції… 96

2.3.2. Наближені обчислення під час вивчення тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей……..... 115

2.3.3. Наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функцій…… 133

2.4. Наближені обчислення під час вивчення інших тем курсу алгебри і початків аналізу та в курсі стереометрії старшої школи…..…… 150
2.4.1. Наближені обчислення під час вивчення похідної та інтеграла 151
2.4.2. Наближені обчислення під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, стереометрії…….. 166
2.5. Організація та проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів ……..……. 170
Висновки до другого розділу……..……..…… 181
ВИСНОВКИ…….…..… 182
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……..…… 186
ДОДАТКИ…….. 214

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВМ – верхня межа наближеного значення

ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання

ЗУН – знання, уміння, навички

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології

КМСШ – курс математики старшої школи

МК – мікрокалькулятор

ММ – метод меж

ММП – метод меж похибок

МППЦ – метод підрахунку правильних цифр

НВ – наближена величина

НЗ – наближені значення

НМ – нижня межа наближеного значення

НО – наближені обчислення

ПК – персональний комп’ютер

ППЦ – правило підрахунку правильних цифр

ШКМ – шкільний курс математики

ВСТУП

Проблема якості освіти є актуальною для багатьох країн світу, зокрема і для України. Процес входження країни в освітній та науковий європейський простір, зміни, що відбуваються в системі освіти, ставлять питання якісної підготовки сьогоднішнього випускників на перший план. Суспільство і держава усвідомлюють важливість надання їм якісної освіти для розвитку країни. Тому сучасна школа повинна готувати конкурентноспроможну особистість випускника, готову відповідати за своє професійне майбутнє, здатну застосовувати свої знання в умовах майбутнього, яке може суттєво відрізнятися від реалій сьогодення.

На тлі загальних тенденцій розвитку суспільства математична освіта повинна здійснювати конкретні кроки з метою покращення якості. Основні цілі та завдання навчання математики в школі представлені у відповідних нормативних документах. Зокрема, в діючій програмі з математики для 11 – річної школи [205] підкреслюється, що математичні знання і вміння є не лише ціллю навчання, а й засобом розвитку особистості школяра та забезпечення його математичної грамотності. Вивчивши курс шкільної математики, учень повинен усвідомити її роль у житті людини, вміти чітко висловлювати математичні твердження, їх обґрунтовувати та застосовувати під час розв‘язування конкретних прикладних та практичних задач [205].

Визначені таким чином цілі і завдання навчання математики обумовлюють задачу – як втілити в практику теоретичні, практичні та прикладні знання? Дієвим засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики (надалі – ШКМ) є широке та систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв’язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи задач і вправ та, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати.

Одним із напрямів такого втілення вказаних вище задач є вивчення наближених обчислень (надалі – НО), яке можна розпочинати ще в курсі

математики основної школи, а продовжити *розвивати* ці навички і вміння під час вивчення математики в старшій школі. Під НО у шкільному курсі математики будемо розуміти такі обчислення, які виконуються над наближеними значеннями чисел і величин, або результат обчислень є наближеним. Основними джерелами виникнення НО є: наступні:

- Математичний опис задачі являється неточним, зокрема неточно задані початкові дані опису.
- Одержання точного розв'язку вимагає необмеженої або дуже великої кількості арифметичних операцій, тому замість точного розв'язку задачі користуються його наближеним значенням.
- Під час виконання арифметичних операцій, та під час запису відповіді виконуються округлення.

До основних проблем, які повинно вирішити впровадження вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики, належать наступні: визначення того, наскільки точними є наближені дані, як правильно виконати дії над наближеними величинами (надалі – НВ), який метод НО найбільш доцільний в конкретній задачі, а також наскільки близьким до точного значення є отриманий результат.

Абсолютно зрозуміла принципова значимість наближених обчислень для розв'язування прикладних та практичних математичних задач, а також задач, що потребують використання міжпредметних зв'язків. Проте відповідно до діючих навчальних програм [205] вивчення і застосування НО вилучено з курсу математики старшої школи (надалі – КМСШ). Хоча замість вилучення вищезгаданих тем з навчальних програм, доцільно було б дещо змінити методичний підхід до їх викладання, врахувавши при цьому розвиток сучасних інформаційних технологій, матеріально-технічне забезпечення навчальних закладів. Робити це потрібно з огляду на сучасну парадигму освіти, цілі навчання математики, вікові та психологічні особливості школярів, із застосуванням новітніх методик та технологій навчання. Також слід брати до

уваги досвід навчання учнів наближеним обчисленням, отриманий в минулому.

Впровадження НО в шкільну практику є вкрай необхідною, але недостатньо вивченою проблемою математичної освіти і науки. Частково застосування НО вивчалося в дисертаційних дослідженнях Н.В.Елізавєтіної [75], А. В.Суткової [239] (середина 60-х років), І. Г.Адишева [1], Р. А. Мусаеляна [170], (кінець 70-х років), М. М. Мадбабаєва [142], І. Ф.Соколовського [232] (80-ті роки), Н. І. Жданової [84], Т. М. Казакової [113] (на початку 2000-х років).

Вивчення НО є однією із складових розвивального навчання. Аналіз вихідних даних та отриманих результатів є засобом розвитку критичного мислення, розв'язування задач практичного змісту активізує пізнавальні інтереси учня і виконує профорієнтаційну функцію. Наближені обчислення є однією із складових прикладного застосування математики. Як відомо, для вирішення багатьох прикладних та практичних задач необхідно створити вдалу математичну модель, дані в якій найчастіше є наближеними числами, дослідити її та інтерпретувати отримані результати відповідно до умови задачі. Таким чином формуються як математичні компетентності учня, так і використовуються міжпредметні зв'язки.

Вперше необхідність впровадження НО для розв'язування практичних задач показав О.М.Крилов. В своїй роботі «Лекції з наближених обчислень» [129] він відзначав, що інженери і техніки, які не знають правил наближених обчислень, виконують під час розрахунків понад 90% зайвої роботи. В сучасному ж суспільстві збільшуються та урізноманітнюються види практичної діяльності, розвивається наука, виробництво, удосконалюються обчислювальні засоби, розширюються знання з різних розділів математики. Все це лише поповнює перелік обчислювальних задач і робить обчислення все більш значущими [31].

Як засіб реалізації прикладної спрямованості математики НО використовують в своїх дисертаційних дослідженнях такі науковці як

Р.А. Мусаелян [170] – під час дослідження проблеми посилення прикладної орієнтації навчання наближеним обчисленням відповідно до освітніх програм, Л.Г. Шпилєвої [269] – в процесі опрацювання результатів вимірювань на уроках фізики. Прикладна спрямованість вивчення стохастики із застосуванням наближених обчислень в старших класах середньої школи вивчається в роботі С.В. Щербатих [273], під час вивчення реалізації прикладної спрямованості навчання математики в середніх спеціальних навчальних закладах з використанням інформаційних технологій – в дисертації Л.Ю. Бегеніної [31].

Використання НО є одним із засобів реалізації міжпредметних зв'язків. В низці дисертаційних досліджень наближені обчислення використовуються як один із засобів формування відповідних математичних компетентностей: в роботі С.П. Молеваник [169] – для застосування оціночних методів при змістовному узагальненні знань школярів з фізики, в дослідженнях І.Г. Адишева [1] – з метою показати, що вивчення наближених обчислень у восьмирічній школі насамперед повинно бути спрямовано на фізику.

Вивчення математики в сучасній школі неможливо уявити без використання інформаційно-комунікаційних технологій (надалі – ІКТ), педагогічних програмних засобів, спеціальних комп'ютерних програм. Їх важливість доводиться шкільною практикою, сучасними дослідженнями науковців. В процесі використання зазначених засобів навчання неможливо уникнути НО. Зокрема, у дослідженні С.А.Ракова [209] підкреслюється, що під час використання ІКТ в навчально-виховному процесі (надалі – НВП) особливу увагу слід приділяти практичним роботам, в яких обов'язково проводити критичний аналіз результатів. В роботах М. І. Жалдака [80,81], М. І. Жалдака та Ю. С. Рамського [82, 83], І. В. Лупан [139] досліджуються питання впровадження ІКТ на уроках математики в старшій школі, проте при цьому питання використання НО не вивчається.

На думку Н.Я. Вілєнкіна: «Математизация всех областей науки и техники, бурное развитие вычислительной техники, внедрением ЭВМ и микропроцессоров во все сферы производства, экономики, управления и даже в

обыденную жизнь делают необходимым всемерное улучшение математической подготовки учащихся, приближение школьного курса математики к требованиям современности. Задача обучить школьников умению применять математику становится центральной, мировоззренческой» [53].

Поняття обчислювальної культури постійно знаходиться у сфері уваги науковців та методистів. Різноманітним формам її прояву присвячено багато науково-методичних праць. Методикою навчання наближених обчислень займалися такі відомі математики і методисти як В. М. Брадіс [36-45], О. М. Крилов [129, 130], О. І. Маркушевич [39, 44, 145, 146], П. В. Стратилатов [235], звертався до питань застосування НО в процесі вивчення алгебри і початків аналізу А. М. Колмогоров [3, 6, 11, 50]. Академік О. Д. Александров виразив своє ставлення до вивчення НО в школі словами: «Либо абсолютная точность без связи с реальностью, либо связь с реальностью без абсолютной точности» [16]. Окремі проблеми навчання НО в школі розглядалися в дослідженнях Н. В.Елізавєтіної [75], М. М. Мадбабаєва [142], З. І.Слєпкань [221, 226], глибше методику навчання НО в курсі математики основної школи розробляла В.М.Кліндухова [104], обчислювальну культуру як основу методики введення початків аналізу в старшій школі досліджував І. Ф. Соколовський [232], формування обчислювальних навичок і умінь учнів 7-8 класів з алгебри – А. К. Цорієва [252].

Незважаючи на вагомість та ґрунтовність зазначених досліджень та їх результатів, важливість наданих методичних рекомендацій, сучасний стан розвитку суспільства, нова концепція розвитку освіти, зокрема математичної, вимагає кардинальної зміни у ставленні до проблеми вивчення НО в ШКМ старшої школи. Акцентуація саме на старшій школі не випадкова. Адже в житті старшокласників період ранньої юності – це вік, коли дорослі, в тому числі і вчителі, виконують допоміжну функцію у їх соціально-професійної орієнтації на майбутнє [207]. Зазначений період є найбільш відповідальним з точки зору обрання майбутньої професії.

Саме перехід від основної школи до старшої дозволяє застосовувати в навчанні базові математичні знання під час розв'язання прикладних задач. Тому відсутність уваги до НО суперечить визначеним у навчальній програмі [205] та у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [69] цілям навчання математики в школі. Як показує практика та результати констатувального експерименту, навчання за різними програмами, підручниками та в школах різного типу, не формує в учнів умінь виконувати дії над наближеними значеннями чисел і величин. Школярі, які навчаються на високому та достатньому рівні знань безпорадні під час складання плану розв'язування таких завдань, не можуть самостійно створити відповідну математичну модель, правильно проаналізувати отриману відповідь. Ті ж старшокласники, які мають слабші знання з математики, як правило, взагалі не беруться за виконання таких задач і вправ. Таким чином, відсутність умінь виконувати НО створює психологічний бар'єр у пізнавальній активності старшокласника, гальмує його загальний розвиток і не дає змоги в повній мірі реалізовувати отримані знання на практиці, тобто досягнути кожному учневі практичної компетентності.

Враховуючи усе вищезазначене, а також результати констатувального експерименту, проведеного серед старшокласників Чернівецької області, спілкування та практичний досвід у роботі з вчителями Чернівецької області, можна зробити висновок, що створення сучасної методичної системи навчання НО в старшій школі є актуальною проблемою методики математики на сучасному етапі розвитку освіти України. Відсутність такої методичної системи відповідно до діючих навчальних програм, пов'язані з цим недоліки у навчанні школярів, суперечать вимогам до сучасної освіти формувати в них уміння і навички, потрібні для профільного навчання чи майбутньої професійної діяльності, для успішної участі в сучасному суспільному житті [205]. Необхідність розв'язання зазначених проблем і зумовлюють вибір теми дисертаційного дослідження ***«Розвиток умінь старшокласників виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики»***.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана відповідно до тематичного плану науково-дослідницької роботи кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова, напрямок наукового пошуку «Розробка науково-методичної системи математичної підготовки середніх закладів в умовах впровадження освітніх стандартів», номер державної реєстрації 0198N001666.

Тему дисертаційного дослідження було затверджено Вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова (протокол №6 від 25.01.2011 року), а також рішенням бюро Міжвідомчої ради з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол №7 від 27.09.2011 року).

Об’єктом дослідження є навчання математики в старшій школі.

Предмет дослідження – методична система формування та розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення математики.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати, розробити та експериментально перевірити методичну систему (цілі і зміст, організаційні форми та ефективні методи і засоби) розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення математики в умовах особистісно зорієнтованого навчання.

В основу дослідження покладено **гіпотезу**: розроблена методична система формування і розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення сприятиме підвищенню якості математичної освіти школярів, зокрема дозволить краще реалізовувати міжпредметні зв‘язки з іншими дисциплінами, а також більш якісно та свідомо застосовувати математику до розв‘язування прикладних задач.

Для досягнення поставленої мети і перевірки сформульованої гіпотези розв’язувались **завдання**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічну, науково-методичну та навчальну літературу з проблеми дослідження; вивчити практичний досвід

вчителів; рівень володіння учнями відповідними знаннями, уміннями та навичками (надалі – ЗУН) з наближених обчислень.

2. Визначити умови, за яких відбуватиметься формування і розвиток умінь у старшокласників виконувати наближені обчислення.

3. Розробити і впровадити методичну систему вивчення наближених обчислень на уроках математики в курсі старшої школи; розробити методичні рекомендації щодо використання вже існуючих і створити нові засоби для навчання школярів виконувати обчислення з наближеними величинами, з метою підвищення фахової компетентності вчителів з питань формування і розвитку у старшокласників умінь виконувати НО;

4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи і впровадити її у практику роботи старшої профільної школи.

Методи дослідження, які використано для розв'язання поставлених завдань:

- *теоретичні* – системний та порівняльний аналіз психолого-педагогічної (1.3 тут і далі – підрозділи дисертації), навчально-методичної, наукової літератури з проблеми дослідження (1.1.1–1.1.2, 1.2), цілеспрямовані педагогічні спостереження за процесом формування в старшокласників умінь виконувати наближених обчислень під час навчання математики (2.2.–2.4).
- *емпіричні* – вивчення, аналіз і узагальнення педагогічного досвіду вчителів з проблеми навчання учнів виконувати наближені обчислення шляхом бесід, анкетування (2.2–2.4); педагогічний експеримент, аналіз і обробка результатів статистичними методами для перевірки ефективності запропонованої методики.

Основний метод дослідження – педагогічний експеримент.

Вірогідність результатів дослідження забезпечується обраною теоретичною і методологічною основою дослідження, відповідністю методів дослідження його меті та завданням, впровадженням розробленої методичної системи в навчальний процес, якісною інтерпретацією одержаних під час проведення педагогічного експерименту результатів.

Методологічною основою дослідження є: психологічна теорія пізнання (В. В. Давидов, Д. Б. Ельконін, П. Я. Гальперін); проблема розвитку пізнавальної активності учнів, зокрема під час навчання математики (Л. С. Виготський, Н. О. Менчинська); теорія проблемного та розвивального навчання (П. Я. Гальперін, В. В. Давидов, Д. Б. Ельконін); проблема розвитку критичного мислення (Л. С. Виготський, Дж. Дьюї, С. О. Терно); наукові та методичні здобутки з теорії та методики навчання математики (Г. П. Бевз, М. І. Бурда, В. М. Кліндухова, Ю. М. Колягін, А. М. Колмогоров, З. І. Слєпкань, В. О. Швець), а також нормативні документи Міністерства освіти України: Закон України «Про освіту», Закон України «Про загальну середню освіту», Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, освітня галузь «Математика», Державна національна програма «Освіта: Україна XXI століття» та інші.

Наукова новизна одержаних результатів дослідження полягає в тому, що в умовах особистісно зорієнтованого навчання, профілізації старшої школи:

1. *Розроблено і теоретично обґрунтовано* методичну систему навчання теми «Наближені обчислення», яка є невід'ємною складовою курсу математики старшої школи, а також засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики.

2. *Запропоновано* структуру змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи.

3. *Розроблено* експериментальну програму навчання математики в старших класах, яка містить наближені обчислення як складову вивчення окремих тем курсів алгебри та початків аналізу і стереометрії.

4. *З'ясовано* психолого-педагогічні передумови навчання наближеним обчисленням учнів старших класів, вік яких відповідає періоду ранньої юності.

5. *Запропоновано* вимоги до рівня сформованих компетентностей старшокласників для вироблення та закріплення в учнів умінь виконувати наближені обчислення під час навчання математики.

6. *Розроблено* навчальні засоби та доцільні організаційні форми навчання учнів з метою ефективного застосування методів наближених обчислень під час розв'язання задач і вправ.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що:

1. *Запропоновано* чітку та послідовну систему формування та розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час навчання математики.

2. *Розроблено* методичні рекомендації щодо формування та розвитку умінь старшокласників виконувати наближені обчислення під час навчання математики.

3. *Обґрунтовано* дидактичні та методичні передумови використання ІКТ під час навчання, створено нові засоби навчання наближеним обчисленням на уроках математики та в позаурочний час.

4. *Створено* банк авторських практичних та розрахунково-графічних робіт, які доповнено рекомендаціями стосовно їх використання та призначення.

5. *Запропоновано* добірку орієнтовних базових задач з відповідними до них коментарями стосовно застосування методів наближених обчислень до їх розв'язування.

Матеріали, представлені в дисертації, можуть бути використані в процесі навчання математики вчителями як основної, так і старшої школи, на курсах підвищення кваліфікації вчителів математики та предметів природничо-математичного циклу, у вищих навчальних закладах під час підготовки студентів педагогічних спеціальностей, а також під час написання навчально-методичних посібників та підручників з математики.

Особистий внесок дисертанта в здобуття наукових результатів дослідження полягає у опрацюванні наукової, методичної літератури щодо тематики дослідження, обґрунтуванні наукових, психолого-педагогічних та методичних засад формування та розвитку в учнів старшої школи умінь виконувати наближені обчислення, визначенні цілей і змісту навчання наближеним обчисленням в старшій школі, розробці та впровадженні

методичної системи навчання наближеним обчисленням у курс математики старшої школи, формулюванні висновків та рекомендацій стосовно впровадження одержаних результатів, у публікації як одноосібних статей та тез щодо результатів дисертаційного дослідження, так і публікацій матеріалів у співавторстві. У роботах, опублікованих у співавторстві, особистий внесок дисертанта становить 50%.

Апробація і впровадження результатів дослідження здійснювалися впродовж 2010-2015 рр. Основні результати дослідження доповідалися, обговорювалися та були схвалені на засіданнях та методичних семінарах кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова; Всеукраїнському науково-практичному семінарі «Науково-методичний супровід виконання Державної цільової соціальної програми підвищення якості шкільної природничо-математичної освіти» (Чернівці, 2012); на VI Всеукраїнському конкурсі методичних розробок (Київ, 2014); Шостому Міжнародному форумі-презентації «Інноватика в сучасній освіті по роботі дослідно-експериментального майданчика «Формування у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час навчання математиці (Київ, 2014), а також висвітлювався на науково-практичних та науково-методичних конференціях:

– ***міжнародних:*** Міжнародній науково-практичній конференції «Традиції та інновації в сучасній освіті та вихованні: дитячий сад, школа, внз» (м.Коряжма (Росія), 2013); Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2013) (Черкаси, 2013); Міжнародній науково-практичній конференції «Математическое образование: современное состояние и перспективы», присвяченій 95-річчю з дня народження професора А. А. Столяра, (Могилев (республіка Беларусь), 2014); Міжнародній науковій конференції «Современные проблемы математики, информатики и естественнонаучного знания» (Коряжма (Росія), 2014); Міжнародній науковій конференції MATTEX– 2014 (Шумен (Болгарія), 2014); Міжнародній науковій

конференції «Педагогика и психология в эпоху возрастающего потока информации – 2015» (Будапешт, 2015); Міжнародній науково-методичній конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2015) (Черкаси, 2015)

– ***всеукраїнських:*** Всеукраїнській науково-методичній конференції з міжнародною участю «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*ПЛЮС-2011»» (Суми, 2011), Всеукраїнській науково-практичній конференції «Неперервна освіта: сучасний стан, проблеми та перспективи розвитку» (Чернівці, 2012); Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасна профільна освіта: традиції та інновації» (Чернівці, 2012); І Всеукраїнській науково-практичній Інтернет-конференції з міжнародною участю «Інноваційна діяльність та дослідно-експериментальна робота в сучасній освіті» (Чернівці, 2013); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи» (Полтава, 2013).

Отримані педагогічні висновки і методичні рекомендації практично перевірені в роботі Інституту післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області під час проходження курсів підвищення кваліфікації вчителів математики та вчителів, які викладають предмети природничо-математичного циклу в рамках вивчення спецкурсу з наближених обчислень та в рамках роботи дослідно-експериментального майданчику «Формування у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики» (довідка № 2/4-351 від 27.04.2015); Глибоцького ліцею Глибоцького району Чернівецької області (довідка № 125 від 10.06.2015); Сучевенської ЗОШ І-ІІІ ступенів Глибоцького району Чернівецької області (довідка № 25 від 18.05.2015); Сторожинецької районної гімназії Сторожинецького району Чернівецької області (довідка № 118 від 11.06.2015); Мамаївського ЗНЗ І-ІІІ ст. №2 Кіцманського району Чернівецької області (довідка № 105 від 11.06.2015); Лашківського ЗНЗ І-ІІІ ст. Кіцманського району Чернівецької області (довідка № 25 від 27.05.2015); Горішньоширівецькій ЗОШ

І-ІІІ ст. Заставнівської гімназії, Кострижівської ЗОШ І-ІІІ ст. Заставнівського району Чернівецької області (довідка № 422 від 28.05.2015); районного методичного кабінету управління освіти Глибоцької райдержадміністрації Чернівецької області (довідка № 690 від 10.06.2015); НВК «Боянська гімназія» та Новоселицької ЗОШ І-ІІІ ст. Новоселицького району Чернівецької області (довідка № 104 від 12.06.2015); НВК «Домінанта» Дніпровського району м. Києва (довідка № 257 від 15.06.2015); Інституті післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка (довідка № 43 від 02.06.2015).

Публікації. Основні положення та результати дослідження опубліковано у 21 праці, серед яких 5 статей у наукових фахових виданнях ВАК України [81, 85, 86, 88, 91], 16 – у збірниках наукових праць та матеріалах конференцій [86, 87, 89-92, 95-98, 100, 101, 103, 262-264], одна з яких [262] у співавторстві та одна [92] одноосібна у наукових виданнях зарубіжних країн.

Структура дисертації. Дисертація складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (281 найменування обсягом 28 сторінок) та 23 додатки (обсягом 68 сторінок). Основний зміст дисертації викладено на 185 сторінцках, та містить 4 таблиці, 3 діаграми і 31 рисунок. Повний обсяг дисертації становить 281 сторінку.

РОЗДІЛ 1
ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Наближені обчислення в старшій школі

1.1.1. Проблема вивчення наближених обчислень в старшій школі в наукових дослідженнях: ретроспективний аналіз

Система загальної середньої освіти України сьогодні знаходиться на етапі нових принципових змін – впровадження профільного навчання в старшій школі. Спроби впровадження профільної освіти в державі відбуваються не вперше. Ще наприкінці XIX століття за ініціативою міністра освіти Російської імперії О.В.Головніна створюються три типи середніх загальноосвітніх навчальних закладів. Це класичні навчальні заклади з вивченням двох стародавніх мов, класичні навчальні заклади з вивченням латинської мови і реальні училища. Випускники класичних навчальних закладів продовжували здобувати освіту у вищих навчальних закладах, а вихованці реальних училищ здобували подальшу освіту в спеціалізованих навчальних закладах.

Наступні зміни в системі освіти відбулися вже на початку XX століття: спочатку були створені гімназії, реальні та комерційні училища, а згодом П. М. Ігнатьєв – останній міністр освіти Росії за часів правління Миколи II, запропонував створити єдину семирічну середню школу, де у 5 класі відбувався розподіл на три напрямки: старогуманітарний, новогуманітарний і реальний, який передбачав посилене вивчення математики і природничих наук. У грудні 1917 року на II Всеукраїнському з'їзді вчителів було прийнято рішення, згідно з яким курс наступних трьох років навчання «потрібно приладнати до вищих шкіл». Наприкінці 30-х років профільні школи реорганізовують і наступне повернення до них відбувається у 60-х роках: діють так звані навчально-виробничі комбінати, які дозволяють учням старших класів знайомитися з основами виробництва та допомагають їм визначитися у виборі майбутньої професії. І вже наприкінці 1980 – початку 1990 років в Україні створюються нові типи навчальних закладів: коледжі, ліцеї та гімназії, які потрібні для

поглибленого вивчення окремих предметів з метою пропедевтики навчання у вищих навчальних закладах. Тоді ж, у 1988 – 1989 навчальному році здійснюється черговий перехід від 10-річного до 11-річного термінів навчання, на який суттєво впливає народження незалежної України як самостійної держави; відбувається чергова зміна навчальних програм та підручників. Кардинальні зміни у системі загальної середньої освіти відбуваються у 2005 році, коли загальноосвітні школи переходить на 12-річний термін навчання, і учні 5-х класів знову розпочинають навчання за новими програмами та підручниками.

Перші згадки про НО як одну із змістових ліній ШКМ сягають кінця XIX – початку XX століття. В навчальну програму з математики, починаючи з 1908 року включається вивчення НО. Найбільш відомою працею того часу є «Лекции о приближеннях вычислениях» О.М.Крилова [130]. Вона вирізнялася чіткістю математичних викладок і була розрахована на математично грамотного читача. В той же час друкується і багато інших наукових праць з НО, зокрема В.М. Брадіса, П.О. Долгушина, І.М. Кавуна, підручник арифметики А.П.Кисельова. Проте до середини XX століття так і не було створено цілісної методичної системи вивчення НО в ШКМ, також не було єдності в позначеннях та термінології.

Розглянемо більш детально стан вивчення НО в курсі старшої школи в період з кінця 60-х років до сьогоднішнього дня. Проаналізувавши навчальну, наукову, науково- та навчально-методичну літературу, періодичні видання, навчальні програми тих часів, можна дійти висновку, що на кожному історичному етапі розвитку освіти НО в курсі математики старшої школи вивчалися по-різному, часто оглядово, уривками, безсистемно. Під різними підходами до вивчення НО в ШКМ будемо розуміти мету, місце та зміст вивчення НО під час навчання математики. На зазначені аспекти суттєво впливали такі фактори як стан розвитку обчислювальної техніки, теорії НО в математичних науках та вимоги суспільства до математичної підготовки учнів.

Аналіз методичної і навчальної літератури дає можливість умовно стан вивчення наближених обчислень з кінця 60-х років минулого століття до сьогоднішнього дня поділити на чотири етапи:

- *Перший* – початок 60-х років – кінець 70-х років XX століття;
- *Другий* – початок 80-х років – початок 90-х років XX століття;
- *Третій* –90-ті роки XX століття – 2005 рік;
- *Четвертий* – з 2005 року до сьогоднішнього дня.

Зупинимося більш детально на аналізі кожного з цих етапів. Головним завданням такого аналізу буде виявлення причинно-наслідкового зв'язку змін у стані вивчення НО в шкільному курсі математики, аналіз переваг та недоліків кожного з підходів, що дасть можливість використати досвід минулого для впровадження вивчення НО в сучасний курс шкільної математики.

Початком *першого* етапу можна вважати 1960-1961 роки, коли відбувається перехід до обов'язкової середньої освіти. В старших класах деяких шкіл вводиться поглиблене вивчення математики, підвищується увага до розвитку розумових здібностей учня, його мислення та здатності узагальнювати конкретні факти. Чітко виділяється три етапи навчання в основній та старшій школах: 4–5 класи, 6–8 класи, 9–11 класи. У 1960 році затверджено програму, в яку, з метою наближення математики до реального життя, вперше включено тему «Наближені обчислення». Її вивчення розпочинається в 6 класі, базується лише на правилі підрахунку правильних цифр (надалі – ППРЦ), відводиться для цього 16 академічних годин. Актуальним в цей період стає питання профільного (політехнічного) навчання. З 1961 року починає діяти «Програма середньої загальноосвітньої трудової політехнічної школи з виробничим навчанням» для учнів старших класів. Згідно цієї програми, математика ділиться на два предмети: алгебра та елементарні функції і геометрія. Тригонометрію як окремий предмет було вилучено. Основним засобом у процесі розв'язування обчислювальних задач, в тому числі і з наближеними даними, поряд із таблицями логарифмів, стає логарифмічна лінійка. Так,

О.П. Ожогин пише: «Потрібно всебічно зацікавити учнів обчисленнями за допомогою логарифмічної лінійки» [49].

Впровадження наближених обчислень викликає дискусію на шпальтах періодичних фахових видань. Основна частина статей містила схвальні відгуки щодо факту їх впровадження в ШКМ, але разом з тим в них була і конструктивна критика. Зокрема, вказувалося на недостатньо конкретизовані вимоги щодо ЗУН з НО школярів протягом навчання в основній та старшій школах, на низький рівень володіння навичками обчислень на логарифмічній лінійці як вчителів математики, так і вчителів з інших предметів. Так, «Учительская газета» від 17 червня 1961 року пише: «Лінійку як обчислювальний інструмент поки що не використовують в школах ні хіміки, ні фізики, ні математики. І вивчають її тільки тому, що цього вимагає програма» [49]. Проблема вивчення та застосування в роботі під час навчання логарифмічної лінійки в школі викликала велику зацікавленість з боку фахівців, чиї статті надходять до редакції журналу «Математика в школі» (А.А. Абдухамедов, П.К. Антонов, Ю.В. Дьяконов, А.В. Макаров, А.П. Ожогин) та інші. Стосовно методики пояснення принципів роботи з логарифмічною лінійкою, у фахівців існують суперечливі точки зору. На думку одних, для школярів такий матеріал є достатньо складним, оскільки вони ще ніде не зустрічалися раніше з функціональними шкалами. Інші ж вважають, що після вивчення логарифмічної функції доцільним буде знайомство з функціональною шкалою та її рівнянням [49].

Особлива увага приділяється практичним умінням та навичкам в процесі вимірювань та обчислень, в т.ч. з наближеними даними. В якості експерименту розробляється програма навчальних занять з розвитку вимірювальних, обчислювальних та графічних навичок учнів 5-10 класів на уроках математики [19], згідно з якою щорічно наближені обчислення за правилом підрахунку правильних цифр включено до переліку тем, що вивчаються. Як в молодших, так і в старших класах пропонується проводити практичні роботи, в яких застосовуються отримані знання до розв’язування конкретних практичних

задач. Разом з тим вже в цей час з'являється думка, що в шкільний курс математики слід включити і методи строгого врахування похибок [248].

Розвиток науки та техніки призводить до того, що стає все важче назвати ті області науки та промисловості, де не використовуються ЕОМ. Тому в зміст програм загальноосвітніх шкіл включаються деякі відомості про них та програмування. Поряд із цим з'являється ідея підготовки фахівців-програмістів в середній загальноосвітній політехнічній школі [258], для яких вивчення НО пропонується вивчати як окремий предмет. У 1961-62 н.р. створено програму середньої школи з виробничім навчанням (професія – обчислювач-програміст), згідно з якою у 9 класі НО вивчаються протягом року 3 години на тиждень, а в 10-му – 4 години на тиждень впродовж першого півріччя.

У 1964 році на шкільні підручники оголошено відкритий конкурс, але у зв'язку із початком роботи над новим змістом освіти, в роботу вони уведені не були. І вже у 1966 році створюється нова комісія на чолі з О. І. Маркушевичем та А. М. Колмогоровим з метою написання навчальної програми з математики для учнів 4–10 класів. Під час оновлення змісту ШКМ враховано міжпредметні зв'язки, вимоги, що диктувалися науково-технічним прогресом того часу. Вивчення НО було доповнено підготовкою учнів до знайомства з машинними мовами та елементами програмування [254]. В період з 1968 по 1979 роки ця програма змінюється щороку.

Надзвичайно важливим у цей час є зміст методичної літератури, що видається. Виходить в світ ряд посібників В. М. Брадіса [38], В. У. Грібанова [65], А. В. Суткової [237], методичний лист А. В. Суткової [238], в яких відомості про НО курсу математики для восьмирічної та середньої шкіл розташовані в порядку послідовності викладення теорії НО. Зокрема, В. У. Грібанов [65], поняття про наближене число, округлення, поняття похибки, оцінку точності однократних вимірів пропонує вивчати у 5 класі, в 6-му приділити увагу правилам округлення результату чотирьох арифметичних дій з наближеними числами. Основна увага при вивченні НО в цей період приділяється ППЗЦ, а також деякі з них містять

теоретичні відомості про метод меж (надалі – ММ), наводяться приклади та вправи для застосування обох цих методів як в курсі математики основної, так і старшої школи. В публікаціях у фахових виданнях також пропонуються методичні рекомендації щодо вивчення НО, передові вчителі діляться своїм досвідом роботи (Ф. О. Горбушин, М. М. Лєпський, К. І. Нєшков, Н. Я. Прайсман та інші), але основна частина цих статей присвячена вивченню наближених обчислень в курсі математики основної школи.

Проте проблема змісту НО в ШКМ, а, відповідно і підходу до вивчення інших розділів математики, залишається відкритою. Над нею і далі працюють провідні методисти, науковці, а також вчителі-практики. Навчальною програмою 1968 року [202] було запропоновано пропедевтику вивчення НО здійснювати в курсі математики 5-6 класів, а основний матеріал з НО вивчати у 7-8 класах, куди вже включено всі методи: як строгого, так і нестрогого врахування похибок. Метод меж виходить на перше місце, зокрема з його допомогою обґрунтовується ППЦ в курсі алгебри 8 класу. Така ситуація є цілком обґрунтованою, оскільки методична література вже давно містить відомості про метод меж та інші методи НО, а їх реалізація на практиці дозволяє пов’язати математику як науку із реальним життям. Тому публікація цієї програми не викликає жвавого обговорення на сторінках фахових видань з питань вивчення НО.

Особливої уваги заслуговують два посібника з методики навчання математики Г.П. Бевза, які видаються у 1971р. [29] та 1977р. [30]. Їх відмінність з точки зору вивчення НО полягає в тому, що в першому виданні автором проводиться порівняльний аналіз програм початку 60-х років та 1968 року, а розгляд НО відповідно в основному зосереджений на ММ. Друге видання містить усі три методи НО, які підкріплені практичними завданнями та прикладами їх розв’язання, а також відповідними коментарями до них.

Методичними розробками з питань НО в цей період займаються І.К. Андронов [18], В.М. Брадіс [36-42], колектив авторів Жалдак М.І. Ковбасенко Б.С., Рамський Ю.С. [74], Н.Я. Прайсман [194, 195], С.П. Пулькін

[207], проводиться ряд дисертаційних досліджень Ш. Н. Асанідзе [20], Н.В. Елізавєтіною [75], А.В. Сутковою [239], Н.Я. Прайсманом [196]. В їх наукових роботах ґрунтовно аналізується навчально-методична література, вводиться термінологія, а також вивчається історія наближених обчислень у шкільному курсі математики. Основна частина дисертаційних досліджень спрямовані на пошуки шляхів удосконалення впровадження ППЦ. Наукові дослідження І.Г. Адишева [1] та Р.А. Мусаеляна [170] були, насамперед, спрямовані на вивчення прикладної спрямованості вивчення НО. В роботах В.М. Брадіса [37-43] представлені усі три методи НО, а Н.В. Елізавєтіна [75], А.М. Колмогоров [147] дотримуються думки, що ММ повинен відігравати провідну роль при вивченні НО, зокрема стати основним матеріалом для виконання вправ на дії з нерівностями.

Незважаючи на чисельні спроби удосконалити зміст ШКМ, на сторінках періодичних видань критикується незадовільний стан рівня математичної підготовки випускників загальноосвітньої школи, а також зниження наукового рівня та фахової підготовки вчителя математики. З.І. Слєпкань [224], зокрема, звертає увагу і на те, що виключення у 60-ті роки курсу елементарної математики, в тому числі і питань НО, з навчальних планів вищих навчальних закладів, негативно позначилося на професійній підготовці вчителя. Тому для майбутніх вчителів математики вводиться додатковий курс: протягом цілого семестру студенти педагогічних вищих навчальних закладів вивчають НО. Для тих вчителів, що вже працюють, зазначена проблема вирішується за допомогою самоосвіти: у фаховій літературі друкуються методичні рекомендації по роботі за новими підручниками, орієнтовне календарне планування та зразки тематичних контрольних робіт. Також під час курсової перепідготовки вчителів запрошуються викладачі, які читають лекції з НО вчителям.

Таким чином, аналіз *першого* етапу дозволяє зробити висновок, що реформи 60-70-х років та їх впровадження дозволили офіційно ввести вивчення НО в ШКМ. Була піднята та частково вирішена проблема змісту НО в ШКМ, його розміщення відповідно до іншого навчального матеріалу та вікових

особливостей школярів. Однак невирішеним залишається питання подальшого удосконалення методики навчання НО, яке пов'язано із розвитком науки та техніки, практичним використанням НО в реальному житті. Найбільш актуальною залишається проблема фахової майстерності вчителя математики при викладанні НО, а також прикладна спрямованість та доступність їх вивчення в ШКМ.

У грудні 1978 року відбулося засідання Відділення АН СРСР, на якому було висловлено серйозні зауваження щодо змісту шкільної математичної освіти. Як наслідок, в постанові ЦК КПРС та Ради міністрів СРСР від 22.12.1977р. № 1111 «Про подальше удосконалення навчання, виховання учнів загальноосвітніх шкіл та підготовки їх до праці» [185, с.22] наголошувалося, що учні перевантажені шкільною програмою, а також відсутня їх трудова підготовка. З іншого боку, залишається незадоволеність рівнем математичних знань школярів. На думку фахівців [72, 73], це пов'язано із відсутністю профільної диференціації, а також недостатньо високим рівнем фахової підготовки вчителів, що зазначалося вище. Водночас науково-технічний прогрес впливає не тільки на розвиток суспільства в цілому, а й на шкільну освіту зокрема. З'являються доступні засоби швидкого обчислення – мікрокалькулятори (надалі – МК), більш широко використовуються ЕОМ, а в середині 80-х років з'являються перші персональні комп'ютери (надалі – ПК). Поступово відпадає необхідність у номограмах, логарифмічних лінійках.

Усе вище зазначене змушує науковців і практиків повернутися до критичного аналізу матеріалу програми шкільного курсу математики [145, с.20-25]. Розпочинається *другий* етап у розвитку НО в ШКМ. Одним із положень, які характеризують в цей час стан викладання математики у школі як не зовсім задовільний – це вивчення НО. Усі практичні шляхи застосування математики як науки так чи інакше ведуть до використання НО. Відома фраза про «зведення результату до числа» містить вимогу, без виконання якої математичний метод втрачає у своїй практичній значущості та силі. Учні, які виховані на розв'язуванні задач у «круглих», тобто точних числах, стають

безпорадними перед будь-якою практичною задачею, оскільки будь-яка з них не має точного і «красивого» розв'язку. З іншого боку, навіть точні дані інколи призводять до дуже великих та громіздких обчислень, з якими старшокласники не можуть справитися.

Тому практично одразу після появи зазначеної постанови майже одночасно у 1978-79 рр. видаються проекти нових навчальних програм з математики. В подальшому ці проекти і були названі проект 1, проект 2 і проект 3. Укладачами програм були різні авторські колективи, тому і проекти різнилися між собою. Проект 1 в основному зберігає ідеї і зміст попередніх діючих програм, проте при його обговоренні серед пропозицій була ідея вилучити з 5-ої теми VIII класу обчислення з логарифмічною лінійкою, а текст «Таблиці логарифмів. Обчислення за допомогою таблиць десяткових логарифмів» замінити на текст «Таблиці логарифмів. Обчислення за допомогою мікроелектронних обчислювальних приладів і таблиць десяткових логарифмів» [182].

Серед пропозицій також висловлюється думка про те, що слід суттєво спростити тему «Наближені обчислення», а перенесення вивчення наближених обчислень з 7 класу в 8-ий абсолютно виправдане. Водночас висловлювалися схвальні думки щодо включення в програми спеціального пункту «Практичні заняття» з метою допомоги вчителям у виборі розділів та тем для проведення таких занять. Такі суперечливі думки щодо змісту програми, зокрема наближених обчислень в ній, призводять до появи двох інших проектів, які мало різнилися між собою, але мали інший підхід до вивчення ШКМ, ніж проект 1. І вже у 1979/80 н.р., згідно рекомендацій Міністерства освіти, відбувається незначне скорочення навчального матеріалу з НО в курсі алгебри 7 класу [185]. Наближені обчислення в цей час вивчаються в курсі математики 7 класу окремим розділом, який містить лише правила підрахунку правильних цифр та метод меж. Виключення методу меж похибок (надалі – ММП), пояснювалося тим, що цей метод, на думку авторів програми, не відповідав віковим можливостям школярів, а вивчення двох інших методів НО вважалося

достатнім для розв’язання задач шкільного курсу математики, фізики та інших дисциплін. В курс алгебри та початків аналізу старших класів на базі методу меж вводиться поняття похідної та інтеграла, розв’язуються задачі з їх практичним застосуванням.

У такому вигляді, з щорічними методичними рекомендаціями Міністерства освіти щодо вивчення математики в наступному навчальному році програма проіснувала до середини 80-х років.

Невдоволеність якістю шкільної математичної освіти, неодноразове наголошення на використання мікрокалькуляторів в процесі розв’язування практичних та прикладних задач спонукає до появи проекту чергової навчальної програми з математики у 1985 році, коли школа переходить на 11-річний термін навчання. В цей період актуальною стає ідея диференціації, відповідно проект програми має нову структуру: чітко визначається рівень обов’язкової математичної підготовки кожного учня, тематичне планування навчального матеріалу, міжпредметні зв’язки, даються рекомендації з методики викладання предмета. Згідно цієї програми, з точки зору наближених обчислень, учень 5-6 класу повинен вміти лише округлювати десяткові дроби. На вивчення розділу «Наближені обчислення» в курсі алгебри 7 класу відводиться 20 годин, воно базується на властивостях числових нерівностей, тому провідним методом НО є метод меж, а також вивчається ППРЦ. Випускник 9 класу повинен був уміти виконувати обчислення над наближеними даними за допомогою МК, знаходити наближені значення арифметичного квадратного кореня та тригонометричних функцій, виконувати прикидку та оцінку результатів обчислень. Під час обговорення даної програми на сторінках фахових видань думки знову розділяються щодо того, наскільки відповідає віковому розвитку учня вивчення НО в курсі математики 7 класу. З іншого боку, звучать схвальні відгуки щодо включення в неї питань, пов’язаних із наближеними обчисленнями та використанням мікрокалькулятора, хоч і зроблено це досить нерішуче [110].

У 1986 році, з огляду на необхідність диференційованого навчання, особливо в старшій школі, поряд із рішенням комісії по шкільній математичній освіті Відділення математики АН СРСР про затвердження проекту програми з математики для 5-11 класів загальноосвітньої школи [210], надруковано програму з математики для 8-11 класів з поглибленим теоретичним та практичним вивченням математики [203]. З точки зору вивчення НО відмінність зазначеної програми полягає в конкретизації наближених методів розв'язання рівнянь (метод хорд та метод дотичних), а також у застосуванні похідної, бінома Ньютона для НО. В неявному вигляді НО присутні і при вивченні інших тем курсу, оскільки велика увага авторами програми приділяється міжпредметним зв'язкам, зокрема математики та фізики, розв'язанню прикладних задач.

Поява нових програм стає передумовою для написання нових підручників. Відповідно до змістового наповнення тем підручника відбувається поурочне планування. Так, при викладанні математики за пробним підручником [12] поурочним плануванням [199, 200] не передбачається вивчення НО в старшій школі, а плануванням [213] на основі ППППЦ та ММ обчислюються наближені значення функцій (2 год) та вивчається впродовж 9 годин розділ «Застосування похідної до наближених обчислень, геометрії та фізики». Особливої уваги заслуговує підручник М.І. Башмакова [25] для 10-11 класів, в якому скорочення матеріалу з НО не відбувається, оскільки автор вважає цей матеріал надзвичайно важливим та ілюструє це на прикладах з фізики: «Так, під час викладання інтеграла, …, можна зробити наголос на знаходженні його наближеного значення за допомогою інтегральних сум та використати матеріали з історії математики, можна зробити акцент на фізичне застосування (10 прикладів). Більшості людей в житті не доведеться обчислювати інтеграли, а знайомство з цим важливим інструментом людської думки та його можливостями буде корисним кожному» [25].

Незважаючи на наявність НО в курсі алгебри і початку аналізу, у шкільному курсі математики спостерігається відчутне зменшення кількості

прикладних задач та практичних робіт, що пов'язані з культурою вимірювань, розрахунків за допомогою МК та оцінкою результатів у геометрії. Наприклад, у підручнику О.В. Погорєлова «Геометрія 6-10» [190] в курсі стереометрії присутні всього чотири таких задачі.

Впродовж цього періоду вивченням методики навчання наближеним обчисленням в курсі математики старшої школи, застосуванням мікрокалькулятора на уроках займаються такі провідні методисти і науковці як Н. Я. Вілєнкін [50-53], О. С. Дубинчук [72, 73], А. М. Колмогоров [3, 10, 11], З. І. Слєпкань [9, 10, 14, 221, 222], М. І. Шкіль [9, 10].

Поряд із застосуванням НО під час розв'язування задач на уроках математики набуває актуальності її прикладне застосування і міжпредметні зв'язки. Вивченням даних проблем займалися такі науковці як В.М. Брадіс, О.С. Дубинчук, Л.П. Гур'єва. О.С. Дубинчук зазначає, що одним із складних і недостатньо розроблених є питання про підхід до міжпредметних зв'язків, поєднання його з профільною спрямованістю в навчанні загальноосвітніх предметів. А.М. Колмогоров [145, с.97] наголошує на необхідності будувати курс шкільної математики так, щоб учні були підготовлені до сприйняття нових аспектів прикладної математики і на прикладі показникової функції демонструє її значення та застосування у фізиці, біології, економіці [145, с.72-73]. Найбільш суттєвою інновацією в цей період стало впровадження в шкільну програму такого предмета як «Основи інформатики та обчислювальної техніки». Комп'ютер є ідеальним інструментом для пробудження початкового інтересу до математики, її зв'язку із усім оточуючим.

Аналогічно матеріал з НО був розподіленим і в наступних навчальних програмах 1989 та 1991 років. Але слід зауважити, що невизначеність щодо методів НО в ШКМ залишається. Так, в навчальній програмі 1989 року акцент робиться на ППЗЦ, а методична література містить вказівки щодо ППЗЦ у 7-8 класах, а про ММ можна судити лише по неявним вказівкам [118, с.28]. Незважаючи на особливу увагу до формування обчислювальних навичок у школярів, постійний наголос на застосування математики в реальному житті, до

розвитку міжпредметних зв'язків, активно обговорюється проблема систематичного використання обчислювальної техніки на уроках математики, з'являються методичні рекомендації щодо оглядового вивчення НО [167, с.40]: «Можна відмовитись від вироблення навичок знаходження абсолютної та відносної похибок, а також виконання дій над наближеними значеннями», а також «Застосування похідної до наближених обчислень у фізиці можуть вивчатися оглядово, без формування відповідних навичок» [167, с.41]. Як наслідок, у програмі 1991 року, з огляду на скорочення кількості тижневих годин на вивчення математики, практично увесь матеріал з НО стає необов'язковим для вивчення. Його використання під час розв'язування геометричних задач стає другорядним. Отже, наприкінці 80-х років спостерігається суттєве зниження інтересу до вивчення НО в ШКМ.

Що стосується НО в навчальній та методичній літературі, то їм приділяється серйозна увага в роботах таких науковців як О.С. Дубинчук [72, 73], Н.В. Елізаветіна [75], З.І. Слєпкань [221, 222], Н.Я. Прайсман[194, 195], як одному із елементів формування обчислювальних навичок – в працях П.В. Стратілатова [235], А.К. Корієвої [252], Л.Г. Шпілєвої [269]. Однак, незважаючи на наукові дослідження, практичне використання мікрокалькулятора для НО в школі фактично відсутнє, а проблема формування та розвитку обчислювальних навичок у школярів має на увазі роботу з «красивими», точними числами.

Враховуючи усе вищесказане, приходимо до висновку, що на початку 90-х років знову виникає потреба перегляду питання змісту НО в шкільному курсі математики та методики їх вивчення. З одного боку, науково-технічний прогрес і зміни, що відбуваються в суспільстві, потребують іншого методичного підходу до вивчення НО, а з іншого, відбувається «спад науково-методичних пошуків» з НО. Така суперечність призводить до початку нового, третього етапу в історії розвитку вивчення наближених обчислень у ШКМ, впродовж якого інтерес до них так і залишається другорядним.

Більше того, в середині 80-х років склалася парадоксальна ситуація з підготовкою шкільних вчителів: у вищих педагогічних навчальних закладах не викладається курс елементарної математики, введено нові програми та нові підручники для майбутніх вчителів, які, за словами академіка С.П. Новікова, є абстрактними і відірваними від ШКМ [234]. З іншого боку, молоді вчителі приходять на роботу в школу і їм доводиться працювати за зовсім іншими, модернізованими підручниками. Така ситуація не могла не вплинути на результати навчання школярів та якість їх ЗУН, зокрема з НО. Зазначені фактори призводять до появи інформаційного вакууму навколо НО.

У цей же період відбуваються і зміни в устрої держави, які впливають на розвиток національної шкільної математичної освіти. Набуття Україною статусу незалежної держави призводить до того, що Міністерством освіти України спільно з Головним управлінням загальної середньої освіти розроблено програму з математики (8 – 11 класи) для спеціалізованих шкіл, ліцеїв та гімназій [126]. Починається *третій* етап розвитку НО у ШКМ. На вивчення математики в старшій школі відповідно до програми виділяється 8 годин на тиждень: алгебра і початки аналізу – 5 годин, геометрія – 3 години в класах з поглибленим вивченням математики, 5 годин на тиждень: алгебра і початки аналізу – 3 годин, геометрія – 2 години в класах науково-природничого профілю, 3 години на тиждень математики в класах гуманітарного профілю. Основною метою вивчення математики в старшій школі є озброєння учнів теоретичними знаннями про математичні задачі, формувати узагальнені методи і прийоми їх розв’язування [156, с.4], сформувати знання, уміння і навички, необхідні для успішного вивчення профільних дисциплін [156, с.18], розвивати абстрактне, логічне та алгоритмічне мислення для освоєння нових галузей знань, полегшення адаптації до умов життя [156, с.25]. Особлива увага приділяється обчислювальним умінням і навичкам, які формуються на основі дослідження властивостей, що використовуються для характеристики реальних явищ і процесів у природі, у реальному житті людини.

При цьому наголошується, що вчитель має приділяти увагу розвитку навичок самостійної роботи учнів, умінню працювати з підручником та іншою довідковою літературою. Особливо звертається увага на проблему міжпредметних зв'язків курсів математики, інформатики та фізики. Але конкретні шляхи реалізації цієї проблеми програма залишає за вчителем. Для кожного класу відводиться 10-15% часу як резервного, і вчитель може використати його на свій розсуд. А в 11 класі, під час повторення на уроках алгебри і початків аналізу в кінці навчального року, рекомендується розглянути такі теми як «Математика і моделювання», «Математика і природознавство». Проте методична література цього часу не містить вказівок та рекомендацій щодо їх використання в курсі математики старшої школи. Питання застосування методів НО в курсі алгебри і початків аналізу та геометрії залишається поза увагою українських методистів і науковців.

Щодо змісту НО в програмі з математики, то на початку 90-х років абсолютна та відносна похибки вивчалися школярами в курсі алгебри 7 класу, але ці поняття виявилися ізольованими від їх застосувань у курсі математики 7 класу. У 8-му класі тема «Наближені обчислення» знайомила учнів із правилами підрахунку правильних цифр та обчисленням із наближеними даними на МК.

Проаналізуємо зміст підручників для старших класів, що відповідають навчальним програмам [156] вказаного періоду. Підручник з алгебри і початків аналізу А.М. Колмогорова [3, 11] проводить лінію наближених обчислень через увесь курс 10 – 11 класів, впроваджує використання МК та таблиць для знаходження наближених значень тригонометричних виразів, логарифмічних функцій, окремо виділені такі теми як «Наближене обчислення значень функції» (Розділ II §5, п.14), «Формули для наближених обчислень» (§5, п.23). За поданим теоретичним матеріалом представлені практичні завдання, де за відомим наближеним значенням аргументу знаходиться точність отриманого значення функції, проводиться порівняльний аналіз результатів обчислень за допомогою таблиць та з використанням диференціалу (№596, 598, 763, 791).

ППТЦ представлено як один із способів введення поняття степеня з ірраціональним показником. Матеріал для повторення містить необхідні відомості про поняття абсолютної та відносної похибки, ППТЦ, десяткові наближення чисел з недостачею та надлишком, дії над НЗ. Проте аналогічний підручник [6] приділяє менше уваги вивченню НО в курсі алгебри і початків аналізу. Вилучені приклади обчислення НЗ обернених тригонометричних функцій, тригонометричних нерівностей, «Наближене обчислення значень функції» (Розділ ІІ §5, п.14), скорочено довідковий та теоретичний матеріал для повторення.

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики [50-52] вже з перших сторінок наголошує на недоцільності говорити про раціональність реальних величин, зокрема фізичних. Графік функції, що зображаємо також є наближеним ескізом з певною мірою точності. Окрім наведених в розглянутому вище підручнику питань, вивчається застосування бінома Ньютона для наближених обчислень [50, с.210] та наближені методи розв'язування рівнянь (метод хорд, дотичних, січних, послідовних наближень тощо), проводиться оцінка значень тригонометричних функцій за допомогою ППТЦ.

Курс стереометрії за підручником [126], на відміну від [190], пропонує учням старшої школи цілу низку прикладних задач, одні з яких – особливо у 9 класі дозволють усвідомити необхідність вивчення геометрії для практичного застосування в житті (№ 9, 11, 25, 84), а інші – застосування НО в реальних побутових ситуаціях та в інших науках: астрономії, авіації, будівництві, геодезії тощо (№ 437, 445, 446).

Разом з тим, як зазначалося вище, у цей період видаються і нові підручники українських авторів. Аналізуючи їх зміст, бачимо, що у [116] НО не розглядаються, авторські колективи [267, 268] за допомогою ППТЦ розглядають обчислення визначених інтегралів, обчислення логарифмів за допомогою МК. Наявність наближених обчислень в курсі математики старшої школи цілком залежить від того, якім підручником користується вчитель.

Відсутність належної уваги до НО в ШКМ з боку науковців призводить до повного їх ігнорування з боку вчителя. Такий стан речей не міг існувати довго, і у 2001 році відбувається перехід навчання математики на нові програми [153]. Згідно них, основні відомості з НО вивчалися впродовж 2-3 годин лише під час вивчення розділу «Елементи прикладної математики» у 9 класі. Досліджуючи стан вивчення НО в цей період, З.І. Слепкань, В.Г. Бевз зазначають, що він знаходиться на неприпустимо низькому рівні, чим гальмує реалізацію прикладної спрямованості ШКМ, а також вивчати відомості про НО в курсі алгебри 9 класу занадто пізно, оскільки це позбавляє можливості використовувати їх у геометрії і фізиці [223]. Для вчителів даний розділ є одним із самих важких і незрозумілих, а відповідно його викладання викликає труднощі. Як наслідок, створюється психологічний бар'єр у подачі матеріалу, що впливає на рівень його сприйняття учнями. Тому в КМСШ наближені дані якщо і використовуються, то без пояснення доцільності обрання того чи іншого методу, наукового обґрунтування та оцінки точності результату.

Отже, як бачимо, впродовж *третього* етапу розвитку НО в шкільному курсі математики відбувається поступове зниження уваги до наближених обчислень як з боку науковців, так і з боку вчителів.

Проаналізувавши шлях вивчення НО в шкільному курсі математики, приходимо до висновку, що вони є важливою та невід'ємною складовою у формуванні математичної компетентності школяра. За допомогою наближених обчислень реалізуються принципи навчання, зокрема наступність, реалізація міжпредметних зв'язків, показується зв'язок математики як науки із життям. Впродовж тривалого часу велися наукові, науково-методичні пошуки щодо місця і змісту НО в ШКМ, побудови методичної системи їх вивчення, розроблялися дидактичні матеріали для впровадження у навчальний процес. Такий аналіз дозволяє виявити ключові моменти, які слід враховувати при розробці сучасних методичних підходів до вивчення наближених обчислень в старшій школі. Але для цього насамперед слід проаналізувати сучасний стан вивчення наближених обчислень в школі.

1.1.2. Досвід вивчення наближених обчислень в старшій школі

У період з 2005 року освіта України переходить на програми 12-річного навчання, плануючи, що старша школа стане трирічною, але у 2010 році знову повертається до 11-річної системи, так і не впровадивши у практику 3-річну старшу школу. Саме в цей час зусилля спрямовуються на формування гуманістичного суспільства, життєво компетентної особистості, готової застосувати отримані знання на практиці. Особливо важливими стають питання використання міжпредметних зв'язків, розв'язування прикладних задач, які неможливо впроваджувати у ШКМ без застосування методів НО.

Проаналізуємо докладніше стан їх вивчення в цей час. У звязку із переходом на нову концепцію освіти створюється програма з математики для учнів 5-12 класів [155], згідно якої НО пропедевтично вивчаються в курсі математики 5 класу під час вивчення теми «Дробові числа». Відповідно державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учня п'ятикласник повинен уміти розв'язувати вправи, що передбачають округлення десяткових дробів до заданого розряду. Щодо подальшого вивчення НО в ШКМ, то проект згадуваної програми пропонував перенести тему «Наближені обчислення» з курсу алгебри 9 класу до математики 6-го. Мотивація таких змін полягала в тому, що, як було сказано вище, у 9 класі пізно розпочинати вивчення основного матеріалу з НО. Таким чином, з програмового матеріалу 9 класу НО було вилучено, але й у 6-му класі таку тему не включено в програму за виключенням десяткового наближення звичайного дробу в темі «Звичайні дроби». У вимогах згаданої програми до рівня загальної підготовки учнів немає навичок операцій з наближеними даними у випускника основної школи. Натомість пояснювальна записка до програми з математики для старшої школи наголошує, що одним із головних завдань курсу є забезпечення умов для досягнення учнем практичної компетентності, яка передбачає, що випускник загальноосвітнього закладу володіє технікою інструментальних обчислень, зокрема наближених. Також під час навчаня геометрії в старшій школі учні повинні вчитися правильному сприйняттю навколишнього світу, який

неможливо описувати з позиції «точних» даних. Також учень старших класів повинен володіти знаннями, що дозволяють розв'язувати нескладні прикладні задачі з реальними величинами. Як бачимо, існує протиріччя між метою навчання математики школярів та змістом навчального матеріалу шкільного курсу математики, оскільки запропонований до вивчення матеріал не містив жодної теми з наближених обчислень.

У 2006 році в Україні запроваджується зовнішнє незалежне оцінювання (надалі – ЗНО), метою якого є спрощення процедури складання державної підсумкової атесації та всупу абітурієнтів до вищих навчальних закладів. Щорічно в нормативних документах Українського центру оцінювання якості освіти публікується програма підготоввки до ЗНО з математики, де серед вимог до знань є уміння округлювати наближені значення та виконувати над ними дії [106]. Знання методів, за допомогою яких ці дії можна виконувати та уміння оцінити результат обчислень від випускника не вимагаються.

Відсутність явно виділеної теми «Наближені обчислення» зовсім не означає відсутності самих НО в ШКМ. Тим важливішою стає проблема методичних розробок щодо їх вивчення. Надзвичайно важливу роль у цьому аспекті відіграють підручники. Як зазначають у своїй статті Блох А. Я. та ін., традиційно тема НО виглядає дуже нецікавою, і у цьому одне з самих вразливих місць підручників з математики. Вона і дійсно буде такою, якщо не зробити її більш вагомою та значущою [33].

У період проведення освітніх реформ надзвичайно поширеними стають класи економічного профілю, для них з'являється окрема програма з математики [236]. Вивчення економіки справді неможливе без належної математичної підготовки. Зокрема, більшість економічних процесів описується математично, а розв'язування економічної задачі передбачає створення математичної моделі, величини в якій є наближеними. Тому і відповідна методична література, і дидактичні матеріали використовують наближені дані, методи розв'язування економічних задач дають наближений результат, проте жодна з них не використовує під час розв'язування задач методи НО, а учню

пропонується лише готова відповідь. Посібники та задачники не містять вправ, що дозволяють старшокласнику виробити навички оцінки точності вихідних даних та кінцевого результату. Подібна ситуація відбувається і з вивченням математики в усіх навчальних закладах.

Як вже зазначалося, у 2010 році, так і не розпочавши, 12-річна школа припинила своє існування. При цьому старша школа переживає відповідні зміни і в змісті, і в організації навчання. Складаються навчальні програми, зокрема з математики, для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів різних рівнів (рівень стандарту, академічний рівень, профільний рівень, для класів з поглибленим вивченням математики) та програми факультативних курсів і курсів за вибором для учнів старших класів різних профілів навчання [204, 205]. Відповідно до програм видаються нові підручники та посібники для кожного рівня**.**

Саме в цей час, наприкінці першого десятиріччя XXI століття, після довготривалої перерви, яка була пов’язана з розв’язуванням глобальних питань шкільної математики, сучасні науковці повертаються до проблеми вивчення НО в ШКМ. Аналізуючи та досліджуючи шкільну практику, З.І. Слєпкань, В.О. Швець, В.М. Кліндухова приходять до висновку, що стан вивчення НО в ШКМ знаходиться на неприпустимо низькому рівні. У зв’язку з цим гальмується розвиток загальної математичної культури, зокрема культури математичних обчислень, принцип розвитку практичного та прикладного спрямування освіти. Як зазначає у своєму дослідженні В.М. Кліндухова [118], витоки незадовільного стану вивчення НО на сучасному етапі слід шукати у структурі математичної діяльності учнів по засвоєнню провідних понять та методів НО.

Вивченням проблеми впровадження профільного навчання та питаннями міжпредметних зв’язків займаються такі науковці як В.В. Ачкан, Т.І. Війчук, М.І. Жалдак, Т.В. Зайцева, І.В. Лупан, О. Шаран, О.Б. Шевельова. Питання методики навчання в курсі математики старшої школи вивчають у своїх

роботах такі науковці як В.В. Ачкан, В.О. Марченко, Є.П. Нелін, З.І. Слєпкань, Ю.Л. Сморжевський, В О. Швець та ін.

Проте застосування методів НО під час розв'язуванні математичних задач саме на уроках математики у 10 – 11 класах досліджується лише в роботах З. І. Слєпкань, О. Б. Шевельової, та в курсі математики основної школи – в наукових роботах В. О. Швеця і В. М. Кліндухової.

Відповідно до Державного стандарту базової і повної середньої освіти одним із основних завдань старшої школи в освітній галузі «Математика» є розширення та поглиблення уявлень учнів про застосування математики в практичній діяльності в різних галузях науки. Іншими словами, сучасна школа повинна формувати і розвивати в учнів практичні життєві компетентності.

Якщо ж розглянути сучасну науково-методичну літературу, то вищезгадані питання описуються недостатньо. Вчителі-практики намагаються обмежитися оглядовим вивченням НО (розглядають лише правила округлення чисел та, в кращому випадку, вводять поняття абсолютної та відносної похибки). Внаслідок такого вивчення даних питань в курсі середньої школи учні зустрічаються з цілою низкою проблем: як виконувати ті чи інші розрахунки на уроках фізики, хімії; з яким ступенем точності записувати відповідь при обчисленнях на МК чи комп'ютері, якщо він видає до 32 знаків після коми; наскільки точною буде отримана відповідь, якщо в процесі обчислень проміжні результати були заокруглені? Тут і виникає в учня психологічний бар'єр.

Необхідність подолання такого роду бар'єру підкреслюється як науковцями минулого, так і сучасними психологами та педагогами. Але для цього, в першу чергу, вчитель повинен досконало сам володіти знаннями та технікою НО і мати для цього відповідні засоби навчання: підручник, дидактичні матеріали, науково-методичну та навчально-методичну літературу. Вчителі з небажанням і формально ставляться до викладання НО в курсі математики базової школи, внаслідок чого стає неможливим подати учням матеріал в цікавій та доступній формі. Аналізуючи методичну літературу,

різноманітні дидактичні матеріали, бачимо, що для роботи на уроці, вдома чи на факультативних заняттях відсутня система вправ, які б розвивали навички виконання НО як для формальних математичних, так і для практичних, прикладних задач. Звичайно, якщо учень не отримав відповідної бази, то під час вивчення математики в старшій школі він зустрічається із цілою низкою проблем, подолати які допоможе лише кардинальна зміна у ставленні до вивчення наближених обчислень.

Якщо провести порівняльний аналіз навчальних програм та змісту підручників, за якими навчалися учні старших класів до і після 2010 року, то можна зробити висновок, що сучасна математична освіта починає поступово, але надзвичайно повільно повертатися до вивчення НО. Починається воно ще з вивчення курсу математики основної школи.

У програмі з алгебри і початків аналізу старшої школи для різних рівнів в пояснювальній записці [205] серед вимог до випускника загальноосвітнього навчального закладу звучить наступна: «… виконує математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, наближені обчислення тощо), раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення …». Але якщо звернутися безпосередньо до тексту програм, то можна зустріти певні суперечності. Наприклад, для рівня стандарту в змісті навчального матеріалу питання наближених обчислень явно не звучать, але серед вимог до навчальних досягнень учнів 10 класу в темі 2 «Тригонометричні функції» є така: «…обчислює значення тригонометричних виразів і наближені значення тригонометричних виразів із заданою точністю за допомогою обчислювальних засобів…». Для учнів 11 класу лише в темі 4 «Похідна та її застосування» звучить вимога «…розв’язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших та найменших значень реальних величин…». Для учнів, які вивчають математику на академічному рівні (як і для всіх інших рівнів) зміст навчального матеріалу явно не містить питань НО, а серед вимог до навчальних досягнень з наближених обчислень вони зникли. Прикладна спрямованість звучить в 10 класі в темах 2 «Степенева функція»: «…моделює

реальні процеси за допомогою степеневих функцій…» та в темі 3 «Тригонометричні функції»: «…застосовує тригонометричні функції до опису реальних процесів, зокрема гармонічних коливань…» та в 11 класі в темі 5 «Похідна та її застосування»: «…розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших та найменших значень реальних величин… ».

Для учнів, які вивчають математику на профільному рівні [205], лише в 11 класі серед вимог до навчальних досягнень в темі 9 «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація» є наступна вимога: «… за описами реальних ситуацій розв'язує задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь…». Дуже дивним є те, що для класів з поглибленим вивченням математики, де метою навчання є «забезпечення рівня підготовки учнів з математики, необхідного для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі» у змісті самої програми та у вимогах до навчальних досягнень учнів не звучать ні питання НО, ні питання прикладного застосування математики.

Факт відсутності вивчення НО як окремої теми у програмі [205] зовсім не означає їх відсутність у курсі математики старшої школи, тому проблема їх вивчення, розробка кваліфікованих рекомендацій, дидактичних матеріалів тощо є актуальною. Як зауважує М. І. Кавун, вивчення НО є природним та неминучим явищем в шкільній математиці [223, с.105]. Вони є невід'ємною складовою загальної обчислювальної культури та прикладної спрямованості навчання математики, що об'єктивно пов'язує їх із багатьма темами ШКМ. Вивчення НО як окремої теми не дає бажаних результатів. Їх слід вивчати систематично, наскрізно, поступово, обов'язково використовуючи міжпредметні та внутрішньопредметні зв'язки.

Витоки незадовільного стану вивчення НО на сучасному етапі розвитку математичної освіти розглянула у своїх дослідженнях В.М. Кліндухова. В своїй роботі вона наголошує, що систематизованих відомостей відносно усіх трьох традиційних джерел (деякі результати лічби, результати практичних вимірювань та округлень) одержання наближених значень в жодному

підручнику з математики для основної школи не наводиться [118, с. 35]. Аналогічний висновок можна зробити і стосовно підручників старшої школи. Їх введення розглядається лише за допомогою кількох прикладів, які об‘єктивно не відображають появу та існування НЗ. Як відомо з психології, у старшому підлітковому віці у школярів слабо розвинена здатність до узагальнення. Але збільшується інтерес до закономірностей, а не до вивчення окремих конкретних фактів.

Влітку 2009 року здійснився перехід від навчальної програми 2001 року та відповідної навчальної літератури до програм та підручників 2010-2011 років. Проаналізуємо ті зміни, які при цьому відбулись у вивченні НО.

У підручнику Є.П. Неліна [173] епізодично згадуються НО при переході від радіанної до градусної міри кута і навпаки (с.41-42), наводяться приклади обчислення значень обернених тригонометричних функцій, що не є табличними (с.160) за допомогою калькулятора. Але при цьому, на жаль, відсутні пояснення, за яким принципом слід визначати кількість знаків після коми, що залишається. В подальшому усі відповіді до вправ та прикладів або зводяться до табличних значень тригонометричних та обернених до них функцій, або записуються за допомогою трансцендентних функцій (с. 174, 182, 211). За допомогою ММ дається поняття степеня з раціональним показником, але під час вивчені логарифмічної та показникової функції не наведено прикладів обчислення їх наближених значень. В розділі «Похідна та її застосування» наводяться приклади (с. 93, с.106) з обчисленнями, що приводять до наближених відповідей, які округлюються до певного розряду без пояснення причин саме такого округлення. Але вже на с. 176-177 за допомогою похідної доводиться наближена рівність $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ та наводяться приклади її застосування.

Коли ж розглянути зміст нині діючих підручників для 10 класу [3, 4, 158–160], то в [173-175] спостерігаються епізодичні звернення до питань НО, які мало чим відрізняються від аналогічних у підручнику попереднього видання. У підручниках [4, 5], ні під час вивчення степеневої функції, ні під час

вивчення інших тем (тригонометричні функції, методи розв'язування рівнянь та нерівностей) автори не звертаються до НО. На нашу думку, це пов'язано саме з тим, що навчальна програма не містить чітких вказівок щодо їх вивчення. Слід відмітити, що серед задач до тем і параграфів підручника містяться задачі прикладного характеру, проте запропоновані в них обчислення здійснюються за правилами точних обчислень. Такі уривчасті згадки про НО спонукають учнів до висновку про неважливість та недоцільність застосування наближених обчислень на практиці.

Методи НО в курсі математики старшої школи пов'язуються, насамперед, з алгеброю та початками аналізу. Мотивація їх вивчення полягає у відповіді на запитання «Де можна зустрітися з наближеними величинами в реальному житті і як їх застосовувати на практиці?». У підручниках [4, 5] згадується, що:

1. Для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним, використовуються наближені значення цих чисел (с. 20-21 §1 «Множини»).

2. Усі практичні вимірювання величин мають лише наближений характер, а їх результат можна подати з певною точністю за допомогою раціональних дробів або скінченних десяткових дробів. Проте в математиці часто відхиляються від наближеного характеру практичних вимірювань (с.156 «Відомості з історії» до розділу I).

Якщо розглядати розділи «Функції, рівняння і нерівності», «Застосування властивостей функції до розв'язування рівнянь», то йдеться про такі методи, як скінченна множина точок області допустимих значень, оцінка значень лівої та правої частин рівняння, використання зростання та спадання функцій. Водночас такий метод, як метод послідовних наближень не описується. Під час розв'язування запропонованих прикладів та вправ до цього розділу відповіді мають точні значення, а це приводить до хибного висновку про існування лише таких розв'язків рівнянь. Якщо ж учні отримують наближену відповідь, то одразу думають про помилки в розв'язуванні.

Застосування графічного способу розв’язування рівнянь з пошуком наближених значень коренів дозволяє уникнути цієї проблеми. Але в підручниках такі вправи відсутні. Під час вивчення визначеного інтеграла, на нашу думку, доцільно було б порівняти безпосередньо обчислене значення із результатами, отриманими за допомогою методу прямокутників, трапецій тощо і емпіричним шляхом дійти до певного висновку. Аналогічні пропозиції стосуються і інших підручників.

Також слід звернути увагу на таке поняття, як числова характеристика наближеного значення. Очевидно, що лише його числове значення не має практичного змісту. Невідомо, наскільки воно є близьким до точного значення. Тому для створення уявлення про близькість наближеного та точного значення потрібні його характеристики. Цікавим є те, що у нових підручниках з геометрії [32] з’явилася нова рубрика «Прикладні задачі», яка надає учневі можливість не тільки ознайомитися із практичним застосуванням тих теорем та властивостей, які він вивчає, а й самостійно оцінити ступінь точності отриманої відповіді, застосовуючи відповідні характеристики числа (с. 74, 102, 171, 219). Хоча щодо підручників з геометрії, рекомендованих Міністерством освіти України, хотілося б надати кілька коментарів. По-перше, дані в задачах підібрані або в загальному випадку, або ж таким чином, що обчислення проводяться з точними числами. В учнів у цьому випадку складається хибне враження щодо результатів таких обчислень. По-друге, геометрія – не тільки теоретична, а й практична наука. Але на сторінках підручників майже не зустрічаємо завдань для практичної роботи учнів на певні вимірювання та розрахунки. Як відомо, наближений характер можуть мати як остаточні результати, з якими зустрічаємося в підручниках, так і вихідні дані та проміжні результати. Тому саме такі практичні завдання, на нашу думку, допомогли б вирішити проблему ознайомлення учнів із джерелами НО.

У контексті вищесказаного слід згадати про форми запису наближених даних. У опрацьованих нами підручниках відповіді до задач, як правило, записуються без використання знаку наближеної рівності, що є дуже

небажаним, оскільки тоді відповідь вважається точним числом, що призводить до хибної думки, що результати під час виконання певних завдань повинні бути точними. Інші ж форми запису наближених чисел (за допомогою подвійної нерівності, умовної чи наближеної рівності) не використовуються взагалі.

За твердженнями психологів початковим етапом будь-якої людської діяльності є мотивація, яка визначається як сукупність потреб, що спонукають до діяльності. Серед дидактичних вимог до підручника з математики також є наявність засобів мотивації. Як стверджує у своїй роботі В.М.Кліндухова [118], найбільш природною мотивацією ознайомлення учнів з наближеними обчисленнями є наголос на об'єктивності їх існування та з'ясування причин їх наближеності. Серед науковців неодноразово звучить думка про те, що чим більше буде приділятися уваги формуванню уявлень, умінь та навичок роботи з НО на уроках математики, тим успішніше буде відбуватися і оволодіння іншими поняттями, фактами в різних дисциплінах. Однак, як ми вже відмітили, системності, наступності та послідовності у вивченні НО в нині діючих підручниках не спостерігається.

У збірнику програм [205] окрім навчальних, містяться програми факультативних курсів, один з яких (с.152) має назву «Обчислювальний практикум» і призначений для учнів 10 класів природничо-математичного напряму. Його метою є забезпечення умов для досягнення практичної компетентності, в т.ч. володінням технікою обчислень, в тому числі і наближених. В курсі цього практикуму розглядаються як основні поняття НО, так і принципи і правила побудови математичних таблиць, різні методи наближеного розв'язування алгебраїчних рівнянь. Вивчення такого курсу дозволяє компенсувати відсутність окремих питань НО в основній програмі з математики. Але, на жаль, свого продовження в 11 класі він не має. Факультативний курс «Обернені тригонометричні функції» (с.122) передбачає використання табличних значень обернених тригонометричних функцій (с.124). Застосування похідної до НО оглядово (2 години) пропонується в програмі для учнів математичного та інформаційно-технологічного профілів (с.176),

використання комп'ютера для обчислення площ фігур, границь і сум (4 години) – в іншій програмі для учнів 11 класу (с.203).

Таким чином, навіть за умови наявності додаткових годин на вивчення факультативного курсу з математики за існуючими програмами, принцип системності, наскрізності, послідовності і наступності вивчення НО не зберігається.

На Сьомій Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Питання сучасної науки і освіти», яка відбулася 11-13 липня 2011 року [63] піднімалося питання про проблеми викладання шкільної математики. Зокрема, О. В. Горєлова відмічала, що в час стрімкого розвитку науки і техніки, новітніх технологій, програми мають, в першу чергу, забезпечити базову математичну підготовку на випадки різних професій. При цьому має бути вирішена проблема наступності. Якщо в курсі основної школи були вивчені основи НО, то в старшій школі учні повинні розширювати, поглиблювати ці знання і вміти їх застосовувати на практиці. Паралельно виникає проблема міжпредметних зв'язків: саме на уроках інформатики старшокласники можуть складати програми, за допомогою яких можна шукати наближені корені рівнянь різними методами, наближено обчислювати значення показникових та логарифмічних функцій, обчислювати інтеграли тощо. На уроках фізики під час обчислення значень тригонометричних функцій різних кутів, що виміряні з певною мірою точності, під час обчислення значень виразів, що містять числа, записані у стандартному вигляді, на уроках економіки під час аналізу незбитковості, географії – при роботі з картами, хімії – під час розв'язування рівнянь – всюди учні зустрічаються з НО. Тобто, окрім проблем вивчення окремо взятої дисципліни слід звернути увагу і на відповідність навчальних програм з різних предметів, оскільки математичний апарат, насамперед, слугує для вирішення різноманітних задач з інших дисциплін. Провідним є формування в учнів ставлення до математики не лише як до окремої галузі загальноосвітніх знань, а як до провідного методу наукового пізнання.

Підсумовуючи усе вище сказане, робимо висновок, що на сучасному етапі розвитку математичної освіти недостатньо приділяється уваги вивченню та застосуванню НО у шкільному курсі математики. Фактори, що призводять до мотивації вивчення наближених обчислень у курсі математики старшої школи, практично відсутні, внаслідок чого оволодіння відповідним навчальним матеріалом не набуває для учнів як основної, так і старшої школи, значущості.

1.2. Мета і зміст вивчення НО в курсі математики старшої профільної школи

Організація навчання в старших класах загальноосвітніх закладів, шкіл нового типу, зокрема організація навчання математики, має на меті підготувати компетентного, конкурентоспроможного випускника, який, насамперед, готовий застосовувати математичні знання під час вивчення інших навчальних предметів. Для успішної самореалізації в соціумі випускник загальноосвітньої школи повинен володіти певними прийомами математичної діяльності, вміти застосовувати їх під час розв'язування прикладних задач. Одним із напрямків розвитку і виховання такої особистості є вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої школи.

У процесі вивчення НО формується і розвивається вимірювальна та обчислювальна культура учнів. Під час навчання математики в школі у них повинно бути сформоване поняття наближеного числа, в основі якого лежить розуміння відмінностей між теоретичним і практичним результатом вимірювання певної величини. Дії над результатами вимірювань виконуються при цьому за правилами роботи з точними та наближеними значеннями. Під час виконання дій над останніми обчислюються кількісні та якісні характеристики числових величин – абсолютна та відносна похибки. Також доцільно було б навчити випускників школи чітко розрізняти методи нестрогого та строгого врахування похибок: метод підрахунку правильних цифр (надалі – МППЦ) та метод меж.

Вибір методу НО повинен бути поєднаний із навчальним матеріалом. Старшокласники знайомі із теорією нерівностей, тому на її основі може бути використаний метод меж, а під час вивчення початків аналізу 11 класу, зокрема диференціального числення, обчислення межі абсолютної похибки можна здійснювати, спираючись на поняття нескінченно малої функції. Порівняльний аналіз результатів, отриманих під час обчислень різними методами наближених обчислень сприяє розвитку критичного мислення учнів. Ступінь глибини такого аналізу залежить від того, за яким профілем навчаються учні.

Вивчення НО в курсі математики старшої школи відбувається як на уроках алгебри, геометрії, під час проведення проведенні бінарних уроків, так і в позаурочний час: на факультативних заняттях, спецкурсах, позаурочних заходах, в самостійній роботі старшокласників. Основними видами діяльності учнів є навчальна, дослідницька, проектна діяльність, під час якої слід залучати учнів до розв'язування практичних, прикладних задач, до виконання лабораторних, розрахунково-графічних та практичних робіт, до створення проектів.

У навчальному процесі використовуються нові інформаційні технології, групові форми навчання, методи активного навчання з використанням нових педагогічних програмних засобів, неодноразово описаних у науково-методичних статтях та посібниках; програмних продуктів GRAN 1, GRAN 2, GRAN 3; комп'ютерної програми Advanced Grapher, зручної саме для використання у роботі з наближеними обчисленнями в старших класах тощо.

Сукупність таких форм і методів навчання в поєднанні із системою задач і вправ підсилюють мотивацію навчальної діяльності старшокласників, виявляють міжпредметні зв'язки та прикладну спрямованість, практичну значимість НО. Вибір методу обчислень, його виконання та аналіз результатів відповідають психологічним принципам розвивального навчання, сформульованих З.І.Калмиковою [114]: систематичному розвитку основних видів мислення (наочно-дійове (або практичне), наочно-образне і абстрактно-теоретичне), проблемності навчання, сприяють цілеспрямованому формуванню

алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності, а також закріпленню обчислювальних навичок школярів. Розвивальною складовою навчання наближеним обчисленням є формування деяких важливих складових різнобічно розвиненої особистості. За умов домінування активного навчання, діяльнісного підходу, посиленої уваги до дослідницьких методів, розвивальні можливості НО можуть і повинні бути реалізовані.

Методологічною основою організації навчально-виховного процесу під час вивчення наближених обчислень є принцип поступового та систематичного вивчення відповідного навчального матеріалу, принцип концентризму, фузіонізму. Засобами їх реалізації є вивчення матеріалу як в активному, так і в фоновому режимах, добір цілеспрямованої системи задач і вправ відповідно до навчального матеріалу та психологічних особливостей школярів раннього юнацького віку.

У курсі математики старшої школи відповідно до навчальної програми вивчення НО доцільно проводити у три етапи:

- *перший* – на початку вивчення курсу математики 10 класу як повторення, узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок за курс математики основної школи;
- *другий* – у систематичних курсах алгебри і початків аналізу під час вивчення основних класів функції та їх властивостей;
- *третій* – у 11 класі під час вивчення основних понять диференціального, інтегрального числення – похідної та інтеграла, інших тем алгебри і початків аналізу, курсу стереометрії старшої школи і завершення вивчення КМСШ.

Кінцевою метою розумової діяльності старшокласника є успішне розв’язання практичних і прикладних задач, які перед нами ставить виробниче, суспільне, приватне життя. Правильне вирішення таких завдань слід шукати та реалізовувати в практичних діях з конкретними предметами в реальних задачах. Тому метою навчання наближеним обчисленням в старшій школі є:

– забезпечення кожного учня можливістю досягнення практичної компетентності,

– розширення і поглиблення знань і умінь техніки виконання обчислень над наближеними значеннями величин,

– підготовка до вибору професії та до навчання у вищих навчальних закладах освіти.

Цілі навчання математики випливають з цілей завдань загальної середньої освіти, які зазначені у Державній національній програмі «Освіта: XXI століття» [68]. Головною їх метою є подальший всебічний розвиток дитини як цілісної особистості, її здібностей і обдарувань, збагачення на цій основі інтелектуального потенціалу народу, його духовності й культури, формування громадянина України, здатного до свідомого суспільного вибору.

Сьогодні загальноосвітні навчальні заклади України працюють за навчальними програмами та навчальними планами, що відповідають вимогам рівневої та профільної диференціації, згідно з яким старша школа вивчає математику на чотирьох рівнях: рівень стандарту, академічний, профільний рівень та рівень поглибленого вивчення математики. При цьому слід зазначити, що профільний рівень навчання математики різниться від поглибленого тим, що на відміну від першого, другий передбачає допрофільне поглиблене вивчення математики у 8-9 класах. Як було зазначено раніше, НО в курс математики основної школи як такі не входять, тому доцільно говорити про визначення змісту навчання наближеним обчисленням у курсі математики старшої школи для усіх рівнів. Він розроблений нами і представлений у вигляді таблиці 1.1, відповідно до визначених нами трьох етапів вивчення наближених обчислень у курсі математики старшої школи.

Відповідно до діючої навчальної програми, не передбачається, що учні випускних класів, які вивчали математику на рівні стандарту, будуть складати ЗНО з цього предмету. Проте практика показує, що великий відсоток таких випускників реєструються на ЗНО з математики. Його програма, оприлюднена на електронній сторінці http://testportal.gov.ua/prepare_math/, у своїх вимогах містить перелік предметних умінь та способів навчальної діяльності, серед яких: графічне розв’язування рівнянь і нерівностей, розв’язування прикладних і

Таблиця 1.1

	Рівень стандарту	**Академічний рівень**	**Профільний та поглиблений рівень**
І етап вивчення НО в КМСШ	1. Формування уявлення про наближені значення чисел і величин, узагальнення і систематизація понять про числові характеристики наближених величин, умінь їх знаходити та пояснювати. 2. Систематизація форм запису наближених значень, їх аналіз та подальше застосування. 3. Систематизація умінь виконувати наближені обчислення за методом підрахунку правильних цифр, методом меж, зокрема з використанням мікрокалькуляторів та персональних комп'ютерів. 4. Застосування умінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями під час розв'язання прикладних задач. 5. Формування уміння здійснювати аналіз змісту завдання і вибору доцільного методу наближених обчислень та його подальше застосування. 6. Підготовка учнів до використання наближених обчислень у подальшому вивченні математики та суміжних предметів.		
ІІ етап вивчення НО в КМСШ	1. Доповнення уявлень про наближені обчислення під час вивчення програмового матеріалу. 2. Вироблення вмінь виконувати наближені обчислення на внутрішньопредметному та прикладному рівнях під час вивчення нових класів функцій. 3. Формування умінь використовувати технічні засоби навчання для виконання наближених обчислень та перевірки за їх допомогою отриманих аналітичним шляхом результатів. 4. Підготовка учнів до використання отриманих знань, умінь та навичок з наближених обчислень у професійній діяльності, у повсякденному житті, під час виконання практичних завдань. Навчання базується на навчально-дослідницькій основі із елементами дедуктивних міркувань.		

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Продовження таблиці 1.1</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Рівень стандарту</td><td>Академічний рівень</td><td>Профільний та поглиблений рівень</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">5. Підготовка учнів до використання знань, умінь та навичок у професійній діяльності, у повсякденному житті, під час виконання практичних завдань.</td></tr>
<tr><td></td><td>6. Оглядове знайомство з методом меж похибок для розв’язування задач, пов’язаних із програмовим матеріалом.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ІІІ етап вивчення НО в КМСШ</td><td colspan="3">1. Формування в учнів умінь розпізнавати задачі з наближеними даними.
2. Вироблення вмінь обрати доцільний метод наближених обчислень і проаналізувати отриманий результат.
3. Підготовка старшокласників до застосування отриманих математичних знань з наближених обчислень в житті.
4. Застосування методів наближених обчислень до розв’язування задач стереометрії.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">5. Формування уявлень про обчислення наближених значень функції за допомогою похідної.
6. Підготовка випускників до складання державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання з математики.</td></tr>
<tr><td></td><td>7. Формування умінь обчислювати наближені значення функції за допомогою похідної.</td></tr>
</table>

практичних задач, що здійснити неможливо без застосування наближених обчислень. Прикладом такого завдання може бути задача ЗНО-2013: «Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у вигляді циліндра, радіус основи якого 9см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (рис. 1.1). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть *найбільше* з наведених значень, якому *може* дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки».

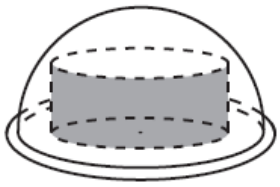


Рис 1.1

Тому на рівні стандартну доцільно вивчати НО з урахуванням цих особливостей сьогодення.

Таким чином, виходячи з вищесказаного, до основних цілей вивчення НО в курсі математики старшої школи можна віднести:

– Розвиток розумової та мисленнєвої діяльності старшокласників;

– Забезпечення свідомого та вмотивованого засвоєння системою математичних ЗУН з НО, які є основою для опанування інших навчальних дисциплін, а також які дадуть змогу розв’язувати задачі повсякденного життя людини, успішно опанувати майбутню професію;

– Формування уявлень про роль математики у пізнанні навколишнього світу; умінь створювати математичні моделі реальних процесів і їх досліджувати.

Під час проведення дослідження була розроблена експериментальна програма з математики для учнів 10-11 класів (додаток А), яка призначена, насамперед, для учнів, які вивчають математику на академічному рівні. У ній описані цілі, зміст та вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учня відповідно до розробленої методичної системи вивчення наближених обчислень у курсі математики старшої школи. За зазначеною програмою проводилося дослідження формування і розвитку умінь у старшокласників виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики.

1.3. Психолого-педагогічні передумови вивчення наближених обчислень в старшій школі

Для побудови методичної системи формування в учнів старшої школи умінь та навичок виконувати НО необхідно розглянути також психолого-педагогічні передумови, що містять в собі результати досліджень провідних психологів, педагогів; відповідні методики їх застосування у навчанні математики. Обов'язково при цьому повинні бути враховані вікові та індивідуальні особливості учнів старших класів, визначені можливості навчального матеріалу для розвитку умінь виконувати НО, розвитку пізнавальних інтересів та виховання старшокласників.

Велика кількість науковців (психологів і педагогів) вивчали особистість школяра, його психофізіологічні якості (Б.Г. Ананьєв, І.С. Кон, О.М. Леонтьєв, С.Л. Рубінштейн), вибір методів навчання, їх ефективне використання у навчально-виховному процесі (Ю.К. Бабанський, Б.П. Єсипов, І.Я. Лернер, М.І. Махмутов, М.М. Скаткін), активізація навчально-пізнавальної діяльності (НПД) школярів (М.Я. Ігнатенко, В.І. Лозова, Г.І. Щукіна), зокрема дослідженням такої діяльності під час вивчення математики (К.В. Власенко, І.В. Гончарова, Ю.І. Грудьонов, М.Я. Ігнатенко, З.І. Слєпкань, О.І. Скафа, Л.М. Фрідман).

Психолого-педагогічні передумови вивчення безпосередньо наближених обчислень в курсі математики розглядалися такими науковцями як В. М. Брадісом, А. М. Колмогоровим, З. І. Слєпкань та ін. Найбільш широко навчання НО на уроках в курсі математики основної школи у дисертаційному дослідженні вивчала В.М. Кліндухова [118]. У своїй науковій роботі вона виділила психолого-педагогічні передумови, цілі і зміст вивчення НО в *основній* школі. Згідно них основна увага під час вивчення НО має приділятись навчально-дослідницькій діяльності учнів. Розміщення змісту відповідного навчального матеріалу відбувається на основі реалізації принципів концентризму, фузіонізму, навчання у активному та фоновому режимах.

Як зазначає В.М. Кліндухова, особистісна спрямованість освітнього процесу вимагає узгодження змісту навчання математики із завданнями по формуванню пізнавальної та психологічної підготовленості учнів до умов життєдіяльності та подальшого здобуття освіти. Згідно цих вимог НО в курсі математики основної школи необхідно розглядати і як складову фундаментального та прикладного математичного знання, і як засіб особистісного розвитку учнів та розвитку новоутворень їх пізнавальної сфери.

Для побудови методичної системи формування та розвитку умінь виконувати наближены обчислення у старшокласників, насамперед необхідно з'ясувати які вікові, психологічні особливості розвитку особистості відповідають саме юнацькому віку. Дослідженнями в цьому напрямку займалися такі видатні науковці як Л.С. Виготський, Б.С. Круглов, В.А. Крутецький, Ю.К. Бабанський.

Відповідно до Закону України «Про середню освіту» та Концепції загальної середньої освіти станом на 2015 рік старшою школою вважаються 10–11 класи, учні яких належать до вікової категорії 15–17 років. Науковці визначають такий вік як ранню юність. В цей період закріплюються і вдосконалюються психічні властивості особистості, якісно змінюються показники психічної діяльності. Відбувається інтенсивне інтелектуальне дозрівання, провідна роль в якому належить розвитку мислення. Внаслідок таких змін активно розвивається творче та *абстрактне мислення*, яке дозволяє усвідомлено оволодіти логічними операціями. Це призводить до усвідомленого підходу до розв'язання прикладних задач, аналізу і оцінки отриманих результатів. Як наслідок такої навчальної діяльності розвивається *критичне мислення*, удосконалюється мовлення, збагачується багаж способів і прийомів розумової діяльності.

У зв'язку з цим суттєво розвивається уміння знаходити кілька розв'язків однієї і тієї ж задачі, зокрема нестандартної, а це дає, в свою чергу, змогу переводити репродуктивну діяльність в продуктивну.

Психологи [17, 55, 131, 177] зауважують, що учні старших класів здатні до складного аналітико-синтетичного сприйняття дійсності, вони готові до співпраці з учителем. Саме в цей період навчання НО дає можливість здійснювати аналіз даних, отриманих у результаті розв'язування прикладних та практичних задач, робити висновки щодо точності та коректності вихідних даних, у разі потреби здійснювати необхідну корекцію умови задачі тощо.

Для успішного формування в учня умінь виконувати НО важливими є математичні *здібності*, такі як здатність до узагальнення математичного матеріалу, гнучкість мислення, переключення з однієї операції на іншу, переведення прикладної задачі у математичну модель і навпаки, звільнення від впливу шаблонів і трафаретів, здатність знайти найбільш раціональний спосіб розв'язування. Саме такі вміння дають можливість сформувати та розвивати навички виконувати НО, а формування умінь, в свою чергу, передбачає розвиток певних здібностей.

Таким чином, у старшому шкільному віці доцільним є обґрунтоване обрання і застосування вивчених методів НО під час розв'язування задач і вправ для аналізу і оцінювання отриманих даних. З метою подальшого розвитку для учнів старшої школи у класах із поглибленим вивченням математики доцільно запропонувати оглядове знайомство ще з одним методом строгого врахування похибок – методом меж похибок, який також називають методом оцінювання похибок. Більш детально із згаданим методом старшокласників можна ознайомити чи на факультативних заняттях, чи на математичному гуртку, чи під час опанування елективного курсу, присвяченого вивченню НО. Такий крок дасть старшокласникам, для яких математика стане основною навчальною дисципліною, пов'язаною з майбутньою професією, можливість самостійно обирати методи наближених обчислень з більш широкого спектру методів, оцінювати точність отриманого результату в залежності від ситуації та конкретної задачі.

Важливим мотивом психологічного розвитку юнаків у старших класах стає вибір професії. У зв'язку з цим вони підпорядковують свою поведінку

конкретним цілям майбутнього, в результаті чого з'являється потреба у значимих для життєвого успіху знаннях, що найчастіше виражається у вибірковому ставленні до навчальних дисциплін. З огляду на вищевказане, важливим психологічним фактором у навчанні старшокласників є *мотивація навчання*. Мотиви при цьому можуть бути різними: пізнавальними (їх характеризує спрямованість на зміст навчального предмета) і соціальні (для них властива спрямованість на іншу людину, на соціальну значущість навчальних дій).

Важливо пам'ятати, що створення мотивації за допомогою навчальної діяльності є дуже суттєвим. Як зазначають психологи [188, 246], при цьому характер мотивації залежить від типу навчання. Створення проблемних ситуацій, дослідницька діяльність сприяє формуванню стійкої мотивації до навчання. Тому під час підготовки та проведення уроків математики слід підбирати таку сукупність прийомів і засобів навчання, яка створює сприятливі умови для включення кожного учасника навчального процесу в активну пізнавальну діяльність, використовувати на уроках практичні задачі з орієнтацією на можливу майбутню професію випускника, завдання з аналізом реальних життєвих ситуацій, їх значущості, з аналізом достовірності отриманих відповідей.

Основна ідея у формуванні мотивації учіння слабких учнів полягає в їх переведенні з рівнів негативного і байдужого ставлення до навчання до свідомих та дієвих форм позитивного ставлення. Серед мотивів навчання сильних учнів важливого значення набувають наступні: прагнення розвинути власні здібності, розширити та поглибити знання, бажання бути першим.

При диференційованому формуванні мотивації слід враховувати особливості пізнавальних інтересів учнів, їх характер і направленість. Г.І. Щукіна показує, що пізнавальний інтерес може бути стимулом до навчання, виступати як мотив, і на більш високому рівні він стає властивістю особистості [274].

Використання ІКТ на уроках математики створює сприятливі умови для підвищення рівня зацікавленості, мотивації навчання, оскільки воно підсилює міжпредметні зв'язки, пробуджує інтерес до вивчення предмету, акцентує увагу на концептуальному підході до стратегії розв'язування задач, дає змогу вносити елементи дослідження в навчальну діяльність, проводити порівняльний аналіз результатів виконання НО тим чи іншим методом, оцінити точність обчислень і навпаки, здійснити обчислення із заздалегідь заданою точністю, змушує до вибору однієї з кількох альтернатив з попередньою її оцінкою.

У період ранньої юності старшокласники усвідомлюють мотиви та завдання своєї навчальної діяльності, з'являється інтерес до методів наукового мислення, до самостійної навчальної роботи. Принципові якісні зрушення виникають і в так званих позиційних мотивах навчання, причому істотно підсилюється мотив пошуку контактів і співробітництва з іншою людиною, зокрема вчителем, оволодіння раціональними способами цього співробітництва в навчальній праці [144].

Дотримання вчителем *основних дидактичних принципів* навчання під час вивчення НО є передумовою засвоєння навчального матеріалу. Очевидно, що лише в процесі діяльності, спрямованої на відкриття нового знання, здійснюється розвиток особистості школяра. Принцип цілісного уявлення про світ дасть можливість сформувати у старшокласників уявлення про роль математики в ньому, зокрема про наявність наближених значень величин в реальному житті. Вивчення методів НО, як кількісних, так і якісних є логічним продовженням вивчення НО в курсі математики основної школи, що доводить обґрунтованість і необхідність наявності даної теми не тільки в математиці, а і в інших навчальних дисциплінах. Таким чином виявляються не лише міжпредметні зв'язки, а й з'являється можливість творчого підходу до розв'язування задач, а також можливість вибору того чи іншого шляху їх розв'язування.

Розвиток особливостей психіки школярів іде в нерозривному зв'язку з оволодінням ними різними видами пізнавальної діяльності, розвитку

пізнавального інтересу. Поняття інтересу сучасними науковцями трактується по-різному, він виступає як вибіркова спрямованість людини на ту чи іншу діяльність, прояв емоційної і мисленнєвої активності, ставлення особи до світу. З точки зору педагогіки інтерес вивчається в зв'язку з його розвитком у навчальній та позанавчальній діяльності, а також формування інтересу як основи успішності школяра. Щоб спонукати в учнів творчий підхід до справи, розвити творчі здібності, учитель має показати, як виникають запитання і спонукати задавати їх. Такий підхід свідчить про те, що уроки математики потрібно будувати як обговорення різних точок зору, як спільний пошук істини, тобто у формі діалогу, а не монологу. При такому співробітництві проблеми творчо розв'язуються спільними зусиллями, формуються і актуалізуються пізнавальні та соціальні мотиви. Спільний вибір методів наближених обчислень дає змогу демократичного спілкування вчителя та учня. Спілкування повинно відбуватися на засадах поважного ставлення до партнера. З позиції теорії діяльності, діалогічне спілкування є важливою складовою сучасного навчання юнаків.

У своїх працях С.Л. Рубінштейн зазначав, що для того, щоб школяр, який навчається по-справжньому, включився в роботу, необхідно, щоб завдання, поставлені перед ним впродовж навчальної діяльності, були не тільки зрозумілими, а й внутрішньо прийнятними ним. Саме тому формування позитивних мотивів навчання є однією з важливих передумов розвитку умінь, які є однією із складових концепції поетапного формування знань, умінь та розумових дій.

Серед тих задач, що ставляться сьогодні перед освітою, на перший план виступає розвиток особистості учня. Проте справжнього розвитку можна досягти за умови такого навчального процесу, в якому будуть наявні порівняння, аналіз, узагальнення, аналогія. Досягнути ж наявності на уроці таких процесів можна лише тоді, коли учень володіє певним набором *умінь*.

Уміння – це оволодіння технологією діяльності, тобто процесом її побудови, контролю, корекції і оцінки [54]. Формування умінь є складним

процесом аналітико-синтетичної діяльності кори великих півкуль головного мозку. Формування уміння проходить кілька стадій. Спочатку – ознайомлення з умінням, усвідомлення його змісту. Потім – початкове оволодіння ним. Нарешті, самостійне і дедалі точніше виконання практичних завдань [197]. Формування і розвиток умінь та навичок відбувається лише в процесі виконання системи вправ, отже така змістова лінія як НО повинна бути присутня не лише як окремо вивчений розділ, а впроваджена як невід'ємна складова усіх тем курсу математики старшої школи. Таке впровадження дозволить дотримуватися принципу неперервності освіти, оскільки за рекомендаціями, викладеними у дисертаційному дослідженні В.М. Кліндухової [118], вивчати НО школярі повинні починати ще в курсі математики п'ятого класу.

Також на початку 10 класу учні повинні адаптуватися до дещо нових умов навчання: вже перші уроки алгебри і початків аналізу передбачають серйозне узагальнення і систематизацію раніше здобутих знань; навчальний матеріал, передбачений програмою, є непростим для сприйняття, а перехід від планіметрії до стереометрії, як свідчить досвід, відбувається надзвичайно складно. Виходячи з вікових особливостей учнів старших класів, з метою розвитку їх інтелектуальної сфери, рекомендується навчальний матеріал, зокрема з НО, структурувати таким чином, щоб учні, перш за все, отримували загальне уявлення про нього – на початку 10 класу, і лише згодом переходили до вивчення конкретних фактів. Відбуватися це повинно впродовж вивчення усього курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Однією з найважливіших передумов формування і розвитку умінь в учнів старших класів є *адаптація*. В залежності від того, з якою базою математичних знань, умінь та навичок, з яким налаштуванням старшокласники почнуть оволодівати математичними компетентностями, залежить їх ставлення до математики як навчальної дисципліни з одного боку, і як до засобу оволодіння майбутньою професією – з іншого. Тому вчителю на уроках

необхідно використовувати різноманітні прийоми впливу на старшокласника, різні форми та методи навчання.

У сучасній педагогіці [55, 105, 134] особливої гостроти набула проблема *самореалізації особистості* у житті і професійній сфері. Щоправда, ця проблема не нова, її вивчали як психологи, так і педагоги різних часів: С.Л. Виготський, С.Л. Рубінштейн, К.Д. Ушинський, Д.О. Леонтьєв, Б.Г. Ананьєв, М.І. Пирогов та ін. У психолого-педагогічній літературі немає однозначного визначення поняття «самореалізація особистості». Його трактують і як усвідомлену цілеспрямовану діяльність, і як використання людиною власних здібностей і можливостей, і як цільову функцію особистісного розвитку, і як процес і результат застосування особистістю у повсякденному житті і праці набутих компетентностей, їх включення у творчу діяльність і отримання від неї користі та внутрішнього задоволення [34]. З огляду на психологічні особливості юнацького віку, особливу увагу науковці звертають на розвиток пізнавальних інтересів, самовизначення, на взаємини старшокласників з дорослими, зокрема з учителем, який відіграє важливу роль у самореалізації особистості, у визначенні майбутньої сфери діяльності, виборі професії. Розуміння учнем шляхів застосування набутих знань у реальних життєвих ситуаціях, на практиці, дає можливість майбутньому випускнику швидше зорієнтуватися у розмаїтті професій, що в свою чергу, підвищує мотивацію навчання.

Таким чином, дотримання розглянутих нами психолого-педагогічних передумов розвитку умінь виконувати НО у старшокласників у процесі вивчення математики у сукупності, діалектичній єдності може внести значні позитивні зміни у навчально-виховний процес старшої школи.

Висновки до першого розділу

Як показали результати теоретичної частини дослідження, впровадження НО у ШКМ має багаторічну історію. На кожному етапі розвитку вони мають різний зміст, часто вивчаються уривками, немає системи навчання наближеним обчисленням. Методика їх застосування під час навчання математики викликає багато суперечностей. Серед науковців та методистів

відбувається жвава дискусія щодо доцільності включення вивчення методів НО у ШКМ, та який з методів повинен займати «головуюче» місце.

Систематичні зміни шкільної програми обумовлювали зміни у змісті НО, його розміщенні у межах програми шкільного курсу математики. Тому навіть наявні дослідження щодо вивчення НО не дають змоги розробити методичну систему їх вивчення, визначити основні методи та організаційні форми роботи, створити ефективні засоби навчання із систематичним застосуванням НО. Наприкінці XX століття НО вилучено з шкільного курсу математики взагалі. Таке вилучення не можна назвати абсолютним, оскільки під час вивчення суміжних дисциплін у старшокласників залишається потреба застосовувати НО. Така ситуація лише підкреслює актуальність проблеми створення оновленої методичної системи вивчення наближених обчислень у шкільному курсі математики.

Науково-технічний розвиток держави також суттєво вливає на систему освіти. Поява мікрокалькуляторів, ЕОМ, персональних компютерів, а згодом і інформаційно-комунікаційних технологій призводить до поступового зникнення номограм, логарифмічних лінійок, а пізніше – математичних таблиць. З'являється потреба застосування електронних засобів до НО, розробки методичної системи впровадження наближених обчислень у шкільному курсі математики, в якій був би врахований сучасний стан розвитку науки і техніки. Як показало вивчення психолого-педагогічних передумов вивчення НО у КМСШ, учні готові до сприйняття навчального матеріалу з НО у 10-11 класі.

Тому для створення сучасної методичної системи вивчення НО у КМСШ потрібно чітко сформулювати зміст, цілі і завдання їх вивчення. Це все було нами зроблено і отримало своє відображення у експериментальній навчальній програмі з математики для учнів старшої школи (додаток А).

Метою їх вивчення в школі є мотивація навчання математики, розвиток пізнавального інтересу, реалізація міжпредметних зв'язків, зв'язку із життям та сприяння професійному самовизначенню старшокласників.

Таким чином, нами визначено мету та психолого-педагогічні передумови вивчення НО в старшій школі, які створюють теоретичне підґрунтя для розробки інших елементів методичної системи їх вивчення у старшій школі. Практичний аспект розробленої методики, який забезпечується обранням доцільних методів, форм та засобів вивчення НО, розглянутий нами в другому розділі.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [86-88, 91, 96, 98, 99].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

2.1. Особливості вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої школи

Програма з математики, зокрема для старшої школи, у незалежній Україні змінювалася неодноразово. Сьогодні, в час впровадження нового Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти, Концепції профільного навчання у старшій школі, йдеться про чергові зміни у навчальних програмах. Проте, як зазначалося в першому розділі даного дисертаційного дослідження, жодного разу під час таких змін не приділялася належна увага вивченню НО, хоч для навчання дисциплін природничого циклу саме такі знання вкрай потрібні.

Розглянемо структуру змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи.

2.1.1. Структура змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи

Результати дослідження, проведеного нами серед учнів старших класів та вчителів математики загальноосвітніх закладів Чернівецької області показують, що більшість вчителів, особливо молодих, мають низький рівень культури НО. Внаслідок цього та через відсутність тем з наближених обчислень у навчальних програмах з математики впродовж тривалого часу, учні також не вміють працювати з наближеними значеннями величин та чисел. З іншого боку, виконання лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії тощо, розв’язування прикладних задач потребують знань з теорії наближених обчислень. Таким чином, виникає потреба у включенні теми «Наближені обчислення» у навчальні програми з математики для учнів старших класів, у створенні навчально-методичного забезпечення та методичних рекомендацій з вивчення НО у старшій профільній школі. У зв’язку із сказаним тему «Наближені обчислення» зручно розглядати як окрему змістову лінію в курсі шкільної математики.

Перед тим, як говорити про методику вивчення НО в старшій школі, слід з'ясувати структуру, зміст навчального матеріалу та зосередити увагу на деяких особливостях їх вивчення з огляду на зміст курсів алгебри та геометрії основної школи, на той багаж знань, умінь та навичок з наближених обчислень, який мають учні на початку 10 класу та зважити на профільність навчання в старшій школі. В першому розділі нами було розглянуто мету і зміст вивчення наближених обчислень в курсі математики профільної школи. Тепер з'ясуємо, в якому напрямку та в яких межах слід подавати навчальний матеріал під час навчання математики у старших класах.

Ці питання викладено у розробленій нами структурі змістової лінії «Наближені обчислення» під час навчання математики у старшій профільній школі (таблиця 2.1). Вона розроблена відповідно до створеної нами експериментальної програми з математики для учнів 10-11 класів (додаток А).

Таблиця містить зміст навчального матеріалу з НО та вимоги до навчальних досягнень учнів, які слід органічно поєднати з існуючими навчальними програмами з математики для старшої профільної школи. В нашому випадку – з програмою для учнів, що вивчають математику на академічному рівні. Звернемо увагу на те, що у структурі змістової лінії «Наближені обчислення» під час навчання у старшій профільній школі не розрізняються рівні вивчення математики. Вимоги до міри сформованих компетентностей старшокласників розглядаються на академічному рівні. Специфіка подання навчального матеріалу з НО під час вивчення конкретних тем у класах профільного рівня та рівня стандарту описується у відповідних параграфах дисертаційного дослідження.

Вивчення НО за вказаною структурою пропонується проводити у три етапи: перший – під час повторення, узагальнення та систематизації курсу алгебри основної школи на початку 10 класу, другий – в курсі алгебри і початків аналізу у старших класах під час вивчення основних класів функцій (степеневої, тригонометричних, логарифмічної та показникової), третій – у 11 класі під час вивчення похідної та інтеграла та курсу стереометрії. При цьому

навчання повинно відбуватися як в активному, так і фоновому режимах. В курсі алгебри і початків аналізу переважає здебільшого активний режим, в курсі геометрії старшої школи слід використовувати фоновий режим навчання.

Методика вивчення кожної з окремих тем розглядається у наступних параграфах дисертації.

Таблиця 2.1

Структура змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи

10 клас. Алгебра і початки аналізу	
Тема1. Наближені обчислення (12 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Наближені значення чисел та величин. Характеристики наближеного значення числа: похибка, абсолютна похибка, межа абсолютної похибки, відносна похибка, межа відносної похибки, точність наближення. Запис наближених чисел у вигляді подвійної нерівності та умовної рівності. Наближені обчислення методом меж. Правильні і значущі цифри. Запис наближених значень чисел у вигляді наближеної рівності. Наближені обчислення методом підрахунку цифр	*Розрізняє* точні і наближені числа. *Знає* правила округлення чисел, виконання арифметичних дій з наближеними значеннями величин; правила подання відповіді до прикладної задачі. *Вміє* округлювати числа з наперед заданою точністю, знаходити абсолютну і відносну похибки, межі абсолютної та відносної похибки, точність наближення, правильні та сумнівні цифри, значущі цифри наближеного значення числа. *Вказує* форми запису наближених значень числа. *Виконує* дії над наближеними значеннями, в тому числі за допомогою обчислювальної техніки. *Знає і використовує* метод меж для знаходження наближеного значення виразу, а також метод підрахунку цифр, *оцінює* похибки обчислень. Розв'язує прикладні задачі на повторення, дані в яких виражені наближеними числами.

Продовження таблиці 2.1

Тема 2. Функції, рівняння та нерівності (10 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Аргумент, значення функції. Нулі функції. Властивості і графіки функцій, вивчених в основній школі. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь та їх систем, до розв'язування нерівностей.	*Знаходить* аналітично значення функцій при наближених значеннях аргументу. *Знаходить* за графіком наближені значення функції при заданому значенні аргументу і навпаки. *Вказує* методи знаходження наближених розв'язків рівнянь (нерівностей) та їх систем, *оцінює* межу похибки наближених розв'язків. *Знаходить* наближені розв'язки рівнянь із наперед заданою точністю графічним методом.
Тема 3. Степенева функція(12 годин)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Арифметичний корінь *n–го* степеня з наближеного числа. Знаходження наближених розв'язків ірраціональних рівнянь (нерівностей) аналітичним та графічним методами із застосуванням комп'ютера. Знаходження значень степеневої функції за допомогою обчислювальних засобів. Степенева функція як математична модель реальних процесів.	*Обчислює, оцінює та порівнює* значення виразів, зокрема наближені, які містять степені з раціональним показниками, корені. *Моделює* реальні процеси за допомогою степеневих функцій. *Застосовує* обчислювальні засоби для знаходження значень степеневої функції, для графічного розв'язування рівнянь. *Застосовує* степеневу функцію для опису реальних процесів, розв'язуваня прикладних задач.

Продовження таблиці 2.1

Тема 4. Тригонометричні функції (18 годин)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Переведення градусної міри в радіанну і навпаки за допомогою комп'ютера. Обчислення значень тригонометричних функцій для наближеного значення аргументу. Графіки тригонометричних функцій. Тригонометричні функції як моделі реальних явищ і процесів.	*Виконує* перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки. *Розпізнає і будує* графіки тригонометричних функцій. *Обчислює* наближені значення тригонометричних функцій за допомогою обчислювальних засобів. *Оцінює* точність отриманих результатів. *Формулює* правила знаходження наближених значень тригонометричних функцій за заданим значенням аргументу та вміє користуватися ними на практиці. *Застосовує* тригонометричні функції до опису реальних процесів, розв'язує прикладі задачі, математичні моделі яких містять тригонометричні функції.
Тема 5. Тригонометричні рівняння і нерівності (14 годин)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Обчислення наближених значень обернених тригонометричних функцій. Розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей із застосуванням комп'ютерних програм; прикладних	*Знаходить* розв'язки тригонометричних рівнянь наближеними методами та за допомогою комп'ютерної техніки. *Оцінює* точність наближених коренів тригонометричних рівнянь. *Розв'язує* нескладні прикладні задачі,

Продовження таблиці 2.1

задач, моделями яких є тригонометричних рівняння і нерівності.	математичними моделями яких є тригонометричні рівняння і нерівності.
Тема 6. Повторення і систематизація вивченого матеріалу (4 години)	
11 клас. Алгебра і початки аналізу	
Тема 1. Похідна та її застосування (26 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Застосування похідної до обчислення наближених значень елементарних функцій. Розв'язування рівнянь графічним способом за допомогою комп'ютерних програм. Розв'язування задач прикладного змісту.	*Знаходить* наближені значення елементарних функцій за допомогою формул, виведених із застосуванням похідної; розв'язки рівнянь графічним способом, за допомогою компютерних програм. *Розв'язує* прикладні задачі, що передбачають виконання дій над наближеними значеннями чисел та величин. *Розв'язує* нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. *Оцінює* точність отриманих розвязків.
Тема 2. Показникова та логарифмічна функції (22 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Знаходження наближених значень показникової та логарифмічної функцій. Розв'язування логарифмічних та показникових рівнянь графічним способом та за допомогою комп'ютерних програм.	*Знаходить* наближені значення логарифмічної та показникової функції. *Розв'язує* показникові та логарифмічні рівняння графічним способом за допомогою комп'ютерних програм. *Застосовує* показникові та

Продовження таблиці 2.1

Розв’язування прикладних задач, явища в яких описуються за допомогою логарифмічної та показникової функцій.	логарифмічні функції та їх похідні до опису реальних процесів. *Оцінює* точність отриманих результатів.
Тема 3. Інтеграл та його застосування (20 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Обчислення наближеного значення визначеного інтеграла методом прямокутників, трапецій. Використання комп’ютерних програм під час наближеного обчислення визначеного інтеграла. Застосування інтеграла до розв’язування прикладних задач.	*Знаходить* площі криволінійних трапецій, зокрема наближеними методами: методом прямокутників та трапецій. *Оцінює* точність наближених результатів.
Тема 4. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики (12 год)	
Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	***Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів***
Відносна частота як наближене значення ймовірності випадкової події. Середнє арифметичне спостережених значень як наближене значення математичного сподівання.	*Розуміє* зміст поняття наближеного значення ймовірності випадкової події. *Знає* зв'язок середнього арифметичного даних спостережень із наближеною оцінкою математичного сподівання.
10-11 КЛАС. СТЕРЕОМЕТРІЯ	
Усі теми курсу стереометрії	
Вивчення наближених обчислень в курсі стереометрії відбувається у фоновому режимі. Сформовані в учнів компетентності під час вивчення теми 1 «Наближені обчислення» в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу мають застосовуватися під час розв’язування практичних і прикладних задач з наближеними значеннями величин, а також під час вимірювальних,	

розрахунково-графічних та практичних робіт. Вивчаючи стереометрію, учні повинні закріплювати, поглиблювати і удосконалювати отримані навички наближених обчислень, використовуючи при цьому сучасні обчислювальні засоби.

2.1.2. Методичні коментарі до структури змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи

Враховуючи стан вивчення НО в основній школі, де учні не знайомляться із правилами та методами виконання дій над наближеними величинами, у пропонованій нами експериментальній програмі (додаток А) з алгебри та початків аналізу для 10 класу першою темою є «Наближені обчислення», на вивчення якої відводиться 12 годин. Основною метою вивчення даної теми є узагальнення та систематизація знань, отриманих учнями про дійсне число. Наприкінці дев'ятого класу школярі ознайомлені із множинами натуральних, цілих, раціональних та ірраціональних, дійсних чисел. Усі такі числа можуть бути зображені на числовій прямій. Проте як зобразити на ній число, що дорівнюватиме $\sqrt{2}$, π, $ln2$? Наприклад, π=3,14159265358979323846264338327 95…**.** У цьому випадку можна оцінити дане число з надлишком та недостачею з точністю до десятих, сотих, тисячних і т.д.:

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142$$

Таким чином, число π може бути зображене на числовій прямій у вигляді точки, координата якої розташована між відповідними числами. Найзручніше таке зображення робити у середині зазначеного відрізка.

На підставі таких міркувань можна зробити висновок про те, що точного зображення числа π ми не отримаємо ніколи, лише *наближене з певною мірою точності.* Цю міру точності визначають за допомогою числових характеристик наближених значень чисел та величин. Серед таких характеристик розрізняють кількісну (абсолютна похибка) та якісну (відносна похибка). З ними оглядово

учні знайомилися ще в курсі математики 6 класу. В подальшому, в курсі математики основної школи ці поняття не використовуються. Таким чином, порушуються принципи наступності та концентричності вивчення математики у школі. Повернення до цих понять у 10 класі дозволяє уникнути такої ситуації.

Під час вивчення даної теми учні повинні засвоїти поняття похибки, абсолютної похибки та її межі, відносної похибки та її межі, точності наближення, розуміти, в чому полягає їх відмінність. За допомогою вивчених понять в учнів формується уміння записувати НЗ величини різними способами: за допомогою подвійної нерівності; умовної рівності; наближеної рівності; за допомогою межі абсолютної похибки.

Наступним етапом формування у старшокласників умінь виконувати НО є вивчення методів обчислення з наближеними значеннями: методу меж і метод підрахунку правильних цифр. Вивчення двох методів НО дає можливість здійснити їх порівняльний аналіз. Учні повинні усвідомити, що метод меж базується на властивостях числових нерівностей і дає достатньо надійний результат, проте він є громіздким, оскільки усі обчислення проводяться двічі. Метод підрахунку правильних цифр не вимагає такого великого обсягу роботи, оцінки похибки розрахунків, у той самий час результат обчислень отримується достатньо надійний у багатьох випадках. Для того, щоб учні правильно застосовували метод підрахунку правильних цифр під час наближених обчислень, вони повинні чітко розрізняти поняття правильної та значущої цифри, десяткових знаків; пам’ятати формулювання правил виконання арифметичних дій над наближеними значеннями:

Правило 1. *При додаванні та відніманні наближених значень у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх у заданому наближеному значенні з найменшою кількістю десяткових знаків.*

Правило 2. *При множенні та діленні наближених значень у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має задане наближене значення з найменшою кількістю значущих цифр.*

Оскільки піднесення до степеня - це множення однакових співмножників, а добування кореня є оберненою дією до дії піднесення до степеня, то в результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх було в основі степеня (підкореневому числі).

Порівняння двох методів наближених обчислень та результатів, отриманих під час їх застосування дозволить старшокласнику в майбутньому самостійно обирати метод обчислень залежно від конкретно поставленої задачі. Доцільно пропонувати учням розв’язати одну задачу двома способами та порівнювати отримані результати.

У курсі алгебри восьмого класу вивчається поняття стандартного вигляду числа, на вивчення якого відводиться 1-2 години залежно від програми, за якою навчаються учні та тижневого навантаження. Зазначена тема широко використовується під час розв’язування задач та виконання лабораторних і практичних робіт на уроках фізики, хімії та географії. Яким чином вона пов’язана із наступним програмовим матеріалом з математики, для учнів залишається незрозумілим. Тому під час виконання дій за методом підрахунку правильних цифр над наближеними величинами слід звернути особливу увагу на їх зв'язок із записом числа у стандартному вигляді.

Приклад 2.1. Обчисліть значення виразу $xy - 5y$, якщо $x \approx 746{,}25$, $y \approx 25{,}4$.

Розв’язування. Знайдемо кількість значущих цифр наближених значень величин. Змінна x містить п’ять значущих цифр, а змінна y – три. Тому під час виконання множення в добутку залишається три значущих цифри, а якщо така дія є проміжною, то на одну цифру більше, тобто чотири.

Виконаємо першу дію: $xy \approx 746{,}25 \cdot 25{,}4 = 18954{,}75 \approx 1895 \cdot 10$. Округлення здійснюємо до чотирьох значущих цифр, оскільки дія є проміжною. Слід звернути увагу учнів на те, що відповідь не повинна бути записана у вигляді числа 18950, оскільки останній нуль є неправильною цифрою.

Враховуючи, що число 5 є точним, маємо: $5y \approx 5 \cdot 25{,}4 = 127$.

Тоді $xy - 5y \approx 1895 \cdot 10 - 127 = 1{,}895 \cdot 10^4 - 1{,}27 \cdot 10^2 = 10^4 \cdot (1{,}895 - 0{,}0127) =$ $= 1{,}8823 \cdot 10^4 \approx 1{,}882 \cdot 10^4$.

Виконання останньої дії за методом підрахунку правильних цифр передбачає залишити в результаті стільки *десяткових знаків,* скільки їх містить найменш точне число. Для того, щоб дізнатися кількість десяткових знаків, потрібно числа перевести в стандартний вигляд, і лише потім виконувати над ними дію віднімання. Якщо порядок чисел різний, потрібно їх звести до найвищого порядку.

Оскільки під час проміжних дій зберігалася одна запасна цифра, то у відповіді її слід відкинути. Отже, $xy - 5y \approx 1{,}88 \cdot 10^4 = 188 \cdot 10^2$.

Таким чином, крім формування умінь виконувати операції над НЗ величин, спостерігається наступність вивчення навчального матеріалу, вмотивоване його використання.

Однією із провідних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу є функціональна. Тому особливу увагу слід приділяти вивченню основних класів функцій та їх властивостей. У 10-11 класах учні повторюють та узагальнюють властивості функцій, що вивчалися в основній школі, а також розглядають такі класи функцій як степенева, показникова, логарифмічна та тригонометричні функції. Розв’язування прикладних задач під час їх вивчення дасть змогу підвищити мотивацію навчання математики, реалізувати міжпредметні зв’язки. Такі задачі дають змогу розглядати залежності, які описуються певними класами функцій та мають місце в біології, фізиці, хімії, економіці тощо. Знання властивостей відповідного класу функцій дасть змогу розв’язувати задачі прикладного характеру, переходячи від математичної моделі конкретної ситуації до її розв’язків та їх інтерпретації відповідно до умови.

Приклад 2.2. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г.

Розв’язання. Математичною моделлю даної задачі є функція

$$m(t) = (1 + 0{,}03)^t = 1{,}03^{\,t}.$$

Оскільки маса дріжджів збільшується на 3% за кожну годину, то слід виразити час у годинах: $t = 10\text{хв} = \frac{1}{6}$ год.

Маємо: $m\left(\frac{1}{6}\right) = (1 + 0{,}03)^{\frac{1}{6}} = 1{,}03^{\frac{1}{6}}$ (г).

Оскільки $\frac{1}{6} = 0{,}1666666\ldots$, то за методом меж

$$1{,}16 < \frac{1}{6} < 1{,}17,$$

$$1{,}03^{1{,}16} < 1{,}03^{\frac{1}{6}} < 1{,}03^{1{,}17},$$

$$1{,}00474\ldots < 1{,}03^{\frac{1}{6}} < 1{,}00503\ldots,$$

$$1{,}004 < 1{,}03^{\frac{1}{6}} < 1{,}006.$$

Таким чином, $m\left(\frac{1}{6}\right) = 1{,}005 \pm 0{,}001$ (г).

Межа абсолютної похибки h=0,001(г).

Межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}001}{1{,}005} = 0{,}000995\ldots < 0{,}001 = 0{,}1\%$.

Оскільки межа відносної похибки мала, то виконані розрахунки виконано якісно.

Відповідь. $m\left(\frac{1}{6}\right) = 1{,}005 \pm 0{,}001$ (г).

Під час розв’язання прикладних задач слід пам’ятати, що задані в умові величини можуть бути наближеними, інколи точні вихідні дані під час розрахунків дають наближений результат, а, отже, розв’язування слід проводити, обираючи той чи інший метод НО. Тому на уроках математики важливо звертати увагу на те, як знаходити наближене значення функції при точному, при наближеному значенні аргументу, межу абсолютної та відносної похибок обчислень за допомогою різних методів НО. Також доцільним під час вивчення функціональної лінії проводити розрахунково-графічні роботи (додатки Б1-Б4). Такий вид роботи дає змогу розвивати у старшокласників практичне мислення, описувати явища природи графічно та застосовувати графіки і властивості функцій для розв’язування рівнянь та нерівностей. Докладніше це питання розглядається в наступних параграфах.

У нині діючих програмах з математики серед вимог до рівня підготовки учнів є наступні: «досліджує та розв’язує … проблеми, використовуючи математичні знання та методи, … оцінює похибку обчислень, застосовує математичні моделі при вивченні профільних предметів (інформатики, фізики, хімії, біології, технологій)» [205]. Однією із таких математичних моделей є рівняння. У нині діючих підручниках [4, 5, 173-175, 161] ми зустрічаємо такі рівняння, які можуть бути розв’язані одним із вивчених методів, а отримані корені є «красивими» числами. Якщо ж говорити про інженерні, фізичні, економічні розрахунки тощо, то під час створення математичної моделі навряд чи зустрінуться рівняння такого зразка. Зазвичай в таких ситуаціях отримують рівняння, що містять громіздкі числові коефіцієнти та наближені розв’язки. Це пов’язано з тим, що дані таких задач отримуються в результаті експериментальних замірів, складених табличних даних, з урахуванням технічних характеристик приладів, що використовуються. Тому застосування методів НО тісно пов’язане із реалізацією міжпредметних зв’язків під час розв’язування практичних задач.

У зв’язку із вищесказаним поняття «наближеного розв’язку рівняння» набуває зовсім іншого значення. Зазвичай під час виконання дій над наближеними значеннями доводиться здійснювати громіздкі обчислення. Коли такі обчислення доводилося виконувати за допомогою номограм, таблиць та логарифмічних лінійок, то одного уроку для такої роботи було недостатньо. До того ж обсяг роботи, який залишався учням для виконання в якості домашнього завдання, був надто великий. Сьогодні, за умов існування сучасних засобів обчислень, такі розрахунки проводяться значно швидше. Тому в цих випадках доцільно показати учням можливість використання комп’ютера або мікрокалькулятора. Під час таких обчислень учні навчаються визначати кількість правильних цифр, які необхідно залишати в записі результату дії. Таким чином, практична спрямованість вивчення математики дозволить сформувати у старшокласників уміння застосовувати методи НО під час розв’язування задач математичними методами. З іншого боку, вдається

уникнути хибної думки учнів про те, що розв’язки будь-якого алгебраїчного рівняння є числами точними і «красивими».

Окремо питання використання обчислювальних засобів, правил роботи з ними в програму з математики (додаток А) не виноситься. Це пов’язано з тим, що на момент переходу в 10 клас учні тривалий час користуються і тому вже мають сформовані навички роботи з ними на уроках фізики та хімії.

Окремої уваги заслуговує зауваження про те, що поряд із використанням МК на уроках математики слід не забувати про роботу без допоміжних засобів. Це дозволяє формувати уміння робити «прикидку» числового значення результату обчислень, що є необхідним у повсякденному житті, змушує учнів застосовувати техніку виконання дій над числами «вручну».

У роботі із калькулятором (комп’ютером) виникає потреба в навичках роботи з наближеними обчисленнями, оскільки вони мають обмежену кількість знаків на екрані, а навіть виконання дій над точними числами можуть дати наближений результат. На практиці в цьому випадку (за умови відсутності потреби строгого урахування похибок) використовують МППЦ. При цьому виконання дій на калькуляторі має деякі відмінності від виконання обчислень «вручну». Якщо в обчисленнях виконуються лише дії додавання та віднімання, то вони виконуються неперервним ланцюжком операцій, і лише останній результат записується з точністю, що має найменш точний доданок. Множення та ділення виконуються також неперервним ланцюжком, а у відповіді залишається така кількість значущих цифр, яка є в числі з найменшою кількістю значущих цифр. Якщо ж приклад містить дії I і II ступеня, то можна використовувати один із наступних шляхів: перший – заносити результати множення та ділення в пам'ять калькулятора, а в потрібний момент використовувати число, що запам’ятали; другий – спочатку записуються результати дій множення та ділення з відповідною кількістю значущих цифр, а потім – дії додавання і віднімання, використовуючи числа, що записані. Практика показує, що доцільніше користуватися другим шляхом, оскільки учні часто забувають вносити в пам'ять перший компонент дії, або користуються

калькулятором із відсутністю пам’яті. Це призводить до незручностей під час роботи на уроці. Якщо ж говорити про використання персонального комп’ютера чи ноутбука, слід звернути увагу учнів на наступну особливість: під час роботи на комп’ютері у режимі звичайного та інженерного калькулятора процедура набору різна: звичайний режим передбачає виконання дій у порядку набору. Інженерний калькулятор виконує обчислення значення набраного виразу за законами арифметики: спочатку виконуються дії у дужках, а потім піднесення до степеня, множення та ділення у порядку запису, і лише після цього – додавання та віднімання.

Сучасне програмне забезпечення дає змогу використовувати велику кількість програмних засобів, за допомогою яких розв’язується широке коло математичних задач шкільного курсу математики. Найбільш зручними та придатними для використання під час вивчення наближених обчислень є програма GRAN1, DERIVE, Advanced Grapher тощо. Вони є простими у використанні, мають зручний інтерфейс та не потребують спеціальних знань з інформатики та програмування. За допомогою таких програм учні можуть наближено розв’язувати рівняння та нерівності, обчислювати наближені значення похідних та інтегралів, досліджувати функції, навіть не пам’ятаючи формул, що дозволяє підвищити інтерес до вивчення математики, насамперед для учнів початкового рівня знань. Учні, що мають високий рівень навчальних досягнень з математики отримують можливість розвивати образне мислення, просторову уяву, неформально розв’язувати задачі.

Такий підхід до використання програмних засобів на уроках математики дає змогу полегшити, розширити та поглибити навчання для класів різних профілів навчання, де математика вивчається як на рівні стандарту, так і на академічному та поглибленому рівнях. У своєму дослідженні ми використовували програму Advanced Grapher, оскільки вона виявилася найбільш зручною для виконання графічних зображень, здійснення розрахунків та виявилася найбільш поширеною серед учасників педагогічного експерименту, знайомою для учнів та вчителів.

Використання сучасних ІКТ дає змогу не тільки спростити обчислення під час розв'язування прикладних задач, знаходження наближених розв'язків рівнянь та нерівностей. Як зазначають автори посібника [230] «це (комп'ютер) дуже потужний засіб, який робить процес розв'язування прикладних задач більш ефективним та результативним». Візуальне сприйняття описаного у задачі явища значно полегшує та спрощує розуміння описаних в умові процесів. З іншого боку, як уже зазначалося, розв'язування прикладних задач призводить до наближених розв'язків. Вони, в свою чергу, найчастіше отримуються за допомогою графічного розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем і «насамперед пов'язані з «графічним мисленням», з … чітким уявленням про раціональні (зокрема, десяткові) наближення дійсного числа» [189].

Використання комп'ютерних програм, зокрема Advanced Grapher, дає змогу графічно знаходити наближені розв'язки рівняння, нерівності із необхідною точністю. Отримані графічно розв'язки доцільно перевірити за допомогою аналітичних розрахунків. Для цього слід згадати деякі теоретичні положення математичного аналізу. Наприклад, нехай задана функція $y=f(x)$, яка визначена і неперервна на деякому інтервалі I. Якщо числа A і B такі, що відрізок $[A;B]$ належить цьому інтервалу і $f(A)$ та $f(B)$ набувають різних знаків, тоді рівняння $f(x)=0$ на відрізку $[A;B]$ має принаймні один корінь. Найпростішим шляхом знаходження цього кореня є поділ заданого відрізка на кілька частин і поступового знаходження значення (а точніше – знаків) функції в цих точках. Оскільки функція $y=f(x)$ на кінцях відрізка набуває значень різних знаків, то обов'язково знайдуться такі дві сусідні точки поділу, що функція $y=f(x)$ набуватиме в них значень різних знаків. Отже, шуканий корінь рівняння знаходиться між цими точками. Таким чином, продовжуючи описану процедуру кілька разів, отримується корінь рівняння з потрібною точністю. Слід зазначити, що:

- *наближене значення кореня рівняння слід визначати як середину останнього визначеного поділом відрізка;*

– *точність знайденого кореня не перевищує половини довжини відповідного відрізка*.

Описаний вище метод послідовних наближень коренів рівняння набагато зручніше використовувати, якщо скласти алгоритм виконання дій та створити відповідну програму. Вона може бути написана на будь-якій мові програмування, яку учні вивчали. Таким чином, знаходження наближених розв’язків рівняння дозволяє не лише поєднати різні способи розв’язування рівнянь, а також здійснити міжпредметний зв’язок математики з інформатикою.

Наступний етап вивчення НО в курсі алгебри і початків аналізу пов'язаний із вивченням понять первісної та інтеграла. У курсі математичного аналізу НО тісно пов’язані із поняттям диференціала. Проте в школі знайомство учнів з ним не передбачено. Тому виведення формул НО за допомогою похідної доцільно пов’язати із поняттям нескінченно малих величин. Детально методика застосування похідної до виведення формул з НО розглядається у четвертому параграфі розділу. У класах з поглибленим вивченням математики поряд із сформованими навичками застосовувати метод підрахунку правильних цифр та метод меж до наближених обчислень, доцільно оглядово ознайомити учнів ще з одним методом із строгим урахуванням похибок – методом меж похибок. На нашу думку, для класів, де математика вивчається на рівні стандарту та на академічному рівні, двох методів НО цілком достатньо для розв’язування практичних задач. У профільних же класах математика є основним предметом, на знанні якого базується подальша професійна освіта старшокласника. Тому розуміння змісту усіх методів і уміння застосовувати метод меж та метод підрахунку правильних цифр ми вважаємо доцільним.

Під час формування поняття похідної в учнів слід формувати розуміння того, що дане поняття визначає не лише швидкість та прискорення механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого іншого процесу, яка візуально може бути продемонстрована за допомогою «крутизни» зміни графіка функції, що описує це явище.

Застосування похідної до дослідження функції та побудови її графіка може бути використане як один із шляхів графічного розв’язування більш складних рівнянь і нерівностей.

Розгляд задач фізичного та геометричного змісту під час вивчення поняття похідної є класичним. Для класів природничого профілю доцільним буде також розглянути прикладні задачі хімічного, біологічного, економічного змісту, в яких похідна застосовується до знаходження наближеного значення функції. Приклади таких задач запропоновані авторами навчального посібника [230]. Застосування похідної до знаходження найбільшого та найменшого значення функції, як правило, зводиться у діючих підручниках до відпрацювання відповідного алгоритму на прикладах «зручних» функцій, що не потребують громіздких обчислень. У найкращому випадку учням пропонується кілька задач геометричного змісту, де використовуються лише точні числові дані, а результат є точним числовим значенням. Такий підхід до вивчення теми призводить до хибних висновків щодо явищ природи та однобічного бачення методів застосування властивостей похідної.

Варто звернути увагу на те, що у задачах такого типу основним є не знаходження значення функції при певному значенні аргументу, а саме відшукання значень аргументу, при яких функція досягає найбільшого чи найменшого значення. Вони ж, в свою чергу, отримуються як корені відповідного рівняння на заданому проміжку, які в реальних умовах є наближеними величинами. Доцільно запропонувати учням задачі такого виду як геометричного, так і економічного, хімічного, біологічного змісту. Їх розв’язування вносить елемент новизни у навчальний процес, підвищує зацікавленість учнів математикою та мотивацію навчання.

Таким чином, НО під час вивчення похідної можуть бути застосовані у навчанні математики як у активному, так і у фоновому режимах, з урахуванням інтересів старшокласників та профілю навчання.

Операцією, оберненою до диференціювання є інтегрування. Під час вивчення поняття первісної слід приділяти увагу не тільки техніці знаходження

первісної в чистому вигляді. Ці навички відпрацьовуються у достатній мірі під час вивчення наступних тем, пов’язаних із інтегруванням. Учні повинні усвідомити, що диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими діями, що явища навколишнього середовища також описуються із застосуванням первісних.

Однією із найпоширеніших задач, що приводять до поняття визначеного інтегралу, є знаходження площі криволінійної трапеції. У курсі планіметрії основної школи вивчалися формули для знаходження площ плоских фігур певних класів (многокутників, круга та його частин). Яким чином знайти площу фігури, що обмежена на певному відрізку деякою кривою? З цією метою можна розглянути метод прямокутників і знайти найменші та найбільші значення площ відповідних прямокутників для заданого розбиття. Площа шуканої фігури дорівнюватиме величині, що знаходиться між отриманими числовими значеннями. Практична робота на визначення площі криволінійної трапеції дасть змогу учням наочно побачити і глибше зрозуміти геометричний зміст визначеного інтеграла, причину виникнення цього поняття. Під час виконання такої роботи основним методом для знаходження площі фігури, визначення межі абсолютної та відносної похибок відбувається методом меж. Доцільним буде графічно проілюструвати та чисельно перевірити знайдені результати за допомогою комп’ютерної програми, провівши такі обчислення кілька разів, поступово збільшуючи кількість відрізків, на які розбивається заданий відрізок. Це дозволяє підвищити інтерес до виконання роботи та поглибити сприйняття нового навчального матеріалу. Поряд із задачами на знаходження площі криволінійної трапеції можна розглянути і задачу про масу неоднорідного стрижня, на обчислення роботи змінної сили, кількості речовини, що вступила в хімічну реакцію тощо.

Таким чином, застосування різних методів НО до розв’язання ключових задач математичного аналізу та основних класів прикладних задач дозволить старшокласникам усвідомити роль математики як науки у реальному житті

людини та сформує уміння описувати явища навколишнього середовища мовою математики.

Вивчення геометрії у старшій школі ставить перед вчителем цілий ряд проблем, серед яких є розвиток просторової уяви, вивчення методів геометрії, її логічної структури. Не менш важливою задачею є виявлення практичної складової стереометрії як науки, її застосування у суміжних дисциплінах, у технічній діяльності людини та в побуті. З огляду на сказане, вивчення геометрії неможливе без застосування методів НО до розв'язування задач, виконання старшокласниками різних видів практичних робіт.

Як зазначалося раніше, застосування методів НО під час вивчення стереометрії відбувається у фоновому режимі. Тому пропоновані старшокласникам вправи до кожної теми повинні містити і задачі прикладного змісту. При цьому слід враховувати, що усі поняття, що зустрічаються у змісті задачі, повинні бути зрозумілими і доступними для розуміння учнями, адже складність сприйняття нових понять, а інколи їх нерозуміння знижує зацікавленість до виконання завдання [164].

Як зазначає автор посібника [164], при цьому дані умови повинні бути реальними. Припускається лише деяке округлення даних, проте воно не повинно змінювати істинне положення речей. У задачі повинні бути визначені ті величини, які можна визначити в реальному житті. Методи розв'язування таких задач повинні мати практичне значення, реально застосовуватися у житті. Тому ще однією важливою формою зв'язку теорії та практики під час вивчення геометрії є виконання лабораторних і практичних робіт, застосування методів проектів. Під час виконання таких видів робіт слід пам'ятати, що усі вихідні дані, усі виміри, що виконуються, мають певну степінь точності, тому виконання усіх розрахунків має бути проведено за методами НО. Така система робіт повинна бути впорядкованою за своєю метою, спрямована на розвиток у старшокласників комплексу умінь та навичок, зберігати наступність у своєму виконанні. Слід враховувати, що кожна така робота повинна відповідати

навчальному матеріалу, що вивчається, враховувати індивідуальні особливості учнів, а також рівень готовності до її виконання.

Виконання практичних завдань потребує застосування різноманітних вимірювальних приладів та обчислювальних засобів. Це, насамперед, ті засоби, що наявні у кабінетах математики (метрова лінійка, учнівська лінійка, транспортир, звичайний та інженерний калькулятори, комп'ютерні програми), фізики (штангенциркуль, ваги, амперметр, вольтметр), хімії (мензурка) тощо. Учні під час виконання таких робіт навчаються визначати, які із засобів доцільніше використовувати, щоб отримувати допустиму ступінь точності розрахунків з одного боку, і не обтяжувати громіздкі розрахунки – з іншого, який метод НО доцільно застосувати в конкретно взятому випадку. Саме під час виконання таких робіт розвивається обчислювальна культура старшокласників. Більш детально методику застосування НО до вивчення стереометрії розглянуто у наступних параграфах.

Таким чином, під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу, курсу стереометрії у 10-11 класах, одним із шляхів реалізації задач, що стоять перед сучасною освітою, зокрема формування особистості учня, спроможного застосовувати отримані знання в реальному житті, є вивчення методів наближених обчислень та їх застосування до розв'язування прикладних задач.

2.2. Наближені обчислення під час вивчення теми «Функції, рівняння та нерівності»

Реалізації завдання формування обчислювальних навичок на уроках математики підпорядковані всі теми алгебри і початків аналізу. Чисельні методи можуть і повинні ефективно застосовуватися під час вивчення функцій та їх властивостей.

З методичної точки зору вивчення функціональної залежності можна розділити на чотири таких етапи: *перший* – під час ознайомлення учнів із виразами зі змінними відбувається пропедевтичне ознайомлення школярів із функціональними залежностями. В цей період вчитель не використовує відповідних термінів, але готує учнів до сприйняття цього поняття.

Закінчується перший етап введенням поняття «функція» наприкінці сьомого класу. Тоді відбувається перше знайомство із такими поняттями, як аргумент, значення функції, область визначення, область значень, графік функції. Учні вивчають способи задання функцій, будують графік лінійної функції та її окремих видів.

Другий етап вивчення змістової лінії «Функції» розпочинається з вивчення оберненої пропорційності, її застосування в реальному житті. Розширюються знання школярів через елементарні геометричні перетворення графіків, їх практичне застосування у побудові графіка квадратичної функції. На цьому етапі учні вперше застосовують знання про функцію та її графік для розв’язання нерівностей методом парабол та методом інтервалів, для розв’язування завдань з параметром. У них розвиваються графічні та обчислювальні навички, систематизуються та поглиблюються знання про величини та зв'язок між ними. Закінчується другий етап узагальненням і систематизацією знань про функції та знайомством із степеневою функцією на початку десятого класу.

Третій етап розпочинається на початку другого семестру десятого класу і характеризується тим, що в цей період старшокласники знайомляться із рядом трансцендентних функцій – першими з них є тригонометричні функціональні залежності. Наступною групою функцій, з якими учні знайомляться вперше – це показникові та логарифмічна функції. Їх вивчення відбувається у період, коли учні володіють достатньо широкими знаннями про функції та їх властивості, у порівнянні з першими двома етапами. В силу вікових особливостей старшокласники вже готові до сприйняття і строгого доведення математичних фактів про функцію.

Четвертий, заключний етап – вивчення елементів математичного аналізу та їх застосування до дослідження функцій та опису їх властивостей.

Розглянемо більш детально організаційні форми та методи вивчення тем, пов’язаних із НО під час вивчення основних елементарних функцій в 10-11 класах.

У сучасному курсі алгебри та у пропонованій нами експериментальній програмі (додаток А) тема «Функції, рівняння та нерівності» є другою темою курсу алгебри і початків аналізу 10 класу. Під час вивчення теми поняття функції вводиться на теоретико-множинній основі як відповідність між елементами двох числових множин, вивчаються основні властивості функцій, побудова графіків за допомогою елементарних геометричних перетворень. Знаходячи значення функції за відомим значенням аргументу, система вправ повинна містити завдання різного типу. Наприклад, система вправ може бути такою (додаток Ж):

Приклад 2.3.

1. Знайдіть наближене значення функції $y = \frac{2{,}35x^2 - 8{,}6}{7{,}469}$, а) з точністю до десятих; б) з точністю до сотих; в) з точністю до тисячних, якщо значення аргументу $x = 1{,}2$ – точне. Оцініть межу абсолютної та відносної похибки обчислень.

2. Знайдіть значення функції $y = 2{,}6x^2 - 4x + 1{,}32$ за методом підрахунку цифр, якщо $x \approx 3{,}24$. Обчислення виконайте за допомогою калькулятора.

3. Виконайте попереднє завдання, використовуючи метод меж. Порівняйте отримані результати, межу абсолютної та відносної похибки обчислень.

Під час обчислень зручно дотримуватися шести кроків обчислювальної роботи [189]: перший – розписати формулу, проаналізувавши порядок виконання дій, підготувавши бланк (додатки В1, Ж) для запису проміжних розрахунків; другий – визначити, з якою точністю будуть виконуватися розрахунки; третій – обрати засіб обчислень (МК, ПК чи обчислення «вручну»); четвертий – визначити методи проміжного контролю за обчисленнями; п’ятий – виконати розрахунки; шостий – здійснити заключний контроль обчислень.

Зупинимося детальніше на четвертому та шостому кроках виконання обчислень. Під методами проміжного та заключного контролю будемо розуміти, що розрахунки виконуються не однією людиною, а кількома,

незалежно один від одного. Такий контроль можна здійснювати під час роботи в групах на уроках математики. Учні класу об'єднуються в групи по 2-4 особи в групі, кожній з яких дається окреме завдання. Учні кожної групи працюють в парах, виконуючи розрахунки до проміжного контролю, звіряють результати. Якщо відповіді однакові, обчислення виконуються далі; якщо відповіді різні, обчислення здійснюються наново, починаючи від попереднього проміжного контролю. Також старшокласники можуть порівнювати проміжні результати із запропонованим вчителем зразком правильно виконаних розрахунків. Це дасть змогу учням, які затрималися на певному етапі виконання розрахунків, наздогнати однокласників та закінчити виконання роботи з усім класом.

Як показує експериментальне навчання, безпосереднє знаходження значення функції за заданим значенням аргументу не викликає в учнів зацікавленості. Проте описана форма роботи дозволяє учням оволодіти навчальним матеріалом через спілкування між собою, створювати власну освітню траєкторію, підвищує зацікавленість у вивченні навчального матеріалу. Вона формує у старшокласників культуру математичних записів, навички працювати з наближеними даними. Як приклад, для знаходження значення функції за наближеним значенням аргументу, може бути запропонована наступна задача:

Приклад 2.4. *М'яч, кинутий вертикально вгору з початковою швидкістю* $v_0 = 42\,м/с$*, через* t *секунд виявляється на висоті* $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ *метрів від точки кидання, де* $g \approx 9{,}8 м/с^2$*. Знайдіть* h *при* $t = 3;7$ *секунд.* [6, с. 12].

Розв'язання. Нехай час польоту м'яча $t = 3c$. Розв'яжемо задачу двома методами наближених обчислень:

1. *За методом меж.*

Оскільки час та швидкість польоту отримуються в результаті вимірювання, то вони є наближеними величинами. Тоді

$$2{,}5 < t < 3{,}5 \qquad 6{,}25 < t^2 < 12{,}25$$

$$41{,}5 < v_0 < 42{,}5 \qquad 9{,}75 < g < 9{,}85$$

$$103{,}75 < v_0 t < 148{,}75 \qquad 60{,}9375 < gt^2 < 120{,}6625$$

$$30{,}46875 < \frac{gt^2}{2} < 60{,}33125;$$

За властивостями числових нерівностей

$$103{,}75 < v_0 t < 148{,}75$$

$$-60{,}33125 < -\frac{gt^2}{2} < -30{,}46875$$

$$43{,}41875 < v_0 t - \frac{gt^2}{2} < 118{,}28125$$

$$43{,}41875 < h(3) < 118{,}28125$$

$$40 < h(3) < 120$$

$$h(3) = 80 \pm 40(\text{м}).$$

Як видно з отриманих результатів, $h(3) \approx 8 \cdot 10(\text{м})$, оскільки перша цифра – сумнівна. Межа відносної похибки відповіді складає ε=50%, що говорить про низьку точність вихідних даних.

2. *За методом підрахунку правильних цифр*.

$$h(3) \approx 42 \cdot 3 - \frac{9{,}8 \cdot 3}{2} = 126 - \frac{9{,}8 \cdot 9}{2} = 126 - \frac{88{,}2}{2} = 126 - 44{,}1$$

$$= 1{,}26 \cdot 10^2 - 4{,}41 \cdot 10 = 10^2 \cdot (1{,}26 - 0{,}441) \approx 10^2 \cdot 0{,}82 = 82(\text{м})$$

Під час виконання обчислень слід звернути увагу учнів на те, що віднімання наближених чисел $126 - 44{,}1$ здійснюється за наступним правилом: *спочатку числа записуються у стандартному вигляді, після чого найвищий порядок доданків виноситься як спільний множник за дужки*. Дія в дужках виконується за методом підрахунку правильних цифр, тому в різниці залишають лише два десяткових знаки.

Таким чином, відповідь за МППЦ $h(3) \approx 82(\text{м})$.

Відповідь. 1. За методом меж $h(3) = 80 \pm 40(\text{м})$; 2. За методом підрахунку правильних цифр $h(3) \approx 82(\text{м})$.

Окрім застосування методу меж та методу підрахунку правильних цифр для знаходження значень функцій можна використовувати і комп’ютерні програми, зокрема програму Advanced Grapher. З метою порівняльного аналізу

результатів, що отримуються в результаті обчислень різними методами та засобами, доцільним є проведення практичної роботи (додаток В2).

Приклад 2.5. Обчисліть за допомогою комп'ютера значення функції $y = 0{,}56x^2 - 1{,}365x + 1{,}25$, якщо значення аргументу $x \approx 1{,}22$:

а) за методом підрахунку цифр;

б) за методом меж;

в) за допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher, використовуючи вікно «Обчислення».

Результати, отримані під час її виконання показують, що розрахунки, проведені за ММ $(y(1{,}22) = 0{,}42 \pm 0{,}02)$ і МППЦ $(y(1{,}22) \approx 0{,}42)$ дають однакові результати. Проте під час знаходження наближеного значення функції при наближеному значені аргументу за допомогою програми, виникає питання: скільки цифр слід залишати у відповіді, щоб вона була максимально точною і містила лише правильні цифри (рис 2.1).

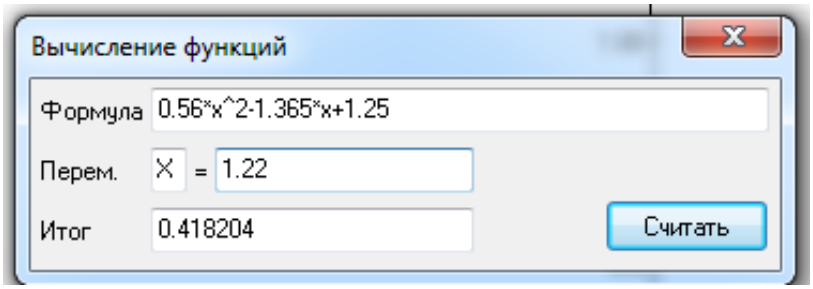


Рис. 2.1

Природно, що в учнів виникає ідея скористатися методом меж і знайти за допомого програми значення функції у точках 1,215 та 1,225. Виконавши такі обчислення, отримаємо результати $y(1{,}215) = 0{,}41821\ldots$, $y(1{,}225) = 0{,}41822\ldots$ (рис. 2.2, 2.3). При цьому, як видно з попередніх розрахунків, значення функції при наближеному значенні аргументу не міститься на проміжку $(0{,}41821\ldots;0{,}41822\ldots)$.

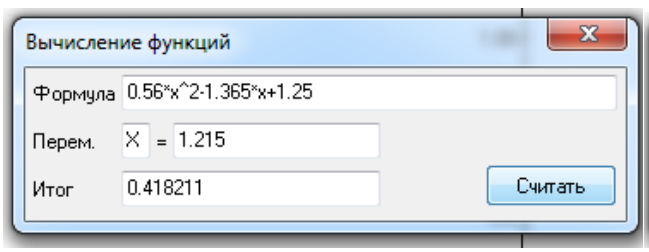


Рис. 2.2

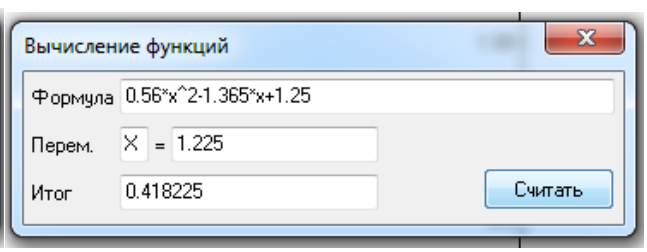


Рис. 2.3

Такий експеримент дає змогу зробити висновок, *що під час використання обчислювальних засобів можна оцінювати наближене значення функції при наближеному значенні аргументу за методом меж, виконуючи розрахунки лише по діях, записуючи проміжні результати*. Пояснюється такий факт тим, що комп'ютерна програма не застосовує правила виконання віднімання та ділення подвійних нерівностей. Тому і отримані результати можуть виявитися хибними. Якщо ж аргумент є точним числом, то під час обчислень за допомогою інженерного калькулятора (за умови, що вираз набирається одразу весь, а не по діях) чи комп'ютерної програми, на екрані висвітлюється результат, усі цифри якого, окрім, можливо, останньої, є правильними.

Отже, проаналізувавши результати, отримані в під час проведення практичної роботи, приходимо до висновку, що *знаходити значення функції за наближеним значенням аргументу, користуючись комп'ютерними програмами, слід лише за умови виконання розрахунків по діях із записом проміжних результатів.*

Слід звернути увагу на те, що в залежності від того, на якому рівні вивчають математику старшокласники, зміст завдань з НО повинен різнитися. Зокрема, під час знаходження наближених значень функції при відомих значеннях аргументу в класах, де математика вивчається на рівні стандарту основним методом НО доцільно важати метод підрахунку правильних цифр, і лише за умови крайньої необхідності використовувати метод меж.

Як зазначалося у першому розділі, в ранньому юнацькому віці здійснюється перехід від наочно-образного мислення до абстрактного. Тому поряд із пояснювально-ілюстративним, конкретно-індуктивним методами навчання слід застовувати і абстрактно-дедуктивний. Говорячи про область визначення функції, її графік, на інтуітивно-асоціативному рівні важливо сформувати уявлення старшокласників про неперервність функції. Це дозволить теоретично обґрунтувати існування нулів функції (розв'язків

рівняння $f(x) = 0$) на проміжку, метод інтервалів для розв'язування нерівностей.

Особливу увагу слід приділити вивченню властивостей функцій, з якими учні знайомилися в курсі алгебри основної школи, таких як $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, їх графіками та елементарними геометричними перетвореннями цих графіків. З одного боку, це дозволить формувати графічну культуру старшокласників, а з іншого – формувати уміння розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи графічними методами, зокрема – знаходити їх наближені розв'язки.

Практика показує, що практично будь-яка реальна життєва ситуація, перекладена на мову математики, має наближені розв'язки. Тому під час вивчення у 10 класі теми «Рівняння та їх системи» слід звернути увагу на розв'язання саме таких лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та їх систем тощо. Розглянемо більш детально знаходження наближених розв'язків рівнянь.

На момент вивчення даної теми в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу учні знайомі з технікою розв'язування лінійних, квадратних, окремих видів ірраціональних рівнянь та рівнянь вищих степенів. Під час розв'язування рівнянь виду $x^2 + 6x + 9 = 0$, $3x^2 + 4x - 7 = 0$, $2x^2 - 5x + 12 = 0$ в учнів не виникає труднощів. Вони чітко усвідомлюють, що знак дискримінанта визначає кількість коренів рівняння і за відповідними формулами знаходять значення цих коренів. Якщо ж запропонувати розв'язати рівняння, що зводиться до квадратного $3x^2 + 4x - 5 = 0$, то виникає невпевненість щодо правильності алгебраїчних перетворень. Ще більше запитань щодо правильності розв'язування рівнянь з числовими коефіцієнтами, записаними у вигляді десяткових дробів з 3-4 десятковими знаками. Тому доцільно запропонувати систему вправ (додаток Г1), яка формує у старшокласників навички знаходити наближені корені алгебраїчних рівнянь аналітичним та графічним способом. Детально методика знаходження коренів квадратних рівнянь описана у посібнику [120, с.115].

Крім розв'язування квадратних рівнянь слід розглядати рівняння, що містять обернену пропорційність, квадратний корінь, кубічну функцію.

Графічний спосіб розв'язування рівнянь дає можливість плавно перейти до розв'язання нерівностей та систем рівнянь графічним методом, під час вивчення якого удосконалюються навички знаходження наближених розв'язків.

З метою перевірки результатів, отриманих графічним шляхом під час побудови графіків функцій, корисними є побудова графіків заданих функцій і знаходження координат точок перетину графіків за допомогою комп'ютерних програм. Детально можливості застосування комп'ютерної програми Advanced Grapher описані на інтернет-порталі [159].

Нехай перед учнями стоїть завдання знайти наближені корені рівняння $1{,}5x^2 = 2{,}5x + 3$. Для цього потрібно побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = 1{,}5x^2$ та $y = 2{,}5x + 3$. Учні виконують необхідні кроки виконання такої побудови за допомогою програми (рис. 2.4, 2.5), і на екрані монітору з'явиться система координат, у якій побудовано задані графіки функції (рис. 2.6).

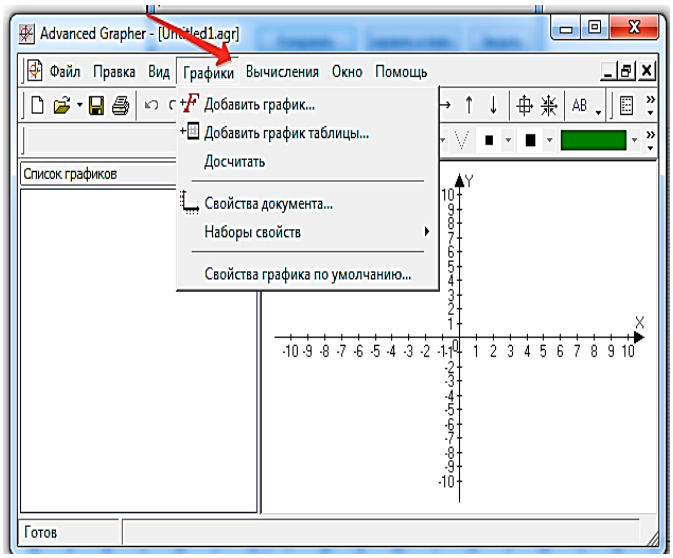


Рис. 2.4

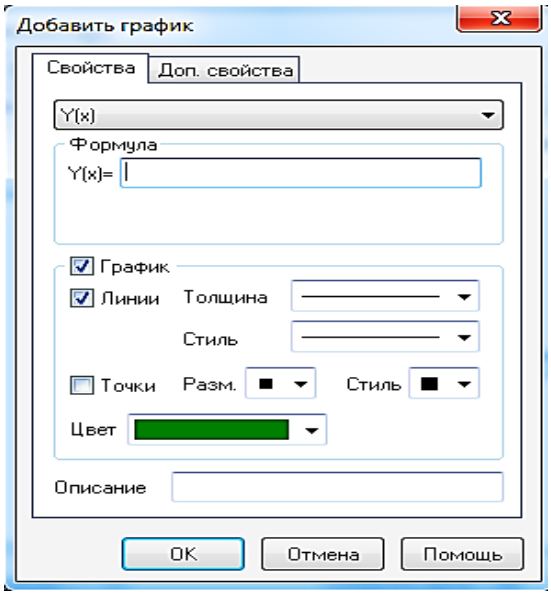


Рис. 2.5

За отриманим зображенням легко перевірити правильність побудови графіків функцій у зошиті, знайти координати точок їх перетину. Для зручності можна нанести сітку на систему координат, за потреби змінити й налаштування (довжину одиничного відрізка, мітки на осях координат тощо).

Окрім візуального знаходження наближених коренів рівняння програма дає змогу їх знайти із наперед заданою точністю: на панелі інструментів треба зайти у вікно «Обчислення», а в ньому – «Перетини» (рис. 2.7). На екрані з'явиться вікно, в якому набираємо формули функцій, координати точок перетину яких нас цікавлять (рис. 2.8).

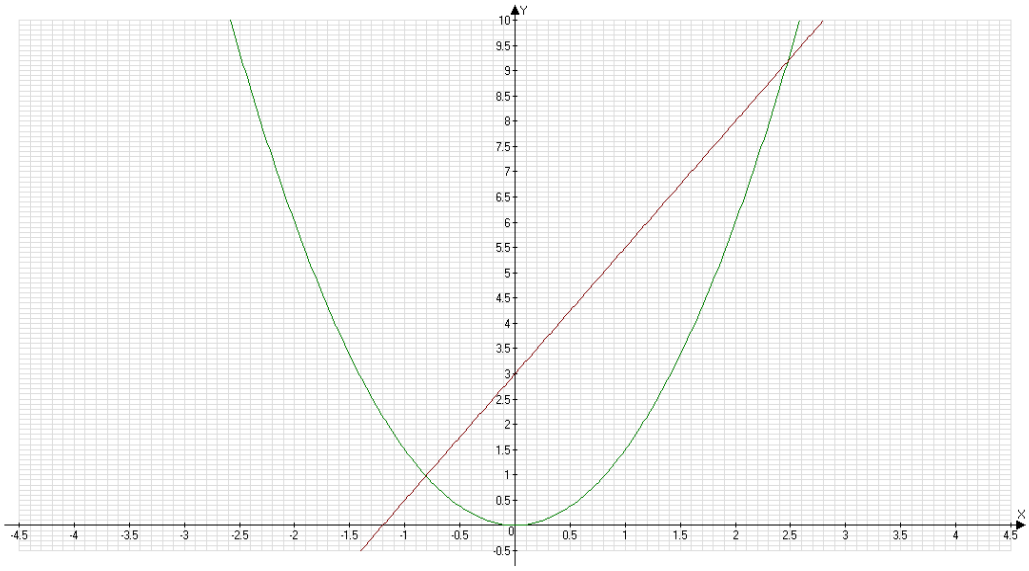


Рис. 2.6

Учні самостійно задають кількість десяткових знаків, які вони бажають отримати в результаті розрахунків. Натиснувши «Ок», програма висвітлює результат обчислень у вигляді таблиці (рис. 2.9).

Окремої уваги заслуговують опції «Мінімум X», «Максимум X» та «Кількість кроків». Перші дві з них дозволяють обрати відрізок, на якому знаходяться точки перетину. Якщо абсциса точки перетину не належить заданому відрізку, програма не знайде її координати.

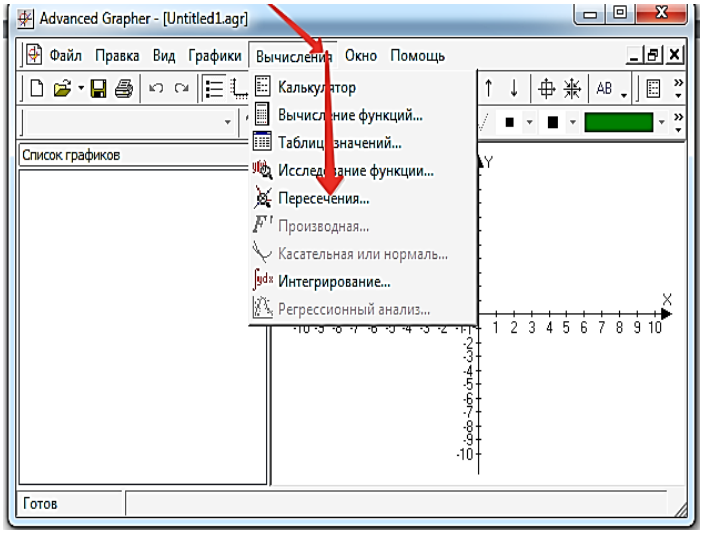


Рис. 2.7

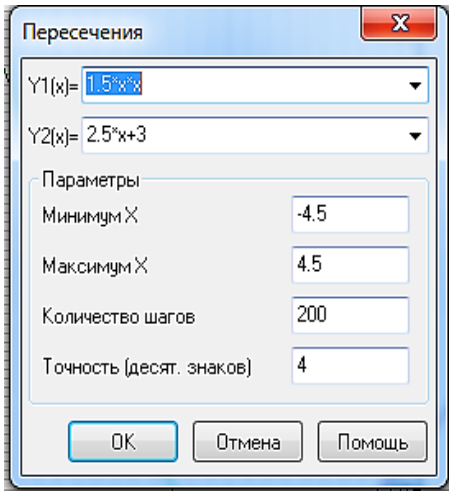


Рис. 2.8

Третя комірка дає змогу учню обирати самостійно кількість кроків, за допомогою яких відділяються корені відповідного рівняння. Якщо збільшення кількості кроків знаходження координат точок перетину графіків не змінює значення абсцис цих координат, можна припустити, що усі цифри, отримані в результаті обчислень – правильні.

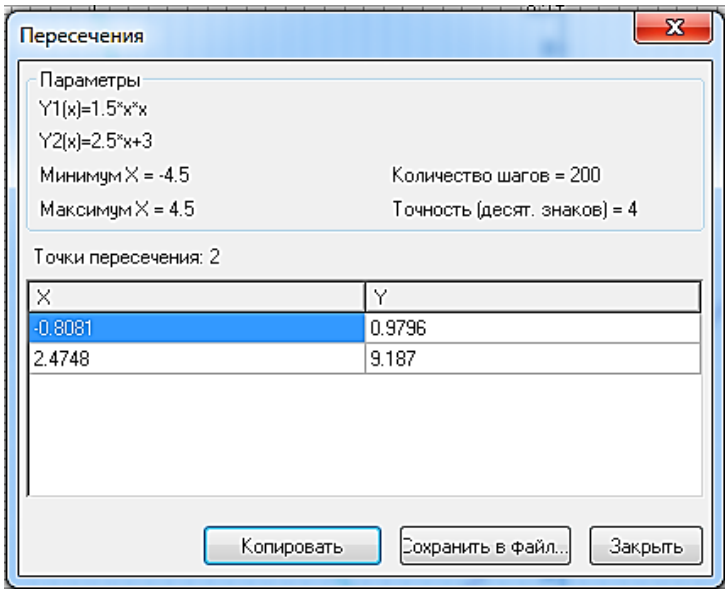


Рис. 2.9

Тоді можна вважати, що розрахунки проведені з точністю до половини одиниці найменшого розряду. Якщо ж цифри змінилися, то їх не можна вважати правильними, і у відповідь їх не записуємо, вважаючи, що обчислення проведені з точністю до одиниці останнього розряду, що записаний правильною цифрою.

Аналогічно можна розв’язувати і нерівності графічним методом. Нехай, наприклад, перед учнем стоїть завдання знайти множину розв’язків нерівності $1{,}5x^2 > 2{,}5x + 3$. Побудувавши графіки відповідних функцій (рис. 2.2.6), знаходимо абсциси точок їх перетину. Множиною розв’язків нерівності буде об’єднання тих проміжків, на яких графік функції $y = 1{,}5x^2$ буде розташований вище за графік функції $y = 2{,}5x + 3$.

Зупинимося детальніше на записі відповіді до завдання. Як уже було зазначено раніше, абсциса точки перетину графіків x_0 знайдена з певною мірою точності, межу абсолютної похибки обчислень h можна визначити. Тоді точне

значення знаходиться на проміжку $[x_0 - h; x_0 + h]$. Щоб уникнути появи сторонніх розв'язків нерівності, її слід записувати за наступним правилом: *лівий кінець проміжку записуємо у вигляді числа* $x_0 - h$, *а правий у вигляді* $x_0 + h$. *При цьому незалежно від знаку нерівності (строгий чи нестрогий), його кінці беруться в квадратні дужки, тобто включаються у відповідь.*

Таким чином, застосування комп'ютерних програм на уроках алгебри і початків аналізу дозволяє здійснювати самоперевірку виконаної роботи, здійснювати корекцію помилок, виховувати графічну культуру, підвищувати інтерес до математики, застосовувати сучасні засоби навчання, формувати навички виконувати НО.

2.3. Наближені обчислення під час вивчення степеневої, тригонометричної, логарифмічної та показникової функцій

У попередніх параграфах вже було сказано про те, що випускники основної школи не володіють на належному рівні понятійним апаратом, формами запису та методами НО. Спостерігається відсутність мотивації та наступності у вивченні математики, оскільки учням залишається незрозумілим, навіщо, з якою метою вони вивчали згадані теми.

З іншого боку, в курсі фізики, хімії, під час виконання лабораторних та практичних робіт учні повинні застосовувати методи НО. Тому на початку 10 класу у школярів повинні бути сформовані уміння і навички виконання НО. Як показав проведений нами констатувальний експеримент, у старшокласників вони відсутні.

Саме цим обумовлена перша тема розробленої нами експериментальної програми (додаток А) в курсі алгебри і початків аналізу для 10 класу «Наближені обчислення», на вивчення якої пропонується відвести 12 годин. Методика вивчення НО, якими повинні володіти випускники основної школи, описана у дисертаційному дослідженні В.М. Кліндухової [118]. Під час вивчення теми «Наближені обчислення» у 10 класі доцільно користуватися результатами цього дослідження, а також методичними рекомендаціями,

розробленими нами у статті [262]. Їх зміст можна представити у вигляді зауважень:

Зауваження 1. Зазвичай на практиці використовують межу абсолютної похибки, тому для зручності домовилися її називати просто «абсолютна похибка», якщо це не викликає певних непорозумінь.

Зауваження 2. Якщо в умові завдання є наближені дані і не вказана їх точність, то вважають, що межа абсолютної похибки не перевищує половині одиниці останнього розряду заданої величини.

Зауваження 3. В деякій літературі можна зустріти, що межа абсолютної похибки дорівнює одиниці останнього розряду заданої наближеною величини. Проте частіше дотримуються попередньої домовленості.

Зауваження 4. Часто під час викладання математики вчитель говорить учням, що в десятковому записі числа останні нулі можна не записувати – вони не суттєві. Наприклад, 2,500 = 2,5. Такий запис можна вважати правильним тільки за умови, що число 2,500 є точним. Якщо ж мова йде про наближені величини, то так вважати не можна. Наприклад, запис 2,500 км означає, що відстань виміряна з точністю до 0,5 м, у той час, як запис 2,5 км означає вимірювання з точністю до 50 м.

Для того, щоб визначати правильні цифри числа, зручно записувати (розряд під розрядом) межу похибки під наближеним значенням:

1. а) $x = 6{,}48 \pm 0{,}3$

Правильні цифри

6,	4	8
0,	3	

Якщо в записі межі абсолютної похибки перша цифра, відмінна від нуля, не більше 5, то правильними будуть усі цифри наближеного значення, що стоять зліва від неї. Отже, правильною є цифра 6, сумнівною - 4, неправильною - 8.

1. б) $x = 67{,}216 \pm 0{,}06$

Правильні цифри

6	7,	2	1	6
	0,	0	6	

Якщо в записі межі абсолютної похибки перша цифра, відмінна від нуля, більше 5, то правильними будуть всі цифри наближеного значення, що стоять зліва від неї, крім останньої. Отже, правильні цифри 6; 7, сумнівна - 2, неправильні - 1; 6.

Зауваження 5. Якщо наближене значення деякої величини є цілим числом і записано з нулями в кінці, то останні нулі вважають незначущими цифрами. Якщо ж серед останніх нулів у записі числа є значущі, то зручно записувати таке число у стандартному вигляді, зберігаючи при цьому лише значущі нулі.

Зауваження 6. Якщо всі цифри вихідних наближених даних є правильними, то в результаті виконання над ними дій за методом підрахунку правильних цифр виходить результат, остання цифра якого може бути сумнівною.

Зауваження 7. Під час виконання дій над наближеними числами методом меж нижня межа завжди округлюється з недостачею, а верхня – з надлишком.

Зауваження 8. Якщо наближена величина округляється, то модуль похибки округлення додається до межі абсолютної похибки.

Зауваження 9. У зв'язку із застосуванням методу меж виникло питання: до якого розряду слід округляти межі? Як правило, округлюють до того розряду, починаючи з якого починається розходження в цифрах верхньої і нижньої меж.

Таким чином, впродовж перших дванадцяти уроків з алгебри і початків аналізу в 10 класі учні ознайомляться з елементами теорії НО. Вивчення методів наближених обчислень дозволить старшокласникам застосовувати їх в подальшому при вивченні наступних тем курсу алгебри і початків аналізу, геометрії, при вирішенні прикладних задач, виконання лабораторних робіт з фізики, хімії.

Розглянемо методику вивчення наближених обчислень в інших темах курсу алгебри і початків аналізу.

2.3.1. Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції

Відповідно до чинної програми з алгебри і початків аналізу [205], основною метою вивчення теми «Степенева функція» є систематизація матеріалу стосовно елементарних функцій, який вивчався в основній школі,

його поглиблення і розширення, підготовка учнів до вивчення нових класів функцій [205, с.8]. На основі вивченого старшокласники розв'язують рівняння та їх системи, нерівності, прикладні задачі. Що стосується вивчення наближених обчислень в цій темі, то чинною програмою це практично не передбачено.

Проілюструємо, як можна формувати в учнів 10 класу навички виконувати наближені обчислення під час вивчення теми «Степенева функція».

Чинною програмою шкільного курсу математики [150, 205] передбачено вивчення степеневої функції у чотири етапи: *перший* – наприкінці сьомого класу, коли вводиться одне із базових понять математики – поняття функції і на його основі вивчається лінійна функція та окремий її випадок – пряма пропорційність.

Другий етап розпочинається у восьмому класі, під час вивчення тем «Раціональні вирази», «Квадратні корені. Дійсні числа». Тут учні розглядають функції $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, будують їх графіки, описують властивості.

Наступний, *третій* етап вивчення властивостей степеневої функції пов'язаний із розглядом у дев'ятому класі квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$ та елементарними геометричними перетвореннями її графіка, описом властивостей.

На *четвертому* етапі, у десятому класі, відомості про степеневу функцію, отримані в курсі алгебри основної школи, узагальнюються та розширюються за рахунок введення понять степеня з раціональним та дійсним показником.

Згідно структури змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої профільної школи (див. параграф 2.1) знайомство з темою слід розпочинати з вивчення арифметичного кореня *n–го* степеня з числа, його властивостей. Уміння знаходити наближені значення кореня за відомим значенням аргументу дозволяє виконувати побудову графіків деяких функцій, зокрема $y=\sqrt[3]{x}$. Такі уміння дають змогу перейти до знаходження наближених

розв’язків ірраціональних рівнянь (нерівностей) аналітичним способом та графічним методом як «вручну», на міліметровій сітці, так і за допомогою комп’ютерних програм.

Розв’язування прикладних задач також неможливе без застосування наближених обчислень, тому зміст теми «Степенева функція» доцільно доповнити вивченням питань, пов’язаних із застосуванням методів наближених обчислень. Це представлено у розробленій нами експериментальній програми з алгебри і початків аналізу для 10 класу з урахуванням методів наближених обчислень у додатку А.

Під час вивчення степеневої функції насамперед слід сформувати в учнів уміння знаходити значення функції із заданою точністю як для точних, так і наближених значень аргументу, визначати кількість правильних цифр у відповіді, виконувати обчислення з наближеними значеннями чисел і величин, застосовуючи методи наближених обчислень та обчислювальні засоби. Водночас із старшокласниками доцільно розглянути завдання на побудову графіків степеневих функцій і перейти до розв’язування більш широкого класу рівнянь та нерівностей, які містять степеневу функцію. Заключним питанням теми є розв’язування прикладних задач, процеси у яких описуються за допомогою степеневої функції. Саме такі прикладні задачі мотивують старшокласників вивчати математику як навчальну дисципліну в цілому, так і безпосередньо наближені обчислення як засіб для їх розв’язування.

Таким чином, з точки зору вивчення наближених обчислень, вивчаючи тему «Степенева функція», учнів слід навчити:

1) обчислювати значення степеневої функції для:а) точних значень аргументу x, зокрема значення функцій $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$; *б) наближених значень аргументу x, зокрема значення функцій* $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$;

2) обчислювати значення виразів, що містять степеневу функцію, для:а) точних значень аргументу; б) наближених значень аргументу;

3) будувати графіки степеневих функцій: а) «вручну», на міліметровій сітці, (виготовити шаблони деяких графіків функцій, зокрема $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$*); б) за допомогою комп'ютерної програми;*

4) розв'язувати графічно рівняння та нерівності, що містять степеневу функцію методами наближених обчислень:а) «вручну», на міліметровій сітці;б) за допомогою комп'ютерної програми;

5) розв'язувати практичні та прикладні задачі з використанням методів наближених обчислень.

Зупинимося більш детально на методиці вивчення наближених обчислень у темі «Степенева функція». Під час вивчення кореня *n*-го степеня учні повинні вміти обчислювати числові значення коренів різних степенів, тому вправи, що пропонуються діючими підручниками, слід доповнити завданнями на знаходження наближених значень кореня *n*-го степеня. При цьому обов'язково потрібно звернути увагу учнів на те, що підкореневий вираз може бути як точним, так і наближеним числом. Такі ситуації слід розглядати окремо.

Для цього спочатку, на прикладі однієї-двох доцільних задач, можна запропонувати учням перевірити кількість правильних цифр знайденого кореня *n*-го степеня додатного числа $\sqrt[n]{a}$, який дає комп'ютер чи калькулятор за умови, що *n*=3, та *a*=2,35 – точне число. Під час виконання такого завдання учні в класі можуть обчислювати значення коренів для різних значень числа *a*, але за спільним алгоритмом:

1) за допомогою обчислювального засобу знаходимо корінь $\sqrt[3]{2{,}35} = 1{,}329502\ldots$ і почергово округлюємо відповідь до розрядних одиниць, починаючи з крайньої лівої цифри.

2) згідно означення, цифра наближеного значення називається правильною, якщо абсолютна похибка наближення не перевищує половини одиниці відповідного розряду. Тому потрібно знайти межу абсолютної похибки для кожного наближення і порівняти її з половиною одиниці відповідного розряду:

якщо 1,329502…≈1, то $h = \left|\sqrt[3]{2{,}35} - 1\right| = 0{,}329502 \ldots < 0{,}4$, що не перевищує 0,5, отже 1 – правильна цифра;

якщо 1,329502…≈1,3, то $h = \left|\sqrt[3]{2{,}35} - 1{,}3\right| = 0{,}029502 \ldots < 0{,}03$, що не перевищує 0,05, отже 3 – правильна цифра;

якщо 1,329502…≈1,33, то $h = \left|\sqrt[3]{2{,}35} - 1{,}33\right| = 0{,}0006 \ldots < 0{,}001$, що не перевищує 0,005, тому 3 – правильна цифра.

Слід звернути увагу учнів на те, що такий алгоритм визначення правильних цифр може бути застосованим як для знаходження значень степеневої функції, так і для інших функцій.

Таким чином, поступово перевіряючи цифри отриманого значення кореня можна дійти висновку, що число, отримане в результаті обчислень, містить усі правильні цифри, окрім, можливо, останньої. Якщо ж проаналізувати отримані результати в учнів класу, цей висновок можна узагальнити: *якщо підкореневий вираз – точне число, то усі цифри, які дає обчислювальний засіб при обчисленні значення кореня, окрім, можливо, останньої, є правильними*. Отже, наближене значення кореня *n*-го степеня, знайдене за допомогою калькулятора (комп’ютера), у своєму записі містить лише правильні цифри, якщо підкореневий вираз є точним і корінь *n*-го степеня з точного числа можна знаходити з наперед заданою точністю.

Зупинимося детальніше на понятті «точність наближення». Як показує практика, його розуміння викликає у старшокласників певні труднощі. Точність наближення може бути визначена як половина останнього справа розряду наближеного числа, записаного у стандартному вигляді, на якому обривається його запис. Наприклад, у наближеного числа $2{,}5 \cdot 10^3 = 2500$ точність наближення $(2{,}5 \pm 0{,}05) \cdot 10^3 = 2500 \pm 0{,}05 \cdot 10^3 = 2500 \pm 50$ – сотні, оскільки цифра 5 числа 2500 є значущою і стоїть у розряді сотень, а наступний нуль – сумнівна цифра. У наближеного числа $(2{,}50 \pm 0{,}005) \cdot 10^3 = 2500 \pm 0{,}005 \cdot 10^3 = 2500 \pm 5$ точність наближення $0{,}005 \cdot 10^3 = 5$ – десятки, оскільки нуль, що стоїть після 5 є значущою

цифрою і знаходиться у розряді десятків, а наступний нуль є сумнівною цифрою.

Якщо перед учнями стоїть завдання знайти за допомогою калькулятора значення виразу $\sqrt[5]{378}$, де число 378 є точним, з точністю до сотих, то використовуємо калькулятор, встановлений на комп'ютері. Такі розрахунки зручно проводити у режимі інженерного калькулятора. У результаті на екрані з'явиться результат обчислень, який потрібно округлити до сотих *за правилами округлення*: 3,2771…≈ 3,28. Отже, $\sqrt[5]{378} \approx 3{,}28$. Межа абсолютної похибки обчислень $h = |3{,}28 - 3{,}2771 \ldots| \leq 0{,}003$. Межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}003}{3{,}28} \leq 0{,}00092 = 0{,}092\%$.

Особливу увагу учнів треба звернути на те, що округлення результату обчислень не завжди здійснюється за правилами округлення. *Під час розв'язування прикладних задач* трапляються ситуації, коли наближене значення округлюється з надлишком або з недостачею. Тому перш, ніж округлювати, потрібно уважно прочитати задачу і діяти відповідно до її умови. Наприклад, якщо треба визначити кількість банок об'ємом 1 літр, у які можна помістити 3,3 літра варення, то під час обчислень отримується число 3,3≈4 банок.

Якщо ж говорити про межі абсолютної та відносної похибок, то відповідно до їх змісту можна сказати, що *округлювати числа, які визначають межі похибок, слід лише з надлишком*.

Якщо підкореневий вираз не є точним числом, то знайти його наближене значення можна як за методом меж, так і за методом підрахунку правильних цифр. Розглянемо кожний з цих методів окремо.

Якщо обчислення виконуються за ММ, то зручно спочатку підкореневий вираз подати у вигляді невід'ємного числа. Це пов'язано з тим, що деякі властивості числових нерівностей виконуються лише для таких значень. Учні вже знайомі з властивостями кореня *n*-го степеня, зокрема з тим, що функція $y = \sqrt[n]{x}$ є зростаючою. Тому її значення знаходиться між значеннями кореня того ж степеня з чисел, що є нижньою та верхньою межею аргументу. За

допомогою калькулятора чи комп'ютера знайдемо ці значення і в результаті отримаємо подвійну нерівність $a_1 < \sqrt[n]{x} < a_2$. Якщо відповідні цифри чисел a_1 і a_2 співпадають, то вони – правильні. Перші цифри, що різняться, перевіряються таким чином: число a_1 округлюємо до відповідного розряду з недостачею, число a_2– з надлишком. Тоді $a_1' < \sqrt[n]{x} < a_2'$, де a_1' і a_2'– зазначені наближення.

Звідси можемо записати умовну рівність $\sqrt[n]{x} = \frac{a_1'+a_2'}{2} \pm \frac{a_1'-a_2'}{2}$, де $\frac{a_1'-a_2'}{2} = h$ – межа абсолютної похибки наближення. Якщо вона не перевищує половини одиниці розряду, до якого округлювали, то відповідна цифра наближення $\frac{a_1'+a_2'}{2}$ – правильна. У разі, якщо шукана цифра правильна, досліджуємо за таким же алгоритмом наступну розрядну одиницю. Дослідження проводиться до тих пір, поки не дійдемо першої цифри, що не є правильною. Вона – сумнівна. Усі наступні цифри наближеного значення є неправильними. Тоді згідно правила запису наближених значень О.М. Крилова:

наближений результат слід записувати так, щоб остання цифра вказувала на його точність; всі цифри, крім останньої, мають бути правильними і лише остання може бути сумнівною.

Таким чином, за допомогою перевірки кількості правильних цифр у значенні коренів *n*-го степеня, доходимо висновку: *якщо підкореневий вираз є наближеним числом, то результат, який висвітлюється на екрані обчислювального засобу, може містити не лише правильні цифри, а й сумнівні.*

Тому запис наближеного значення кореня *n*-го степеня можна здійснювати лише з точністю, яка є меншою, ніж одиниця розряду, в якому записана остання правильна цифра. Тобто, перед тим, як вказувати точність наближення такого виразу, потрібно обов'язково визначити кількість правильних цифр його значення. Наприклад, для знаходження значення $\sqrt[5]{378}$, де число 378 є наближеним, послідовне виконання дій може бути таким:

$$377{,}5 < 378 < 378{,}5,$$

$$\sqrt[5]{377{,}5} < \sqrt[5]{378} < \sqrt[5]{378{,}5},$$

$$3{,}2769\ldots < \sqrt[5]{378} < 3{,}2780\ldots.$$

Перші дві цифри 3 та 2 співпадають для верхньої та нижньої меж значення кореня, вони є правильними. Тоді слід перевірити наступну, третю цифру наближення: $3{,}276 < \sqrt[5]{378} < 3{,}279$.

Отже, $\sqrt[5]{378} = \frac{3{,}279+3{,}276}{2} \pm \frac{3{,}279-3{,}276}{2} = 3{,}2775 \pm 0{,}0015$.

Як видно з розрахунків, третя цифра наближення є сумнівною, тому $\sqrt[5]{378} = 3{,}28 \pm 0{,}004$. Похибка округлення при цьому 0,004-0,0015=0,0025. *Під час округлення наближеного значення кореня до сотих, похибка округлення обов'язково додається до межі абсолютної похибки*: h=0,0015+0,0025=0,004.

Після виконання таких обчислень учням слід запропонувати записати алгоритм обчислення значення функції $y = \sqrt[n]{x}$ при наближеному значенні аргументу x_0:

1. Визначаємо межу абсолютної похибки h, яка дорівнює половині одиниці останнього розряду наближеного значення аргументу x_0.

2. Знаходимо значення $m = x_0 - h$ – нижня межа наближеного значення аргументу, $M = x_0 + h$ – верхня межа наближеного значення аргументу.

3. За допомогою калькулятора знаходимо значення $y = f(m)$, $y = f(M)$. Оскільки $y = f(x)$ – зростаюча, то результат записуємо у вигляді подвійної нерівності: $f(m) \le f(x_0) \le f(M)$ (якщо $y = f(x)$ – спадна, то $f(M) \le f(x_0) \le f(m)$).

4. Нижню межу значення функції округляємо з недостачею, верхню – з надлишком до того розряду, в якому відповідні цифри різні.

5. Обчислюємо наближене значення функції $f(x_0) = \frac{f(M) + f(m)}{2}$ та межу абсолютної похибки $h = \frac{|f(M) - f(m)|}{2}$.

6. Записуємо значення функції у вигляді $f(x_0) \pm h$ та визначаємо правильні та сумнівну цифри. У відповіді залишаємо лише правильні цифри (або ще одну – сумнівну), округлюємо значення функції за правилами округлення, а межу похибки – з надлишком.

Така процедура, яка виконується за методом меж, кожного разу потребує уважності і значної кількості часу. Якщо ж обчислення не вимагають високої точності, то з метою спрощення виконання розрахунків користуються методом підрахунку правильних цифр: *при знаходженні коренів другого та третього степенів з числа, у відповіді залишають стільки значущих цифр, скільки їх містить підкореневе число*. У такому разі запис відповіді містить лише правильні цифри. Таке правило доцільно використовувати лише для коренів другого та третього степенів, оскільки під час обчислень коренів більш високих степенів похибки розрахунків суттєво збільшуються. Тому для них краще використовувати метод меж.

Наприклад, для обчислення значення виразу $\sqrt[3]{1{,}70}$ за МППЦ спочатку визначаємо, що підкореневий вираз містить три значущі цифри. За допомогою калькулятора обчислюємо $\sqrt[3]{1{,}70} = 1{,}19348\ldots \approx 1{,}19$. У результат залишаємо три значущих цифри, округливши результат за правилами округлення.

У курсі диференціального числення виводяться формули наближених обчислень значень деяких функцій, зокрема $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$. З метою навчити учнів практичним способам обчислень значень функцій для окремих випадків та з метою пропедевтики формування умінь застосовувати похідну для НО значень функції, зручно за готовою формулою обчислити значення виразів, близьких до одиниці, а також таких, що зводяться до них (додаток Д).

Приклад 2.6. *Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу* $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$*, де* Δx *– величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів: а)* $\sqrt{1{,}002}$*; б)* $\sqrt{25{,}036}$*. Виконайте завдання за допомогою методу меж, вважаючи, що підкореневі вирази містять лише правильні цифри. Порівняйте отримані результати. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибок.*

Якщо знаходити значення кореня $\sqrt{1{,}002}$, то $\sqrt{1{,}002} = \sqrt{1+0{,}002}$. Звідси $\Delta x = 0{,}002$, отже можна застосувати вказану формулу: $\sqrt{1+0{,}002} \approx 1 + 0{,}001 = 1{,}001$. Щоб скористатися формулою, заданою в умові задачі, для

$\sqrt{25{,}036}$, спочатку потрібно виконати певні перетворення, щоб звести підкореневий вираз до виду $1 + \Delta x$, де Δx – величина, близька до нуля.

$$\sqrt{25{,}036} = \sqrt{25 + \frac{36}{1000}} = \sqrt{25 \cdot \left(1 + \frac{9}{6250}\right)} =$$

$$= 5 \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{6250}} \approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 6250}\right) = 5 \cdot 1{,}00072 = 5{,}0036.$$

Варто зауважити, що під час обчислень за вказаним правилом не завжди раціональний дріб, що визначає величину Δx, може бути поданим у вигляді скінченного десяткового дробу. В такому випадку можна виконати ділення чисельника на знаменник за методом підрахунку правильних цифр з урахуванням того, що вказана дія є проміжною.

З іншого боку, якщо знаходити значення кореня за допомогою калькулятора, то $\sqrt{25{,}036} = 5{,}00359870$ .... Тоді за МППЦ маємо: $\sqrt{25{,}036} \approx 5{,}0036$. Як бачимо, результати, отримані різними методами, співпадають. Проте, як показує ММ, остання цифра – 6, є сумнівною. Таким чином, експериментальні дослідження дозволяють зробити висновок, що задана в умові формула дає достатньо надійний результат. При цьому під час використання МППЦ остання цифра результату може бути сумнівною.

Під час роботи з НО на уроках фронтальна робота повинна поєднуватися з груповою та індивідуальною. При цьому обчислення, що проводяться вперше, доцільно обговорити з учнями, виконати їх колективно всім класом. Далі учні описують алгоритм виконання дії. Потім отримують індивідуальні завдання, які виконують самостійно, для вироблення обчислювальних навичок. З метою перевірки правильності виконаного завдання зручно, коли одну і ту ж вправу виконують 2-3 учні. Після закінчення обчислень обов’язково має відбуватися взаємоперевірка отриманих результатів та корекція неправильних записів. Наприклад, учні можуть виконати наступну практичну роботу, розроблену і представлену нами у додатку В2. Зміст завдань, запропонованих учням, може бути наступним:

Завдання 1. Обчисліть за допомогою комп'ютера з точністю до сотих значення функції $y = \frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$,якщо точне значення аргументу $x = 1{,}73$.

Завдання 2. Обчисліть за допомогою комп'ютера значення функції $y = \frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$, якщо значення аргументу $x \approx 1{,}73$:

а) за методом підрахунку цифр; б) за методом меж; в) за допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher, використовуючи вікно «Обчислення».

Під час виконання роботи такого характеру з метою зручності контролю за виконанням розрахунків доцільно, щоб значення функції для одного і того ж аргументу виконувало 2-3 учні. Кожний з них може створити бланк для запису проміжних розрахунків під час виконання наближених обчислень (зразок – у додатку В1). Такий бланк потрібен як для виконання завдання 1, так і для виконання завдання 2 (окремо бланк – для МППЦ, окремо – для ММ). За результатами виконаної роботи такі таблиці допоможуть швидко перевірити правильність виконання завдання і чітко визначити етап, на якому була допущена помилка. Учень, який допустив помилку, може переробити розрахунки наново з того етапу розв'язання, на якому вона була допущена.

Зупинимося детальніше на обчисленнях . Оскільки верхня межа (під час розрахунків позначається – ВМ) та нижня межа (під час розрахунків позначається – НМ) наближених значень виразів вважаються точними числами, то перші чотири стовпці таблиці з проміжними діями слід заповнювати, вважаючи результати обчислень точними. Проте якщо $\text{НМ}_{2{,}35x} = 4{,}05375$ (додаток В2, таблиця 2.3.5) – точна, то $\text{НМ}_{\sqrt{2{,}35x}}$ – нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Тому з метою подальших обчислень наближене значення кореня записувати з тією ж кількістю цифр, що і підкореневий вираз (або ще з однією - запасною). Тоді $\sqrt{4{,}05375} = 2{,}01339265 \ldots \approx 2{,}013392$.

Аналогічно $\sqrt{4{,}07725} = 2{,}0192201 \ldots \approx 2{,}019221$. Увагу учнів обов'язково ще раз треба звернути на те, що *наближене значення кореня для верхньої межі округлюється з надлишком, для нижньої – з недостачею*. Таким

чином, отримані значення коренів є наближеними величинами. Усі подальші розрахунки з цими числами проводяться як з наближеними – за методом підрахунку цифр.

За умови, що верхня і нижня межа значення функції знайдені, можна знайти правильні цифри отриманого результату, межу абсолютної та відносної похибок: $0{,}07480147 \ldots < y(1{,}73) < 0{,}08151382 \ldots$

$$0{,}07 < y(1{,}732) < 0{,}09$$

$$y(1{,}732) = 0{,}08 \pm 0{,}01.$$

При цьому межа абсолютної похибки h=0,01, а цифра 8 – сумнівна.

Знайдемо межу відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}01}{0{,}08} = 0{,}125 = 1{,}25\%$.

Як бачимо, результати за методом підрахунку правильних цифр та за методом меж близькі за значеннями, але не рівні. Зрозуміло, що точнішим є результат, отриманий за методом строго урахування похибок – метод меж.

Якщо виконувати обчислення за допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher, то у комірці «Підсумок» з'явиться відповідне значення функції (рис.2.10).

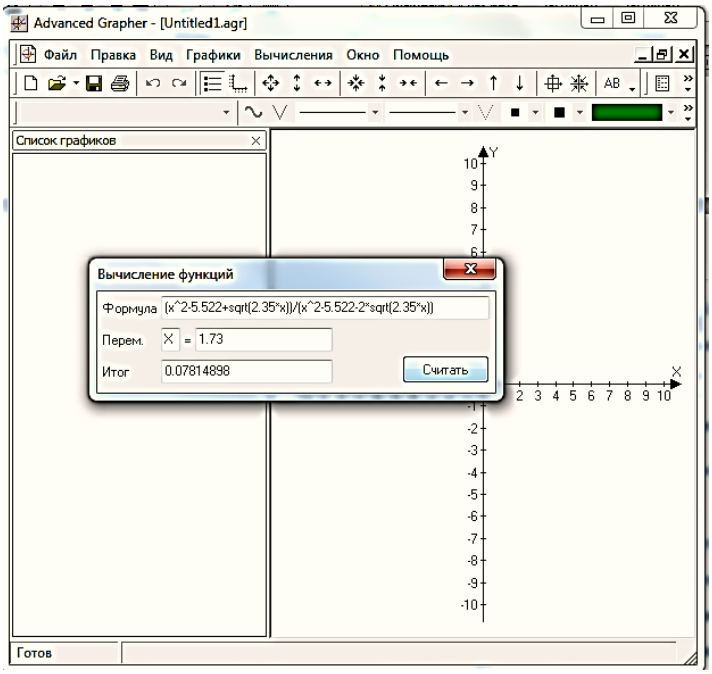


Рис. 2.10

Як бачимо, $y(1{,}73) = 0{,}07814898 \ldots$. Результат, отриманий за допомогою комп'ютера мало відрізняється від попередніх результатів. Проте за його записом неможливо визначити кількість правильних цифр, якщо аргумент – наближене значення. Якщо ж аргумент – точне число, то за висновками, зробленими авторами довідника [74], межа абсолютної похибки обчислень дорівнює одиниці розряду, до якого на екрані монітору визначено значення результату обчислень.

Уміння знаходити значення кореня n-го степеня дозволяє перейти до наступного кроку вивчення НО під час вивчення степеневої функції, а саме до побудови окремих видів графіків функції $y = \sqrt[n]{x}$, зокрема $y = \sqrt[3]{x},\ y = \sqrt{x}$. Для цього можна використовувати як міліметрову сітку, так і ПК. Розпочинати роботу доцільно з побудови графіків зазначених функцій на міліметровій сітці.

Для цього зручно запропонувати учням класу виконати розрахунково-графічну роботу, представлену нами у додатку Б1.

Для виконання такої роботи спочатку визначити, хто з учнів працює із завданням якого варіанту. Далі доцільно обговорити шлях виконання роботи з учнями класу. Під час обговорення слід звернути увагу старшокласників на наступні факти:

1. Побудова точок на міліметровому папері відбувається з точністю до ціни поділки, тому вважаємо, що аргумент – наближена величина. Тоді обчислення значень функції виконуються за вже відомим алгоритмом із застосуванням ММ (І варіант) та МПЦ (ІІ варіант). Знайдені наближені значення функції і заносяться у відповідну таблицю.

2. Таблицю для знаходження наближених значень функції можна робити лише для невід'ємних значень аргументу. Для функцій $y = \sqrt[3]{x},\ y = \frac{1}{x}$ наближені значення від'ємного аргументу будуть протилежними до відповідних значень функції з додатним аргументом. Це пояснюється тим, що задана функція є непарною.

3. Тільки після виконання усіх розрахунків точки з відповідними координатами наносяться на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Одиничний відрізок на координатних осях вибираємо довжиною 1см.

З метою економії часу на уроці в класі можна виконати лише побудову одного із запропонованих графіків функцій. Інші два учні можуть зробити дома за вже знайомим алгоритмом. Виконання такої роботи дозволить закріпити навички знаходити наближені значення функції для наближеного значення аргументу різними методами. З іншого боку, розвивається графічна культура школярів, а виготовлені шаблони можуть бути використані в подальшому для

побудови графіків функцій за допомогою елементарних геометричних перетворень та для знаходження розв'язків ірраціональних рівнянь та нерівностей графічним методом.

Як вже зазначалося, за допомогою виготовлених шаблонів можна здійснити побудову графіків функцій за допомогою елементарних геометричних перетворень. Саме використання шаблонів дозволить економно використати час на уроці та повторити раніше вивчений навчальний матеріал на прикладі степеневої функції. Тому доречно запропонувати учням систему впав, яка містила б такого роду завдання.

Приклад 2.7. Скористайтеся виготовленим шаблоном та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки функцій:

а) $y = \sqrt{x+2}$; б) $y = \sqrt{0{,}5x}$; в) $y = 3\sqrt{x}$; г) $y = -\sqrt{x}$; д) $y = 3 - 2\sqrt{x}$; е) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; є) $y = \sqrt[3]{0{,}3x}$; ж) $y = \sqrt[3]{|x|}$; з) $y = 4\sqrt[3]{x+1}$; и) $y = \left|2 - \sqrt[3]{x}\right|$.

Приклад 2.8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt[3]{x} + 2{,}5$ та $y = 2 - x$ на міліметровій сітці. Визначте координати точки перетину графіків. Оцініть точність отриманого результату.

Побудова графіків функцій потребує великої кількості часу, а точність побудови при цьому не завжди достатньо висока. З іншого боку, часто учням потрібно побудувати графік більш складної функції. Для виконання таких побудов зручно використовувати комп'ютерну програму Advanced Grapher. За її допомогою можна точніше і швидше зображати графіки функцій, знаходити значення аргументу та значення функції з наперед заданою точністю. Тому в подальшому під час вивчення теми «Степенева функція» вчитель може дозволити учням самостійно обирати шлях виконання завдання тим чи іншим методом у залежності від змісту вправи. Важливим є те, що при цьому старшокласники обґрунтовують доцільність обраного методу. Для класів, де математика вивчається на рівні стандарту, на розсуд вчителя, можна одразу використовувати комп'ютерні програми, не будуючи графіки «вручну».

Як зазначалося у параграфі 2.2, вивчення методів розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей доцільно починати із графічного

способу. Це дозволяє здійснити логічний перехід від вивчення однієї теми до іншої, закріпити навички побудови графіків та наочно проілюструвати шлях знаходження розв'язків рівнянь та нерівностей із використанням графіків функцій. Для того, щоб застосувати графічний метод для розв'язування рівнянь та їх систем, учні, насамперед, повинні чітко розуміти зміст цього методу. Тому розпочинати потрібно з визначення розв'язків рівнянь та їх систем через побудову відповідних графіків функцій на міліметровій сітці. Насамперед виникає потреба визначити ті функції, графіки яких потрібно будувати. Допомогти побачити їх дозволять практичні навички, отримані під час виконання системи вправ, виконаних раніше. Наприклад, під час графічного розв'язування рівняння $\sqrt[3]{x} - 2x + 5 = 0$ старшокласники повинні побачити, що зручно подати його у вигляді $\sqrt[3]{x} = 2x - 5$ та будувати графіки знайомих вже функцій. Заготовлені шаблони та сформовані уміння виконувати відповідні перетворення дозволяють економно використати час на побудову. З метою перевірки правильності зображення і більш точного знаходження коренів можна використовувати комп'ютерні програми.

Таким чином, під час розв'язання рівнянь та їх систем за умови наявності достатнього часу, якщо потрібно визначити кількість коренів або знайти їх значення з допустимою «грубою» точністю, можна використовувати побудову графіків функцій на міліметровій сітці. Для економії часу і більш точного знаходження коренів слід використовувати комп'ютерні програми. Також використання комп'ютерної програми допомагає здійснити перевірку правильності виконаного «вручну» розв'язання та підвищити інтерес старшокласників до вивчення навчального матеріалу. *Розв'язання графічним способом рівнянь, що містять більш складні функції, слід виконувати* ***лише*** *за допомогою комп'ютерних програм.*

Аналогічно до алгоритму розв'язування рівнянь та їх систем розв'язуються і нерівності. Детальний опис методики розв'язування нерівностей описаний у параграфі 2.2.

Приклад 2.9. *Розв'яжіть нерівність графічно, виконавши побудову графіків відповідних функцій на міліметровій сітці а)* $\sqrt{x} > x - 1{,}2$*; б)* $\sqrt[3]{x + 0{,}5} \leq x$*. Оцініть межу абсолютної похибки результату. Виконайте це завдання за допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher. Порівняйте отримані результати та зробіть відповідні висновки.*

Як було зазначено раніше, межа абсолютної похибки – ціна поділки міліметрової сітки. У випадку розв'язання нерівності $\sqrt{x} > x - 1{,}2$ «вручну» межа абсолютної похибки h=0,1, тому за допомогою графічної ілюстрації отримаємо, що $x\epsilon[0; 2{,}7]$. У випадку застосування комп'ютера до знаходження розв'язків нерівності h=0,00005, тоді множина розв'язків нерівності має вигляд: $x\epsilon[0; 2{,}90415]$ (рис. 2.11).

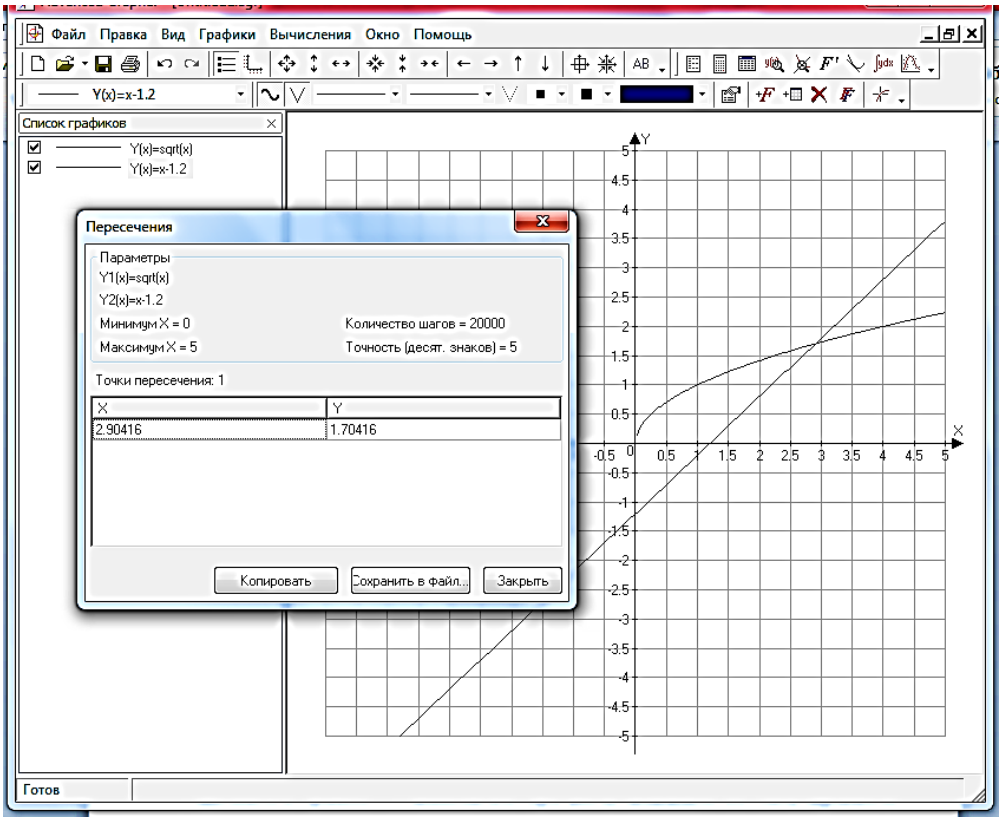


Рис. 2.11

Під час розв'язання нерівностей графічним способом потрібно ще раз нагадати учням, що *значення лівого кінця проміжку округлюється з надлишком, правого – з недостачею. При цьому незалежно від знаку нерівності кінці проміжку включаються у множину розв'язків нерівності.*

Формувати уявлення старшокласників про степінь з дійсним показником доцільно через використання властивостей степеневої функції. Як уже було зазначено, нині діючі програми та підручники для основної школи на жодному із згаданих етапів не містять завдань із використанням наближених величин. При цьому обчислювальні навички, зокрема виконання наближених обчислень, є невід'ємною складовою математичної культури учня. Тому завдання вчителя полягає в тому, щоб підтримувати їх на належному рівні впродовж усього часу навчання у школі. З цією метою після ознайомлення старшокласників із поняттям степеня з дійсним показником доцільно запропонувати учням систему завдань і вправ, аналогічну до запропонованої системи вправ для вивчення кореня *n*-го степеня (додаток Г2).

Перед виконанням такої роботи потрібно звернути увагу учнів на наступну особливість: нехай задано наближені значення показника степеня з різною точністю: $\alpha \approx 1{,}5$, $\alpha \approx 1{,}50$, $\alpha \approx 1{,}500$. Знайдемо відповідні значення степеневої функції $f(x) = 2^{\alpha}$ за допомогою сучасних обчислювальних засобів. Маємо: $2^{1{,}5} = 2^{1{,}50} = 2^{1{,}500} = 2{,}828427\ldots$. Таким чином, можна зробити висновок: *як би точно ми не брали наближене значення показника степеня, підвищуючи його точність за допомогою значущих нулів в кінці запису числа, значення степеня від цього не змінюється – калькулятор його рахує як значення функції від точного аргументу*. Отже, визначити кількість правильних цифр для 2,828427… у такий спосіб неможливо. Тому потрібно застосовувати методи наближених обчислень, зокрема метод меж.

Функції, які вивчаються у ШКМ на своїй області визначення є неперервними. Знайти значення 2^{α}, наприклад, для $\alpha \approx 1{,}50$, тобто для $\alpha = 1{,}50 \pm 0{,}005$, можна за вже знайомим учням алгоритмом:

$$1{,}495 < 1{,}50 < 1{,}505.$$

Як вже відомо учням, функція 2^{α} є зростаючою, тому знаки нерівності не змінюються на протилежні.

$$2^{1{,}495} < 2^{1{,}50} < 2^{1{,}505},$$

$$2{,}818641\ldots < 2^{1{,}50} < 2{,}838246\ldots$$

Тоді правильними цифрами числа $2^{1,50}$ є 2 і 8.

$$2{,}81 < 2^{1,50} < 2{,}84$$

$$2^{1,50} = \frac{2{,}84 + 2{,}81}{2} \pm \frac{2{,}84 - 2{,}81}{2} = 2{,}825 \pm 0{,}015.$$

Отже, третя цифра наближеного значення є сумнівною. Учні вже знають учнями про те, що *похибка округлення наближеного значення додається до межі абсолютної похибки*. Отже, $2^{1,50} = 2{,}83 \pm 0{,}02$.

У отриманому результаті наближеного значення функції усі цифри, крім останньої трійки – правильні.

Таким чином, під час вивчення степеневої функції, аналогічно до розгляду кореня *n*-го степеня, учні виконують обчислення значень виразів $x^{\propto}$, де основа або показник степеня – наближене число, будують графіки степеневих функцій, зокрема $y = x^{-1}, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою методу меж та вже виготовлених шаблонів. Окремої уваги під час вивчення степеня з раціональним показником заслуговує випадок, коли потрібно знайти наближене значення степеневої функції $y = x^{\propto}$, де x, α – наближені величини.

Для цього використовуємо метод меж. Нехай $x_1 < x < x_2$, а $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Насамперед звертаємо увагу на основу степеня. Якщо вона менша за одиницю, то при збільшенні показника, значення степеня зменшується. При цьому ${x_1}^{\alpha_2} < x^{\alpha} < {x_2}^{\alpha_1}$. Якщо основа більша за одиницю, то при збільшенні показника, значення степеня збільшується. Тоді ${x_1}^{\alpha_1} < x^{\alpha} < {x_2}^{\alpha_2}$. За допомогою калькулятора підносимо нижню та верхню межі наближеного значення до степеня, після чого за вже відомим алгоритмом знаходимо правильні цифри результату та межу абсолютної похибки.

Приклад 2.10. Знайдіть значення виразу $x^{\sqrt{3}}$, де $x \approx 0{,}8$, попередньо округливши значення кореня до сотих.

Розв'язання. За допомогою калькулятора можна обчислити значення показника степеня і округлити його до сотих: $\sqrt{3} = 1{,}7320 \ldots \approx 1{,}73$.

Тоді межа абсолютної похибки $h = 0{,}005$. Отже, $1{,}725 < \sqrt{3} < 1{,}735$.

За умовою $x \approx 0{,}8$, тоді $0{,}75 < x < 0{,}85$.

Оскільки основа степеня – число менше за одиницю, то із збільшенням показника степеня значення виразу зменшується. Тоді під час піднесення останньої нерівності до степеня, знаки нерівності зміняться на протилежні. Отже, запис нерівності може бути таким:

$$0{,}75^{1{,}735} < x^{\sqrt{3}} < 0{,}85^{1{,}725},$$

$$0{,}6070595 \ldots < x^{\sqrt{3}} < 0{,}755522 \ldots,$$

$$0{,}6 < x^{\sqrt{3}} < 0{,}8.$$

Тоді, за описаним вище алгоритмом можна зробити висновок, що $x^{\sqrt{3}} = 0{,}7 \pm 0{,}1$. Очевидно, що цифра 7 – сумнівна. Межа абсолютної похибки $h = 0{,}1$, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{1}{7} = 0{,}1428 \ldots < 0{,}15 = 15\%$.

Відповідь. $x^{\sqrt{3}} = 0{,}7 \pm 0{,}1$.

Як видно з результату, проведені обчислення дають досить ненадійний результат. Для покращення результату розрахунків значення показника степеня слід брати з більшою точністю. За умови наявності часу можна запропонувати учням знайти значення того ж виразу, округливши $\sqrt{3}$ з точністю до а) до сотих; б) до тисячних. За результатами розрахунків доцільно порівняти отримані результати і межу відносної похибки наближеного значення виразу, зробити відповідний висновок.

Як зазначалося раніше, вивчення будь-якої теми курсу математики повинно передбачати розв’язування задач прикладного характеру. Тому для підвищення інтересу до вивчення предмета та мотивації навчання учням слід запропонувати такі завдання. Приклади таких задач та методичні рекомендації щодо їх розв’язання пропонуються авторами навчально-методичних посібників [230, 243, 275] та ін.

Приклад 2.11. *Ціна газу для населення складала 0,73 грн за 1 куб. м. після подвійного підвищення тарифу на x% ціна стала 1,09 грн за 1 куб. м. визначте, на скільки відсотків підвищувалася щоразу ціна?*

Розв’язання. Для розв’язання цієї задачі можна скористатися формулою, відомою з курсу алгебри 9 класу, як формула складних відсотків:

$P = C \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де відповідно до умови задачі P=1,09 грн. – нова ціна за кубометр газу; C =0,73 грн. – стара ціна на газ; $p = x\%$ - відсоток, на який підвищували ціну; n=2 – кількість таких підвищень. Підставляємо відомі величини у формулу і отримуємо рівняння: $1{,}09 = 0{,}73 \cdot (1 + 0{,}01x)^2$.

За допомогою програми Advanced Grapher знаходимо координати точки перетину прямої $y = 1{,}09$ та графіка степеневої функції $y = 0{,}73 \cdot (1 + 0{,}01x)^2$.

У результаті обчислень отримаємо $x \approx 22{,}1945$. Таким чином, робимо висновок, що ціна на газ підвищувалася щоразу приблизно на 22%.

Відповідь. ≈ 22%.

Проведене нами дослідження показало, що підібрана система завдань (додаток Г2) дозволяє сформувати у старшокласників навички виконувати наближені обчислення, використовуючи обчислювальні засоби, застосовуючи сучасні комп'ютерні програми, при цьому оцінювати точність виконаних розрахунків. За наявності часу на уроках алгебри таку систему вправ можна доповнити та розширити за рахунок завдань прикладного характеру. Подібну методику можна використовувати і під час вивчення наступних тем курсу алгебри та початків аналізу.

2.3.2. Наближені обчислення під час вивчення тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей.

Тригонометрія у курсі алгебри і початків аналізу в десятому класі розділена на дві теми: «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння та нерівності», на розгляд яких в класах, де математика вивчається на академічному рівні, відводиться 18 та 14 годин відповідно. Основною метою вивчення першої теми є введення поняття тригонометричних функцій довільного кута, вивчення їх властивостей та побудова графіків; обчислення значень функцій за відомим значенням аргументу та навпаки, знаходження величини кута за відомим значенням однієї з тригонометричних функцій; формування умінь знаходити значення тригонометричних функцій, якщо відома величина однієї із них; виконувати перетворення тригонометричних

виразів. Вивчення другої теми має на меті сформувати в учнів навички розв'язувати різними методами тригонометричні рівняння та найпростіші тригонометричні нерівності, використовувати при цьому обернені тригонометричні функції та їх властивості.

Загалом відповідно до діючої програми з математики [155], тригонометричні функції у ШКМ вивчаються у чотири етапи. Вперше з поняттями синуса, косинуса, тангенса і котангенса школярі зустрічаються у курсі геометрії 8 класу, коли вводиться поняття тригонометричної функції гострого кута прямокутного трикутника. На основі вивчених понять учні знаходять невідомі елементи прямокутних трикутників. Наступний, другий, етап знайомства відбувається у 9 класі, коли вводяться тригонометричні функції кута від 0° до 180°. Це дозволяє довести і застосовувати теореми синусів та косинусів для розв'язування довільного трикутника. Слід звернути увагу на те, що як на першому, так і на другому етапі поняття «тригонометрична функція» не використовується, навчальний матеріал розглядається з точки зору числових виразів. Автори нині діючих підручників з геометрії А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [162, 163], Г.П. Бевз та ін. [27], А.П. Єршова та ін. [77, 78] під час розв'язування трикутників пропонують використовувати тризначні математичні таблиці значень тригонометричних функцій, які входять до вказаних підручників у вигляді додатків. Усі значення функцій у таких таблицях є величинами наближеними. Виконання оберненої операції – знаходження кута за значенням тригонометричної функції за допомогою таблиць, поданих у підручниках, можливе лише з точністю до градуса, що інколи дає досить «грубу» похибку. Така ситуація змушує учнів замислитися: як діяти в такому випадку? Дати відповіді на ці та інші запитання можна на третьому етапі, під час вивчення тем «Тригонометричні функції», та «Тригонометричні рівняння та нерівності» в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Четвертий етап вивчення тригонометрії розпочинається у 11 класі, коли учні застосовують здобуті знання до розв'язування стереометричних задач у

курсі геометрії, та до дослідження функцій під час вивчення похідної та первісної.

Як бачимо, навички роботи, основні знання та уміння з теми формуються у школярів на третьому етапі. Під час вивчення тригонометричних функцій акцентується увага на тому, що аргументом для них є кут, величина якого – результат вимірювання, тому його міра є наближеним числом. З іншого боку, якщо навіть аргумент набуває точного значення, то значення функції далеко не завжди виражається точним числом. Звідси випливає висновок: застосування методів НО до вивчення тем «Тригонометричні функції», «Тригонометричні рівняння та нерівності» є доцільним.

Згідно структури змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої профільної школи (див. параграф 2.1) знайомство з темою слід розпочинати з вивчення поняття тригонометричних функцій довільного кута, їх властивостей. Уміння знаходити наближені значення тригонометричної функції за відомим значенням аргументу і навпаки, за відомим значенням функції знаходити наближене значення кута дозволяє перейти до знаходження наближених розв'язків тригонометричних рівнянь (нерівностей). Уміння виконувати побудову графіків тригонометричних функцій дають змогу графічним методом розв'язувати більш складні тригонометричні рівняння як «вручну», на міліметровій сітці, так і за допомогою комп'ютерних програм.

Розв'язування прикладних задач також неможливе без застосування НО, тому зміст тем «Тригонометричні функції» та «Тригонометричні рівняння та нерівності» доцільно доповнити вивченням питань, пов'язаних із застосуванням методів наближених обчислень.

Таким чином, вивчаючи зазначені теми у 10 класі, учнів слід навчити:

1. *Переводити радіанну міру кута у градусну і навпаки, якщо заданий кут виражений: а) точним числом; б) наближеним числом.*

2. *Зображати на одиничному колі кути, що виражені у градусах та у радіанах, причому радіанна міра повинна бути представлена як числом, вираженим частинами числа π, так і довільним дійсним числом.*

3. Знаходити значення тригонометричних та обернених до них функцій при: а) наближених значеннях аргументу; б) точних значеннях аргументу.

4. Будувати графіки тригонометричних та обернених до них функцій: а) на міліметровому папері, використовуючи елементарні геометричні перетворення; б) за допомогою комп'ютерної програми.

5. Розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема графічним методом: а) на міліметровому папері, використовуючи елементарні геометричні перетворення; б) за допомогою комп'ютерної програми.

6. Розв'язувати прикладні та практичні задачі, у яких під час розв'язування використовуються тригонометричні функції (або обернені до них).

Вивчивши теми «Тригонометричні функції», «Тригонометричні рівняння та нерівності», старшокласники повинні уміти:

1. Переводити радіанну міру кута в градусну і навпаки, зокрема для наближених його значень.

2. Встановлювати відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі.

3. Будувати графіки тригонометричних та обернених до них функцій на міліметровому папері і за допомогою комп'ютерних програм.

4. Обчислювати наближені значення тригонометричних та обернених до них функцій за допомогою калькулятора.

5. Знаходити наближені розв'язки тригонометричних рівнянь та нерівностей графічним методом на міліметровому папері і за допомогою комп'ютерних програм.

6. Застосовувати тригонометричні функції до розв'язування прикладних задач.

Зупинимося більш детально на формах організації роботи на уроках, методиці вивчення наближених обчислень під час розгляду даної теми.

Формування у старшокласників умінь виконувати правильно записати міру кута, виражену в радіанах або градусах, переведення міри кута з одних одиниць вимірювання в інші, заслуговує на окрему увагу. Детально методичні рекомендації щодо виконання таких операцій описані нами в публікації [92]. Зроблені в них висновки дають учням алгоритм переведення десяткового дробу, що виражає міру кута, у градуси, мінути і секунди:

1. Записати міру кута у вигляді десяткового дробу, округливши його до чотирьох десяткових знаків за правилами округлення.

2. Подати її у вигляді суми цілої та дробової частини. Дробову частину перевести у мінути, домножаючи для цього розряд десятих на 6; розряд сотих на 0,6; тисячних – на 0,06; десятитисячних – на 0,006 відповідно, а отримані добутки додати.

3. Дробову частину, що виражає кількість мінут перевести у секунди, домножаючи для цього розряд десятих на 6; розряд сотих на 0,6; тисячних – на 0,06; десятитисячних – на 0,006 відповідно, а отримані добутки додати.

4. Округлити отримане число до секунд.

Для переведення точних величин можна використовувати онлайн конвертер переведення мір кутів, що розташований за електронною адресою http://www.unitjuggler.com/перевод-angle-из-arcmin-в-rad.html. Він дає змогу обрати одиниці вимірювання вихідної величини. Зручність його полягає у тому, що градусна міра кута подається з точністю до секунд, де цифри результату є правильними. Окрім цього, відповідь також представлена у вигляді десяткового дробу. Але слід пам’ятати, що кут, виражений у градусах потрібно спочатку подати у вигляді десяткового дробу, або перевести у мінути чи секунди. Для ситуації, коли величина кута виражена наближеним числом, доцільно використовувати метод меж.

Детально алгоритм переведення мір кутів описаний у вищевказаній публікації та у додатках 31 і 32.

Одним із найголовніших понять теми є одиничне коло, визначення значень тригонометричних функцій довільного кута, їх властивостей за

допомогою кола. Під час його застосування закладається основа вивчення тригонометрії в цілому. Тому учням пропонується велика кількість тренувальних вправ з використанням одиничного кола. Насамперед, старшокласникам слід навчитися правильно розташовувати точки, що відповідають заданому куту, на колі. Мається на увазі, що вони повинні бути розташовані у потрібній чверті і правильно по відношенню одні до інших незалежно від одиниць вимірювання кута. У випадку, коли кут задано у градусах чи за допомогою частин числа π, учні справляються із завданням досить легко. Що стосується випадку, коли кут вимірюється числом, то практика показує, що тут у них виникають труднощі.

Приклад 2.12. Розташуйте на одиничному колі точки, що відповідають числам а) 4,2; б) 4,8.

Розв'язання. Порівняємо задані числа із частинами числа π. Як відомо, π=3,141592… Оцінимо це значення, округляючи його до сотих з недостачею та надлишком. Завдання полягає в тому, щоб порівняти задані числа із частинами числа π, які виражають міри кутів, що розділяють координатні чверті між собою. Відомо, що $3{,}14 < \pi < 3{,}15$

Звідси $1{,}57 < \frac{\pi}{2} < 1{,}58.$

Додаючи почленно нерівності, маємо $4{,}71 < \frac{3\pi}{2} < 4{,}73.$

Тоді: $\pi < 3{,}15 < 4{,}2 < 4{,}71 < \frac{3\pi}{2}$, звідки $\pi < 4{,}2 < \frac{3\pi}{2}$.

Таким чином, число 4,2 знаходиться у третій координатній чверті.

З іншого боку, $\frac{3\pi}{2} < 4{,}73 < 4{,}8 < 6 < 2\pi$. Отже, $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8 < 2\pi$, звідки робимо висновок, що число 4,8 знаходиться у четвертій координатній чверті. Таким чином, на рисунку точка А буде відповідати числу 4,2, точка В – числу 4,8 (рис.2.12).

Також на цьому етапі вивчення одиничного кола та його зв'язку із тригонометрією важливим є експериментальне визначення значень тригонометричних функцій та їх порівняння. При цьому те, наскільки точно потрібно зобразити точки на одиничному колі, залежить від змісту завдання.

Наприклад, якщо потрібно порівняти значення $\cos 4{,}2$ і $\cos 4{,}8$, то зображення, зробленого на рис.2.11 буде достатньо, оскільки абсциси точок А і

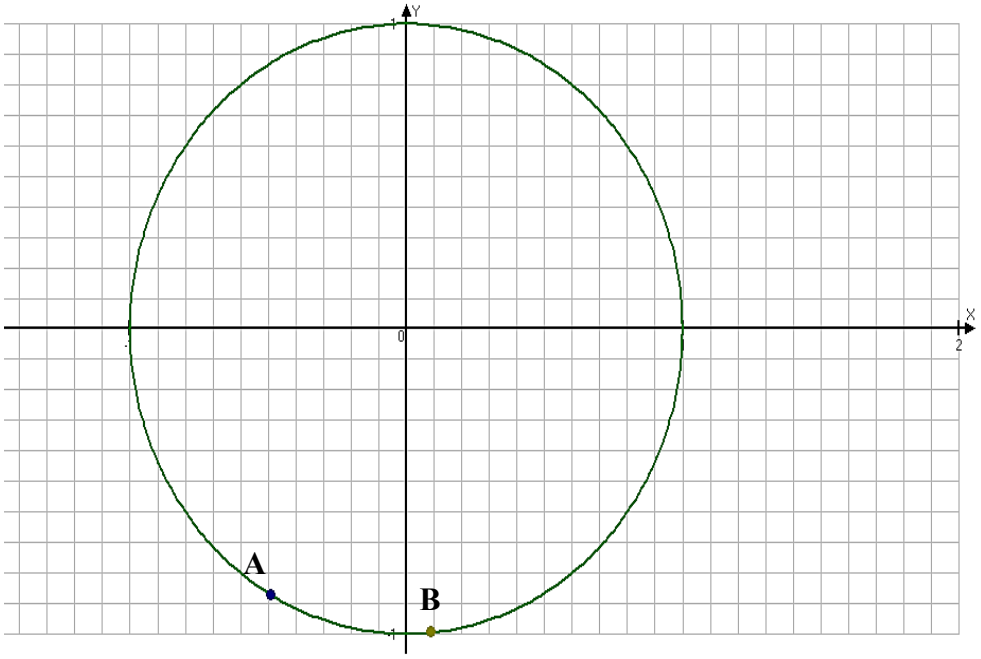


Рис. 2.12

В мають різні знаки. Для того, щоб порівняти значення $\sin 4{,}2$ і $\sin 4{,}8$, цього буде недостатньо в силу того, що за побудовою неможливо визначити, яка з точок має більшу ординату, а яка – меншу. У такому випадку доцільно досліджувати більш детально взаємне розташування точок А і В. З цією метою достатньо зробити «прикидку» модуля різниці $\left|\frac{3\pi}{2} - 4{,}2\right|$ і $\left|\frac{3\pi}{2} - 4{,}8\right|$. Оскільки $\left|\frac{3\pi}{2} - 4{,}8\right| < \left|\frac{3\pi}{2} - 4{,}2\right|$, то точка А розташована вище, ніж точка В, тому має більшу ординату, тобто $\sin 4{,}2 > \sin 4{,}8$.

Для експериментального (практичного) знаходження значень функцій при заданому значенні аргументу за допомогою одиничного кола міру кута доцільно перевести у градуси. У такий спосіб можна побудувати кут повороту на одиничному колі за допомогою транспортира. Виконання такого завдання зручно здійснити у вигляді практичної роботи (додаток В2). Її учні можуть виконати у якості домашнього завдання, а на наступному уроці порівняти результати.

Під час вивчення тригонометричних функцій у 10 класі учні повинні використовувати вже відомі знання, уміння та навички про функції, зокрема правила знаходження значення функції, якщо значення аргументу є: а) точним

числом; б) наближеним числом; алгоритм побудови графіка функції, опис її властивостей за допомогою побудованого графіка тощо. Результати практичної роботи показують, що визначення значень функцій за допомогою одиничного кола дає дуже «грубий» результат. Тому слід виробити правила, за допомогою яких можна було б точніше знаходити наближені значення тригонометричних функцій.

Як було зазначено раніше, під час знаходження значення функції при точному значенні аргументу усі цифри, що висвітлюються на калькуляторі чи екрані монітору (окрім, можливо, останньої) – правильні. Тому якщо аргумент тригонометричної чи оберненої до неї функції – точна величина, то наближене значення функції визначається з наперед заданою точністю.

Під час проведення дослідження були розроблені правила-орієнтири, які дають змогу здійснювати раціональні обчислення по знаходженню наближених значень тригонометричних функцій з наближеними значеннями аргументу. Проте, як показала практика, такі правила є громіздкими для запам'ятовування. Ними можна користуватися за умови, що правила знаходяться безпосередньо перед очима учня, щоб він міг їх уважно прочитати і застосувати. Зручнішими є правила, запропоновані Ю.М. Колягіним та ін., З.І. Слєпкань у навчальних посібниках з методики викладання математики [166, с.104, 222, с.119]. Під час тригонометричних обчислень учням повідомляються наступні правила підрахунку цифр: *якщо наближене значення кута відоме з точністю до градуса, десятків минут, одиниць минут, то, шукаючи значення тригонометричної функції, слід округлити його до двох, трьох, чотирьох значущих цифр відповідно*. Це правило працює і у зворотному напрямку: *якщо значення тригонометричної функції відоме з двома, трьома, чотирма значущими цифрами, то кут належить округлювати відповідно до градусів, десятків минут, минут.*

Наприклад, слід враховувати і те, що для визначення малих кутів – від 0° до $5^\circ 42'$ – за значеннями їх синусів і тангенсів з точністю до $1'$ достатньо знати три значущі цифри цих функцій, а для кутів, близьких до 90°, за чотирма

значущими цифрами значень їх синусів значення кутів беруться з точністю до десятків минут. Також слід зазначити, що характер зміни тангенса кутів, близьких до 90°, а також котангенса кутів, близьких до 0°, не дає змоги сформулювати правила, якими зручно було би користуватися на практиці для знаходження значення відповідної функції при наближеному значенні аргументу. У такому випадку слід або переходити до значень синуса і косинуса відповідного кута, або користуватися безпосередньо методом меж, отримуючи досить неточний результат обчислень.

Опис алгоритму застосування методу меж описаний у попередньому параграфі роботи. Його особливість для тригонометричних функцій полягає в тому, що аргумент доцільно виражати кутом, якому відповідає точка на одиничному колі, яка розташована в першій координатній чверті. На проміжку від 0° до 90° зростаючими є функції $y = \sin x$, $y = tgx$, а спадними – $y = \cos x$, $y = ctgx$.

Практика показує, що учням звичніше користуватися градусною мірою кута, тому коли постає питання, як же діяти у випадку, якщо кут заданий у радіанах, вони одразу намагаються перевести його міру в градуси. Але під час такого переведення з'являється похибка округлення, яка накладається на вже існуючу похибку вимірювання. Тому значення тригонометричної функції буде менш точним. Цього можна уникнути, якщо безпосередньо знаходити значення функції при наближеному значенні аргументу, вираженому у радіанах.

У профільних класах, де математика вивчається на поглибленому рівні, доцільно звернути увагу учнів на те, що для малих кутів, близьких до нуля, виконуються наближені рівності $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$. Вони широко використовуються учнями на уроках фізики у 10 класі під час виконання лабораторних і практичних робіт. При цьому кути вимірюються у радіанах. Такі рівності ще раз підкреслюють, важливість радіанної міри кута. Наприклад, $\sin 2^{\circ} \approx \sin(2 \cdot 0{,}01745) = \sin 0{,}03490 \approx 0{,}0348929 \ldots \approx 0{,}03489$.

Не слід забувати про те, що під час вивчення тригонометричних формул, що пов'язують тригонометричні функції одного кута, вправи на знаходження

значень тригонометричних функцій за відомою величиною однієї з них повинні містити як точні, так і наближені величини. Таким чином учні можуть повторити, закріпити навички виконувати операції над наближеними числами. Приклади таких завдань запропоновані нами у системі задач і вправ до теми (додаток Г3).

Наступним етапом вивчення тригонометричних функцій є побудова їх графіків. З цією метою за вже відомим з теми «Степенева функція» алгоритмом пропонуємо учням розрахунково-графічну роботу по побудові графіка функції $y = \sin x$ (додаток Б2). Виконання такої роботи дозволить отримати шаблон синусоїди на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ та легко перейти до побудови графіка функції $y = \cos x$, враховуючи, що $\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$. Тобто слід усі точки побудованого графіка $y = \sin x$ змістити на $\frac{\pi}{2}$ праворуч.

Графік, отриманий за допомогою програми Advanced Grapher, матиме вигляд, представлений на рисунку 2.13.

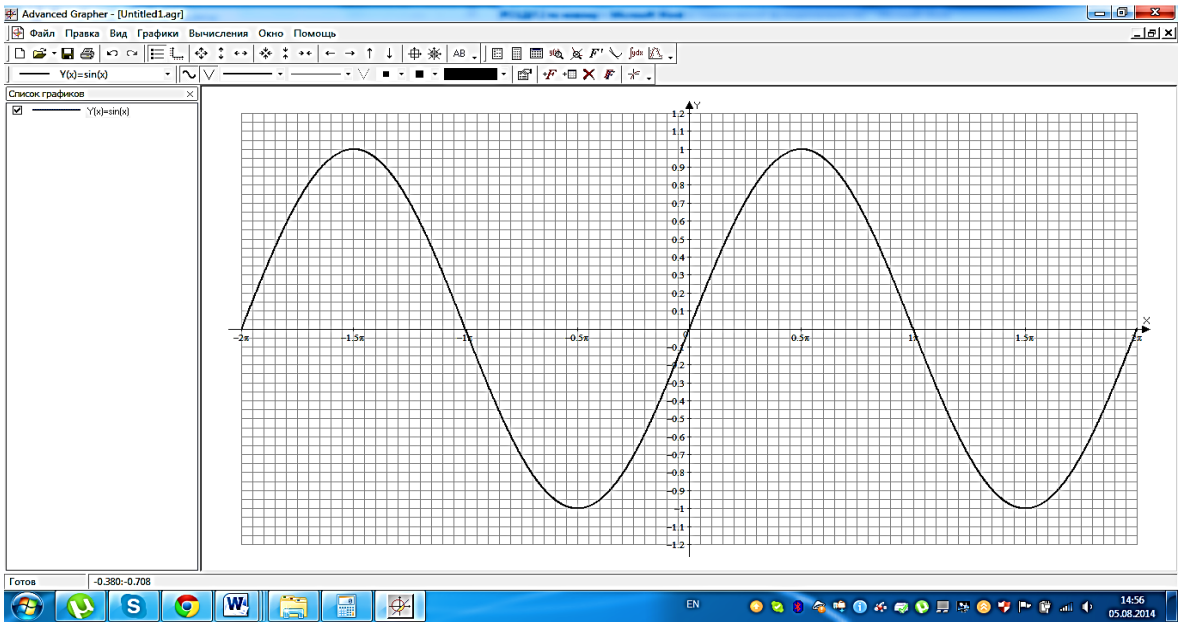


Рис. 2.13

Оскільки учні виготовили шаблон однієї «арки» синусоїди, то ним дуже зручно скористатися. Аналогічно виготовляється шаблон та будуються графіки функцій $y = tgx$, $y = ctgx$. Після цього, використовуючи елементарні геометричні перетворення, учні можуть будувати графіки складніших тригонометричних функцій.

На вивчення обернених тригонометричних функцій та їх властивостей у ШКМ відводиться 2-3 години. За цей час учні повинні ознайомитися із графіками обернених тригонометричних функцій, властивостями, навчитися знаходити їх значення за відомим значенням аргументу. Тому для побудови графіків достатньо скористатися умовами існування та властивостями обернених функцій і виготовленими шаблонами. Щоб зобразити графік функції $y = arcsin\, x$, областю визначення якої є відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, зображується за допомогою шаблона синусоїди графік, симетричний графіку $y = sin\, x$ відносно прямої $y = x$ (рис.2.14). Аналогічно виконуються побудови графіків решти обернених тригонометричних функцій.

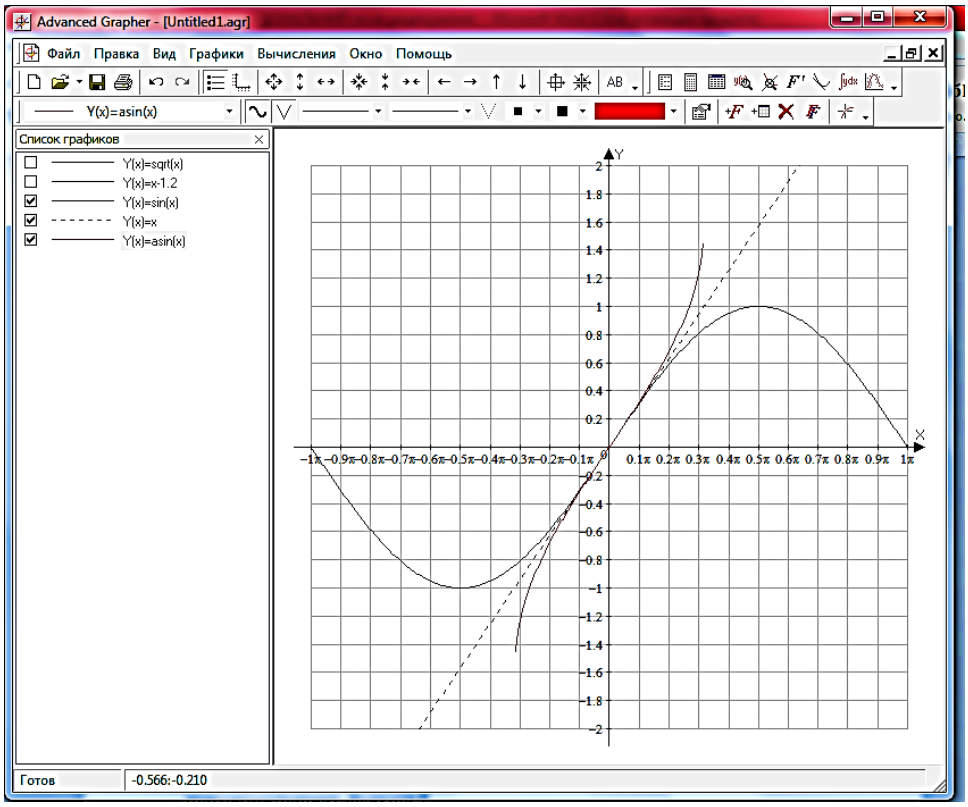


Рис. 2.14

Також доцільно звернути увагу учнів на знаходження значень обернених тригонометричних функцій за відомим значенням аргументу. Якщо він є точним, то розрахунки проводяться за допомогою калькулятора з наперед заданою точністю. Якщо уважно подивитися на клавіатуру калькулятора, то можна помітити, що на ній відсутній арккотангенс числа. Як відомо, тангенс і котангенс однакового, відмінного від нуля аргументу є взаємно оберненими

величинами. Тому для додатного аргументу $\text{arcctg}x = \text{arctg}\frac{1}{x}$. Для знаходження арккотангенса від'ємного числа функція зводиться до додатного аргументу за допомогою рівності $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$. Тоді $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arctg}\frac{1}{x}$. Подальші обчислення виконуються за методом підрахунку правильних цифр.

Оскільки, як зазначалося раніше, значення тригонометричних функцій, як правило, є наближеними, то виникає потреба відшукати правила знаходження наближених значень обернених до них функцій, коли аргумент – наближена величина. Для знаходження величини кута з точністю до мінут за відомим значенням аргументу, можна користуватися чотиризначними математичними таблицями. Тому в учнівське дослідження включаються числа з точністю до чотирьох знаків. При цьому зручно скористатися тим, що арксинус і арктангенс є непарними функціями, а для двох інших функцій справедливі рівності $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$. Тому для виведення правил-орієнтирів, якими можна було би користуватися у подальшому, достатньо дослідити, як знаходити наближені значення обернених тригонометричних функцій лише з додатнім наближеним значенням аргументу.

З метою вироблення таких правил можна об'єднати клас у групи по 2 учні, запропонувавши їм за допомогою методу меж знайти кількість правильних цифр у значенні функції в залежності від точності аргументу.

Аналіз результатів такої роботи приводить учнів до запису таких правил-орієнтирів, аналогічних до методу підрахунку правильних цифр:

1. Для арксинуса та арккосинуса кількість правильних цифр значення функції дорівнює кількості десяткових знаків аргументу. Якщо модуль аргументу дорівнює 1,0; 1,00; 1,000;… або 0,0; 0,00; 0,000…, то кількість правильних цифр співпадає з кількістю правильних цифр аргументу, але – не більше двох.

2. Для арктангенса числа, меншого за модулем за 2 та арккотангенса числа, модуль якого менший 0,5, кількість правильних цифр значення функції дорівнює кількості десяткових знаків аргументу.

3. Для арктангенса числа, модуль якого більший за 2 та арккотангенса числа, більшого по модулю за 0,5, кількість правильних цифр у значенні функції дорівнює кількості цифр в значенні аргументу.

Таким чином, створені учнями правила-орієнтири допоможуть знаходити наближені значення тригонометричних та обернених до них функцій при відомому значенні аргументу. Визначені правила-орієнтири можуть бути як вивчені на пам'ять (на розсуд вчителя для класів з поглибленим вивченням математики) або оформлені у вигляді пам’ятки, якою учні можуть користуватися за потребою (для класів, де математика вивчається на академічному рівні або на рівні стандарту).

Отримані знання використовуються учнями під час розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей аналітичним та графічним способами.

Розпочинається знайомство з тригонометричними рівняннями з найпростіших. У систему вправ, що формують навички їх розв’язування доречно включити завдання на знаходження наближених розв’язків тригонометричних рівнянь. Розв’яжемо рівняння $\cos x = -0{,}235$. За формулою розв’язків можна записати $x = \pm \arccos(-0{,}235) + 2\pi n,\ \ n \epsilon N$.

За описаними вище правилами кількість правильних цифр значення арккосинуса дорівнює кількості десяткових знаків аргументу, тобто трьом. Використовуючи калькулятор учні обчислюють значення $\arccos(-0{,}235) = 1{,}80801 \ldots \approx 1{,}81$. Таким чином, $x \approx \pm 1{,}81 + 2\pi n,\ \ n \epsilon N$.

Під час обчислень на калькуляторі слід не забувати, що кут вимірюється у радіанах, тому відповідний регістр має бути переключений на кнопку «радіани».

Очевидно, що тригонометричні функції можуть міститися не лише в найпростіших тригонометричних рівняннях. Тому до уваги слід взяти випадки, коли ліва і права частини рівняння є відповідно алгебраїчною та тригонометричною функціями тощо. Такі рівняння найзручніше розв’язувати графічно. Причому в класах, де математика вивчається на академічному рівні та

на рівні стандарту доцільно це робити за допомогою комп'ютерної програми. Пояснюється такий підхід до розв'язання тим, що система координат під час побудови алгебраїчної та тригонометричної функції «вручну» відрізняються: в першому випадку на осі абсцис відкладаємо одиничні відрізки, виражені дійсними числами, а в другому – у частинах числа π. Перераховувати ці значення дуже незручно. Комп'ютерна ж програма здійснює побудову значно швидше і у одній системі координат. З іншого боку, за допомогою візуального зображення зручніше визначати, на якому проміжку можуть міститися корені відповідного рівняння. Таким чином, якщо учням ставиться завдання знайти наближені корені рівняння

$$2\sin(3x-4) = x^2 - 3x - 5,$$

то потрібно за допомогою програми Advanced Grapher побудувати в одній системі координат графіки відповідних функцій $y = 2\sin(3x-4)$ та $y = x^2 - 3x - 5$ (рис.2.15). За допомогою зображення легко визначити, що рівняння має два корені на проміжку (-2; 5).

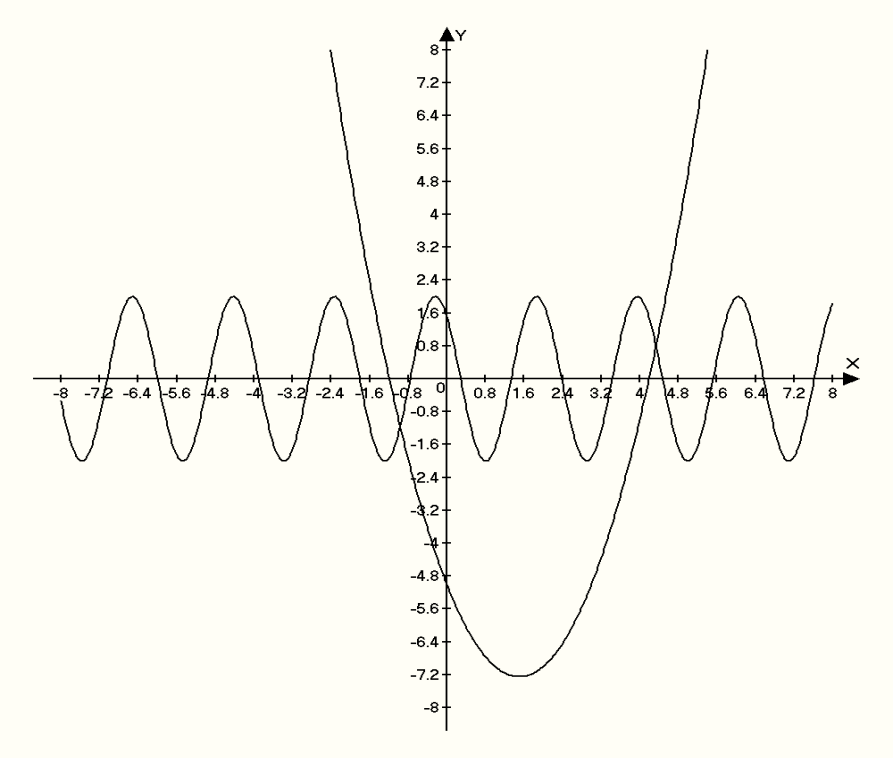


Рис. 2.15

Тоді координати точок перетину знаходяться за допомогою програми з наперед заданою точністю (максимально можлива точність – 5 десяткових знаків). Таким чином, отримаємо результат (таблиця 2.2):

Таблиця 2.2

Точки пересечения: 2	
X	Y
– 0,96755	– 1,1612
4.3375	0.8014

Тоді наближеними коренями заданого рівняння є числа $x_1 \approx -0{,}96755;$ та $x_2 \approx 4{,}33750$. Як видно з таблиці, координати другої точки перетину графіків мають чотири десяткових знаки. У відповідь записується п’ять цифр в силу того, що калькулятор рахує п’ять правильних цифр для наближеного значення аргументу. Оскільки остання цифра – п’ятий десятковий знак наближеного значення аргументу дорівнює нулю, то останній, п’ятий знак, калькулятор, не вказує. Слід звернути увагу учнів на те, що в цьому випадку наближене значення функції записується правильними цифрами, за виключенням, можливо, останньої.

На знайомство з найпростішими тригонометричними нерівностями навчальною програмою відводиться мало часу. У зв’язку з цим їх розв’язування наближеними методами також зручно здійснювати за допомогою комп’ютера. Поділити їх можна на дві групи: 1) найпростіші нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з деяким дійсним числом; 2) нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з алгебраїчним виразом. Розглянемо кожну з цих ситуацій окремо.

1) Найпростіші нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з деяким дійсним числом. Методика розв’язування таких нерівностей описана в підручниках [3, 5, 6, 9, 173-175]. Особливість знаходження наближених розв’язків полягає в тому, що значення обернених тригонометричних функцій числа є, як правило, наближеними. Наприклад,

потрібно розв'язати нерівність виду $\sin x > 0{,}32$. Тоді за стандартним алгоритмом знаходимо, що

$$\arcsin 0{,}32 + 2\pi n < x < \pi - \arcsin 0{,}32 + 2\pi n\,, n\epsilon N.$$

Аргумент арксинуса може бути як точним, так і наближеним. Тому значення функції обчислюється за правилами, описаними вище для відповідного (точного чи наближеного) значення аргументу. Нехай число 0,32 – наближене. Воно містить два десяткових знаки, тому значення арксинуса беремо з двома значущими цифрами. Обчислення здійснюються за допомогою калькулятора. Значення виразу $\pi - \arcsin 0{,}32$ зручно рахувати на інженерному калькуляторі. Під час запису наближених значень не треба забувати, що лівий кінець проміжку округлюється з надлишком, а правий – з недостачею. Межа абсолютної похибки при цьому – одиниця останнього розряду. Таким чином, множина розв'язків нерівності буде записана у вигляді $x\epsilon[0{,}4 + 2\pi n\,; 2{,}8 + 2\pi n], n\epsilon N$. Значення 0,4 та 2,8 записано з точністю до h= 0,1 – межа абсолютної похибки.

2) Нерівності, в яких тригонометрична функція порівнюється з алгебраїчним виразом. У такому випадку аналогічно до розв'язування рівнянь застосовуємо графічний метод. Знайдені абсциси точок перетину графіків функцій будуть визначати проміжки, які є множиною розв'язків відповідної нерівності. Оскільки учні вже знайомі з методом графічного розв'язання нерівностей, то доцільно запропонувати самостійно описати алгоритм та розв'язати запропоновану нерівність подібного типу. Виконувати спільне завдання старшокласники можуть самостійно з використанням ПК. При цьому обговорення кроків розв'язування повинно відбуватися під керівництвом та контролем вчителя.

Побудова графіків функцій, знаходження наближених розв'язків рівнянь та нерівностей, як було зазначено, вже знайомий учням процес. Тому особливості виконання описаних під час вивчення попередніх тем алгоритмів передбачає створення вчителем проблемних ситуацій, вирішення та обґрунтування яких покладається на десятикласників. Саме таким чином

відбувається закріплення навичок роботи з наближеними величинами, з'ясовуються незрозумілі моменти і шляхи їх вирішення.

Найважливішим етапом вивчення теми є розв'язування практичних і прикладних задач. Саме вони допомагають школярам зрозуміти важливість тієї чи іншої теми в житті та діяльності людини. Тому розв'язування прикладних задачі є обов'язковим фактором формування компетентностей старшокласника. Зміст таких задач може бути, насамперед, пов'язаний із гармонічними коливаннями, географічними координатами тощо. Перелік завдань такого змісту представлений у додатку ГЗ. Розглянемо одну із таких прикладних задач.

Приклад 2.13. Два теплохода А та В, що знаходяться в відкритому морі на відстані 20 км один від одного, одночасно отримали сигнал «SOS» з корабля С. Радіопеленг по відношенню до прямої АВ на судні А дорівнює 50 градусів, а на судні В – 82 градуси. Який теплохід першим прийде на допомогу, якщо швидкість руху судна А складає 60,0 км/год, а судна В – 53,2 км/год?

Розв'язання. Дані задачі є наближеними, тому розвязувати її потрібно одним із наближених методів.

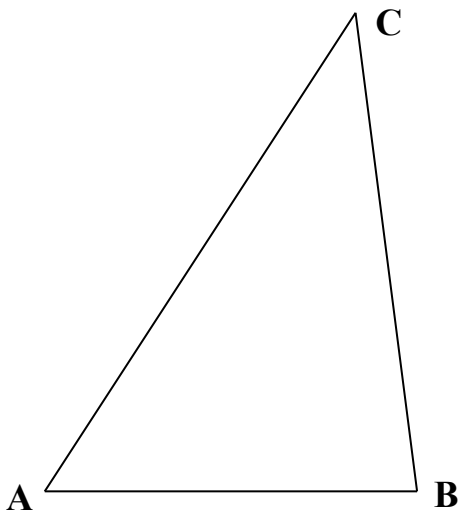


Рис. 2.16

І спосіб. Скористаємося МППЦ.

Міра кута $\angle C \approx 180° - (50° + 82°) = 48°$. Тоді з теореми синусів (рис. 2.16)

$$BC = \frac{AB \cdot sin50°}{sin48°};$$

$$AC = \frac{AB \cdot sin82°}{sin48°}.$$

Міри кутів трикутника АВС задані з точністю до градуса. Тоді за описаними раніше правилами значення синусів відповідних кутів слід округлювати до двух значущих цифр та ще слід залишити одну запасну цифру, оскільки дія є проміжною. Тоді

$$BC \approx \frac{20 \cdot 0{,}766}{0{,}743} = 20{,}619 \ldots \approx 20{,}6 \text{ (км)}.$$

Аналогічно $AC \approx \frac{20 \cdot 0{,}990}{0{,}743} = 26{,}648 \ldots \approx 26{,}6$ (км).

Таким чином, час, потрібний теплоходам А і В для того, щоб дістатися до теплохода С відповідно дорівнюватиме:

$t_{BC} \approx 20{,}6 \div 53{,}2 = 0{,}3872 \ldots \approx 0{,}39$ (год);

$t_{AC} \approx 26{,}6 \div 60{,}0 = 0{,}4433 \ldots \approx 0{,}44$ (год).

З отриманих результатів слідує, що теплоход В прийде на допомогу швидше, ніж А.

ІІ спосіб. Скористаємося методом меж.

З теореми синусів (рис. 2.16) $BC = \frac{AB \cdot sin50°}{sin48°}$; $AC = \frac{AB \cdot sin82°}{sin48°}$.

З теореми про суму кутів трикутника

$$81{,}5° < \angle B < 82{,}5°$$

$$\underline{49{,}5° < \angle A < 50{,}5°}$$

$$180° - (82{,}5° + 50{,}5°) < \angle C < 180° - (81{,}5° + 49{,}5°),$$

$$47° < \angle C < 49°.$$

Тоді за властивостями числових нерівностей отримаємо:

$$\frac{19{,}5 \cdot sin49{,}5°}{sin48°} < BC < \frac{20{,}5 \cdot sin50{,}5°}{sin47°}$$

$$\frac{19{,}5 \cdot sin81{,}5°}{sin48°} < AC < \frac{20{,}5 \cdot sin82{,}5°}{sin47°}$$

Швидкість руху теплоходів В та А відповідно (у км/год):

$53{,}15 < v_B < 53{,}25,\ 59{,}95 < v_A < 60{,}05.$

Отже час, потрібний теплоходам В та А для того, щоб дістатися до теплохода С, буде:

$$\frac{19{,}5 \cdot sin49{,}5°}{53{,}25 \cdot sin48°} < t_B < \frac{20{,}5 \cdot sin50{,}5°}{53{,}15 \cdot sin47°};$$

$$\frac{19{,}5 \cdot sin81{,}5°}{60{,}05 \cdot sin48°} < t_A < \frac{20{,}5 \cdot sin82{,}5°}{59{,}95 \cdot sin47°}.$$

Скористаємося інженерним калькулятором для розрахунків і отримаємо:

$$0{,}3747 \ldots < t_B < 0{,}4069 \ldots;$$

$$0{,}3 < t_B < 0{,}5$$

Тоді $t_B = 0{,}4 \pm 0{,}1$(год). Очевидно, що згідно означення правильною цифрою є нуль, сумнівною – четвірка.

$$0{,}4321 \ldots < t_A < 0{,}46355 \ldots$$

$$0{,}43 < t_A < 0{,}47$$

Тоді $t_B = 0{,}45 \pm 0{,}02$(год). Правильними цифрами отриманого значення є цифри нуль і чотитри, сумнівною – цифра 5.

Отримані в результаті обчислень результати говорять про те, що неможливо точно визначити, який з теплоходів прийде на допомогу швидше.

Оскільки результати, отримані методом меж дають більш достовірний результат, то можемо записати відповідь.

Відповідь. Неможливо точно визначити, який з теплоходів прийде на допомогу швидше

Таким чином, під час вивчення тригонометричних функцій, рівнянь і нерівностей у старшокласників формуються навички роботи з наближеними величинами, удосконалюються уміння застосовувати методи НО до розв’язування прикладних задач, здійснюються міжпредметні зв’язки та зв'язок математики із життям.

2.3.3. Наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функції.

Згідно чинної навчальної програми [205], основною метою вивчення теми «Показникова та логарифмічна функції» є закріплення і подальше формування умінь досліджувати функції, сформованих в попередніх темах, застосування зазначених функцій до опису реальних процесів. Обов’язковою умовою вивчення теми є виявлення зв'язку між такими поняттями як функція, рівняння, нерівність, формування умінь встановлювати властивості функції за графіком, будувати ескізи графіків, заданих аналітично, у формі таблиці за експериментально визначеними даними, а також виконувати геометричні перетворення графіків [205,с. 58].

Згідно з концептуальною моделлю вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої профільної школи (див. параграф 2.1) знайомство з темою розпочинається з повторення властивостей степеня з дійсним показником, на основі яких базується вивчення показникової функції, її

властивостей. Уміння знаходити значення показникової функції за відомим значенням аргументу дозволяє виконувати побудову графіків показникових функцій, зокрема $y=2^x$ та $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$. Оберненою до показникової є логарифмічна функція. Тому на основі знань, отриманих про функцію $y=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$, можна будувати графік та описувати властивості логарифмічної функції. Уміння будувати графіки описаних вище функцій широко використовується для розв'язування рівнянь та нерівностей, зокрема графічним способом, для пошуку їх наближених розв'язків.

За допомогою показникової та логарифмічної функцій описується багато процесів, що відбуваються в реальному житті. Проте розв'язування задач, які описують такі процеси, неможливе без застосування НО, тому зміст теми «Показникова та логарифмічна функції» доцільно доповнити вивченням питань, пов'язаних із застосуванням методів наближених обчислень. Фрагмент розробленої нами експериментальної програми з алгебри і початків аналізу для 10 класу з урахуванням методів наближених обчислень подано у додатку А.

Під час вивчення теми доцільно продовжити формування умінь знаходити наближене значення функції за відомим значенням аргументу, а також застосовувати методи НО до обчислення значень виразів, що містять показникову, логарифмічну функції, визначати кількість правильних цифр у відповіді, виконувати обчислення з наближеними значеннями чисел і величин, застосовуючи метод меж та метод підрахунку цифр. Також слід формувати в учнів уміння знаходити значення функції із заданою точністю для точних значень аргументу за допомогою обчислювальних засобів. Доцільно розглянути із старшокласниками завдання на побудову графіків показникових, логарифмічних функцій, після чого логічно перейти до розв'язання рівнянь та нерівностей, які містять ці функції, графічним способом. Також можна знаходити наближені розв'язки рівнянь та нерівностей аналітичним способом. Опис багатьох реальних процесів відбувається за експоненціальним законом,

тому обов'язково слід познайомити старшокласників із графіком функції $y = e^x, y = lnx.$

Уміння здійснювати елементарні геометричні перетворення графіків дають змогу перейти до знаходження наближених розв'язків показникових рівнянь (нерівностей) графічним методом як «вручну», на міліметровій сітці, так і за допомогою комп'ютерних програм в більш складних ситуаціях.

Важливим питанням вивчення теми є розв'язування прикладних задач, процеси у яких описуються за допомогою показникових та логарифмічних функцій. З метою реалізації міжпредметних зв'язків, впровадження профільності навчання, доцільно показати учням, які явища природи, виробництва описуються за допомогою таких функцій. Обов'язково звернути увагу старшокласників на те, що і методи, якими розв'язуються відповідні задачі, – є методами НО. Якість проведених вимірювань та розрахунків можна перевірити, обчислюючи межу відносної похибки, та зробити висновки щодо точності вихідних даних задачі і доцільності обраного методу розв'язання.

Таким чином, з точки зору вивчення НО, вивчаючи тему «Показникова і логарифмічна функції», учнів слід навчити:

6) обчислювати значення показникової, логарифмічної функції для:

а) точних значень аргументу, зокрема $y = e^x, y = 10^x, y = lnx, y = lgx;$ *б) наближених значень аргументу, зокрема* $y = e^x, y = 10^x, y = lnx, y = lgx$ *;*

2) обчислювати значення виразів, що містять показникову, логарифмічу функцію, для:а) точних значень аргументу; б) наближених значень аргументу;

3) будувати графіки показникових та логарифмічних функцій: а) «вручну», на міліметровій сітці, (виготовити шаблони деяких графіків функцій, зокрема $y = e^x, y = 10^x, y = lnx, y = lgx$*); б) за допомогою комп'ютерної програми;*

4) розв'язувати графічно рівняння та нерівності, що містять показникову, логарифмічну функції методами наближених обчислень: а) «вручну», на міліметровій сітці; б) за допомогою комп'ютерної програми;

5) розв'язувати практичні та прикладні задачі з використанням методів наближених обчислень;

6) оцінювати точність отриманих результатів.

Зупинимося більш детально на методичних аспектах розвитку умінь у старшокласників виконувати наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функцій.

Приклад 2.14. Знайдіть значення функції з точністю до тисячних, якщо x=2,53: а) $y = 3^x$; б) $y = \frac{2{,}5^x + 1{,}13}{1{,}725}$; в) $y = e^x$. Значення аргументу вважати точним числом.

Розв'язання. а) Учні легко справляються з першим завданням, використовуючи обчислювальний засіб: $3^{2{,}53} = 16{,}110787 \ldots \approx 16{,}111$.

б) Щоб обчислити значення функції $y = \frac{2{,}5^x + 1{,}13}{1{,}725}$ при x=2,53, слід врахувати, що значення виразу $2{,}5^{2{,}53}$ є наближеним проміжним результатом. Тому округлюємо його з однією запасною цифрою – з точністю до десятитисячних: $2{,}5^{2{,}53} = 10{,}1575325 \ldots \approx 10{,}1575$. Подальші розрахунки можна проводити як за методом меж, так і за методом підрахунку цифр.

За правилом підрахунку цифр: $\frac{10{,}1575 + 1{,}13}{1{,}725} = \frac{11{,}2875}{1{,}725} = 6{,}543478 \ldots \approx 6{,}543$. Обов'язково увагу учнів треба звернути на те, що в чисельнику дробу додаються наближене і точне числа, тому кількість цифр суми не зміннюється. Проте вона вже є наближеним числом. Тому під час ділення слід користуватися правилом підрахунку цифр – в наближеному значенні частки залишається чотири значущих цифри. Отже, наближене значення функції дорівнює $y \approx 6{,}543$.

Якщо ж обчислення проводити за ММ, то наближене значення виразу $2{,}5^{2{,}53}$ запишеться у вигляді подвійної нерівності:

$10{,}15745 < 10{,}1575 < 10{,}15755$.

Почленно додавши до усіх частин нерівності 1,13, можна записати:

$11{,}28745 < 11{,}2875 < 11{,}28755$, тоді

$\frac{11{,}28745}{1{,}725} < \frac{11{,}2875}{1{,}725} < \frac{11{,}28755}{1{,}725}$, звідки

$$6{,}5434782\ldots < \frac{11{,}2875}{1{,}725} < 6{,}5435072\ldots.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що перші чотири цифри частки є правильними. Правильна чи сумнівна п'ята цифра слід перевірити. Така перевірка проводиться за вже відпрацьованим впродовж вивчення попередніх тем алгоритмом, описаним в параграфі 2.2.1:

$6{,}5434 < \frac{11{,}2875}{1{,}725} < 6{,}5436$, отже

$$\frac{11{,}2875}{1{,}725} = \frac{6{,}5436 + 6{,}5434}{2} \pm \frac{6{,}5436 - 6{,}5432}{2} = 6{,}5435 \pm 0{,}0002.$$

Таким чином, 5 – сумнівна цифра. За умовою завдання відповідь слід округлити до тисячних. При цьому не треба забувати, що похибка округлення додається до межі абсолютної похибки: $y \approx 6{,}544 \pm (0{,}0002 + 0{,}0005) = 6{,}544 \pm 0{,}0007$. За записом числа чітко видно, що друга четвірка – сумнівна цифра.

Як бачимо, отримані відповіді різняться останньою цифрою, яка є сумнівною в обох випадках. Виконання такого роду завдання різними методами дає змогу звернути увагу на особливості проведення розрахунків залежно від того, точним чи наближеним є числовий доданок (множник) у записі формули. Практика показує, що учні часто вважають наближеними усі числа, в записі яких є більше, ніж один-два десяткових знаки. З метою уникнути такої помилки доцільно розглядати обидва методи для знаходження значення функції та постійно акцентувати увагу дітей на подібних фактах. Завдання аналогічного змісту доцільно розглянути і під час вивчення логарифмічної функції.

в) Важливою величиною в курсі математичного аналізу, а також широко вживаною під час опису реальних процесів, є число e≈2,71828…. Оскільки це число є ірраціональним, то знаходження значень функцій $y = e^x$ та $y = lnx$ слід розглянути окремо. Сучасні обчислювальні засоби, зокрема встановлений на ПК інженерний калькулятор, дає змогу обчислювати їх значення при точних значеннях аргументу, з потрібною кількістю правильних цифр. Так, якщо треба знайти значення функції $y = e^x$ при $x = 2{,}53$, то в режимі інженерного калькулятора, що встановлений на комп'ютері, на екрані одразу висвітлюється

значення функції з усіма правильними цифрами, окрім, можливо, останньої: $e^x = 12{,}5535061\ldots$. В умові задачі вимагається здійснити обчислення з точністю до тисячних, тому за правилами округлення $e^x \approx 12{,}554$.

Нехай потрібно знайти значення функції $y = lnx$. Характерним для логарифмічної функції є те, що за допомогою калькулятора найчастіше можна знайти лише значення натурального або десяткового логарифма. Причому на комп'ютері клавіша для обчислення десяткового логарифма позначена «log». Для того, щоб знайти значення логарифма числа з іншою основою, зручно скористатися формулою переходу до іншої основи – десяткового чи натурального логарифму і провести відповідні обчислення на калькуляторі. Зрозуміло, що при цьому використовується режим інженерного калькулятора. Тому обов'язково треба наголосити старшокласникам, що зручно набір на калькуляторі проводити у вигляді виразу. Наприклад, якщо треба обчислити значення $\log_{2,3} 5{,}738$, то спочатку слід записати його за допомогою десяткового логарифма: $\log_{2,3} 5{,}738 = \frac{lg5{,}738}{lg2{,}3}$, після чого здійснювати набір на калькуляторі. У результаті на екрані з'являється відповідь: 2,097600… Оскільки задані числові значення вважалися точними числами, то значення функції містить усі правильні цифри, окрім останньої, яка може бути сумнівною.

Реальні явища, що описуються за допомогою функціональних залежностей, містять аргумент, який набуває, як правило, наближених значень. Тому учні повинні вміти знаходити наближене значення функцій і в таких випадках. Перш, ніж виконувати завдання такого типу, доцільно згадати властивості зазначених функцій, а саме вид монотонності, в залежності від основи. Після цього в рамках фронтальної роботи з класом зручно повторити порядок знаходження значення функції при наближеному значенні аргументу за ММ. Практика показує, що при переході від нерівності між показниками степеня до нерівності між степенями, учні забувають змінити знаки нерівностей у випадку спадної функції. Тому слід ще раз наголосити на цьому. Після усного повторення теоретичного матеріалу учні можуть виконати практичну роботу на обчислення значень показникової (логарифмічної) функції за ММ. Під час такої

роботи потрібно поставити перед школярами завдання: спробувати виробити правило-орієнтир застосування методу підрахунку цифр для показникових та логарифмічних функцій при наближених значеннях аргументу (таблиця 2.3). Визначити, для яких значень аргументу метод меж стає «незручним» у використанні, тобто дає велику похибку обчислень.

Таблиця 2.3

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = a^x$	*a=1,2*	*a=1,2*	*a=1,2*	*a=3,12*	*a=3,12*	*a=3,12*	*a=8,235*	*a=8,235*	*a=8,235*
x	*x≈–1,15*	*x≈1,37*	*x≈4,247*	*x≈–1,15*	*x≈1,37*	*x≈4,247*	*x≈–1,15*	*x≈1,37*	*x≈4,247*
y									
h									
ε									

Завдання, які при цьому пропонуються учням, доцільно підібрати лише з основою, більшою за одиницю. Це пов'язано з тим, що за властивостями степеня $a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$, де при $0 < a < 1$ маємо: $\frac{1}{a} > 1$. Крім того, вибір основи, більшої за одиницю, дозволить порівняти отримані учнями значення меж похибок і зробити висновок.

Таким чином, під час виконання практичної роботи учні роблять висновок про те, що для показникової функції з основою $a > 1$ при збільшенні значень аргументу межа відносної похибки стає все більшою, а кількість правильних цифр результату обчислень – все меншою. Також, проаналізувавши отримані в результаті роботи дані, можна сказати, що в наближеному значенні функції слід залишати таку ж кількість цифр, як і в наближеному значенні аргументу. Таке правило справедливе для невеликих значень аргументу.

Аналогічну роботу в якості домашньої розрахункової роботи можна запропонувати учням виконати під час вивчення логарифмічної функції. Очевидно, що в цій ситуації також доцільно досліджувати лише значення логарифмів з основою більше одиниці, оскільки за властивостями логарифма $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, де для $0 < a < 1$ виконується нерівність $\frac{1}{a} > 1$. Відмінністю

функції $y = -\log_{\frac{1}{a}} x$ є те, що при основі $\frac{1}{a} > 1$, вона є спадною за рахунок знаку «мінус» перед логарифмом.

Таким чином, розрахунки, виконані за методом меж, дають змогу зробити висновок у вигляді правила підрахунку цифр: *при знаходженні наближеного значення показникової та логарифмічної функцій для наближених значень аргументу у відповіді слід залишати стільки цифр, скільки їх містить наближене значення аргументу. У проміжних розрахунках залишають ще одну цифру – запасну, яку відкидають у відповіді.*

Особливої уваги заслуговує дослідження значень логарифмічної функції при наближених значеннях аргументу, близьких до нуля. При умові, що основа логарифма близька до одиниці, точність розрахунків суттєво погіршується. У подальшому виробленим правилом можна користуватися під час виконання завдань тоді, коли не потрібна висока точність розрахунків. У інших випадках потрібно застосовувати метод меж. Слід зазначити, що у ШКМ розрахунки і обчислення проводяться з такими значеннями аргументу, при яких значення логарифма дають допустиму похибку. Якщо ж говорити про розрахунки, що виконуються на виробництві, то в них доцільно записати аргумент у стандартному вигляді і застосувати властивості логарифма.

Окремої уваги заслуговує питання знаходження області визначення логарифмічної функції, де під знаком логарифма міститься алгебраїчний вираз з наближеними коефіцієнтами. В цьому випадку користуватися слід методом меж. Причому, як зазначалося в параграфі 2.2, під час запису відповіді лівий кінець проміжку округлюємо з надлишком, а правий – з недостачею. Наприклад, знайдемо область визначення функції $y = \log_2(3{,}25x - 1{,}73)$, де коефіцієнти є наближеними числами. Записавши відповідну умову $3{,}25x - 1{,}73 > 0$, приходимо до нерівності $x > \frac{1{,}73}{3{,}25}$. Дію ділення слід виконувати за методом меж, який вже для учнів знайомий. Таким чином, $0{,}52 < \frac{1{,}73}{3{,}25} < 0{,}54$, отже $\frac{1{,}73}{3{,}25} = 0{,}53 \pm 0{,}01$. Оскільки знайдена частка є лівим кінцем проміжку, то округлення здійснюється з надлишком: $x \in (0{,}54; +\infty)$.

Уміння знаходити наближені значення показникової, логарифмічної функцій дає змогу перейти до знаходження значень виразів, що містять ці функції. Як було зазначено раніше, для цього можна застосувати метод меж або метод підрахунку правильних цифр. У одинадцятому класі учні вже добре з ними знайомі, тому на уроці достатньо пригадати алгоритм проведення розрахунків за допомогою методу меж, запропонувати старшокласникам об'єднатися в групи по 2-3 чоловіка та виконати практичну роботу по знаходженню наближених значень виразів при наближених значеннях змінної. Під час виконання цієї роботи обов'язково заповнюються таблиці проміжних значень функції, описані в параграфі 2.3.1. «Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції».

Як зазначає А.Я.Хінчин [249, с.5], під час вивчення розділів курсу математики, пов'язаних із спеціальними, важливими функціями, функціональна сторона питання має стати тим стрижнем, навколо якого групується усе решта. Тому обчислення значень функції, зокрема наближених, та на їх основі побудова графіка показникової функції є одним із важливих етапів знайомства з нею. [249].

Уміння знаходити наближені значення функції при наближених значеннях аргументу дає змогу перейти до побудови графіків показникової та логарифмічної функції. У систему вправ, що застосовують графічні зображення, повинні входити завдання, різні за формою, змістом та цілями (додаток Г4). Аналогічно до схеми побудови графіка степеневої функції (параграф 2.3.1), учням доцільно запропонувати розрахунково-графічну роботу (додаток Б3). З цією метою потрібно використати міліметрову сітку.

Для виконання такої роботи корисно запропонувати кілька варіантів завдань: учні, які працюють із завданнями І варіанту виконують вправи а) та б), ІІ варіанту – виконують вправи а) та в). Такий розподіл завдань пов'язаний з тим, що у завданнях на побудову графіків функцій за допомогою елементарних геометричних перетворень та графічного розв'язання рівнянь та нерівностей найчастіше зустрічаються показникові функції з відповідними основами. За

умови виготовлення шаблонів графіків функцій за варіантами, вчитель на кожну парту в класі буде мати комплект, що складається з усіх шаблонів. Далі доцільно обговорити шлях виконання роботи з учнями класу. Під час обговорення слід звернути увагу старшокласників на наступні факти:

1. Побудова точок на міліметровому папері відбувається з точністю до ціни поділки, тому вважаємо, що аргумент – наближена величина. Тоді обчислення значень функції виконуються за вже відомим алгоритмом із застосуванням МПЦ або ММ за власним бажанням учнів. Знайдені наближені значення функції і заносяться у відповідну таблицю.

2. Оскільки числа 2 і 3 – точні, а число e – наближена величина, то доцільніше обчислення наближених значень першої функції виконувати за методом підрахунку цифр, а другої – за методом меж.

3. Тільки після виконання усіх розрахунків точки з відповідними координатами наносяться на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Одиничний відрізок на координатних осях вибираємо довжиною 1см.

4. Виготовлення шаблонів дає змогу учням економити час на виконання побудов у подальшому, причому за шаблоном графіка функції $f(x)=2^x$ можна будувати графік $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Для цього досить шаблон обернути іншим боком і зобразити лінію, що симетрична до графіка $f(x)=2^x$ відносно осі ординат. Аналогічні міркування справедливі і для іншої пари функцій з взаємно оберненими основами.

Для побудови графіка показникової функції також зручно користуватися основною логарифмічною тотожністю: $a^x = e^{lna^x} = e^{x\cdot lna}$. Тоді, маючи шаблон графіка функції $f(x)=e^x$, досить скористатися елементарними перетвореннями.

Таким чином, можна сказати, що *для побудови графіка показникової функції досить графік функції* $f(x)=e^x$ *стиснути або розтягнути від осі абсцис за правилами геометричного перетворення* $y = f(kx)$*, де* $k = lna$. Тому кожний одинадцятикласник повинен мати власний шаблон графіка функції

$f(x) = e^x$. Міркуючи аналогічно для логарифмічної функції, отримаємо: $\log_a x = \frac{lnx}{lna} = \frac{1}{lna} \cdot lnx$. Отже, *щоб побудувати графік логарифмічної функції з довільною основою, достатньо побудувати графік функції* $y = lnx$ *та здійснити його перетворення* $y = k \cdot (lnx)$, *де* $k = \frac{1}{lna}$. Про відповідні перетворення можна говорити з одинадцятикласниками лише після вивчення поняття логарифма числа та формування умінь знаходити його значення для наближеного значення аргументу.

Закріпити уміння будувати графіки показникової та логарифмічної функції можна за допомогою системи вправ, що пропонується в додатку Г4.

Важливою змістовою лінією у вивченні алгебри і початків аналізу є тема «Рівняння та нерівності». Як правило, математичними моделями практичних задач, що розглядаються в ШКМ є саме рівняння, їх системи, інколи – нерівності та їх системи. Як зазначалося раніше, розв'язками таких моделей є наближені числа та величини. Тому невід'ємною складовою вивчення показникової та логарифмічної функцій є знаходження наближених розв'язків рівнянь та нерівностей.

Наближені розв'язки показникових рівнянь можуть з'явитися як під час розв'язання графічним, так і аналітичним способом. Деякі показникові рівняння аналітично можуть бути розв'язані лише за допомогою логарифмів, тому виконання вправ такого типу відбувається впродовж вивчення усієї теми. Система вправ, що пропонується нині діючими підручниками, містить підбір рівнянь, розв'язки яких є точними, «красивими» числами. Тому як тільки старшокласники зустрічаються із завданнями, в яких розв'язки є наближеними числами, вони починають шукати помилку, вважаючи, що коренями рівнянь можуть бути лише точні числа. Отже, набір завдань доцільно доповнити такими завданнями, як:

Приклад 2.15. За допомогою обчислювальних засобів знайдіть корінь рівняння $10^{2x-1} = 7$ з точністю до сотих [5, с.148, №145].

Вказівки до розв'язування. Користуючись означенням логарифма, та зробивши відповідні рівносильні перетворення, можна записати, що $x = \frac{lg7+1}{2}$. Подальше розв'язування зводиться до обчислення значення виразу при точному значенні аргументу. За допомогою калькулятора $lg7 = 0{,}84509\ldots$. Учні згадують, що усі цифри числа на екрані монітора – правильні, тому округлюємо за правилами округлення до тисячних: $lg7 \approx 0{,}854$ – остання цифра запасна, її відкидають у відповіді. Таким чином, $x \approx \frac{0.854+1}{2} = 1{,}427 \approx 1{,}43$.

Слід зауважити, що корінь рівняння можна було знайти іншим чином. Оскільки вираз не є громіздким, можна визначити порядок дій і послідовно їх виконувати на інженерному калькуляторі, який міститься у базовому програмному забезпеченні кожного персонального комп'ютера. Тому бажано звернути увагу старшокласників на такий підхід розв'язування рівнянь.

Систему завдань на розв'язання рівнянь та нерівностей, що містять показникові та логарифмічну функції, слід доповнити вправами на графічне їх розв'язування. Таким чином, з одного боку формуються навички роботи з програмою, відпрацьовуються практичні правила набору математичних формул. З іншого боку, відбувається самоперевірка правильності виконання завдань.

Приклад 2.16. Розв'язати рівняння графічно: а) $\log_2 x = x - 3$; б) $1{,}5^x = x^2$. Виконайте завдання за допомогою міліметрової сітки. Перевірте правильність розв'язання за допомогою комп'ютерної програми. Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

Вказівки до розв'язування. Як зазначалося в попередніх параграфах дослідження, побудову графіків функцій в обох випадках можна виконувати двома шляхами: перший – за допомогою методу меж складається таблиця наближених значень функції а) $y = \log_2 x$; б) $y = 1{,}5^x$ при заданих значеннях аргументу на відповідних проміжках. На підставі отриманих значень будуються графіки відповідних функцій (див. рис. 2.17, 2.19).

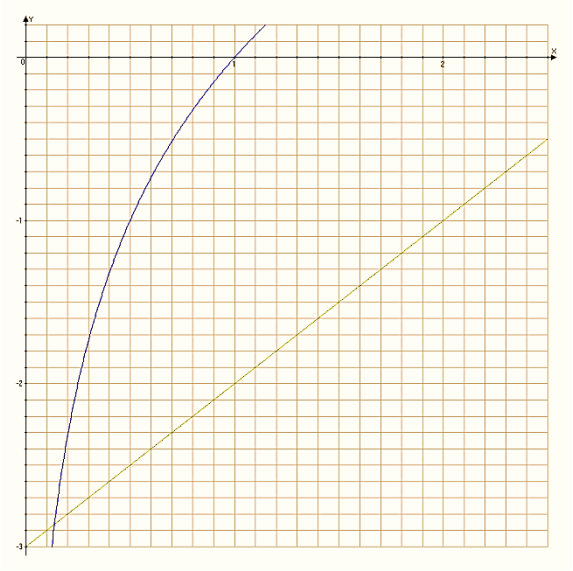


Рис. 2.17

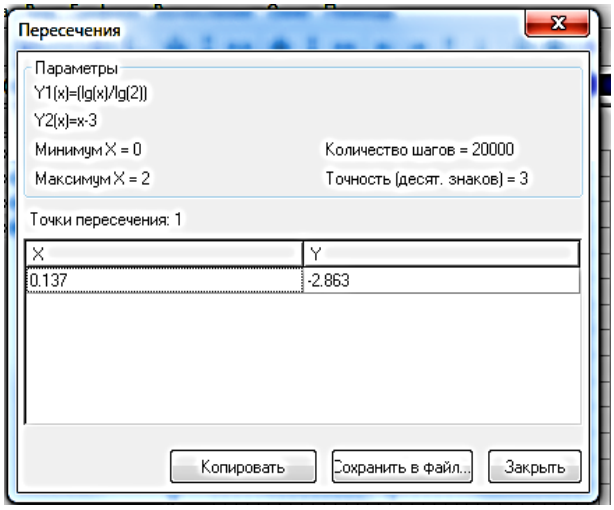


Рис. 2.18

З іншого боку, можна скористатися шаблоном відповідно функції $y = e^x$ або $y = lnx$ та елементарними геометричними перетвореннями, описаними вище. За допомогою графічного зображення можна знайти корені відповідних рівнянь. Як видно, в першому випадку $x \approx 0{,}2$, в другому $x_1 \approx -0{,}8$, $x_2 \approx 1{,}7$. Таким чином, за допомогою міліметрової сітки можна визначити приблизне значення коренів з точністю, не вищою, ніж ціна поділки. Тому «вручну»

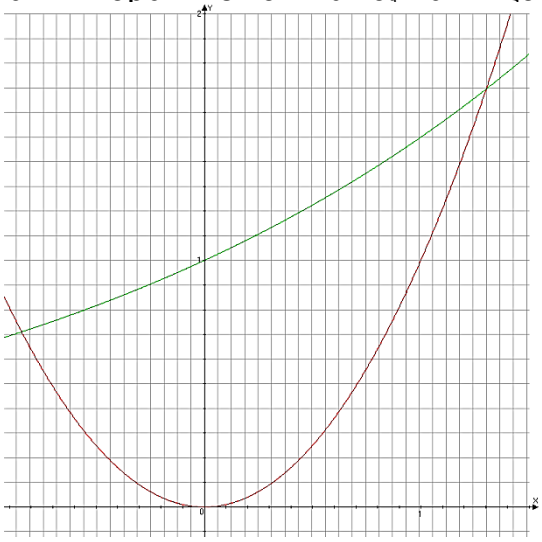


Рис. 2.19

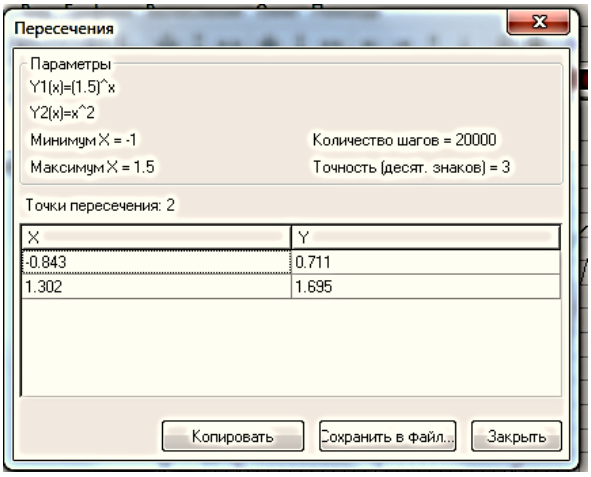


Рис. 2.20

знайдені корені рівнянь матимуть вигляд: а) $x \approx 0{,}2 \pm 0{,}1$; б) $x_1 \approx -0{,}8 \pm 0{,}1$, $x_2 \approx 1{,}7 \pm 0{,}1$. Проте слід звернути увагу учнів на те, що під час побудови графіків функцій «вручну» до похибки розрахунків добавляється ще похибка зображення рисунка на листку паперу. Тому точність обчислень є досить ненадійною. З метою перевірки отриманих результатів доцільно звернутися до

вже знайомої учням програми Advanced Grapher. Її використання допоможе не тільки побачити точне зображення графіків відповідних функцій, а й обчислити координати точок їх перетину з наперед заданою точністю (рис.2.17–2.20).

Під час введення формул функцій, графіки яких слід побудувати, потрібно наголосити учням, що серед стандартних формул неможливо набрати логарифм з довільною основою, а лише натуральний чи десятковий. Тому під час набору функції $y = \log_2 x$ потрібно звести його до іншої основи: $y = \frac{lnx}{ln2}$. Також потрібно визначити, з точністю до скількох десяткових знаків потрібно знайти наближені координати тачок перетину графіків. Оскільки в умові сказано знайти корені рівнянь з точністю до десятих і до сотих, то для того, щоб усі цифри у відповіді можна було вважати правильними, і лише останню – сумнівною, задаємо точність наближення – 3 десяткових знаки. Як видно з рис. 2.18, рис.2.20 наближеними коренями рівнянь є відповідно числа а) з точністю до десятих $x \approx 0{,}1$; з точністю до сотих $x \approx 0{,}14$; б) з точністю до десятих $x_1 \approx -0{,}8$; $x_2 \approx 1{,}3$; з точністю до сотих $x_1 \approx -0{,}84$ $x_2 \approx 1{,}30$.

На підставі сформованих умінь розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння, формуються уміння розв’язувати нерівності відповідного класу. Особливість розв’язання показникових та логарифмічних нерівностей полягає в тому, що потрібно враховувати область визначення логарифмічної функції.

Наприклад, розв’язати нерівність:

а) $1{,}75^x \leq 3 - x$; б) $\log_\pi(3 - x) < (x - 1)^2$.

Правила запису відповіді до графічно розв’язаних нерівностей були описані в параграфі 2.2. Розглянемо більш детально кожну з запропонованих нерівностей.

а) За допомогою програми Advanced Grapher будується графіки функцій $y = 1{,}75^x$ та $y = 3 - x$. Зрозуміло, що множиною розв’язків нерівності буде множина абсцис тих точок координатної площини, для яких графік першої функції розташований не вище від графіка другої. Знайшовши координати точок перетину графіків, можна записати відповідь (рис.2.21) : $x \epsilon (-\infty; 1{,}1241]$.

При цьому учні згадують про те, що незалежно від знаку нерівності – строгий він чи нестрогий, значення кінців проміжку включаємо у відповідь, а правий кінець проміжку округлюємо з недостачею. Причому округлювати можна з точністю до 0,0001 або з меншою точністю, оскільки використання програми дає можливість координати точок перетину знаходити з точністю до 0,00001.

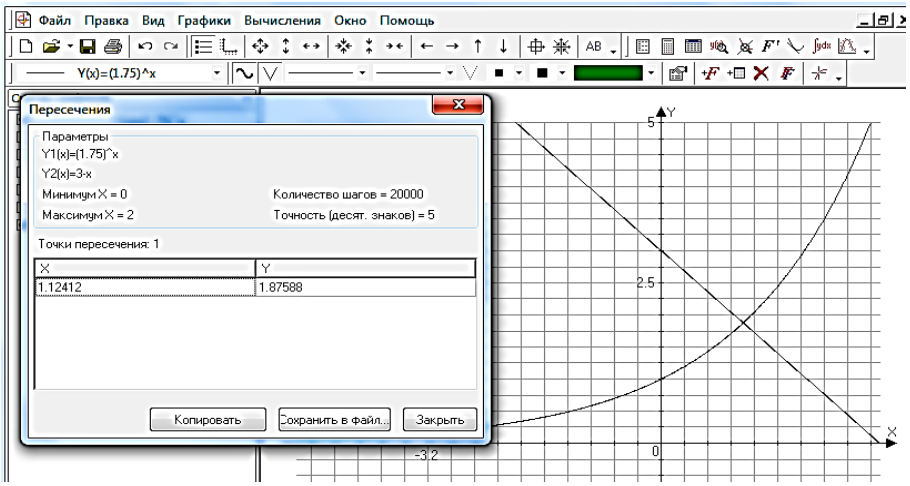


Рис. 2.21

Таким чином, можна записати відповідь: $x\epsilon(-\infty;1{,}1241]$.

б) Щоб перейти до розв'язування другої нерівності, слід побудувати графіки функцій $y=\log_{\pi}(3-x)$ та $y=(x-1)^2$. Множиною розв'язків нерівності буде множина абсцис тих точок координатної площини, для яких графік першої функції розташований нижче від графіка другої. Знайшовши координати точок перетину графіків, можна записати відповідь (рис.2.22):

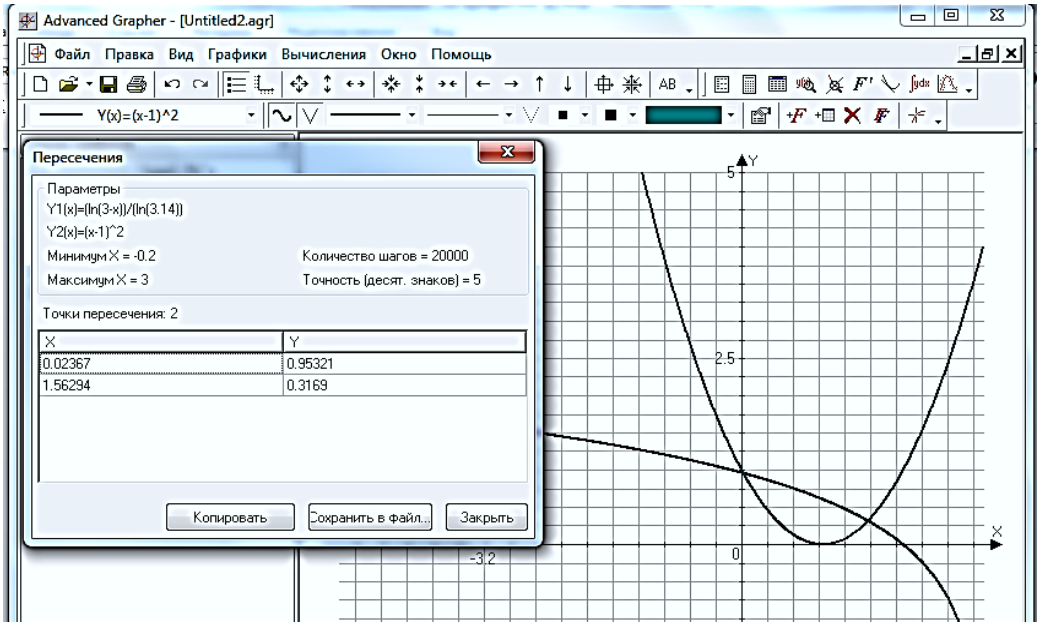


Рис. 2.22

$x\epsilon(-\infty; 0{,}0236] \cup [1{,}5630; 3)$. При цьому потрібно пам'ятати про те, що дана логарифмічна функція визначена лише для $x < 3$. Тому обов'язково під час запису відповіді слід врахувати цю умову.

Таким чином, відповідь має вигляд: $x\epsilon(-\infty; 0{,}0236] \cup [1{,}5630; 3)$

Наступним кроком доцільно запропонувати розв'язати графічно рівняння, нерівності, які містять більш складні вирази, такі, що відповідні графіки важко побудувати на міліметровій сітці. Приклади таких рівнянь (нерівностей) запропоновані в розробленій нами системі задач і вправ до теми «Показникова і логарифмічна функція» (додаток Г4).

Під час застосування показникової функції для розв'язування прикладних задач, доцільно проілюструвати на прикладах, де вони можуть бути використані для опису явищ природи. Зокрема, як зазначається в джерелах [7; 222, с.176], такими явищами можуть бути:

1. Залежність висоти h води від часу t під час її витікання з циліндричної посудини через тонку трубку, розміщену в основі циліндра, описується формулою $h = h_0 \cdot a^t$, де a – величина, яка залежить від розміру діаметра трубки.

2. Зміна тиску P, вираженого у мм ртутного стовпчика, в залежності від висоти h (вираженої у км), при сталій температурі, описується формулою $P = 760 \cdot 0{,}8818^h$.

3. Температура T 100г піску, нагрітого до температури 100°, який охолоджується при температурі повітря 0°, залежить від часу t. Ця залежність виражається формулою $\mathrm{T} = 100 \cdot 0{,}8^{\mathrm{t}}$.

4. Ріст деревини відбувається за законом $A = A_0 \cdot a^{kt}$, де A – зміна кількості деревини в часі, A_0– початкова кількість деревини, t – час, a, k – деякі сталі.

5. Площа перерізу троса з вантажем, що занурюється у воду, повинна змінюватися за законом, $\mathrm{S} = \mathrm{S_0} \cdot \mathrm{e}^{\frac{(\gamma-1)\cdot \mathrm{S_0}\cdot \mathrm{x}}{\mathrm{P}}}$, де So — площа його нижнього перерізу, S — площа перерізу на висоті x від нижнього перерізу, γ — питома

вага речовини, з якої виготовлено трос, Р — вага в повітрі вантажу, що занурюється у воду.

Використовуючи зазначені дані, вчитель може як самостійно скласти додаткові задачі прикладного характеру, так надати її у вигляді додаткового інформаційного повідомлення з метою демонстрації тісного зв'язку навчального матеріалу, що вивчається, з життям. Розв'язування таких та багатьох інших задач неможливе без застосування методів НО. Наведемо приклад.

Приклад 2.17. Ділянка лісництва складає 58500 м^3 лісу. Скільки буде лісу на цій ділянці через 15 років, якщо його щорічний приріст складає в середньому 2%?

Розв'язання. Розрахунки слід проводити за формулою складних відсотків: $V = V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, де V_0– початковий об'єм лісу, $p\%$ – щорічний приріст лісу, n – кількість років за методом меж. Це пояснюється тим, що, як зазначалося учням під час вивчення степеневої функції, метод підрахунку правильних цифр дає несуттєву похибку лише для другого та третього степеня. В даному ж випадку підносити доводиться до 15 степеня.

Зрозуміло, що задані в умові величини є наближеними. Тоді згідно умови $V_0 = (58500 \pm 50)$м^3, $p = (2 \pm 0{,}5)\%$. Кількість років $n = 15$ можна вважати точною величиною, оскільки обчислення можна проводити для того ж дня рівно через рік. Отже, $1{,}5 < p < 2{,}5$,

$$0{,}015 < \frac{p}{100} < 0{,}025,$$

$$1{,}015 < 1 + \frac{p}{100} < 1{,}025,$$

$$(1{,}015)^{15} < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < (1{,}025)^{15}.$$

Основи степенів – числа, більші за одиницю, тому знаки нерівності не змінюються. За допомогою калькулятора:

$$1{,}250232 \ldots < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}44829 \ldots$$

У записі наближеного значення виразу залишаємо лише правильні цифри і одну запасну – сумнівну. Визначати правильні і сумнівні цифри учні вже вміють, тому така процедура не викликає у них труднощів. Отже,

$$1{,}2 < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}5.$$

За умовою $58450 < V_0 < 58550.$

Тоді можна перемножити останні дві нерівності.

$$1{,}2 \cdot 58450 < V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 1{,}5 \cdot 58550,$$

$$70140 < V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} < 87825.$$

За вже відомою процедурою можна подати останню нерівність у вигляді умовної рівності: $V_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15} = \frac{87825+70140}{2} \pm \frac{87825+70140}{2} = 78982{,}5 \pm 8842{,}5 \approx 79000 \pm (8842{,}5 + 17{,}5) = 79000 \pm 8860.$ Як видно з розрахунків, цифра 9 наближеного результату є сумнівною. Межа абсолютної похибки дорівнює h=8860, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{8860}{79000} \cdot 100\% = 11{,}21 \ldots < 11{,}3\%$. Таким чином, отриманий результат для межі відносної похибки показав, що задані в умові задачі величини взяти з достатньо «грубими» похибками, тому і отриманий результат є недостатньо точним.

Розв’язання прикладних задач із застосуванням методів НО дозволяє продовжувати формування навичок виконувати НО у старшокласників під час вивчення теми «Показникова і логарифмічна функції», підсилювати мотивацію навчання математики за рахунок як міжпредметних зв’язків, так і зв’язку з життям, а також оцінювати, наскільки якісно задані вихідні дані в умові прикладної задачі.

2.4. Наближені обчислення під час вивчення інших тем курсу алгебри і початків аналізу та стереометрії

Важливим завданням ШКМ є посилення прикладної спрямованості вивчення навчального матеріалу. Тому сформовані в учнів уміння і навички мають бути застосовані до розв’язання прикладних задач, зокрема під час вивчення елементів математичного аналізу.

2.4.1. Наближені обчислення під час вивчення похідної та інтеграла

Згідно діючої навчальної програми [205], під час вивчення таких тем, як «Похідна та її застосування» та «Інтеграл та його застосування», основна увага повинна зосереджуватися на тому, що:

1. Похідна характеризує не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни певної величини під час протікання деякого процесу із зміною аргументу. Опис самого процесу здійснюється за допомогою функціональної залежності. При цьому швидкість зміни відповідної функції із зміною аргументу характеризується стрімкістю зміни її графіка.

2. Під час вивчення первісної та інтеграла акцент слід робити на його застосуванні до моделювання реальних процесів і явищ, до розв'язування прикладних задач, а не на безпосередньо техніці інтегрування як такій.

Проте розв'язування таких завдань неможливе без застосування наближених обчислень. Тому діючу навчальну програму для учнів 11-го класу доцільно доповнити питаннями, пов'язаними із застосуванням методів НО під час вивчення тем «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування» (додаток А).

Згідно структури змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої профільної школи (див. параграф 2.1) під час вивчення похідної продовжується формування в учнів умінь знаходити значення похідної функції в точці із заданою точністю як для точних, так і для наближених значень аргументу, знаходити наближені значення критичних точок, екстремумів функції. Оскільки проміжки монотонності функції визначають за допомогою похідної, то учнів слід навчити знаходити точні і наближені розв'язки відповідних нерівностей та правильно з точки зору НО записувати їх у вигляді числових проміжків. Під час виконання завдань з теми учні навчаються виконувати обчислення з наближеними значеннями чисел і величин, застосовуючи обчислювальні засоби, за методами наближених обчислень, визначати кількість правильних цифр у відповіді тощо.

Старшокласників доцільно ознайомити з формулами, що отримуються за допомогою похідної, та правилами їх застосування до знаходження наближеного значення функції. При цьому учням, які вивчають математику на поглибленому рівні, доцільно пояснити, як застосовується поняття похідної для наближених обчислень та вивести вищезгадані формули. При цьому поняття диференціала, який не вивчається в старшій школі, не використовується. Спиратися слід, насамперед, на поняття нескінченно малої функції, яке формується на основі уявлення про нескінченно малу послідовність.

Також з учнями доцільно розглянути завдання на побудову графіків функцій через дослідження функцій за допомогою похідної і перейти до розв'язування більш широкого класу рівнянь та нерівностей, з використанням похідної.

Заключним питанням теми є розв'язування прикладних задач, для яких застосовується похідна. Саме такі задачі мотивують старшокласників вивчати математику як навчальну дисципліну в цілому, так і безпосередньо наближені обчислення як засіб для їх розв'язання.

Таким чином, з точки зору вивчення НО, вивчаючи тему «Похідна та її застосування», учнів слід навчити:

1) обчислювати значення похідної функції в заданій точці для:

а) точних значень аргументу x; б) наближених значень аргументу x;

2) знаходити точні та наближені значення точок екстремумів і екстремуми функцій;

3) знаходити проміжки монотонності функцій як точні та наближені розв'язки відповідних нерівностей;

4) застосовувати формули наближених рівностей, що отримуються з використанням похідної. У класах з поглибленим вивченням математики навчити учнів застосовувати рівність $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$ *для знаходження наближених значень функції;*

5) досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки, використовуючи методи наближених обчислень під час виконання обчислень;

6) розв'язувати практичні та прикладні задачі на застосування похідної, зокрема на знаходження найбільшого та найменшого значень функції з використанням методів наближених обчислень.

Розкриємо методику формування в учнів 11 класу навичок виконувати НО під час вивчення зазначених тем.

Після знайомства з таблицею похідних учні, насамперед, вчаться знаходити значення похідної функції в точці. Тому систему вправ, що пропонується в нині діючих підручниках, доцільно доповнити завданнями, в яких потрібно знайти наближене значення похідної в точці, де аргумент набуває як точних, так і наближених значень, оцінити точність отриманого результату (додаток Г5). З цією метою вони згадують правила-орієнтири, вироблені під час вивчення теми "Функції, рівняння та нерівності", які описані в параграфі 2.2. Після такого повторення учні застосовують уміння, вироблені в десятому класі і удосконалені в процесі вивчення функціональної змістової лінії, у фоновому режимі.

Вивчення питання застосування похідної до наближених обчислень служить гарним фундаментом для пояснення матеріалу про дотичну до графіка функції, а також про дослідження функції за допомогою похідної. Як відомо, для будь якої неперервної функції $y = f(x)$ в точці x_0 виконується рівність $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. З іншого боку, якщо фіксованій точці x_0 надати приріст Δx, то для $x = x_0 + \Delta x$, буде справедливою рівність $f(x) \approx \lim_{x \to x_0} f(x)$, за умови, що $x \approx x_0$. Тоді можемо зробити висновок, що для неперервної у точці x_0 функції поблизу цієї точки виконується наближена рівність $f(x) \approx f(x_0)$. Якщо ж задана функція диференційовна у цій точці, то $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. При $\Delta x \approx 0$, виконується рівність $f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, звідки $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тоді $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$, звідки $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Використовуючи отриману рівність, можна вивести наближені формули, які використовуються для знаходження наближених значень функції:

$\sin x \approx x$, для значень аргументу, вираженого у радіанах та близького до нуля,

$\operatorname{tg} x \approx x$, для значень аргументу, вираженого у радіанах та близького до нуля,

$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\frac{1}{n}\cdot \Delta x$, для значень аргументу, близького до одиниці,

$(1+\Delta x)^n \approx 1+n\cdot \Delta x$, для значень аргументу, близького до одиниці.

Як було сказано вище, в класах з поглибленим вивченням математики доцільно не тільки використовувати зазначені наближені рівності, а й навчити учнів застосовувати формулу $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot \Delta x$ для довільної диференційовної функції.

Приклад 2.18. Знайдіть наближене значення функції $f(x)=\sqrt{x}$ в точці $x = 1{,}03; 9{,}018$.

Розв'язання.

І спосіб. Скористаємося наближеною рівністю $\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\frac{1}{n}\cdot \Delta x$.

Для $x = 1{,}03$ маємо, що $x_0 = 1;\ \Delta x = 0{,}03$. Тоді

$\sqrt{1{,}03} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}03 = 1{,}015.$

Для $x = 9{,}018$ маємо, що $\sqrt{9{,}018} = \sqrt{9+0{,}018} = 3\cdot\sqrt{1+\frac{0{,}018}{9}} =$

$= 3\sqrt{1+0{,}002} \approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}002\right) = 3\cdot 1{,}001 = 3{,}003.$

Таким чином, $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015;\ \sqrt{9{,}018} \approx 3{,}003$.

Зауваження. Під час виконання завдання доцільно звернути увагу учнів на те, що якщо підкореневий вираз не є числом, близьким до одиниці, то спочатку з-під кореня виноситься множник таким чином, щоб підкореневий вираз був близьким до одиниці. Аналогічні завдання розглядалися учнями під час вивчення теми «Функції, рівняння та нерівності» у десятому класі. Тоді вправи носили пропедевтичний характер. В одинадцятому класі обґрунтовуються формули наближених обчислень та формуються навички їх застосовувати на практиці.

II спосіб. Скористаємося формулою $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$. Похідна функції $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тоді:

Для $x=1{,}03$ знаходимо значення $x_0=1$та $\Delta x=0{,}03$. Тоді

$$f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1;$$

$$f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=0{,}5.\text{ Звідси}$$

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x=1+0{,}5\cdot 0{,}03=1{,}015.$$

Для $x=9{,}018$ аналогічно можна визначити $x_0=9$ та $\Delta x=0{,}018$. Тоді

$$f(x_0)=f(9)=\sqrt{9}=3;$$

$$f'(x_0)=f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6};$$

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x=3+\frac{1}{6}\cdot 0{,}018=3{,}003.$$

Таким чином, $\sqrt{1{,}03}\approx 1{,}015$; $\sqrt{9{,}018}\approx 3{,}003$.

Межа абсолютної похибки $h=\left|\sqrt{1{,}03}-1{,}015\right|=0{,}035\ldots<0{,}04$, межа відносної похибки $\varepsilon=\frac{0{,}04}{1{,}015}\cdot 100\%=3{,}94\ldots<4\%$.

Як видно з наведеного прикладу, наближені значення функції, розраховані як одним, так і іншим шляхом, рівні між собою. Перевага другого способу обчислень полягає в тому, що ним можна скористатися для знаходження наближеного значення довільної диференційовної функції в точках $x=x_0+\Delta x$, для яких нескладно знайти значення $f(x_0)$ та $f'(x_0)$.

Дослідження властивостей функції за допомогою похідної передбачає знаходження точок екстремумів, проміжків монотонності функції. З цією метою, з точки зору наближених, обчислень слід згадати методи знаходження наближених коренів рівнянь, та способи оцінки точності отриманих результатів. Згадані методи описані в параграфі 2.2 та в подальшому застосовувалися під час вивчення тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Приклад 2.19. Використовуючи похідну, дослідити функцію на монотонність та визначити точки екстремумів функції $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. Відповідь округліть до тисячних.

Розв'язання. Нехай задано функцію $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. Областю її визначення є множина дійсних чисел.

Обчислюємо похідну $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$.

Знаходимо стаціонарні точки. З цією метою розв'язуємо рівняння: $4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$=0. Очевидно, що аналітичними методами корені такого рівняння знайти важко. Тому застосовується графічний метод: будується графік функції $y = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$ та визначаються її нулі. Виконати побудову допомагає компютерна програма Advanced Grapher (рис.2.23).

Візуальне сприйняття графіка $y = f'(x)$ дозволяє визначити проміжок, на якому знаходяться нулі похідної функції, тобто стаціонарні точки. Як зазначалося раніше, комп'ютерна програма із наперед заданою точністю знаходить їх числові значення (рис. 2.23).

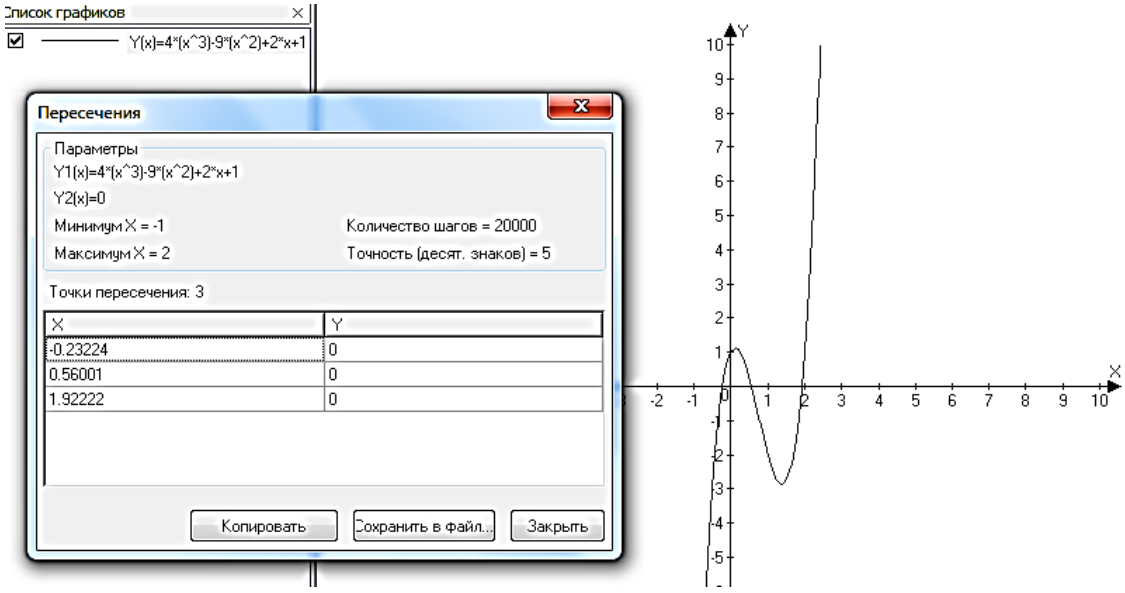


Рис. 2.23

За допомогою візуального сприйняття графіка визначається і поведінка самої функції $y = f(x)$: якщо графік $y = f'(x)$ розташований нижче осі абсцис, то похідна від'ємна, тобто функція спадна, і навпаки, якщо графік $y = f'(x)$ розташований вище осі абсцис, то похідна додатна, тобто функція

зростаюча. Отже, функція $y = f(x)$ зростає на проміжках [–0,232;0,560] та [1,923; +∞); спадає на проміжках (–∞; –0,233] та [0,561;1,922].

Очевидно, що точки мінімуму функції будуть $x_{min} \approx -0{,}232; 1{,}922$, а точка максимуму $x_{max} \approx 0{,}560$ з точністю h= 0,001.

Відповідь. $y = f(x)$ зростає при $x\epsilon$[–0,232;0,560] та $x\epsilon$ [1,923; +∞); $y = f(x)$ спадає при $x\epsilon(-\infty; -0{,}233]$ та $x\epsilon$[0,561;1,922]; $x_{min} \approx -0{,}232; 1{,}922$, а точка максимуму $x_{max} \approx 0{,}560$ з точністю h= 0,001.

Під час виконання завдання учням доцільно ще раз нагадати, що *результати записуються у вигляді проміжків, для яких наближене значення лівого кінця проміжку завжди округлюється з надлишком, а значення правого – з недостачею. При цьому кінці проміжків включаються у відповідь і мають бути записані у квадратних дужках.*

На наступному етапі вивчення теми розглядається застосування похідної до дослідження функції та побудови її графіка. З цією метою доцільно записати у зошити схему дослідження функції, за якою один із кроків передбачає знаходження її нулів. Для цього розв'язується рівняння $f(x) = 0$, причому його розв'язки часто не є «красивими» числами. У такому випадку можна скористатися графічним методом, описаним у параграфі 2.2, і знаходити наближені розв'язки відповідного рівняння із потрібною точністю. Під час знаходження стаціонарних точок доводиться здійснювати аналогічні до вище описаних кроків під час знаходження наближених розв'язків рівняння, лише з використанням похідної функції. Якщо точки екстремуму знайдені, то для визначення місця розташування точки на координатній площині, потрібно обчислити екстремуми функції. Їх значення знаходять за правилами знаходження значення функції при заданому значенні аргументу. Особливу увагу слід звернути на те, точними чи наближеними при цьому є знайдені значення відповідної точки екстремуму, і діяти за відповідним правилом. У завданнях такого типу для розрахунків достатньо застосовувати метод підрахунку правильних цифр.

Таким чином, у процесі дослідження функції за допомогою похідної, методи наближених обчислень можуть бути застосовані неодноразово. Усі вони вивчалися учнями раніше, тому під час вивчення даної теми продовжується формування та закріплення навичок їх використовувати.

Завершується вивчення теми розв'язуванням прикладних задач на застосування похідної та на знаходження найбільшого та найменшого значень функції у прикладних задачах. При цьому у нині діючих підручниках основна увага приділяється розв'язанню абстрактних задач, у яких задана функція та відрізок, на якому слід визначити її найбільше та найменше значення. Другорядне місце займають задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення периметра чи площі деякої фігури. Таку систему задач і вправ доцільно доповнити різноманітними завданнями практичного змісту, які потребують застосування методів НО під час їх розв'язування. Приклади таких завдань представлено у додатку Г5. Розглянемо зразок розв'язання прикладної задачі з даної теми.

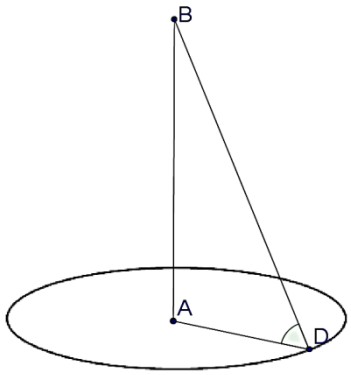


Рис. 2.24

Приклад 2.20 Електрична лампочка висить над центром круглого столу радіуса 0,70 м і дає силу світла I=160 кд. На якій висоті слід підвісити цю лампу, щоб на краю стола отримати найбільшу освітленість?

Розв'язання. Зобразимо рисунок до задачі (рис.2.24). Позначимо джерело світла – лампочку точкою B, відстань від якої до поверхні стола визначається довжиною перпендикуляра до його площини BA, а точку на краю стола – точкою D. Тоді кут нахилу променя світла, який направлений на край стола визначатиметься кутом $BDA=\varphi$.

Як відомо з курсу фізики, величина освітленості E обернено пропорційна квадрату відстані $BD=d$ до джерела світла і пропорційна синусу кута $\varphi=\angle BDA$ нахилу променя світла до поверхні, що освітлюється (рис.2.23): $E = I\frac{\sin\varphi}{d^2}$, де I – сила світла лампи. В умові задачі $I = 160$ кд.

Нехай довжина відрізка $BA = x$ м. Тоді з утвореного прямокутного трикутника BDA за означенням синуса

$$sin\,\varphi = \frac{x}{d}.$$

З теореми Піфагора $d = \sqrt{x^2 + r^2};\quad x \in (0;\,\infty)$, де $r = AD = 0{,}70$м – радіус стола. Отже, $E = I \cdot \frac{x}{d^3} = \frac{I \cdot x}{(\sqrt{x^2+r^2})^3}$.

Таким чином, практична задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції $E(x)$ на проміжку $x \in (0;\,\infty)$.

Зауваження. Оскільки задача має практичний зміст, то числові величини, задані в умові, є наближеними. Тому доцільно розв'язати задачу в загальному вигляді, пам'ятаючи при цьому, що змінною величиною є x. Лише тоді, коли задача розв'язана в загальному вигляді, можна підставити відомі величини і знайти шукану величину, використовуючи методи НО.

Похідна функції $E'(x) = I \cdot \frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}}$.

Критичні точки: $\frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}} = 0;\ r^2 - 2x^2 = 0;\ x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$.

Оскільки функція задана на множині додатних чисел, то існує лише одна критична точка $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.. Очевидно, що при $x < \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція зростає, при $x > \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція спадає, тому $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ – шукане значення відстані, на якій повинна знаходитися лампа, щоб освітлення на краю стола було максимальним.

Отже, $x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}70}{\sqrt{2}} = 0{,}494974\ldots \approx 0{,}49$ (м).

За методом підрахунку правильних цифр у відповіді залишається дві значущі цифри.

Відповідь. На відстані 0,49 м від поверхні столу слід розмістити лампу, щоб освітлення на краю стола радіуса 0,70 м було найбільшим.

Також під час розв'язування завдань практичного змісту із застосуванням похідної слід звернути увагу учнів на задачі, в змісті яких йдеться про:

а) радіоактивний розпад. Якщо в початковий момент часу маса радіоактивної речовини дорівнює $m_0 = m(0)$, то маса цієї радіоактивної речовини через проміжок часу *t* обчислюється за формулою $m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$, де числом *T* виражається проміжок часу, через який маса радіоактивної речовини зменшується у два рази. Зокрема, радій має період напіврозпаду *T*=1550 років;

б) приріст населення. Нехай населення країни щорічно зростає на *p*%. Тоді залежність чисельності населення країни від часу (вираженого в роках) *S(t)* відповідає рівнянню $S'(t) = 0{,}01 \cdot p \cdot S(t)$, звідки $S(t) = S_0 \cdot e^{0{,}01p \cdot t}$, де $S_0(t) = S(0)$ – початкова чисельність населення;

в) економічні процеси. Приклади таких задач містяться у публікації [230].

Таким чином, під час вивчення теми «Похідна та її застосування» учні не лише засвоюють техніку диференціювання, вивчають зв'язок між похідною та властивостями функцій, а й удосконалюють навички роботи з наближеними величинами, у них формується уявлення про використання похідної в інших науках, у реальному житті.

Операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання. Згідно концептуальної моделі вивчення наближених обчислень в курсі математики старшої профільної школи (див. параграф 2.1) під час вивчення первісної слід продовжувати формувати в учнів уміння виконувати НО під час знаходження визначеного інтеграла та площі фігури, обмеженої графіками заданих функцій як для точних меж інтегрування, так і для наближених. Під час виконання будь якого завдання учні повинні визначати кількість правильних цифр у відповіді, виконувати обчислення з наближеними значеннями чисел і величин, застосовуючи методи наближених обчислень, обчислювальні засоби та комп’ютерні програми.

З точки зору вивчення НО, вивчаючи тему «Інтеграл та його застосування», учнів слід навчити:

1) обчислювати значення визначеного інтеграла для: а) точних значень меж інтегрування; б) наближених значень меж інтегрування;

2) знаходити наближені значення площі фігури, обмеженої графіками заданих функцій та рівнянь за умови, що: а) межі фігури, площу якої слід обчислити, є точними; б) межі фігури, площу якої слід обчислити, є наближеними;

3) застосовувати компютерні програми для обчислення наближених значень інтеграла та наближених значень площ фігур, обмежених графіками функцій та рівнянь;

4) розв'язувати практичні та прикладні задачі з використанням первісної та визначеного інтеграла методами наближених обчислень.

Розкриємо методику формування в учнів 11 класу навичок виконувати наближені обчислення під час вивчення зазначених тем.

Під час вивчення первісної та правил її знаходження в учнів формуються навички знаходити табличні невизначені інтеграли, користуватися правилами для їх знаходження. У цей період недоцільним є використання НО на уроках математики в силу того, що навчальний матеріал сприймається учнями досить важко. Практика показує, що послідовне вивчення тем «Похідна та її застосування» та «Інтеграл та його застосування» часто призводить до того, що учні плутаються у таблицях похідних та первісних, з помилками застосовують правила їх знаходження. Тому на етапі вивчення правил знаходження первісної доцільно зосередити увагу на формуванні умінь знаходити первісні елементарних функцій.

Поняття визначеного інтеграла тісно пов'язане із первісною, тому застосування методів НО у процесі його знаходження розпочинається тоді, коли відбулася адаптація учнів до процедури інтегрування. Такий перехід до визначеного інтеграла та його геометричного змісту відбувається за допомогою поняття криволінійної трапеції та обчислення її площі.

У класах з поглибленим вивченням математики доцільно дещо детальніше зупинитися на процедурі обчислення площі криволінійної трапеції.

З цією метою розглядається невід'ємна монотонна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ (рис.2.25). Очевидно, що площа криволінійної трапеції *ABDF* задовольняє нерівність $S_{ABEF} < S_{ABDF} < S_{ACDF}$. Проте графічна ілюстрація (рис.2.22) дозволяє зрозуміти учням те, що величина похибки при цьому дуже велика. Таким чином, вчитель має можливість створити проблемну ситуацію, вирішення якої дозволить точніше обчислити площу криволінійної трапеції.

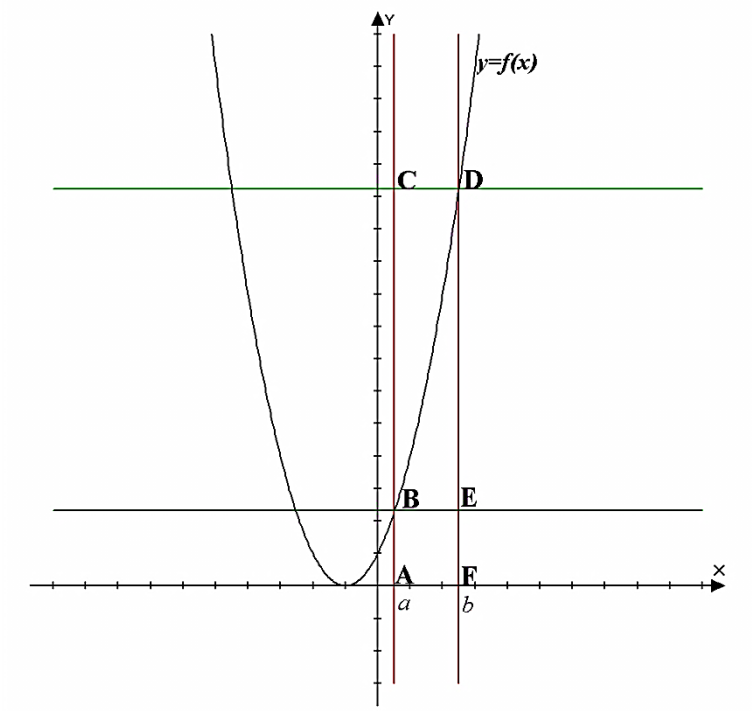


Рис. 2.25

Практика показує, що учні достатньо легко здогадуються про те, що відрізок $[a;b]$ можна поділити на два, три або більше рівних відрізків. Тоді наближене значення площі криволінійної трапеції знаходиться за допомогою метода прямокутників. Додатково доцільно також показати школярам, що аналогічне розбиття застосовується для методу трапецій. Проте перевага методу прямокутників полягає в тому, що для монотонних функцій за допомогою метода прямокутників можна визначити межу абсолютної похибки, чого неможливо зробити під час застосування методу трапецій. З іншого боку, його недолік полягає в тому, що доводиться здійснювати подвійні обчислення.

З метою кращого засвоєння зазначених методів визначення площі криволінійної трапеції, на домашнє завдання доцільно запропонувати учням виконати розрахунково-графічну роботу (додаток Б4).

Вивчення наближених методів обчислення площі криволінійної трапеції дає змогу учням зрозуміти принцип, за яким комп'ютерні програми здійснюють розрахунки площ не лише криволінійних трапецій, а й фігур, обмежених графіками функцій зверху і знизу.

За допомогою таких програм як в класах з поглибленим вивченням математики, так і в класах, де математика вивчається на академічному рівні та на рівні стандарту, можна обчислювати наближені значення площ фігур, обмежених графіками функцій та рівнянь, наближені значення визначених інтегралів. Для цього достатньо та задати функції, межі інтегрування, вводиться кількість проміжків розбиття, яка може бути тільки натуральним числом (рис.2.26, 2.27).

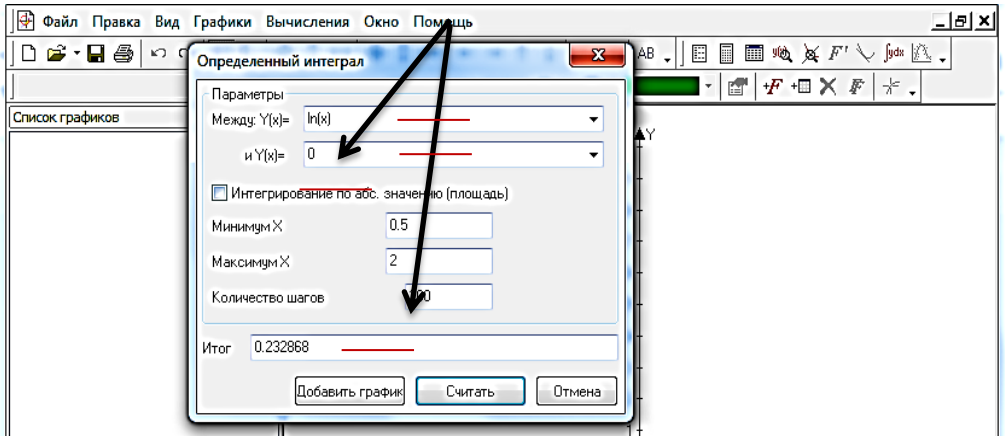


Рис. 2.26

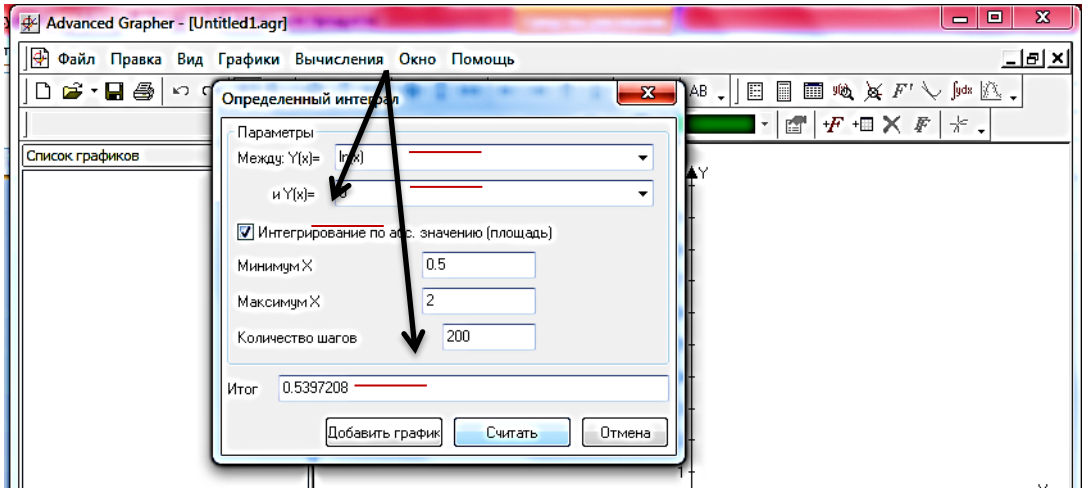


Рис. 2.27

Наступним етапом вивчення теми є обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца. Особлива увага учнів звертається на те, що

визначений інтеграл, насамперед, може бути як точним, так і наближеним числом. Межі інтегрування, в свою чергу, також можуть бути як точними величинами, так і наближеними. У таких випадках процес інтегрування відбувається по-різному, з дотриманням методів НО. Розглянемо окремо кожну із описаних ситуацій.

Нехай перед учнем стоїть завдання обчислити $\int_a^b f(x)dx$, де a та b – точні межі інтегрування. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

За правилами інтегрування можна знайти первісну функції $F(x)$, після чого потрібно обчислити її значення у верхній та нижній межі інтегрування. Ці значення можуть бути як точними, так і наближеними числами. Якщо $F(b)$ та $F(a)$ – точні числа, то слід діяти за правилами роботи з точними величинами. Як показує практика, такі ситуації не викликають труднощів у старшокласників. Якщо хоча б одна з цих величин є наближеною, то у такому випадку слід діяти за правилами знаходження наближеного значення функції, коли відоме точне значення аргументу. Алгоритм виконання таких обчислень описаний у параграфі 2.3. У цій ситуації залежно від поставленої в умові завдання задачі можна використовувати як метод підрахунку правильних цифр, так і метод меж.

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де a та b – наближені межі інтегрування. У такому випадку доцільно знаходити наближене значення первісних у верхній та ніжній межах інтегрування, після чого – відповідне значення інтеграла лише за методом підрахунку правильних цифр. Це пояснюється тим, що потреба у його застосуванні під час вивчення ШКМ виникає вкрай рідко з одного боку, та тим, що застосування методу меж потребує досить громіздких обчислень з іншого.

Завершити вивчення теми «Інтеграл та його застосування» доцільно розв’язуванням прикладних задач. Завдання такого змісту слід включити у систему задач і вправ, які містять нині діючи підручники. Приклади таких

вправ, розроблених нами, представлено у додатку Г6. Розглянемо одну з таких задач.

Приклад 2.21. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з ями глибиною 4,0 м, що має квадратний переріз зі стороною 1,5 м. Густина води ρ = 998,23 кг/м^3.

Розв'язання. Оскільки яма має квадратний переріз, то вода, залита в яму, набуває форми прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить квадрат із стороною 1,5 м, та висотою 4,0 м.

Побудуємо переріз паралелепіпеда площиною, паралельною до основи, на відстані x м від неї, де $x \in [0; 4{,}0]$. Значення сили $F(x)$, що діє на переріз паралелепіпеда площею $S_{\text{осн}} = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$ (м^2), визначається вагою шару води, що знаходиться вище від цього перерізу. За МППЦ під час знаходження площі основи у відповіді залишається дві значущі цифри, та ще одна запасна – сумнівна цифра, оскільки дія є проміжною. Отже, $F(x) = 2{,}25 \cdot \rho \cdot g(4{,}0 - x)$ де $g \approx 9{,}8$ м/с. Таким чином, робота, яку потрібно виконати, щоб викачати воду з ями, обчислюється за формулою: $A = \int_0^{4{,}0} 2{,}25\rho g(4{,}0 - x)dx =$

$$= 2{,}25\rho g \cdot \int_0^{4{,}0} (4{,}0 - x)dx = 2{,}25\rho g \cdot \left(4{,}0x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{4{,}0} =$$

$$= 2{,}25 \cdot 998{,}23 \cdot 9{,}8 \cdot \left(\left(4{,}0 \cdot 4{,}0 - \frac{4{,}0^2}{2}\right) - \left(4{,}0 \cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right)\right) =$$

$$= 2{,}25 \cdot 998{,}23 \cdot 9{,}8 \cdot \left(4{,}0 \cdot 4{,}0 - \frac{4{,}0^2}{2}\right) = 176087{,}772 \approx 1{,}8 \cdot 10^5 \text{(Дж)}.$$

Важливо звернути увагу учнів на те, що за методом підрахунку правильних цифр відповідь міститиме лише дві значущі цифри, тобто округлення відбувається до десятків тисяч.

Відповідь: $A \approx 1{,}8 \cdot 10^5$(Дж).

Таким чином, під час вивчення теми «Первісна та її застосування» в процесі вивчення нового навчального матеріалу та його застосування до розв'язання прикладних задач та завдань практичного змісту продовжується формування умінь виконувати НО у фоновому режимі.

2.4.2. Наближені обчислення під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, стереометрії.

Згідно структури змістової лінії «Наближені обчислення» в старшій школі, на вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» відводиться 12 академічних годин. Очевидно, що в такій ситуації навчальний матеріал з теми носить здебільшого ознайомлювальний та загально розвиваючий характер. Він, насамперед, пов'язаний з із статистичними дослідженнями, із прогнозуванням тих чи інших подій (додаток А).

Оскільки представлений навчальний матеріал, що вивчається, передбачає лише арифметичні операції, то застосування НО відбувається у фоновому режимі. У цей період відбувається закріплення умінь і навичок, сформованих впродовж 10-11 класів.

Система задач і вправ, представлена в нині діючих підручниках для 11 класу, містить достатньо велику кількість задач прикладного змісту з теми. Під час їх розв’язання учні не повинні забувати про те, що в процесі виконання алгебраїчних операцій слід використовувати методи НО залежно від змісту завдання та з огляду на характер результату, який потрібно отримати. При цьому доцільно і зручно використовувати обчислювальні засоби. Зміст завдань, поставлених до задач і вправ доцільно доповнити питаннями щодо оцінки точності відповіді, знаходження межі абсолютної та відносної похибки розрахунків.

Приклад 2.22[268]. Група стрільців веде стрільбу з гвинтівок у мішень, що швидко рухається. Вважатимемо, що ймовірність попадання в ціль для кожного стрільця однакова і дорівнюватиме 0,001. Визначте, скільки повинно бути стрільців, щоб ймовірність попадання в ціль була не менше 0,5. (Ціль вважатимемо враженою, якщо в неї попав хоча б один стрілець).

Розв’язання. Позначимо кількість стрільців через n. ймовірність того, що стрілець не влучить у мішень дорівнює 1–0,001=0,999.

Ймовірність того, що усі стрільці не влучать у мішень $0{,}999^n$. Тоді ймовірність того, що ціль буде уражена визначається виразом $1–0{,}999^n$.

Отже, маємо нерівність: $1–0{,}999^n \geq 0{,}5$.

Звідси $0{,}999^n \leq 0{,}5$. Прологарифмуємо останню нерівність за основою 0,999. Отримаємо нерівність виду: $n \geq \log_{0{,}999} 0{,}5$.

Наступним кроком можна запропонувати виконати двома шляхами: одна частина класу проводить розрахунки за допомогою таблиць Брадіса, інша – за допомогою калькулятора. Результати обчислень будуть наступні:

Перший шлях. $n \geq \frac{-\lg 2}{\lg 0{,}999} = \frac{-(\lg 200 - 2)}{\lg 999 - 3} \approx \frac{-0{,}3010}{2{,}9996 - 3} = \frac{0{,}3010}{0{,}004} = 752{,}5\ldots$.

Другий шлях. $n \geq \frac{-\lg 0{,}5}{\lg 0{,}999} = 692{,}8\ldots$.

Отже, перша група старшокласників отримала відповідь 753 або більше стрільців, а друга – 693 або більше стрільців. Таким чином, порівнюючи отримані результати, видно, що розбіжність надзвичайно велика.

Виникає природнє запитання: що ж робити? Спробуємо застосувати методи наближених обчислень до вищезгаданої задачі, оскільки значення ймовірностей є наближеними числами. Тоді $0{,}45 \leq 0{,}5 \leq 0{,}55$; а $0{,}9985 \leq 0{,}999 \leq 0{,}9995$. Про логарифмуємо першу нерівність за основою 0,999, пам’ятаючи при цьому, що відповідна логарифмічна функція є спадною. Отримаємо: $\log_{0{,}999} 0{,}55 \leq \log_{0{,}999} 0{,}5 \leq \log_{0{,}999} 0{,}45$. Тоді змінимо основу логарифмів, застосовуючи властивості логарифмічної функції для аргументу, меншого одиниці:

$$\log_{0{,}9985} 0{,}55 \leq \log_{0{,}999} 0{,}55 \leq \log_{0{,}999} 0{,}5 \leq \log_{0{,}999} 0{,}45 \leq \log_{0{,}9995} 0{,}45$$

$$\log_{0{,}9985} 0{,}55 \leq \log_{0{,}999} 0{,}5 \leq \log_{0{,}9995} 0{,}45$$

$$398{,}2\ldots \leq \log_{0{,}999} 0{,}5 \leq 1596{,}6\ldots$$

$$398 \leq \log_{0{,}999} 0{,}5 \leq 1597$$

$\log_{0{,}999} 0{,}5 = 997{,}5 \pm 599{,}5$.

Як видно з відповіді, перша цифра наближеного значення є сумнівною, отже можна зробити висновок, що задані в умові задачі мають дуже низьку точність. В класах з поглибленим вивченням математики можна запропонувати учням також провести дослідження, поступово підвищуючи точність вихідних

даних, дійти до допустимої межі відносної похибки. Провівши аналогічні міркування для ймовірностей 0, 00100 та 0,50000 відповінно отримаємо, що $689 \leq \log_{0,999} 0{,}5 \leq 697$. Тоді $\log_{0,999} 0{,}5 = 693 \pm 4$. Межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{4}{693} \cdot 100\% = 0{,}577... \leq 0{,}6\%.$

Отже, кількість стрільців повинна бути не менше, ніж 693+4=697 чоловік.

Таким чином, розглянутий приклад яскраво показує необхідність застосування методів НО до розв'язування прикладних задач.

Характер і зміст навчального матеріалу теми також є зручним для виконання проектів. Застосування проектних технологій на уроках математики формує в учнів уміння використовувати дослідницькі прийоми; планувати свою діяльність; шукати, узагальнювати інформацію; аналізувати її та робити висновки. Перевага подібного роду діяльності полягає в тому, що в процесі виконання проекту учні вчаться працювати в групах, застосовувати ІКТ в процесі роботи. Учні, які мають початковий та середній рівень досягнень з предмету мають можливість проявити себе та свої здібності, відбувається самореалізація особистості.

Метою навчання курсу стереометрії є систематичне вивчення властивостей геометричних фігур у просторі, розвиток просторових уявлень і уяви, засвоєння учнями способів обчислення важливих для практики геометричних величин і подальший розвиток логічного мислення [205, с.436]. Особливості програми з геометрії 10 класу не дають змоги широко застосовувати методи НО під час розв'язання задач. З іншого боку, саме в цей період на уроках алгебри і початків аналізу у старшокласників формується уявлення про наближені числа і величини, про правила роботи з ними, методи наближених обчислень.

Як зазначалося раніше, використання методів НО в курсі стереометрії відбувається у фоновому режимі. Сформовані в учнів компетентності під час вивчення теми «Наближені обчислення» в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу мають застосовуватися в процесі розв'язування практичних і прикладних

задач з наближеними значеннями величин, а також під час вимірювальних, розрахунково-графічних та практичних робіт в курсі геометрії 11 класу. Виходячи з основних цілей навчання геометрії в старшій школі, учнів слід навчити обчислювати площі поверхонь та об'єми геометричних тіл, зокрема в реальному житті. Проте такі тіла не завжди мають зручні для вимірювань та обчислень форми. Тому насамперед потрібно сформувати у старшокласників уміння і навички виконувати такі розрахунки на більш простих прикладах.

Зупинимося детальніше на методичних аспектах викладання стереометрії в 11 класі з точки зору НО. Вивчення многогранників і тіл обертання, їх властивостей можна поділити на два етапи. На першому етапі розглядаються многогранники – призма і піраміда та їх властивості, потім відбувається формування умінь застосовувати ці властивості до розв'язування геометричних задач. В цей період доцільно запропонувати учням виконання практичних робіт з побудови розгорток многогранників, виготовлення їх моделей, та обчислення елементів виготовлених тіл. Розгортки слід робити з цупкого паперу, продавлюючи його по лініям згину. Зрозуміло, що під час зазначених вимірювань та розрахунків доведеться працювати з наближеними величинами та застосовувати вже відомі учням методи наближених обчислень. Наступним, більш складним етапом застосування НО, є визначення параметрів реальних об'єктів, що мають форму відповідного многогранника та обчислення його елементів. Під час проведення відповідних розрахунків слід пам'ятати, що числа, отримані в результаті вимірювання, неточні, тому й результат обчислення – наближене число, а тому розрахунки проводяться за методами НО. Якщо зміст задачі не потребує визначення меж похибок обчислень, то зручніше користуватися МППЦ. Точність результату в такому випадку не буде перевищувати точності найменш точних величин, проте економиться час на виконання роботи. За аналогічним алгоритмом вивчаються тіла обертання – циліндр і конус. Паперову модель сфери учні не виготовляють, вони одразу переходять до практичних вимірювань і розрахунків.

Приклад 2.23. Скільки мішків аміачної селітри можна помістити в склад розмірами 20м × 9м × 4м, якщо мішок селітри можна прийняти (з певною похибкою) за прямокутний паралелепіпед з розмірами 90см × 5см × 25см? (На щілини між мішками і центральний прохід виділяється 30% об'єму складу).

Вказівки до розв'язання. Оскільки розміри складу є наближеними числами, то застосуємо метод меж для обчислення його об'єму. Нехай $a \approx 20$м; $b \approx 9$м, $c \approx 4$м.

$19{,}5 \le a \le 20{,}5,\ \ 8{,}5 \le b \le 9{,}5,\ \ 3{,}5 \le c \le 4{,}5$

Тоді об'єм складу $580{,}125 \le V \le 876{,}375$. Отже, $V = 728{,}25 \pm 148{,}125$ (м^3).

Межа відносної похибки об'єму $\varepsilon \le 21\%$.

Очевидно, що практичне розв'язування даної задачі можливе лише за умови, що вихідні дані будуть взяті з більш високою точністю.

На наступному, другому етапі, відбувається узагальнення і систематизація вивченого раніше навчального матеріалу, формуються навички застосовувати формули для знаходження площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл. Систему задач і вправ з цих тем, що містяться в сучасних підручниках доцільно доповнити задачами практичного змісту (додаток Г5), практичними роботами (додаток В4) та задачами з інтернет-джерел http://school.mitsivtsi.km.ua/content/zadachi-prykladnogo-kharakteru та http://math1nvk.ucoz.ua/_ld/0/30_eaO.pdf.

Таким чином, під час вивчення інших тем алгебри і початків аналізу та стереометрії закріплюються та поглиблюються знання, уміння та навички застосовувати методи НО під час розвязування математичних задач, поглиблюються міжпредметні звязки та відбувається зв'язок математики із життям.

2.5. Організація та проведення педагогічного експерименту та аналіз його результатів.

Теоретичні дослідження, що стосуються теми дисертаційної роботи, перевірка ефективності, корекція створеної методики вивчення НО учнями

старших класів середньої школи базувалися на результатах педагогічного експерименту, що проходив у три взаємопов'язаних між собою етапи:

- *констатувальний* етап педагогічного експерименту (2010-2011);
- *пошуковий* етап педагогічного експерименту (2012-2013);
- *формувальний* етап педагогічного експерименту (2013-2015).

Експериментальною базою були: Фізико-математичний інститут НПУ імені М.П. Драгоманова; Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області(далі – ІППОЧО); загальноосвітні навчальні заклади Чернівецької області: Глибоцький ліцей Глибоцького району; Сучевенська ЗОШ І-ІІІ ступенів Глибоцького району; Сторожинецька районна гімназія Сторожинецького району; Мамаївський ЗНЗ І-ІІІ ст. №2 Кіцманського району; Лашківський ЗНЗ І-ІІІ ст. Кіцманського району; Горішньоширівецька ЗОШ І-ІІІ ст. Заставнівської гімназії, Кострижівська ЗОШ І-ІІІ ст. Заставнівського району; НВК «Боянська гімназія» та Новоселицька ЗОШ І-ІІІ ст. Новоселицького району; районний методичний кабінет управління освіти Глибоцької райдержадміністрації Чернівецької області; НВК «Домінанта» Дніпровського району м. Києва; Інститут післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка.

Метою педагогічного експерименту було: *визначення, теоретичне обґрунтування* та *експериментальна перевірка* цілей і змісту вивчення наближених обчислень учнями 10-11 класів, *апробація та корекція* розробленої методики розвитку у старшокласників умінь виконувати НО в процесі вивчення математики; *вибір* ефективних методів та форм навчання, *створення* сучасних засобів вивчення наближених обчислень у старшій школі.

Констатувальний етап експерименту проводився впродовж 2010-2011 років. Основною його метою було *вивчення* сучасного стану досліджуваної проблеми, та *визначення* основних завдань експерименту. Робота проводилася в двох напрямках: теоретичному та практичному.

У теоретичній частині дослідження на зазначеному етапі відбувалося вивчення стану проблеми через аналіз науково-педагогічної, психологічної,

методичної літератури. Було перевірено наявність науково-методичних умов для проведення експерименту. Така перевірка здійснювалася через опрацювання навчальних програм, підручників та посібників, публікацій наукового та методичного характеру у періодичних виданнях, інтернет-джерелах.

У результаті проведеного аналізу було здійснено:

- *обґрунтування* психолого-педагогічних передумов вивчення НО в курсі математики старшої школи;
- *виділено* та сформульовано основні вимоги до змісту навчального матеріалу та до організації навчання наближеним обчисленням на уроках математики;
- *виявлено* відсутність сучасного методичного забезпечення для навчання наближеним обчисленням в курсі математики старшої школи. Наукові та методичні розробки щодо тематики дослідження датуються 40-80-ми роками минулого століття. Починаючи з 80-х років проблема наближених обчислень поступово почала зникати з поля зору науковців та методистів, а відповідно і з навчальних програм шкільного курсу математики.

Пояснюється це кількома факторами: вивчення наближених обчислень є достатньо важкою темою для опанування учнями основної школи, у подальшому під час навчання математики в старших класах такий матеріал майже не використовувався; із змінами навчальних програм з математики відбувалося вилучення НО із їх змісту, натомість програми поступово доповнювалися новими темами, під час вивчення яких також не використовувалися наближені обчислення.

Під час практичної частини дослідження на констатувальному етапі було проведено анкетування понад 400 вчителів математики різних кваліфікаційних категорій та з різним стажем роботи в школі. Анкетування проводилося на курсах підвищення кваліфікації при Інституті післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Було проведено діагностичну контрольну роботу для близько 282 учнів старших класів та понад 400 вчителів

математики з метою визначення їх рівня володіння понятійним апаратом та технікою виконання НО. Також було відвідано понад 40 уроків алгебри і початків аналізу у 10-11 класах, де математика вивчається на академічному, профільному, поглибленому рівні та на рівні стандарту. Аналіз проведеного анкетування, результатів контрольної роботи та відвіданих уроків дали змогу:

- *визначити* рівень підготовки вчителів та старшокласників з теми дослідження. Зокрема, було виявлено, що: ***серед вчителів загальноосвітніх навчальних закладів: 28,2%*** неправильно знайшли значення відносної похибки наближених чисел; ***97%*** не використовують правила НО при виконанні кількох дій над наближеними числами; ***69%*** вчителів формально розв'язують задачу практичного змісту.

Серед учнів старших класів: 58,5% не бралися за знаходження абсолютної та відносної похибки; ***21,5%*** правильно виконали приклад на три дії; ***97,3%*** не вміють розв'язати елементарну задачу практичного змісту із урахуванням похибки вимірювань та обчислень;

- *з'ясувати* причини існування такого рівня знань. Як показали результати теоретичної частини дослідження, НО були вилучені з навчальної програми понад 20 років тому. У сучасних програмах та підручниках з математики для основної школи розглядається лише питання округлення з наперед заданою точністю та вводиться поняття абсолютної похибки. Проте в подальшому під час вивчення математики ці поняття ніде не використовуються. У результаті таких змін сучасні вчителі не готові до викладання, а учні – до сприйняття відповідних тем на уроках математики. Тому результати опитування та контрольної роботи серед вчителів, чий педагогічний стаж перевищує 20 років, виявилися вищими, ніж серед решти респондентів.

Під час усного спілкування з учителями – учасниками опитування, вони говорили, що недостатньо знайомі з НО. Пояснюється це відсутністю мотивації, навчально-методичних матеріалів з НО. Проте усі вони визнавали, що розв'язування прикладних задач та завдань практичного змісту потребує використання саме методів НО, з якими потрібно як самим знайомитися, так і

навчати учнів. Крім того, якщо раніше для виконання НО використовувалися чотиризначні математичні таблиці, логарифмічні лінійки та номограми, то сучасні технології потребують використання комп'ютерної техніки та відповідного програмного забезпечення.

Таким чином, аналіз результатів констатувального експерименту показав, що існує нагальна потреба включити у навчальну програму з математики теми з вивчення основних понять НО та методів НО. Вони повинні вивчатися в активному та фоновому режимах. Закріплення вивченого матеріалу повинно відбуватися у фоновому режимі під час вивчення основних змістових ліній шкільного курсу математики. Виявлені проблеми, суперечності та недоліки дозволили окреслити основні завдання дослідження, мету, об'єкт та предмет, сформулювати його гіпотезу. Основні результати констатувального експерименту висвітлені у першому розділі дисертаційного дослідження та у відповідних публікаціях [91, 95, 96, 98, 100].

Пошуковий етап педагогічного експерименту тривав у період 2012-2013 рр., у ході якого було:

- *створено* дослідно-експериментальний майданчик з тематики дослідження на базі Інституту післядипломної педагогічної освіти та двадцяти ЗНЗ Чернівецької області (наказ Департаменту освіти і науки Чернівецької обласної державної адміністрації від 24.04.2012 № 280 «Про проведення дослідно-експериментальної роботи на базі загальноосвітніх навчальних закладів Чернівецької області»);
- *розроблено* програму спецкурсу з НО, розраховану на 18 академічних годин, для слухачів курсів підвищення кваліфікації вчителів, що викладають предмети природничо-математичного циклу. Спецкурс містить як лекційні, так і практичні заняття, в яких висвітлюються основи теорії НО та їх практичне застосування під час розв'язування задач;
- *розроблено* структуру змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі алгебри і початків аналізу.

Також на цьому етапі *добиралися* навчальні засоби, зокрема програмне забезпечення з метою забезпечення якісного вивчення елементів теорії НО на уроках математики та реалізації міжпредметних зв'язків.

Під час пошукового етапу експерименту відбувалася *апробація* включення елементів НО у традиційний навчальний матеріал, добиралися найбільш доцільні методи НО для застосування до розв'язання задач і вправ. Апробація і оцінка ефективності методичних матеріалів проводилася під час проведення уроків математики, на лекціях, практичних та семінарських заняттях з учителями – слухачами курсів підвищення кваліфікації при Інституті післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області.

Практика показала, що метод меж похибок для старшокласників є складним для сприйняття, тому доцільним є використання методу підрахунку правильних цифр та методу меж. Лише у класах з поглибленим вивченням математики, на розсуд вчителя, можна оглядово ознайомити учнів з методом меж похибок. У процесі апробації розроблялися і удосконалювалися дидактичні матеріали та методичні рекомендації щодо вивчення НО в курсі математики старшої школи.

Під час пошукового етапу експерименту було зроблено висновок, що вчителі не готові викладати навчальний матеріал з НО. Підготовка до уроків викликає труднощі та вимагає великих витрат часу. З іншого боку, відсутність в учнів сформованого розуміння понять теорії НО, навичок роботи з наближеними величинами в курсі математики основної школи викликає складнощі у сприйнятті навчального матеріалу старшокласниками.

Результати пошукового етапу педагогічного експерименту висвітлені у попередніх розділах дисертації, а також у публікаціях [85, 86, 263, 264].

Перевірка ефективності розробленої та відкоригованої методики формування та розвитку у старшокласників умінь виконувати НО в процесі вивчення математики проводилася під час *формувального етапу* педагогічного експерименту впродовж 2013-2015 рр. Основною його метою було *впровадження* згаданої методики у навчальний процес, *апробація* розробленого

дидактичного матеріалу з НО для вивчення основних тем навчальної програми з математики.

Для перевірки ефективності створеної методики було створено дві групи: *експериментальна група* (ЕГ) – складалася з учнів тих класів, де впроваджувалася методика формування і розвитку умінь виконувати НО під час вивчення математики, та *контрольна група* (КГ) – складалася з учнів тих класів, де розроблена методика не впроваджувалася.

Загалом кількість учасників кожної групи (ЕГ та КГ) складала понад 200 осіб. У кожну з них входили учні, що навчаються:

- в школах сільської місцевості та міста;
- у класах, де математикак вивчається на різних рівнях: академічному, поглибленому, та на рівні стандарту.

Такий підхід до розподілу учасників експерименту дав змогу утворити одноріну репрезентативну вибірку груп. Уроки як в ЕГ, так і в КГ проводилися вчителями, чий педагогічний стаж складав: а) до 10 років; б) від 10 до 20 років; в) понад 20 років. Подібний розподіл педагогів обумовлювався необхідністю отримати об’єктивну оцінку пропонованої методики, коли в кожній групі учнів навчають вчителі з різним досвідом роботи.

Учні КГ вивчали матеріал за традиційними методиками, згідно діючої навчальної програми для учнів старших класів, учасники ЕГ навчалися за програмою, доповненою відповідними питаннями НО згідно розробленої програми (додаток А). На початку формувального експерименту вчителям, що працювали з ЕГ, було роздано навчальну програму, методичні рекомендації щодо роботи з нею, дидактичні матеріали з НО, розроблені до кожної з тем програми, було створено Скайп-мережу, за допомогою якої відбувалося щотижневе спілкування з вчителями-учасниками експерименту. У процесі роботи отримані вчителями матеріали коригувалися і доповнювалися. Робота в обох групах: ЕГ та КГ тривала впродовж двох років – 10 та 11 клас під час вивчення кожної з описаних у дисертації тем.

Доведення ефективності розробленої методики здійснювалося через виявлення позитивного впливу на мотивацію навчання старшокласників, підвищення зацікавленості математикою, що підтверджує покращення успішності, та через виявлення умінь старшокласників розв'язувати прикладні та практичні задачі. Чинниками, за допомогою яких відбувалася перевірка рівня умінь старшокласників виконувати НО, були тематичні контрольні роботи, серед завдань яких були вправи на знаходження наближених значень виразів та функцій, знаходження наближених розв'язків рівнянь та нерівностей та вправи, де НО виконувалися у фоновому режимі, наприклад під час розв'язання прикладної задачі з алгебри, на знаходження об'єму та площі поверхні геометричних тіл.

Для визначення ефективності розробленої методики на початку 10-го класу в ЕГ та КГ була запропонована контрольна робота (додаток Є2), яка містила завдання з наближених обчислень, результати якої представлені у вигляді діаграми (рис. 2.28).

Як видно з діаграми, рівень сформованості умінь виконувати НО в обох групах приблизно однаковий.

Оскільки учні КГ не вивчали наближені обчислення впродовж навчання у 10-11 класах, то під час виконання поточних контрольних робіт ми відслідковували зміни в умінні виконувати наближені обчислення серед учнів ЕГ. З цією метою в зміст завдань включалися вправи з НО, аналогічні до тих, що виконувалися на уроках впродовж вивчення відповідної теми. При цьому слід звернути увагу, що оцінювання робіт школярів здійснювалося наступним чином: в класний журнал виставлялася оцінка за всю роботу, а в зошиті відбувалося подвійне оцінювання – загальна оцінка за усі виконані завдання, а також оцінка за виконання вправ з НО. Динаміка розвитку умінь виконувати НО під час вивчення математики в учнів 10-11 класу представлені у вигляді таблиці 2.4 та діаграми, зображеної на рис. 2.29 з огляду на другу оцінку, виставлену в зошитах учнів.

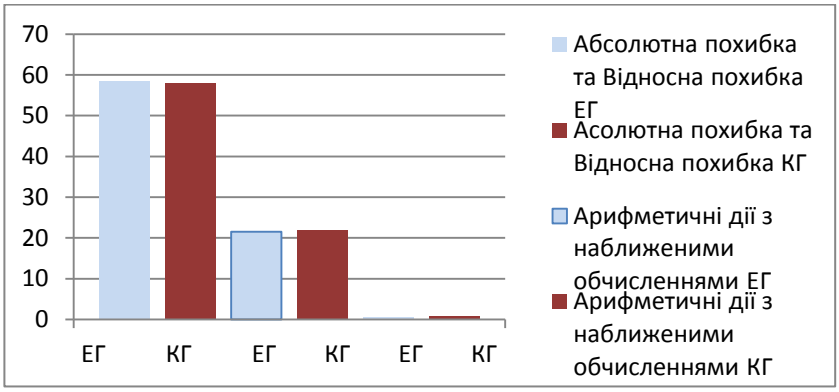


Рис 2.28. Результати контрольної роботи в експериментальній та контрольній групах

Таблиця 2.4

Рівень сформованості у старшокласників умінь виконувати НО

Групи учнів	Тематичні контрольні роботи / Рівень умінь виконувати НО	Функції, рівняння та нерівності, К-1	Степенева функція, К-2	Тригонометрична функція, К-3	Показникова функція, К-4	Логарифмічна функція, К-5	Похідна та її застосування, К-6	Первісна та її застосування, К-7	Многогранники, К-8	Тіла обертання, К-9	Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл, К-10
ЕГ	Початковий	25%	24%	20%	18%	17%	18%	16%	19%	15%	12%
	Середній	30%	31%	33%	31%	32%	32%	31%	32%	31%	31%
	Достатній	34%	32%	34%	36%	35%	35%	36%	33%	36%	38%
	Високий	11%	13%	13%	15%	16%	15%	17%	16%	18%	19%

Графічне представлення результатів контрольних робіт ЕГ

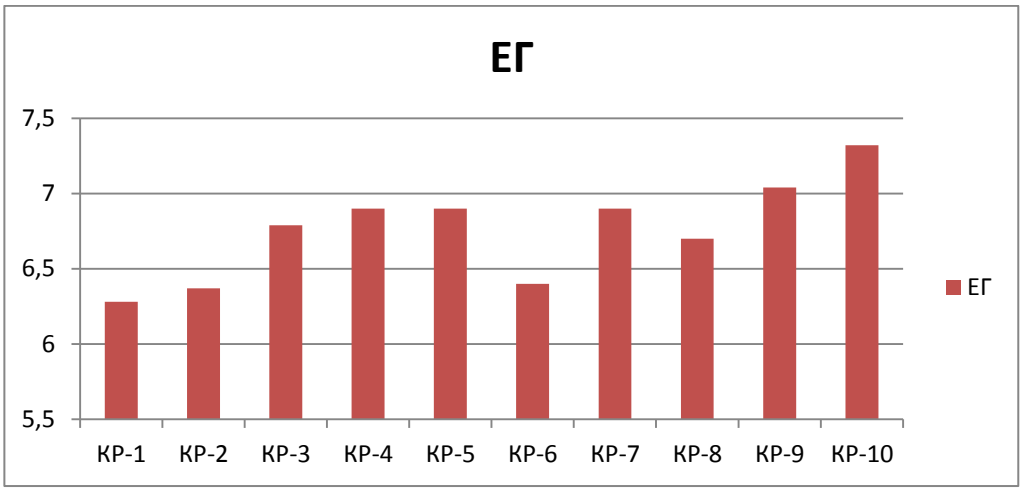


Рис.2.29. Діаграма рівня сформованості у старшокласників експериментальної групи умінь виконувати наближені обчислення

На завершальній стадії формувального етапу експерименту учням 11 класів було запропоновано підсумкову контрольну роботу. Її виконували учні

як експериментальної, так і контрольної груп. Вона містила завдання, під час розв'язування яких доцільно користуватися методами наближених обчислень, а також прикладну задачу:

1. Розв'язати рівняння $x^2 - 4x + 2 = 0$. Вкажіть, між якими цілими числами знаходяться корені рівняння.

2. Обчислити, яким буде атмосферний тиск на вершині Ельбрусу, висота якого 5,60 км, якщо залежність атмосферного тиску p від висоти (вираженої у кілометрах) h над рівнем моря виражається формулою:

$$p = 76 \cdot 2{,}7^{\frac{h}{8}}.$$

Результати перевірки показали, що під час виконання завдань контрольної роботи:

– 70% учнів експериментальної групи розв'язували рівняння графічним методом, у той час, як серед учнів контрольної групи – лише 0,5%;

– під час розв'язування прикладної задачі 82% старшокласників застосовували метод меж, вважаючи значення висотии 5,60 км наближеним значенням, а серед учнів контрольної групи 3,4% учасників обчислили значення тиску за допомогою калькулятора, вважаючи числові дані точними. При цьому усі решта учасників контрольної групи не бралися за розрахунки взагалі.

Графічне зображення результатів виконання запропонованих учням завдань 1 та 2 представлено на рисунку 2.30.

Аналіз представлених результатів експерименту показав, що розроблена нами методика сприяє розвитку у старшокласників умінь застосовувати наближені обчислення для розв'язування прикладних та практичних задач. Також під час розвитку умінь виконувати наближені обчислення формується уміння застосовувати не лише аналітичні, а й графічні методи розв'язування рінянь, нерівностей; застосовувати методи наближених обчислень під час розв'язування прикладних задач, визначати, які із даних є точними, а які – наближеними, оцінювати точність заданих в умові задачі наближених величин.

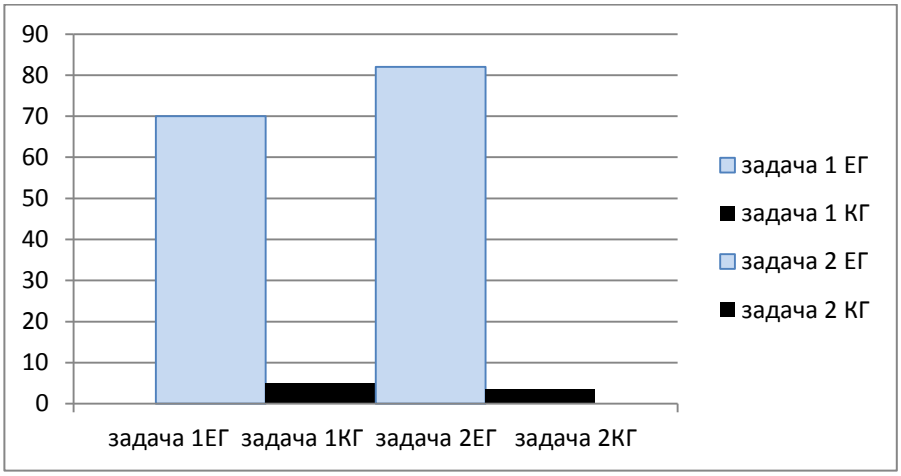


Рис. 2.30. Діаграма рівня сформованості у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час підсумкової контрольної роботи

Формування та розвиток умінь виконувати наближені обчислення під час впровадження пропонованої методики схвально оцінювалося і вчителями, які працювали з учнями ЕГ. Вони зазначали, що навчання математики відбувалося з дотриманням принципів наступності, науковості, реалізовувалися міжпредметні зв’язки, зв'язок математики як науки із життям. Завдяки включенню НО в навчальний матеріал, як у учнів, так і у вчителів зник психологічний бар’єр щодо використання НО в процесі розв’язування задач, на уроках фізики та хімії учні впевнено виконують практичні та лабораторні роботи, краще оцінюють межу похибки розрахунків, а під час розв’язання задач застосовують метод підрахунку правильних цифр, чого не можна було сказати про учнів КГ.

Також під час проведення формувального етапу педагогічного експерименту досліджувалося питання опанування вчителями математики матеріалом з НО. З цією метою на базі ІППОЧО під час проходження курсів підвищення кваліфікації їм читалися лекції та проводилися практичні заняття з НО за програмою спецкурсу. Як засвідчили результати фахового тестування, проведеного наприкінці проходження курсів, вчителі краще справлялися із завданнями з НО, ніж під час проведення діагностичної роботи на початку курсів. Анкетування вчителів хімії та фізики на курсах підвищення кваліфікації при Інституті післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області

показало, що вони також потребують методичної допомоги з НО, і проведення лекцій із зазначеної тематики їм вкрай необхідно.

Для полегшення розвитку умінь виконувати НО в учнів як старшої, так і основної школи було розроблено та схвалено до використання у навчально-виховному процесі Вченою радою Інституту післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області навчально-методичний посібник «Методи наближених обчислень».

Результати експериментальної перевірки основних положень дисертаційного дослідження підтверджують позитивний вплив розробленої методики на розвиток пізнавальної сфери учнів, на мотивацію навчання, а розв'язування прикладних задач сприяє визначенню в обранні майбутньої професії старшокласниками.

Висновки до другого розділу

Таким чином, у другому розділі дисертаційного дослідження нами розроблені зміст, засоби, методи та організаційні форми навчання НО в курсі математики старшої школи. Згідно розробленої нами методики під час роботи з наближеними величинами використовуються сучасні засоби обчислень – такі як мікрокалькулятори, комп'ютери. Також у роботі пропонується застосовувати комп'ютерні програми (нами запропоновано програму Advanced Grapher). Вона має зручний і зрозумілий інтерфейс, проста у використанні, а також дає можливість виконувати обчислення із заданою точністю.

Вивчення наближених обчислень за описаною структурою (параграф 2.1) пропонується проводити у три етапи: перший – під час повторення на початку 10 класу, другий – в курсі алгебри і початків аналізу під час вивчення основних класів функцій, третій – у 11 класі під час вивчення похідної та інтеграла, стереометрії. Зміст навчального матеріалу з наближених обчислень під час вивчення кожної наступної теми повинен логічно бути пов'язаним із попереднім матеріалом, поступово розширюючись, поглиблюючись та узагальнюючись. З цією метою та з метою доповнення вже існуючої системи

завдань з математики для учнів 10-11 класів завданнями і вправами з НО розроблено:

– розрахунково-графічні роботи;

– практичні роботи;

– систему задач і вправ до розділів курсу алгебри і початків аналізу, а також курсу стереометрії.

На кожному із зазначених етапів в курсі алгебри і початку аналізу вивчення наближених обчислень відбувається в активному режимі, весь інший час, а також під час вивчення стереометрії 10-11 класу наближені обчислення вивчаються у фоновому режимі, органічно поєднуючись із традиційним навчальним матеріалом. Матеріал з наближених обчислень також доцільно використовувати під час розв'язування прикладних задач, у проективній діяльності тощо.

На *першому* етапі вивчення НО виникає потреба ввести понятійний апарат наближених обчислень та сформувати в учнів уявлення про основні методи НО. З цією метою пропонується доповнити навчальну програму з алгебри і початків аналізу 10 класу темою «Наближені обчислення». На *інших* етапах витрати навчального часу повинні бути несуттєвими. При цьому основну увагу доцільно звертати на проблемний виклад навчального матеріалу та на дослідницьку діяльність учнів на уроках математики, в позаурочний час.

Результати експериментальної перевірки основних положень дисертаційного дослідження дають змогу зробити висновок про позитивний вплив розробленої методики на загальний розвиток пізнавальної сфери учнів, підвищують мотивацію навчання, сприяють розвитку навичок самостійної та дослідницької діяльності, формують уміння розв'язувти прикладні задачі.

Основні результати другого розділу висвітлено в публікаціях [89, 90, 92-95, 97, 100-103, 262-264].

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставленої мети та визначених завдань дисертаційного дослідження в процесі розробки та впровадження методики формування та

розвитку знань, умінь і навичок виконувати наближені обчислення в учнів старшої школи в процесі навчання математики отримано наступні **результати**:

- *проаналізовано* стан проблеми формування і розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення в науковій, навчально-методичній літературі;
- *вивчено* стан зазначеної проблеми в практиці роботи старшої школи;
- *визначено* психолого-педагогічні передумови, методичні засади формування і розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час навчання математиці;
- *розроблено* структуру змістової лінії «Наближені обчислення» в курсі математики старшої школи;
- *розроблено* методичну систему (*визначено* цілі та зміст, *обрано* засоби, організаційні форми і методи навчання) наближеним обчисленням в курсі математики старшої школи;
- *розроблено* і науково *обґрунтовано* методику розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення;
- *створено* добірку задач і вправ, розрахунково-графічних та практичних робіт, застосування яких у навчально-виховному процесі є ефективним засобом розвитку відповідних умінь.

За підсумками створення, апробації, оцінювання отриманих результатів дослідження, можна зробити наступні **висновки**:

1. Уміння виконувати наближені обчислення необхідні як для вирішення задач повсякденного життя (розв’язування практичних задач), так і для розв’язування задач суміжних дисциплін математичними методами, у майбутній професійній діяльності (інженерія, архітектура, геодезія, економіка, медицина, промисловість тощо). Відповідальність за формування відповідних умінь покладається на шкільний курс математики, у більшій мірі на алгебру і початки аналізу. У сучасній науковій та методичній літературі розроблена методика вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи,

проте не розроблена методика впровадження навчання учнів наближеним обчисленням в курсі математики старшої школи.

За своїм психічним та фізіологічним розвитком старшокласники, вік яких (16-17 років) відповідає періоду ранньої юності, цілком готові до формування і розвитку у них умінь виконувати наближені обчислення під час навчання математики.

Сучасні навчальні програми не передбачають впровадження наближених обчислень в шкільний курс математики як в основній, так і в старшій школі. Це призводить до некоректного розв'язування практичних задач математичними методами, отримання сумнівних результатів, що, в свою чергу, призводить до формального вивчення математики.

2. З метою формування і розвитку умінь виконувати НО під час вивчення математики потрібна відповідна методика, яка б використовувала сучасні засоби обчислень. У даному дослідженні така методика створена. У її основу покладено такі методи навчання як пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, емпіричний тощо. Вони поєднуються з колективною, груповою, самостійною роботою учнів.

Під час вивчення наближених обчислень в старших класах доцільно детально зупинитися на двох методах НО: методі підрахунку правильних цифр і на методі меж. Лише в класах, де математика вивчається на поглибленому рівні, доцільно оглядово ознайомити старшокласників з методом меж похибок.

Формування і розвиток умінь виконувати НО під час вивчення математики відбувається впродовж всього періоду навчання в старших класах і розбивається на складові, що формуються в процесі вивчення кожної теми і з яких складаються загальні уміння, які повинні бути розвинуті на кінець одинадцятого класу.

Для покращення результативності навчання учнів під час вивчення наближених обчислень доцільно застосовувати в роботі вчителя практичні, розрахунково-графічні роботи, а також користуватися сучасними

обчислювальними засобами та програмним забезпеченням (зокрема, інженерним калькулятором, комп'ютерними програмними засобами).

3. Ефективність розробленої методики розвитку у старшокласників умінь виконувати НО підтверджується результатами експерименту. Матеріали, отримані в результаті дисертаційного дослідження можуть бути використані вчителями математики старших класів, працівниками Інститутів післядипломної педагогічної освіти для розробки лекційних, практичних та семінарських занять на курсах підвищення кваліфікації вчителів, які викладають предмети природничого циклу, авторами навчальних програм, підручників та посібників, дидактичних матеріалів, задачників тощо.

Виконане дослідження не вичерпує проблеми розвитку у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення в процесі вивчення математики. Напрямками **подальших досліджень** можуть бути:

- розробка програм спецкурсів з математики для профільних класів (з урахуванням профілю навчання) із застосуванням методів НО;
- розробка методичної системи навчання наближеним обчисленням вчителів, які викладають предмети природничо-математичного циклу;
- розробка навчально-методичних посібників, дидактичних матеріалів, підручників з питань вивчення НО.

Список використаних джерел

1. Адишев И. Г. Формирование практических умений приближенных вычислений в условиях взаимосвязи математики и физики : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Адишев И. Г. – М., 1979. – 204 с.

2. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О.Є. Долгова – Х. : Гімназія, 2011. – 448с.

3. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник для 10 і 11 кл. серед. шк. / [А. М. Колмогоров, О. М. Абрамов, Б. Ю. Вейц та ін.]. – К.: Рад. шк., 1991. – 336 с. – (6- е вид.).

4. Алгебра і початки аналізу : Підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закладів: академічний рівень / А. Г.Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2010. – 352 с.

5. Алгебра і початки аналізу : Підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закладів: профільний рівень / А. Г.Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2010. – 416 с.

6. Алгебра і початки аналізу: Навч. посібник для 10 і 11 кл. серед, шк. / [А.М. Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін.]. – К.: Рад. шк., 1992. – 350 с.

7. Алгебра и начала анализа, 11-й класс. "Применение показательной функции и логарифмов" [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://festival.1september.ru/articles/609934/.

8. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.]. – 15-е изд. – М. : Просвещение, 2007. – 384 с.

9. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10 - 11 кл. сред. шк. / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров та ін.]. – М.: Просвещение, 1993. – 254 с. – (2-е изд.).

10. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9-10 кл. сред. шк. / [А. Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Б.Е. Вейц и др.]. – М.: Просвещение, 1987. – 335 с. – (7-е изд.).

11. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. сред. шк. / [А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.]. – М.: Просвещение, 1991. – 320 с. – (2-е изд.).

12. Алгебра и начала анализа: проб. учеб. для 9-10 кл. сред. шк. / Ш. А. Алимов [и др.]. – М.: Просвещение, 1985. – 304 с. – (2-е изд., перераб.).

13. Алгебра: Учебник для VI–VIII классов / А. Н. Барсуков.: Под ред. С.И. Новоселова. – М.: Просвещение, 1966. – 296с. – (11-е изд.).

14. Алгебра и элементарные функции: Учеб. пособие для учащихся 9 кл. средней школы / Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова.: Под ред. О. Н. Головина. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1969. – 351 с.

15. Алгебра и элементарные функции: Учеб. пособие для учащихся 10 кл. средней школы / Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова.: Под ред. О. Н. Головина. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1967. – 288 с.

16. Александров А. Д. Основания геометрии / А. Д. Александров. – М.: Наука, 1987. – 292 с.

17. Ананьев Б.Г. Избранные психологические труды. М.: Педагогика, 1980. - 288 с.

18. Андронов И. К. Арифметика: Пособие для средней школы / И. К. Андронов, В. М. Брадис. – М.: Госучпедиздат, 1962. – 296 с.

19. Антонов Н. С. О связи преподавания математики с другими предметами политехнического цикла / Н. С. Антонов. // Математика в школе. – 1961. – №2. – С. 9–15.

20. Асанидзе Ш.Н. Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы:автореф. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики»/ Ш.Н. Асанидзе.– Тбилиси, 1962.–18с.

21. Ачкан В. Використання прикладних задач у процесі вивчення показникових рівнянь у класах різних профілів / В. Ачкан. // Математика в школі. – 2011. – №4. – С. 31–35.

22. Бабанский Ю.К. Избранные пед. труды / Сост. М.Ю. Бабанский. - М. :

Педагогика, 1989. - 560с.

23. Бабанский Ю. К. Интенсификация процесса обучения / Ю. К. Бабанский. – М.: Знание, 1987. – 78 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Педагогика и психология").

24. Бабанский Ю. К. Комплексний подход к воспитанию учащихся (в вопросах и ответах) / Ю. К. Бабанский, Г. А. Победоносцев. – К.: Рад. шк., 1985. – 256 с.

25. Башмаков М. И. Учебник по алгебре и началам анализа для старших классов / М. И. Башмаков. // Математика в школе. – 1989. – №4. – С. 68–73.

26. Бевз Г. П. Алгебра. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. – 291 с.

27. Бевз Г. П. Геометрія: Підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2008. – 256 с.

28. Бевз Г. П. Математика. 10 : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – 2-ге вид. – К.: Генеза, 2011. – 272 с.

29. Бевз Г. П. Методика викладання алгебри: [посібник для вчителів] / Г. П. Бевз. – К.: Радянська школа, 1971. – 272 с.

30. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г. П. Бевз – К.: Вища школа, 1977. – 375с.

31. Бегеніна Л. Ю. Реализация прикладной направленности обучения математике в средних специальных учебных заведениях с использованием информационных технологий : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Бегеніна Л. Ю. – Арзамас, 2003. – 179 с.

32. Біляніна О. Я. Геометрія. 10 кл. : академ. рівень : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / О. Я. Біляніна, Г. І. Білянін, В. О. Швець. – К.: Генеза, 2010. – 256 с.

33. Блох А. Я. Некоторые возможности совершенствования учебников алгебры / А. Я. Блох, И. А. Павленкова, Е. К. Попова. // Математика в школе. – 1991. – №4. – С. 15–17.

34. Бойчелюк В. Й. Педагогічна психологія. Навчальний посібник / В. Й. Бойчелюк, В. В. Зарицька. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 248 с.

35. Бородуля И. Т. Показательная и логарифмическая функции (задачи и упражнения): Пособие для учителя / И. Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1984. – 112 с.

36. Брадіс В. М. Засоби і способи елементарних обчислень. Посібник для учителів математики і фізики семиріч. та серед. школи. Перекл. з 2-го рос. вид. / В. М. Брадис. – К.: Рад. школа, 1952. – 176 с.

37. Брадис В. М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы / В. М. Брадис. – М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1962. – 252 с.

38. Брадис В. М. Как надо вычислять? Пособие для сред. школы / В. М. Брадис. – М.: Просвещение, 1965. – 80 с. – (изд. 2-е).

39. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе. Учеб. пособие для пед. институтов и гос. университетов. Под ред. А. И. Маркушевича / В. М. Брадис. – М.: Учпедгиз, 1954. – 504 с. – (изд. 2-е).

40. Брадис В. М. Ошибки в математических рассуждениях [Текст] : пособие для учителей / В. М. Брадис. – Москва: Просвещение, 1967. – 192 с. – (3-е изд.).

41. Брадис В. М. Средства и способы элементарных вычислений. Пособие для учителей сред. школы / В. М. Брадис. – М.: Учпедгиз, 1954. – 203 с. – (Изд. 3-е испр. и доп.).

42. Брадис В. М. Теоретическая арифметика / В. М. Брадис. – М.: Учпедгиз, 1954. – 208 с.

43. Брадис В. М. Теория и практика вычислений / В. М. Брадис. – Москва: Учпедгиз, 1933. – 152 с. – (Вып.1).

44. Брадис В.М. Учебник для VIII - X классов средней школы. Под. ред. А.И. Маркушевича. – М. : Учпедгиз, 1957. – 339с.

45. Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы. Для общеобразоват. учеб. заведений / В. М. Брадис. – Москва: Дрофа, 1996. – 95 с.

46. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики / М. І. Бурда // Математика в школі. – 2007. – С. 3–6.

47. Васильєв М. Г. О приближенных вычислениях в старших классах / М. Г. Васильєв. // Математика в школе. – 1953. – №2.

48. Введение в научное исследование по педагогике : Учеб. пособие для студ. пед. вузов / [Ю. К. Бабанский, В. И. Журавлев, В. К. Розов та ін.]. – М.: Просвещение, 1988. – 239 с.

49. Вейцман И. Б. Некоторые вопросы методики изучения логарифмической линейки / И. Б. Вейцман. // Математика в школе. – 1961. – №6. – С. 23–25.

50. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 9 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. курса математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1988. – 352 с. – (2-е изд., дораб.).

51. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1992. – 335 с. – (3-е изд., дораб.).

52. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с. – (3-е изд.).

53. Виленкин Н. Я. Математический анализ / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1973. – 513 с.

54. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие /Л.В. Виноградова. - / Л. В. Виноградова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 252 с.

55. Вікова та педагогічна психологія: Навч. посіб. / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчукта ін.— К.: Просвіта, 2001.— 416 с.

56. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе: Сб. статей / Сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. – М.: Просвещение, 1980. – 256 с.

57. Гельфанд М. Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу / М. Б. Гельфанд. – К.: «Радянська школа», 1976. – 144 с.

58. Выготский Л. С. Собрание сочинений в 6-ти томах. Том 4. Детская психология. / Л. С. Выготский.– М.: Педагогика, 1984.– 432 с.

59. Геометрія. 10 клас. Академічний рівень: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П.Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. – Х.: Вид-во «Ранок», 2010. – 240 с.

60. Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : профіл. рівень / Г. П.Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К.: Генеза, 2010. – 232 с.

61. Геометрія. 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. П.Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К.: Генеза, 2011. – 336 с.

62. Гончарова І. В. Методика формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики : дис. канд. пед. наук : 13.00.02. / Гончарова І. В. – Донецьк, 2009. – 274 с.

63. Горєлова О. В. Про деякі проблеми викладання шкільної математики [Електронний ресурс] / О. В. Горєлова. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: http://intkonf.org/gorelova-ov-pro-deyaki-problemi-vikladannya-shkilnoyi-matematiki/.

64. Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе (из опыта преподавания) / В. У. Грибанов. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958. – 135 с.

65. Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе: [Пособие для средней школы] / В. У. Грибанов. – М.: Просвещение, 1964. – 112 с

66. Губанова М. И. Формирование профессиональных намерений старшеклассников в условиях профильного обучения : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 / Губанова М. И. – Новосибирск, 1994. – 20 с.

67. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике. Текст. / В. А. Гусев. М.: Вербум-М, 2003. - 429 с.

68. Державна національна програма «Освіта: XXI століття» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.uazakon.com/documents/date_5x/pg_irwjos.htm.

69. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти. // Математика в сучасній школі. – 2012. – №6. – С. 2–7.

70. Дроздов О. М. Ведуча роль прикладної математики в удосконаленні курсу хімії середньої школи на сучасному етапі. Монографія / О. М. Дроздов, А. Л. Жохов, Л. І. Томіліна. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2010. – 300 с

71. Дробышева И. В. Мотивация: дифференцированньїй подход / И. В. Дробышева. // Математика в школе. – 2001. – С. 46–47.

72. Дубинчук Е. С. О преподавании математики в средних профтехучилищах / Е. С. Дубинчук, В. А. Борисова. – К.: Вища школа, Голов. изд-во, 1979. – 83 с.

73. Дубинчук О. С. Професія і середня освіта: Педагогічні проблеми професійно-технічної освіти / О. С. Дубинчук. – К.: Т-во «Знання УРСР», 1979. – 48 с. – (Серія VII Педагогічна).

74. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах / В. П. Дьяконов. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 224 с.

75. Елизаветина Н.В. Приближенные вычисления в средней школе и их роль в формировании математических понятий: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики»/ Елизаветина Н.В.–Казань, 1966.–17с.

76. Ершов А. Компьютеризация школы и математическое образование / А. Ершов. // Информатика и образование. – 1992. – №5. – С. 3–12. 109

77. Єршова А. П. Геометрія. 8 клас: Підручник / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. – Х.: Веста: АН ГРО ПЛЮС, 2008. – 256 с.

78. Єршова А. П. Геометрія. 9 клас: Підручник для загальноосвіт. навч. закл./ А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський., С. В. Єршов. – Х.: Вид-во «Ранок», 2010. – 256 с.

79. Єсипов Б. П. Пути совершенствования методов обучения / Б. П. Єсипов. // Советская педагогика. – 1963. – № 12.

80. Жалдак М. І. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп‘ютерною підтримкою: навч. посіб. / М. І. Жалдак. – К.: МАУП, 2003. – 304 с.

81. Жалдак М. І. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з коп‘ютерною підтримкою: Навч. посіб. / М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2004. – 456 с.

82. Жалдак М.І. Ковбасенко Б.С., Рамський Ю.С. Обчислювальна математика: Спеціальний курс факультативних занять у 9 і 10 класах. – К.: Радянська школа, 1973. – 184 с.

83. Жалдак М. І. Чисельні методи математики : Посібник для самоосвіти вчителів / М. І. Жалдак, Ю. С. Рамський. – К.: Рад. шк., 1984. – 206 с.

84. Жданова Н. И. Проблемы физико-математического образования в лицее : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Жданова Н. И. – М., 1999. – 216 с.

85. Жигайло Н. І. Психологічна організація процесу засвоєння підлітками математичних понять : дис. канд. псих. наук : 19.00.07 / Жигайло Н. І. – К., 2001. – 195 с.

86. Жук І.В. Вивчення наближених обчислень в старшій профільній школі / І.В. Жук. // Матеріали Всеукраїнської дистанційної науково-методичної конференції з міжнародною участю «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*ПЛЮС-2011»»(11 лютого 2011 р., м. Суми). – 2011. – Том 1. – С. 47–49.

87. Жук І.В. Вивчення наближених обчислень в старшій школі: ретроспективний аналіз / І.В. Жук. // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2013). – 2013. – С. 185–187.

88. Жук І.В. Вивчення наближених обчислень в старшій школі: ретроспективний аналіз / І.В. Жук. // «Вісник Черкаського університету. Серія педагогічні науки» Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. – 2013. – №12. – С. 40–48.

89. Жук І.В. Вміння виконувати наближені обчислення як фахова компетентність вчителя математики. // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. – 2012. – С. 124–127.

90. Жук І.В. Графічний метод знаходження наближених розв'язків рівнянь та їх систем на уроках математики / І.В. Жук. // Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи». Полтава, 29-31 жовтня. – 2013. – С. 72–74.

91. Жук І.В. Деякі аспекти формування пізнавального інтересу під час вивчення наближених обчислень в старшій профільній школі / І.В. Жук, В.О. Швець. // Науково-методичний журнал «Освітній простір. Глобальні, регіональні та інформаційні аспекти». – 2012. – №4. – С. 51–53.

92. Жук І. В. Звязок між радіанною та градусною мірою кута з точки зору наближених обчислень / І. В. Жук // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology / І. В. Жук., 2015. – С. 38–43.

93. Жук І. В. Розвиток у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення показникової та логарифмічної функцій / І. В. Жук // Вісник Черкаського університету / І. В. Жук. – Черкаси: Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького, 2015. – (Педагогічні науки; 17). – С. 97–102.

94. Жук І. В. Розвиток у старшокласників умінь виконувати наближені обчислення під час вивчення похідної. / І. В. Жук // Науковий часопис національного педагогічного університету імені м. п. драгоманова. Серія № 3.

Фізика і математика у вищій і середній школі / І. В. Жук. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. – С. 33–39.

95. Жук І.В. Информатизация изучения приближенных вычислений в процессе последипломного образования учителей математики / І.В. Жук. // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Традиції та інновації в сучасній освіті та вихованні: дитячий садок, школа, внз». – Частина 1.– м. Коряжма (Росія). – 2013. – С. 56–60.

96. Жук І.В. Методика організації роботи з дітьми на уроках математики під час вивчення наближених обчислень / І.В. Жук, Ю.О. Андрух. // Науково-методичний журнал «Освітній простір. Глобальні, регіональні та інформаційні аспекти». – 2013. – №1. – С. 36–40.

97. Жук І.В. Обчислення значень тригонометричних функцій при наближених значеннях аргументу / І.В. Жук. // «Математика в рідній школі». – 2014. – №1. – С. 14–17.

98. Жук І.В. Перший дослідно-експериментальний майданчик з математики розпочав свою роботу / І.В. Жук. // «Освіта Буковини». – 2012. – №156.

99. Жук І.В. Психолого-педагогічні передумови вивчення наближених обчислень в старшій школі / І.В. Жук. // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова: Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – 2013. – С. 62–70.

100. Жук І.В. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики / І.В. Жук, І.В. Руснак. // Науково-методичний журнал «Освітній простір. Глобальні, регіональні та інформаційні аспекти». – 2014. – №3. – С. 25–27.

101. Жук І.В. Роль и место приближенных вычислений в программе по математике для старшей школы / І.В. Жук. // Збірник тез доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Математическое образование: современное состояние и перспективы», присвяченої 95-річчю з дня народження професора А.А. Столяра. – 2014. – С. 27–29.

102. Жук І. В. Фахова компетентність учителя математики під час виконання наближених обчислень / І. В. Жук // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми / І. В. Жук. – Вінниця: ВДПУ, 2012. – С. 98–102.

103. Жук І.В. Формирование у учащихся понятия приближенного значения величины / І.В. Жук. // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Современные проблемы математики, информатики и естественнонаучного знания».– м. Коряжма (Росія). – 2014. – С. 45–47.

104. Жук І. В. Формування умінь виконувати наближені обчислення пд час вивчення показникової та логарифмічної функцій / І. В. Жук // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції "Проблеми математичної освіти ПМО-2015", м.Черкаси, 4-5 червня 2015 р. / І. В. Жук. – Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 47–48.

105. Загвязинский, В. И. Теория обучения: Современная, интерпретация Текст.: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.И.Загвязинский. -М.: Изд. ценгр «Академия», 2001. – 192 с.

106. Зовнішнє оцінювання з математики. Інформаційні матеріали / [Є. Нелін, Л. Дворецька, Н. Прокопенко та ін.]. – К.: УЦЦОЯО, 2006. – 40 с.

107. Зейгарник Б.В. Предисловие / Б.В. Зейгарник // Обучаемость как принцип оценки умственного развития детей / А .Я. Иванова. – М., 1976. - С. 5-14.

108. Зимняя И.А. Педагогическая психология Текст.: Учебное пособие / И.А.Зимняя. Ростов н/Д.: Феникс, 1997. - 480 с.

109. Ігнатенко М.Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. — К.: «Тираж», 1997. — 300с.

110. Изучаем и обсуждаем программу. // Математика в школе. – 1986. – №3. – С. 33–41.

111. Изучение возможностей школьников в усвоении математики / Под ред. Ю. К. Бабанского, Ю. М. Колягина, В. Ф. Харьковского. – М., 1977. – 106с.

112. Кавун И. Н. Приближенные вычисления: [курс элементарный] /

Кавун И. Н. – М.: Гиз, 1924. – 124с.

113. Казакова Т. М. Методика формирования вычислительной культуры школьников пятых классов : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Казакова Т. М. – С.-Петербург, 2004. – 172 с.

114. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения / Калмыкова З. И. – М.: Знание, 1979. – 48с.

115. Колягин Ю. М. О создании курса математики для школ и классов экономического направления / Ю. М. Калягин, Г. Л. Луканкин, Н. Е. Федорова. // Математика в школе. – 1993. – №3. – С. 43–45.

116. Киселев А. П. Алгебра: Учеб. для неполной и полной средней школы / А. П. Киселев. – М.: Учпедгиз, 1941. – 150 с. – (I часть).

117. Киселев А. П. Алгебра: Учебник для 8-10 классов средней школы / А. П. Киселев. – М.: Учпедгиз, 1962. – (39-е изд.).

118. Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень в основній школі : дис. канд. пед. наук : 13.00.02. / Кліндухова В. М. – Київ, 2008. – 316 с.

119. Кліндухова В. М. Деякі особливості поняття про точність наближених значень у курсі математики основної школи / В. М. Кліндухова // Наукові записки / В. М. Кліндухова. – Кіровоград: РВВ КДТУ ім.В.Винниченка, 2007. – (4.2.). – (Серія: Педагогічні науки). – С. 161–165.

120. Кліндухова В. М. Наближені обчислення на уроках математики: 5-9 класи / В. М. Кліндухова, В. О. Швець. – К.: Шкільний світ, 2010. – 128 с.

121. Кліндухова В. М. Наближені обчислення у програмі з математики 12-річної школи: структурна модель / В. М. Кліндухова // Проблеми математичної освіти: Всеукр. науково-методична конференція. Черкаси, 16-18 квітня 2007 року / В. М. Кліндухова. – Черкаси, 2007. – С. 49–50.

122. Кліндухова В. М. Основні методи наближених обчислень в курсі шкільної математики / В. М. Кліндухова // Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова / В. М. Кліндухова. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2006. – (Серія №5. Педагогічні науки: реалії і перспективи: Зб. наук. праць). – С. 139–143.

123. Кліндухова В. М. Про розвивальні можливості наближених обчислень / В. М. Кліндухова // Наука і сучасність: Зб. наук. пр. НПУ ім. М.П. Драгоманова / В. М. Кліндухова. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2006. – (Том 57). – С. 89–99.

124. Кліндухова В. М. Проблеми вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики: історичний аспект / В. М. Кліндухова // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. пр. / В. М. Кліндухова. – Кривий ріг: ВВ НМетАУ, 2005. – С. 27–133.

125. Кліндухова В. М. Тезаурус елементарної теорії наближених обчислень / В. М. Кліндухова // Математика, економіка, інформатика: актуальні проблеми та методика викладання: Обласна науково-практична конференція. Кіровоград, 10-12 березня 2005 року / В. М. Кліндухова. – Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2005. – С. 42–45.

126. Клопський В. М. Геометрія: Навч. посібник для 9-10 класів середньої школи / В. М. Клопський, З. А. Скопец, М. І. Ягодовський. – К.: Радянська школа, 1981. – 248 с. – (7-е вид., доопрац).

127. Кон И.С. Психология старшеклассника / И. С. Кон – Москва: Просвещение, 1980. - с.192

128. Коновалова Г. А. Програма факультативного курсу з математики для учнів 10 класу природничого профілю «Обчислювальний практикум» / Г. А. Коновалова. // Математична газета. – 2010. – №2. – С. 16–18.

129. Крилов О. М. Лекції з наближених обчислень / О. М. Крилов. – Харків-Київ, 1932. – 392 с.

130. Крылов В. И. Вычислительные методы [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. - М. : Наука, 1976 - 1977.–Т. 2. - 1977. - 400 с.

131. Крутецкий В. А. Основи педагогической психологии / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1972. – 255 с.

132. Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьников / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

133. Кугай Н. Психолого-педагогічні засади навчання доведенням у процесі вивчення початків аналізу / Н. Кугай. // Математика в школі. – 2008. – №4. – С. 17–21.

134. Кулагіна І.Ю. Вікова психологія. - М.: Творчий центр, 2004. –203 с.

135. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. - 186 с.

136. Литовченко З. М. Приближенные вычисления: пособие для учителя / З. М. Литовченко, Н. В. Елизаветина. – К.: Рад. шк., 1988. – 125 с.

137. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность Текст. : учеб. пособие для студ. вузов / А. Н. Леонтьев. М. : Смысл, 2005. - 346 с.

138. Лук'янова М. Навчальна мотивація учнів: психолого- дидактичний аспект [Електронний ресурс] / М. Лук'янова – Режим доступу до ресурсу: http://osvita.ua/school/tehnol/2651.

139. Лупан І. В. Підвищення рівня теоретичних знань старшокласників на основі комп‘ютерно-орієнтованої системи навчання алгабри і початків аналізу : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Лупан І. В. – К., 2002. – 219 с.

140. Малафіїк І. В. Дидактика: навч. посібник /І.В.Малафіїк. – К., 2005. – 399 с.

141. Малафіїк І. В. Системно-розвиваюче навчання: суть, досвід, проблеми /І.В.Малафіїк //Нова педагогічна думка. – 1999. – №7. – С.11-22.

142. Мадбабаев М. М. Методика изучения приближенных вычислений в курсе математики восьмилетней школы на базе измерений : автореф. дис. на соискание уч. степени канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика преподавания» / Мадбабаев М. М. – МГПИ им.Ленина, М., 1987. – 15 с.

143. Малишко О. Прикладні задачі в курсі алгебри і початків аналізу / О. Малишко. // Математика в школі. – 2009. – №11. – С. 36–39.

144. Маркова А. К. Формирование мотивации учения: кн. для учителя / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.

145. Маркушевич А. И. На путях обновления школьного курса математики : Сб. статей и материалов / [сост. А.И. Маркушевич и др.] - М. : Просвещение, 1978. – 303с.

146. Маркушевич А. И. Площади и логарифмы / А. И. Маркушевич. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 51 с.

147. Маслов Г. Г. Из недавней истории реформы школьного математического образования / Г. Г. Маслов. // Математика в школе. – 1991. – №2. – С. 10–15.

148. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 10 класса / М. И.Шабунин, А. А. Прокофьев, Т. А. Олейник, Т. В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 448 с.

149. Математика. Навчальна програма для учнів 10 - 11 класів зальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. – Київ, 2010. – 21 с.

150. Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869429/.

151. Математика. Навчальна програма для учнів 10 - 11 класів зальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. – Київ, 2010. – 29 с.

152. Математика 10: Посібник для шкіл з погл. вивч. мат./ Л.М. Вивальнюк та ін. - К. : Освіта, 1998. - 301с.

153. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5-11 класи. – К.: Шкільний світ, 2001. – 112 с.

154. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів – К.: Шкільний світ, 2001. – 212 с.

155. Математика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5-12 класи. – К.: Ірпінь, 2005. – 66 с.

156. Математика. Програма для спеціалізованих шкіл, ліцеїв та гімназій 8-11 класів. – К.: Перун, 1996. – 32 с.

157. Математика. 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – 320с.

158. Махмутов М. И Организация проблемного обучения в школе. Книга для учителей. / М.И. Махмутов – М. : «Просвещение», 1977. — 240 с.

159. Межова О. В. Побудова графіків функцій за допомогою програми Advanced Grapher [Електронний ресурс] / О. В. Межова – Режим доступу до ресурсу: http://metodportal.net/node/12089.

160. Мельникова Н. Б. Проблема прикладной экономической ориентации курса алгебры средней школы : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Мельникова Н. Б. – М., 1980. – 176 с.

161. Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 клас : Підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.

162. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. – 240 с.

163. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272 с.

164. Методика преподавания геометрии в старших классах средней школы. Пособие для учителя. Под ред. А. И. Фетисова. – М.: Просвещение, 1967. – 272 с.

165. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. институтов / Ю. М.Колягин, В. А. Оганесян, В. Я. Саннинский, Г. Л. Луканин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

166. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М.Колягин, Г. Л. Луканин, Е. Л. Мокрушин. – М: Просвещение, 1977. – 48 с.

167. Методические рекомендации по разгрузке программы. // Математика в школе. – 1989. – №4. – С. 39–42.

168. Минаева С. С. Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике: Пособие для учителя / С. С. Минаева. – М.: Просвещение, 1983. – 128 с.

169. Молеваник С. П. Физические оценки как средство развития методологической культуры учащихся. : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Молеваник С. П. – С.-Петербург, 2004. – 224 с.

170. Мусаелян Р. А. Проблема усиления прикладной ориентации обучения приближенным вычислениям: автореф. дис. на соискание научной степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики»/ Мусаелян Р. А. – М., 1977. – 22с.

171. Наближені обчислення [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://lib.mdpu.org.ua/e-book/ernestbook/temas/11_3.htm.

172. Навчальні програми для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів (за новим Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти). Математика програма для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. [Електронний ресурс] / [М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін та ін.]. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: http://old.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869088/

173. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закладів: академічний рівень / Є. П. Нелін. – Харків: Гімназія, 2010. – 416 с.

174. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закладів: поглиблений рівень / Є. П. Нелін. – Харків: Гімназія, 2010. – 416 с.

175. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.

176. Нелін Є. П. Особливості реалізації компетентнісного підходу до навчання математики / Є. П. Нелін // 0собистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи. Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 8- 9 квітня 2008 року / Є. П. Нелін. – Полтава: АСМІ, 2008. – С. 28–29.

177. Немов Р. С. Психология : учебник для студентов высших пед. учеб. заведений Текст. В 3-х кн. Кн. 1. Общие основы психологии. / Р. С. Немов. -4-е изд. М.: Гуманитарный издат. центр ВЛАДОС, 2001. — 688 с.

178. Нічуговська Л. І. Математична підготовка в контексті формування конкурентноздатності фахівців / Л. І. Нічуговська, О. Г. Фомкіна // 0собистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи. Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 8- 9 квітня 2008 року / Л. І. Нічуговська, О. Г. Фомкіна. – Полтава: АСМІ, 2008. – С. 30–32.

179. Новосьолов С. Й. Тригонометрія: підручник для середньої школи / С. Й. Новосьолов. – К.: Радянська школа, 1964. – 96 с. – (9-е вид).

180. Овчиннікова Т. Супровідна роль біологічного матеріалу на етапі систематизації і поглиблення знань про функції та їх властивості в класах природничого профілю / Т. Овчиннікова. // Математика в сучасній школі. – 2009. – №6. – С. 42–45.

181. Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет / Под ред. И. В. Дубровиной, Б. С. Круглова и др.- М, 1988.-С. 140-152.

182. О проекте программ по математике для средней школы. // Математика в школе. – 1979. – №2. – С. 13–23.

183. Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет: (Педагогическая наука реформе школы)/ Под ред. И. В. Дубровиной, Б. С. Круглова. – М.: Педагогика, 1988. – 192с.

184. Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи. Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Полтава, 8- 9 квітня 2008 року – Полтава: АСМІ, 2008. – 252 с.

185. От главного управления школ Министерства просвещения СССР. «О коррективах к учебным программам общеобразовательных школ на 1979/80 учебный год». // Математика в школе. – 1979. – №3. – С. 22–24.

186. Перельман Я. И. Новый задачник по геометрии / Я. И. Перельман. – М.-Л.: Государственное издательство Москва-Ленинград, 1925. – 175 с. – (4-е изд).

187. Перестюк М. О. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. / М. О. Перестюк, В. А. Вишенський.– Кам‘янець-Подільський: Аксіома., 2006. – 284 с.

188. Плигин А. А. Личностно-ориентированное образование: история и практика Текст. / А. А. Плигин. М. : КСП+, 2003. - 431 с.

189. Повышение эффективности обучения математики в школе: Кн. для учителя: Из опыта работы / Сост. Г. Д. Глейзер.– М.: Просвещение, 1989.–240 с.

190. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2001. – 128 с. – (6-те вид.).

191. Показательная функция, ее график и свойства [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://repetitor-problem.net/pokazatelnaya-funkciya-v-gizni.

192. Поліщук Г. Інтегровані уроки в основній школі / Г. Поліщук. // Математика в сучасній школі. – 2012. – №6. – С. 21–25.

193. Попов И. Приближенные вычисления в школе / И. Попов. // Физика. Химия. Математика. Техника в трудовой школе. Методический журнал главного управления социального воспитания и института методов школьной работы РСФСР под общей редакцией профессора П.П. Лебедева. – М.: «Работник просвещения». – 1930. – №2. – С. 87–92.

194. Прайсман Н. Я. Методичні вказівки по вивченню наближених обчислень за методом меж в VII класі. / Н. Я. Прайсман. – Кіровоград, 1973. – 50 с.

195. Прайсман Н. Я. Несколько замечаний по поводу главы «Приближенные вычисления» в курсе арифметики / Н. Я. Прайсман. // Математика в школе. – 1961. – №4. – С. 40–41.

196. Прайсман Н.Я. Основы теории приближенных вычислений по методу подсчета цифр и методика их преподавания в школе: автореф. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики»/ Прайсман Н.Я.–М., 1964.–18с.

197. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / [З. І. Слєпкань, А. В. Грохольська, В. Я. Забранський та ін.]. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. – 292 с.

198. Прикладні задачі. Практичне застосування показникової та логарифмічної функцій [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: 248. http://svitppt.com.ua/algebra/prikladni-zadachi-praktichne-zastosuvannya-pokaznikovi-ta-logarifmichn.html.

199. Примерное планирование учебного материала на I полугодие 1986/87 учебного года. // Математика в школе. – 1986. – №4. – С. 54–57.

200. Примерное планирование учебного материала на II полугодие 1986/87 учебного года для школ, работающих по пробным ученикам. // Математика в школе. - 1986. - №5. - С. 46-49.

201. Примерное поурочное планирование на 1986/87 учебный год // Математика в школе. - 1986. - №3. - С. 45-47.

202. Программа по математике для средней школы. // Математика в школе. – 1968. – №2. – С. 5–20.

203. Программа по математике (VIII–XI классы) для школ (классов) с углубленным теоретическим и практическим изучением математики. // Математика в школе. – 1986. – №5. – С. 11–23.

204. Прокопенко Н. С. Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Допрофільна підготовка (Факультативи та курси за вибором) / Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: «Ранок», 2011. – 320 с. – (Ч.І.).

205. Прокопенко Н. С. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Профільне навчання (Факультативи та курси за вибором) / Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х.: «Ранок», 2011. – 384 с. – (Ч.ІІ.).

206. Пулькин С. П. Вычислительная математика. Пособие для учащихся 9–10 кл. по факультативному курсу / С. П. Пулькин. – М.: Просвещение, 1974. – 239 с.

207. Пулькин С. П. Теория и практика вычислений: [учебное пособие для студентов] / С. П. Пулькин. – М.: Просвещение, 1967. – 184 с.

208. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / С. Раков. // Математика в школі. – 2007. – №5. – С. 2–7.

209. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. д-ра. пед. наук : 13.00.02 / Раков С. А. – Х., 2005. – 516 , [13]арк.: табл. - арк. 373-410.

210. Решение комиссии по школьному математическому образованию Отделения математики АН СССР о проекте программы по математике для средней школы от 11 июня 1986 г.. // Математика в школе. – 1986. – №5. – С. 25–35.

211. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – М., 1989. – 488 с. – (Т.І).

212. Рыб К. А. Физические задачи на экстремум функции// Математика в школе / К. А. Рыб, Н. О. Бодрякова. // Математика в школе. – 1993. – №3. – С. 15–20.

213. Саранцев Г. И. Диалектический подход к осмыслению категории «знание» / Г. И. Саранцев. // Педагогика. – 2001. – №3. – С. 10–16.

214. Скаткин М. Н. Качество знаний учащихся и пути его совершенствования / НИИ общей педагогики АПН СССР; под ред. М.Н. Скаткина, В.В. Краевского. – М. : Педагогика, 1978. – 208с.

215. Скаткин М. Н. Новые исследования в педагогических науках. [Сборник статей / Отв. редактор М.Н. Скаткин]. – М.: Педагогика, 1970. – 190с.

216. Скаткин М. Н. О путях повышения эффективности обучения в связи с переходом школы на новые программы. – М. : Знание, 1971. – 56с.

217. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики. – М.: Педагогика, 1980. – 96с.

218. Скаткин М. Н. Совершенствование процесса обучения / М. Н. Скаткин. – М.: Педагогика, 1971. – 208 с.

219. Скафа Е.И. Развитие творческой личности (диагностический аспект) / Скафа Е.И., И.В. Жукова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / Скафа Е.И., И.В. Жукова. – Донецьк: ТЕАН, 2002. – (Вип. 17). – С. 14–19.

220. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е. И. Скафа. – Донецк: Издательство ДонНУ, 2004. – 439 с.

221. Слєпкань З. И. Вычисления на микрокалькуляторах / З. И. Слєпкань. – К.: Рад. шк., 1985. – 192 с.

222. Слєпкань З. І. Методика викладання алгебри і початків аналізу / З. І. Слєпкань. – К.: Рад. школа, 1978. – 224 с.

223. Слєпкань З. І. Методика навчання математики - підруч. для студ. / З. І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

224. Слєпкань. З. І. О профессиональной подготовке и переподготовке учительских кадров. / З. І. Слєпкань.. // Математика в школе. – 1991. – №2. – С. 2.

225. Слєпкань З. І. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: навч. посібник для студ. спец. «Педагогіка і методика середньої освіти. Математика.» / З. І. Слєпкань. – К.: НПУ им. М.П. Драгоманова, 2006. – 292 с.

226. Слєпкань З. І. Тригонометричні обчислення в школі. Посібник для вчителів / З. І. Слєпкань. – К.: Рад. школа, 1962. – 107 с.

227. Слободчиков В. И. Психология человека: Учеб.пособие для вузов / В. И. Слободчиков, Е. И. Исаев. – М.: Школа-пресс, 1995. – 374 с.

228. Соколенко Л. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу / Л. Соколенко, В. Швець. // Математика в сучасній школі. – 2013. – №12. – С. 32–41.

229. Соколенко Л. Прикладні задачі, призначені для вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу / Л. Соколенко, В. Швець. // Математика в рідній школі. – 2014. – №4. – С. 34–40.

230. Соколенко Л. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початкового аналізу: Практикум. Навч. посіб. / Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон, В. О. Швець. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.

231. Соколенко Л. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення інтеграла та його застосувань у курсі алгебри і початків аналізу / Л. Соколенко, В. Швець. // Математика в рідній школі. – 2015. – №1. – С. 20–28.

232. Соколовский И. Ф. Вычислительная культура как основа методики введения начал математического анализа в средней школе : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Соколовский И. Ф. – Л., 1988. – 180 с.

233. Стандарт среднего математического образования (проект для обсуждения). // Математика в школе. – 1993. – №4. – С. 10–23.

234. Степанов В. Д. Конструктивно переосмыслить прошлый опыт / В. Д. Степанов. // Математика в школе. – 1989. – №4. – С. 3–5.

235. Стратилатов П. В. О системе работы учителя математики: метод.рекомендации по организации учеб.процесса / П. В. Стратилатов. – М.: Просвещение, 1984. – 96 с.

236. Стрельченко О. С. Програма з математики для класів економічного напряму та методичні рекомендації до неї. Навчальний посібник / О. С. Стрельченко, М. А. Вайнтрауб, І. Г. Стрельченко. – К.: Т. Клочко, 2005. – 68 с.

237. Суткова А. В. Елементарна математика (наближені обчислення): Контрольно-тренувальні вправи: [Методичні вказівки] / А. В. Суткова. – К.: Радянська школа, 1966. – 60 с.

238. Суткова А. В. Наближені обчислення в курсі математики середньої школи: Методичний лист / А. В. Суткова. – К.: Радянська школа, 1966. – 34 с.

239. Суткова А. В. Питання наближених обчислень в загальноосвітній трудовій політехнічній школі : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / А. В. Суткова – К., 1964. – 271 с.

240. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: [монографія] / Н. А. Тарасенкова – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.

241. Тарасенкова Н. А. Навчання математики і семіотика: точки дотику. [Електронний ресурс] / Н. А. Тарасенкова // е-журнал «Педагогическая наука: история, теорія, практика, тенденции развития» / Архив номеров / Выпуск №1. – 2008. – Режим доступу до ресурсу: www.intellect-invest.org.ua.

242. Тарасенкова Н. А. Навчання у фоновому режимі / Н. А. Тарасенкова. // Математика в школі. – 2004. – №9. – С. 16–21.

243. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя / Н. А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

244. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 608 с. – (Том I).

245. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. –800 с. – (Том II).

246. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: учителю математики о пед. психологии / Л. М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

247. Хабиб Р. А. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики: Метод. пособие / Р. А. Хабиб. – К.: Рад. шк., 1985. – 152 с.

248. Хабиб Р. А. Приближённые вычисления в курсах алгебры и геометрии восьмилетней школы / Р. А. Хабиб. // Математика в школе. – 1962. – №2. – С. 52–59.

249. Хинчин А. Я. Основные понятия математики в средней школе / А. Я. Хинчин. // Математика в школе. – 1939. – №5. – С. 3–10.

250. Хуторской А. В. Методика личностно-ориентированного обучения. Как обучать всех по-разному?: Пособие для учителя. — М.: Владос, 2005. — 383 с (Серия «Педагогическая мастерская»).

251. Хуторской А. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования / А. Хуторской. // Народное образование. – 2003. – №2. – С. 58–64.

252. Цориева А. К. Формирование вычислительных навыков и умений учащихся 7-8 класссов по алгебре : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Цориева А. К. – К., 1993. – 175 с.

253. Цукарь А. Я. Упражнения практического характера по тригонометрии / А. Я. Цукарь. // Математика в школе. – 1993. – №3. – С. 12–15.

254. Черкасов Р. С. Академик А.Н. Колмогоров и школьное математическое образование / Р. С. Черкасов. // Математика в школе. – 1992. – №1. – С. 11–15.

255. Черненко Н. А. Задачі практичного змісту з геометрії: 9–11 класи / Н. А. Черненко. – К.: Шк. світ, 2011. – 128 с.

256. Шаран О. Ідея профілізації в системі шкільної математичної освіти / О. Шаран. // Математика в школі. – 2011. – №5. – С. 37–40.

257. Шарыгин И. Математическое образование: вчера, сегодня, завтра… О математическом образовании России. [Електронний ресурс] / И. Шарыгин – Режим доступу до ресурсу: http://scepsis.ru/libraru/id_638.html.

258. Шварцбурд С. И. О подготовке программистов в средней общеобразовательной политехнической школе / С. И. Шварцбурд. // Математика в школе. – 1961. – №2. – С. 19–29.

259. Швець В. О. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи / В. О. Швець, В. М. Кліндухова. // Математика в школі. – 2008. – №2. – С.3–8.

260. Швець В. О. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи / В. О. Швець, В. М. Кліндухова. // Математика в школі. – 2008. – №3. – С.10-15.

261. Швець В. О. Використання на заняттях з математики окремих видів самостійних робіт, що активізують формування практичних вмінь і навичок / В. О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт / В. О. Швець. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2006. – (25). – С. 60–74.

262. Швець В. О. Изучение элементов теории приближенных вычислений в курсе алгебры и начал анализа 10 класса / В. О. Швець, І. В. Жук // MATTEX 2014. Сборник научни трудове. MATHTECH 2014. Proceedings of the international conference. / В. О. Швець, І. В. Жук. – Шумен: Шуменски университет «Епископ К. Преславски». Факултет по математика и информатика. Факултет по технически науки, 2014. – (Том I). – С. 188–196.

263. Швець В. О. Наближені обчислення в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу / В. О. Швець, І. В. Жук. // Математика в рідній школі. – 2014. – №11. – С. 25–31.

264. Швець В. Наближені обчислення під час вивчення степеневої функції / В. Швець, І. Жук. // Математика в рідній школі. – 2015. – №3. – С. 18–23.

265. Швець В. О. Наближені обчислення у 7-8 класах / В. О. Швець, В. М. Кліндухова. // Математика в школі. – 2008. – №6. – С. 12–17.

266. Швець В. О. Наближені обчислення у 9 класі / В. О. Швець, В. М. Кліндухова. // Математика в школі. – 2008. – №9. – С. 16–22.

267. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : Проб, підручник для кл. шкіл та класів з поглибленим вивченням математики / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара. – К.: Освіта, 1994. – 304 с.

268. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : Проб. підручник для 10-11 кл. серед. шк. / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубінчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 608 с.

269. Шпилевая Л. Г. Измерения и математическая обработка их результатов в курсе физики восьмилетней школы : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Шпилевая Л. Г. – М., 1984. – 173 с.

270. Щербатых С. В. Модель методической системы обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы / С. В. Щербатых // Современные проблемы анализа и преподавания математики: материалы Международной научной конференции, посвящённой 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского / С. В. Щербатых. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. – С. 127–128.

271. Щербатых С. В. Методика обучения старшеклассников элементам математической статистики / С. В. Щербатых // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина / С. В. Щербатых. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2010. – (Серия «Педагогика» (История и теория математического образования)). – С. 240–248. 146

272. Щербатых С. В. Методическая система обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы : автореф. дис. на соискание уч. степени докт. пед. наук : спец. 13.00.02 "теория и методика преподавания" / Щербатых С. В. – Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - М., 2012. – 41 с.

273. Щербатых С. В. Обучение старшеклассников стохастике в русле идей профессионально-прикладной направленности / С. В. Щербатых // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на международную научную конференцию «63 Герценовские чтения» / С. В. Щербатых. – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2010. – С. 373–374.

274. Щукина Г. И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся / Г. И. Щукина. – М.: Педагогика, 1988. – 203 с.

275. Яценко С. Вибрані теми шкільної математики : 5–11 кл. / С. Яценко. – К.: Шк. Світ, 2008. – 128 с.

276. Babiański W. Matematyka. MATeMAtyka. Zakres podstawowy. Klasa 1. Podręcznik (+CD) - szkoła ponadgimnazjalna / W. Babiański, L. Chańko, D. Ponczek., 2012. – 276 с. – (MATeMAtyka).

277. Edexcel A level Mathematics (2008) [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://qualifications.pearson.com/en/qualifications/edexcel-a-levels/mathematics-2008.coursematerials.html#filterQuery=category:Pearson-UK:Category%2FTeaching-and-learning-materials.

278. GCSE (9-1) Mathematics [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://qualifications.pearson.com/content/dam/pdf/GCSE/mathematics/2015/specification-and-sample-assesment/GCSE-Mathematics-2015-SAM.pdf.

279. Kowalczyk R. Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium + CD / R. Kowalczyk, K. Niedziałomski, C. Obczyński.. – (Wydawnictwo Naukowe PWN).

280. Matematyka. MATeMAtyka. Zakres podstawowy. Klasa 2. Podręcznik - szkoła ponadgimnazjalna / W.Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, G. Janocha., 2013. – 260 с.

281. Matematyka. MATeMAtyka. Zakres rozszerzony. Klasa 3. Podręcznik - szkoła ponadgimnazjalna / W.Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, J. Wesołowska, 2014. – (MATeMAtyka).

Додаток А

Експериментальна програма курсу алгебри та початків аналізу для учнів 10-11 класів загальноосвітніх шкіл

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

з математики для учнів 10 класу

10 КЛАС

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(70 год., 2 год на тиждень)

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ	**ВИМОГИ ДО РІВНЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ**
ТЕМА 1. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ (12 годин)	
Основна мета вивчення. Узагальнити і систематизувати знання учнів, отримані в основній школі про дійсні числа; ознайомити з числовими характеристиками наближених значень чисел і величин та методами наближених обчислень.	
Методичні вказівки. Під час вивчення теми учні повинні засвоїти поняття похибки, абсолютної похибки, межі абсолютної похибки, відносної похибки, межі відносної похибки, точності наближення, розуміти, в чому полягає їх відмінність, що означають вирази «наближення з точністю до…», «наближення з відносною точністю до…». У процесі вивчення теми розглядаються два методи обчислення з наближеними значеннями: метод меж і метод підрахунку цифр. Учні повинні усвідомити, що метод меж дає достатньо надійний результат, проте він є громіздким, оскільки усі обчислення проводяться двічі. Метод підрахунку цифр в порівнянні з методом меж менш громіздкий під час оцінки похибки розрахунків, проте результат обчислень лише в окремих випадках отримується достатньо надійний. Зазвичай під час виконання дій над наближеними значеннями доводиться здійснювати громіздкі обчислення, тому в таких випадках доцільно показати учням можливість використання комп’ютера або калькулятора.	

Множини та операції над ними. Числові множини. Дійсні числа. Наближені значення чисел та величин. Характеристики наближеного значення числа: похибка, абсолютна похибка, межа абсолютної похибки, відносна похибка, межа відносної похибки, точність наближення. Запис наближених чисел у вигляді подвійної нерівності та умовної рівності. Наближені обчислення методом меж. Правильні і значущі цифри. Запис наближених значень чисел у вигляді наближеної рівності. Наближені обчислення методом підрахунку цифр. Числова пряма. Зображення чисел на числовій прямій. [Метод меж похибок].	*Зображає* на діаграмах чи числовій прямій об'єднання та переріз множин, *ілюструє* поняття підмножини. *Розрізняє* точні і наближені числа. *Знає* правила округлення чисел, виконання арифметичних дій з наближеними значеннями величин; правила подання відповіді до прикладної задачі. *Вміє* округлювати числа з наперед заданою точністю, знаходити абсолютну і відносну похибки, межі абсолютної та віфдносної похибки, точність наближення, правильні та сумнівні цифри, значущі цифри наближеного значення числа. *Вказує* форми запису наближених значень числа. *Виконує* дії над наближеними значеннями, в тому числі за допомогою обчислювальної техніки. *Знає і використовує* метод меж для знаходження наближеного значення числа, метод підрахунку цифр, *оцінює* похибки обчислень. Розв'язує прикладні задачі, дані в яких виражені наближеними числами.
ТЕМА 2. ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ (10 годин)	
Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з поняттям функції як відповідності між елементами двох множин. Узагальнити, систематизувати і розширити їх знання про властивості числових функцій. Дати трактовку поняття рівняння(нерівності) через родове поняття «функція». Здійснити огляд	

<table>
<tr><td colspan="2">основних видів рівнянь(нерівностей) та методів їх розв’язування, вивчених в основній школі.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Методичні вказівки.</u> Під час вивчення теми узагальнюється поняття функції як відповідності між елементами двох множин, через сформульоване означення розглядається числова функція як відповідність між елементами двох числових множин.

У процесі вивчення теми повторюються елементарні функції, їх графіки та властивості, що вивчалися в курсі алгебри основної школи, геометричні перетворення графіків функцій. Вивчені властивості доповнюються новими: такими як періодичність, екстремуми функції, наводяться приклади.

Узагальнюються і систематизуються методи розв’язання типів рівнянь, нерівностей з однією змінною та їх систем, вивчених в курсі математики основної школи. Повторення і узагальнення властивостей функції дозволяє розглядати рівняння як рівність двох функцій та використовувати їх властивості для розв’язання рівнянь та нерівностей.</td></tr>
<tr><td>Функція як відповідність між елементами двох множин. Аргумент, значення функції, область визначення та область значень функції.

Числова функція. Способи задання числових функцій. Властивості функцій: нулі функції, проміжки зростання, спадання, сталості функції, парність, непарність функції, екстремуми функції, найбільше та найменше значення функції, періодичність функції.

Властивості і графіки</td><td>Користується різними способами задання функцій.

Формулює означення функції як відповідності між двома множинами, числової функції, зростання і спадання, парності і непарності функції, періодичності функції, екстремумів функцій.

Знаходить область визначення функціональних залежностей, значення функцій при заданих значеннях аргументу, зокрема наближених, і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення.

Встановлює за графіком функції її</td></tr>
</table>

функцій, вивчених в основній школі. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. Обернена функція. Рівняння та їх системи. Рівносильні перетворення рівнянь. Рівняння-наслідки. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь та їх систем. Нерівності з однією змінною та їх системи. Рівносильні перетворення нерівностей, метод інтервалів. [Рівняння і нерівності, що містять знак модуля] [Рівняння і нерівності з параметрами].	основні властивості. *Виконує і пояснює* перетворення графіків функцій. *Досліджує* властивості функцій, заданих аналітично, використовує одержані результати для побудови графіків функцій. *Застосовує* властивості функцій до розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. *Вказує* методи знаходження наближених розв'язків рівнянь (нерівностей) та їх систем, *оцінює* межу похибки наближених розв'язків. *Знаходить* наближені розв'язки рівнянь із наперед заданою точністю графічним методом. *Пояснює* зміст понять "рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей", "рівняння-наслідки"; використовує їх при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.
ТЕМА 3. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ (12 годин)	
<u>*Основна мета вивчення.*</u> Сформувати уміння застосовувати означення та властивості степеня з раціональним показником для обчислень значень виразів та перетворення нескладних виразів. Узагальнити, систематизувати і розширити знання учнів про степінь, ознайомити їх із степеневою функцією та її властивостями, навчити розв'язувати нескладні степеневі та ірраціональні рівняння різними методами.	
<u>*Методичні вказівки.*</u> Під час вивчення теми узагальнюється поняття кореня, яке є опорним для введення поняття степеня з раціональним	

<table>
<tr><td colspan="2">показником та вивчення його властивостей. Учні повинні уміти записувати корінь n–го степеня через степінь із дробовим показником і навпаки; перетворювати нескладні вирази, що містять корінь n–го степеня; оцінювати та порівнювати значення ірраціональних виразів; сформувати уміння застосовувати обчислювальні засоби під час виконання наближених обчислень кореня n–го степеня.
Наводиться короткий огляд властивостей степеневої функції в залежності від показника степеня.
Під час вивчення теми учні повинні навчитися розв’язувати нескладні ірраціональні та степеневі рівняння(нерівності) різними методами. Зокрема, у старшокласників слід сформувати уміння застосовувати комп’ютерні програми для побудови графічних ілюстрацій та для знаходження розв’язків рівнянь та нерівностей графічним способом.</td></tr>
<tr><td>Корінь n–го степеня. Арифметичний корінь n–го степеня, його властивості. Перетворення коренів. Дії над коренями. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік.
Ірраціональні рівняння. [Ірраціональні нерівності. Системи ірраціональних рівнянь]. Розв’язування ірраціональних рівнянь (нерівностей) аналітичним способом та графічним методом із застосуванням комп’ютерних програм.
Степінь з раціональним показником, його властивості. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником.</td><td>Формулює означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів, та степеня з раціональним показником.
Обчислює,оцінює та порівнює значення виразів, зокрема наближені, які містять степені з раціональним показниками, корені.
Розпізнає та зображає графіки степеневих функцій.
Моделює реальні процеси за допомогою степеневих функцій.
Розв’язує нескладні ірраціональні рівняння аналітичним способом.
Застосовує обчислювальні</td></tr>
</table>

Степенева функція, її властивості та графік. Знаходження значень степеневої функції за допомогою обчислювальних засобів. Степенева функція як математична модель реальних процесів і явищ.	засоби для знаходження значень степеневої функції, для графічного розвязання рівнянь. *Застосовує* степеневу функцію для опису реальних процесів, розв'язуваня прикладних задач.

ТЕМА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ (18 годин)

Основна мета вивчення. Ввести поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса довільного кута, сформувати уміння обчислювати значення тригонометричних функцій за відомим значенням аргументу; знаходити значення тригонометричних функцій за відомим значенням однієї із них.

Вивчити властивості тригонометричних функцій, їх графіки.

Методичні вказівки. Під час вивчення теми узагальнюється поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса для довільного значення кута. Формується уміння переводити градусну міру кута в радіанну, і навпаки. Важливим аспектом вивчення теми є уміння здійснювати такі переведення для наближених значень кута; знаходити значення тригонометричних функцій для наближених значень аргументу за допомогою обчислювальних засобів.

У процесі вивчення теми розглядаються графіки тригонометричних функцій, їх властивості: знаки у чвертях; парність, періодичність.

Важливе місце в темі займають формули, що пов'язують тригонометричні функції одного і того ж аргументу, формули додавання, зведення, подвійного кута, перетворення суми і різниці тригонометричних функцій в добуток, перетворення добутку тригонометричних функцій на суму. За умови наявності часу додатково вивчаються формули пониження степеня; формули половинного кута. Добитися свідомого та міцного їх запам'ятовування можна за допомогою систематичного та комплексного застосування до перетворень тригонометричних виразів.

Радіанне вимірювання кутів. Переведення градусної міри в радіанну і навпаки за допомогою комп'ютера. Синус, косинус, тангенс, котангенс кута. Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу. Формули зведення. Властивості та графіки тригонометричних функцій. Тригонометричні функції як моделі реальних явищ і процесів. Гармонічні коливання. Тригонометричні тотожності: формули додавання; формули подвійного кута; формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій на добуток; **[**формули пониження степеня; формули половинного кута**]**; формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму.	*Виконує* перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки. *Встановлює* відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі. *Формулює* означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута і числового аргументу; властивості тригонометричних функцій. *Розпізнає і будує* графіки тригонометричних функцій і на них ілюструє властивості функцій. *Обчислює* значення тригонометричних виразів. *Обчислює* наближені значення тригонометричних функцій за допомогою обчислювальних засобів. *Оцінює* точність отриманих результатів. *Формулює* правила знаходження наближених значень тригонометричних функцій за заданим значенням аргументу та вміє користуватися ними на практиці. *Перетворює* нескладні тригонометричні вирази. *Застосовує* тригонометричні функції до опису реальних процесів, зокрема гармонічних коливань, розв'язує прикладі задачі, математичні моделі яких містять тригонометричні функції.

<table>
<tr><td colspan="2">ТЕМА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ
(14годин)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Основна мета вивчення.</u> Сформувати в учнів уміння розв’язувати найпростіші тригонометричні рівняння ($sinx = a,\ cosx = a,\ tgx = a,\ ctgx = a$) і ознайомити їх з деякими способами розв’язування тригонометричних рівнянь, що зводяться до найпростіших; навести приклади розв’язування тригонометричних нерівностей.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Методичні вказівки.</u> Під час вивчення теми важливим етапом переходу до розв’язання тригонометричних рівнянь і нерівностей є вивчення обернених тригонометричних функцій, їх властивостей.
Під час розв’язання тригонометричних рівнянь і нерівностей слід звернути увагу на використання властивостей тригонометричних функцій, знаходженню значень обернених тригонометричних функцій, коренів рівнянь за допомогою обчислювальних засобів та комп’ютерних програм.</td></tr>
<tr><td>Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки.
Найпростіші тригонометричні рівняння.
Основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь.
Найпростіші тригонометричні нерівності.
Розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей із застосуванням комп’ютерних програм, прикладних задач, моделями яких є тригонометричних</td><td>Описує зміст понять обернена функція, обернені тригонометричні функції.
Обґрунтовує розв’язки найпростіших тригонометричних рівнянь, нерівностей.
Розв’язує нескладні тригонометричні рівняння та найпростіші нерівності, прикладні задачі, математичними моделями яких є тригонометричні рівняння і нерівності.
Знаходить розв’язки тригонометричних рівнянь наближеними методами та за допомогою комп’ютерної техніки.
Оцінює точність наближених коренів</td></tr>
</table>

рівняння і нерівності.	тригонометричних рівнянь.
ТЕМА 6. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО МАТЕРІАЛУ (4 годин)	

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

з математики для учнів 11 класу

11 КЛАС

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(105 год, 3 год на тиждень)

ЗМІСТ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ	ВИМОГИ ДО РІВНЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ
ТЕМА 1. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (26 ГОД)	
Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з поняттям похідної функції, розкрити її геометричний та фізичний зміст. Сформувати уявлення про дотичну до графіка функції в заданій точці і на основі введеного поняття похідної вивести її рівняння. Виявити зв'язок між похідною та основними властивостями функції (монотонність, точки екстремуму, найбільше та найменше значення функції) та навчити застосовувати апарат похідної до дослідження функції та побудови її графіка. Сформувати уявлення про застосування поняття похідної до наближених обчислень під час розв’язання прикладних задач.	
Методичні вказівки. Під час вивчення теми поняття похідної вводиться через розв’язання задачі про визначення миттєвої швидкості та задачі про дотичну до графіка функції в заданій точці як граничне положення січної. Таким чином обґрунтовується фізичний та геометричний зміст похідної, що дозволяє вивести рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці. Також на основі введеного поняття обґрунтовується формула для знаходження наближеного значення функції в заданій точці. Вивчені правила знаходження похідних дають змогу пов’язати похідну функції та її властивості: монотонність, точки екстремуму функції, її найбільше та найменше значення. Уміння визначити властивості функцій застосовують здебільшого до побудови графіків функцій, розв’язування прикладних задач на знаходження найбільшого та найменшого значення функції, а також до наближеного розв’язування рівнянь.	

Завершується вивчення теми прикладами застосування похідної до розв’язування прикладних задач, із використанням методів наближених обчислень та оцінкою отриманих результатів	
[Неперервність та границя функції у точці.] Задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної. Застосування похідної до наближеного обчислення значень елементарних функцій. Таблиця похідних. Похідна суми, добутку і частки функцій. Похідна складеної функції. Наближені обчислення значень функції. Похідна в фізиці, техніці та економіці. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків: зростання, спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці. Розв’язання рівнянь графічним способом за допомогою комп’ютерних програм.	*Пояснює* геометричний та фізичний зміст похідної. *Знаходить* приріст функції та наближене значення функції в заданій точці**.** *Формулює* правила диференціювання, достатні умови зростання і спадання функції, умови екстремуму функції. *Називає* похідні основних елементарних функцій. *Знаходить* похідні функцій, користуючись таблицею похідних і правилами диференціювання. *Застосовує* похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції. *Обчислює* найбільше і найменше значення функції на відрізку. *Знаходить* наближені розв’язки рівнянь графічним способом, за допомогою компютерних програм. *Розвязує* прикладні задачі, що передбачають виконання дій над наближеними значеннями чисел та величин. *Оцінює* точність отриманих

Розв’язування задач прикладного змісту.	розвязків. *Розв’язує* нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.
ТЕМА 2. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ (22 ГОД)	
Основна мета вивчення. Сформувати уміння застосовувати означення та властивості степеня з дійсним показником для обчислень значень виразів та перетворення нескладних виразів. Узагальнити, систематизувати і розширити знання учнів про степінь, ознайомити їх із показниковою функцією та її властивостями, логарифмічною функцією та її властивостями. Навчити розв’язувати нескладні показникові та логарифмічні рівняння і нерівності різними методами.	
Методичні вказівки. Під час вивчення теми узагальнюється поняття степеня з раціональним показником, яке є опорним для введення поняття степеня з дійсним показником та вивчення його властивостей. Учні повинні уміти перетворювати нескладні вирази, що містять дійсний показник степеня, логарифми; оцінювати та порівнювати значення виразів, що степінь з дійсним показником, логарифмічних виразів; сформувати уміння застосовувати обчислювальні засоби під час виконання наближених обчислень виразів, що містять степінь з дійсним показником, логарифми. Наводиться короткий огляд властивостей показникової та логарифмічної функцій в залежності від значення основи. Під час вивчення теми учні повинні навчитися розв’язувати нескладні показникові та логарифмічні рівняння(нерівності) різними методами. Зокрема, у старшокласників слід сформувати уміння застосовувати комп’ютерні програми для побудови графічних ілюстрацій та для знаходження розв’язків рівнянь та нерівностей графічним способом.	
[Степінь з дійсним показником.]	*Формулює* властивості логарифмів показникової та логарифмічної функцій.

Властивості та графік показникової функції. Логарифми та їх властивості. Натуральний та десятковий логарифм. Властивості та графік логарифмічної функції. Розв'язування логарифмічних та показникових рівнянь графічним способом та за допомогою комп'ютерних програм. Похідна показникової та логарифмічної функції. Застосування логарифмічної та показникової функцій до розв'язування прикладних задач.	*Будує* графіки показникових і логарифмічних функцій і на них ілюструє властивості функцій. *Знаходить* наближені значення логарифмічної та показникової функції. *Перетворює* нескладні показникові та логарифмічні вирази. *Розв'язує* нескладні показникові та логарифмічні рівняння і нерівності. *Розв'язує* показникові та логарифмічні рівняння графічним способом за допомогою комп'ютерних програм. *Застосовує* показникові та логарифмічну функції та їх похідні до опису реальних процесів. *Оцінює* точність отриманих результатів.
ТЕМА 3. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (20 ГОД)	
Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з операцією, оберненою до диференціювання. Виробити уміння знаходити первісну та визначений інтеграл для нескладних підінтегральних функцій. Сформувати уявлення про застосування визначеного інтеграла до розв'язування геометричних, фізичних та інших прикладних задач. Ознайомити учнів з окремими методами знаходження наближеного значення визначеного інтеграла, зокрема за допомогою комп'ютерної програми.	
Методичні вказівки.. Поняття первісної вводиться як функція, похідна якої дорівнює заданій функції. На основі цього поняття з'ясовуються правила знаходження, таблиця первісних. Навички знаходження первісної продовжують формуватися під час обчислення визначеного інтеграла за	

<table>
<tr><td colspan="2">допомогою формули Ньютона-Лейбніца.
Обов’язковим під час вивчення теми є формування уяви про геометричний та фізичний зміст первісної та визначеного інтеграла. Основну увагу слід приділити застосуванню визначеного інтеграла для розв’язання практичних задач, використанню комп’ютерних програм для знаходження його наближеного значення.</td></tr>
<tr><td>Первісна та її властивості. Таблиця первісних.
Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Обчислення наближеного значення визначеного інтеграла методом прямокутників, трапецій. Використання комп’ютерних програм під час наближеного обчислення визначеного інтеграла.
Формула Ньютона-Лейбніца.
Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об’ємів тіл. Застосування інтеграла до розв’язування прикладних задач.</td><td>Формулює означення первісної та її основні властивості.
Описує поняття визначеного інтеграла.
Виділяє первісну, що задовольняє задані початкові умови.
Обчислює інтеграл, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.
Знаходить площі криволінійних трапецій, зокрема за допомогою комп’ютерних програм.
Оцінює точність наближених результатів.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ТЕМА 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ (12 ГОД)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основна мета вивчення. Ознайомити учнів з поняттям випадкової події та її відносної частоти. За допомогою введених понять дати означення ймовірності випадкової події та сформувати уміння її обчислювати. Сформулювати основні комбінаторні правила суми та добутку. Навчити обчислювати кількість розміщень, перестановок та комбінацій, та застосовувати вивчені формули до розв’язування практичних завдань.
Сформувати уявлення про статистику як науку, ввести поняття, за допомогою яких характеризується статистична інформація при вибірку.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Навчити старшокласників графічно її представляти.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Методичні вказівки.</u> Під час вивчення теми вводиться поняття випадкової події та її частоти. За їх допомогою дається класичне означення ймовірності випадкової події. Формується уміння застосовувати методи НО до її обчислення.

Важливим етапом у вивченні теми є формування уміння розпізнавати, в яких ситуаціях застосовується комбінаторне правило множення, а коли – правило додавання. Уміння розпізнавати впорядковану та невпорядковану множину за змістом прикладної задачі, дозволяє учневі визначати перестановки, розміщення і комбінації та обчислювати їх кількість на заданій множині. Отримані знання з теми допомагають знаходити ймовірність випадкової події в складніших задачах. При цьому учні не повинні забувати про правила роботи з наближеними величинами та застосовувати їх під час розв’язання задач і вправ.

У процесі обробки статистичної інформації про вибірку особливої уваги заслуговує формування умінь «читати» діаграми, таблиці і гістограми, визначати за ними міри центральної тенденції та обчислювати наближене значення математичного сподівання.</td></tr>
<tr><td>Випадкова подія. Відносна частота події.

Ймовірність події. Відносна частота як наближене значення ймовірності випадкової події.

Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Перестановки, розміщення, комбінації.

Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Середнє арифметичне</td><td>Обчислює відносну частоту події.

Розуміє зміст поняття наближеного значення ймовірності випадкової події.

Обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами.

Пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки.

Знає зв'язок середнього арифметичного даних спостережень із</td></tr>
</table>

спостережених значень як наближене значення математичного сподівання. Графічне представлення інформації про вибірку.	наближеною оцінкою математичного сподівання. *Знаходить* числові характеристики вибірки даних.
ТЕМА 5. ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ (19 ГОД)	
Резервний час 6 год	

Додаток Б1

Розрахунково-графічна робота з НО
«ПОБУДОВА ГРАФІКА СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ»

Зміст роботи. Складання таблиці значень даної функції з використанням обчислювальних засобів та побудова її графіка на міліметровій сітці.

Приклад завдань.

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а) $f(x) = x^2$, $a = -3{,}00$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

б) $f(x) = x^3$, $a = -2{,}00$; $b = 2{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

в) $f(x) = x^{-2}$, $a = -3{,}00$; $b = -0{,}40$; $\Delta x = 0{,}20$ і $f(x) = x^{-2}$, $a = 0{,}50$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

г) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $a = 0$; $b = 9{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

д) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -3{,}00$; $b = -0{,}40$; $\Delta x = 0{,}20$; $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0{,}50$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$.

Під час складання таблиці користуйтеся методом меж. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій.

3. Виготовте шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

Додаток Б2

Розрахунково-графічна робота з НО

«ПОБУДОВА ГРАФІКА ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ»

Зміст роботи. Складання таблиці значень даної функції з використанням обчислювальних засобів та побудова її графіка на міліметровій сітці.

Приклад завдань.

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ із заданим кроком Δx, якщо $f(x) = \sin x$, $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$; $\Delta x = \frac{\pi}{19}$.

Під час складання таблиці користуйтеся: I група методом меж (у відповідь записуйте лише правильні цифри числа), II група – методом підрахунку правильних цифр.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці (при цьому оберіть масштаб $\frac{\pi}{19}$ – 0,5см, відповідно 1 – приблизно 3см). Побудуйте графік функції.

3. Виготовте шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

4. Користуючись одиничним колом та властивостями косинуса, визначте, який вигляд матиме графік функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $[-2\pi;2\pi]$. Побудуйте графік функції $f(x) = \sin x$ на цьому відрізку.

5. Користуючись графіком, визначте значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-\frac{\pi}{18}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; -2{,}3; 3{,}1$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,5; 0,85? Вкажіть межу абсолютної похибки результатів.

6. За допомогою програми Advanced Grapher побудуйте графік функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $[-2\pi;2\pi]$. Користуючись отриманим графіком, виконайте попереднє завдання. Порівняйте отримані графіки та значення функції і аргументу.

Додаток Б3

Розрахунково-графічна робота з НО
«ПОБУДОВА ГРАФІКА ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ»

Зміст роботи. Скласти таблицю значень заданої функції за допомогою обчислювальних засобів та побудувати її графік на міліметровій сітці.

Приклад завдань.

1. Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а) $f(x) = e^x$, $a = -2{,}0$; $b = 2{,}0$; $\Delta x = 0{,}2$;

б) $f(x) = 2^x$, $a = -2{,}0$; $b = 2{,}0$; $\Delta x = 0{,}2$;

в) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $a = -2{,}0$; $b = 2{,}0$; $\Delta x = 0{,}2$.

Під час обчислень значень функції користуйтеся методом меж або МППЦ. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа.

2. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій.

3. Виготовте шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

Додаток Б4

Розрахунково-графічна робота з НО
«ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ НАБЛИЖЕНИМИ МЕТОДАМИ»

Мета роботи: Сформувати в учнів уявлення про наближені методи обчислення площі криволінійної трапеції для монотонної на відрізку функції. Здійснити порівняння отриманих площ для розбиття на 4 та 8 відрізків за допомогою методів прямокутників та трапецій. Визначити межі абсолютної та відносної похибки обчислень.

Хід роботи

1. Обчислити наближене значення площі фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $y = 0, x = a, x = b$, за допомогою метода прямокутників, здійснивши розбиття відрізка $[a; b]$ на: а) 4 рівних відрізка; б) на 8 рівних відрізків.
2. Визначити межу абсолютної та відносної похибки.
3. Обчисліть наближене значення площі вказаної фігури за допомогою метода трапецій для розбиття а) 4 рівних відрізка; б) на 8 рівних відрізків.
4. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

Зауваження. В якості функції $y = f(x)$ можна взяти такі функції як $y = e^x$, $y = \frac{6}{x}$, $y = lnx$, а прямі $x = a, x = b$ обрати таким чином, щоб задана функція була невід'ємною на зазначеному відрізку, наприклад $x = 2, x = 4$.

Виконання роботи. Нехай задано функцію $y = lnx$ та прямі $y = 0, x = 2, x = 4$. Обчислимо площу криволінійної трапеції, обмеженої заданими рівняннями для розбиття на 4 рівних відрізка.

Тоді інтервал розбиття $\Delta x = \frac{2-4}{4} = 0{,}5$, точки розбиття $x_0 = 2, x_1 = 2{,}5, x_2 = 3, x_3 = 3{,}5, x_4 = 4$.

Значення функції у визначених точках:

$$f(x_0) = f(2) = ln2,\ \ f(x_1) = f(2{,}5) = ln2{,}5,\ \ f(x_2) = f(3) = ln3,$$
$$f(x_3) = f(3{,}5) = ln3{,}5, \qquad f(x_4) = f(4) = ln4.$$

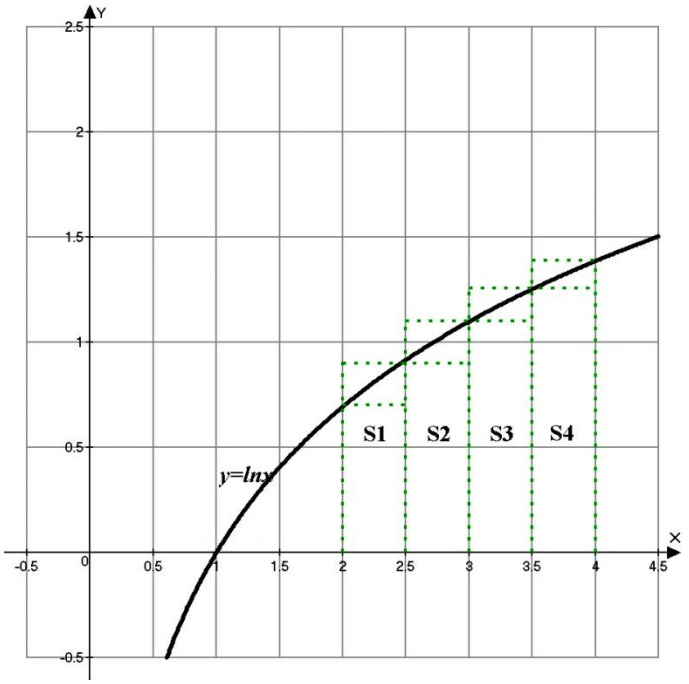


Рис. 1

Тоді $f(x_0)\cdot\Delta x < S_1 < f(x_1)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5ln2 < S_1 < 0{,}5ln2{,}5$

$f(x_1)\cdot\Delta x < S_2 < f(x_2)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5ln2{,}5 < S_2 < 0{,}5ln3$

$f(x_2)\cdot\Delta x < S_3 < f(x_3)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5ln3 < S_3 < 0{,}5ln3{,}5$

$f(x_3)\cdot\Delta x < S_4 < f(x_4)\cdot\Delta x, \quad 0{,}5ln3{,}5 < S_4 < 0{,}5ln4$

$$0{,}5(ln2 + ln2{,}5 + ln3 + ln3{,}5) < S < 0{,}5(ln2{,}5 + ln3 + ln3{,}5 + ln4)$$

$$0{,}5ln52{,}5 < S < 0{,}5ln105$$

$$1{,}980406\ldots < S < 2{,}326980\ldots$$

$$1 < S < 3$$

$S = \frac{BM_S + HM_S}{2} \pm \frac{BM_S - HM_S}{2} = 1{,}5 \pm 1$(кв.од.).

Як видно з отриманого результату, усі цифри отриманого результату для площі криволінійної трапеції не є правильними. Перша з них – сумнівна, решта – неправильні. Межа абсолютної похибки $h = 1$, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{1}{1{,}5}\cdot 100\% \approx 67\%$, що є неприпустимо великою величиною.

У випадку розбиття на 8 однакових відрізків (рис.5), інтервал розбиття буде вдвічі менший, тобто $\Delta x = \frac{4-2}{8} = 0{,}25$, точки розбиття $x_0 = 2, x_1 = 2{,}25, x_2 = 2{,}5, x_3 = 2{,}75, x_4 = 3, x_5 = 3{,}25, x_6 = 3{,}5, x_7 = 3{,}75, x_8 = 4.$

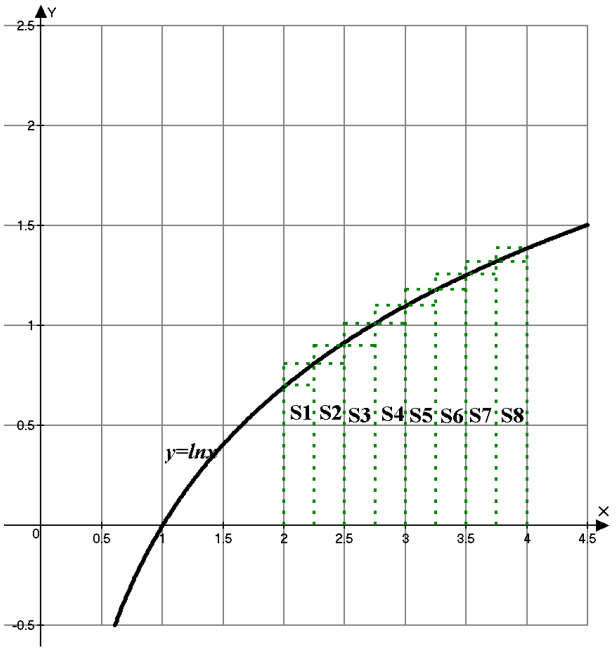


Рис. 2

Провівши аналогічні до попередніх міркування, отримаємо, що

$$0{,}25(ln2 + ln2{,}25 + \cdots + ln3{,}5 + ln3{,}75) < S$$
$$< 0{,}25(ln2{,}25 + ln2{,}5 + \cdots + ln3{,}75 + ln4)$$
$$0{,}25ln\frac{4054050}{1024} < S < 0{,}25ln\frac{8108100}{1024}$$
$$2{,}07093 \ldots < S < 2{,}24422 \ldots$$
$$2{,}0 < S < 2{,}3$$
$$S = \frac{BM_S + HM_S}{2} \pm \frac{BM_S - HM_S}{2} = 2{,}15 \pm 0{,}15 \text{ (кв. од.)}$$

Як видно з отриманого результату, перша цифра отриманого результату для площі криволінійної трапеції є правильною, друга – сумнівна. Тоді $S = 2{,}2 \pm 0{,}2$ (кв.од.). Межа абсолютної похибки $h = 0{,}2$, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}2}{2{,}2} \cdot 100\% \approx 9{,}1\%$, що є допустимою величиною.

Розглянемо розбиття заданого інтервалу на 8 відрізків (рис.5) і застосуємо метод трапецій для знаходження площі криволінійної трапеції. Тоді

$$S \approx \sum_{i=1}^{8} S_i = \sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x,$$
$$S \approx 0{,}25 \cdot \frac{(ln2 + ln4)}{2} \cdot (ln2{,}25 + ln2{,}5 + \cdots + ln3{,}75),$$
$$S \approx \frac{ln8}{8} \cdot ln\frac{2027025}{1024} \approx 0{,}25 \cdot 7{,}5906 = 1{,}89765 \approx 2\text{(кв.од)}.$$

Як видно, наближене значення площі криволінійної трапеції, обчислене за методом трапецій близьке за своїм значенням до отриманого результату за методом прямокутників. Слід зауважити, що обчислення в останньому випадку здійснювалися за методом підрахунку правильних цифр.

Додаток В1

БЛАНК ЗАПИСУ ПРОМІЖНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Завдання. Обчисліть за допомогою комп'ютера з точністю до сотих значення функції $y = \frac{x^2+\sqrt{2,35x}}{x^2-2\sqrt{2,35x}}$, якщо відоме значення аргументу.

Розв'язання. З метою контролю за правильністю проведення розрахунків під час обчислення значення функції доцільно розбити розрахунки на окремі дії та внести їх у таблицю для запису проміжних результатів. Для заданої функції таблиця матиме наступний вигляд:

а) якщо обчислення здійснюються за методом підрахунку правильних цифр

Таблиця 2.3.1

x	x^2	$2,35x$	$\sqrt{2,35x}$	$2\sqrt{2,35x}$	$x^2+\sqrt{2,35x}$	$x^2-2\sqrt{2,35x}$	$\frac{x^2+\sqrt{2,35x}}{x^2-2\sqrt{2,35x}}$

б) якщо обчислення здійснюються за методом меж

Таблиця 2.3.2

x	x^2	$2,35x$	$\sqrt{2,35x}$	$2\sqrt{2,35x}$	$x^2+\sqrt{2,35x}$	$x^2-2\sqrt{2,35x}$	$\frac{x^2+\sqrt{2,35x}}{x^2-2\sqrt{2,35x}}$
ВМ							
НМ							

Додаток В2

Практична робота

«ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА НАБЛИЖЕНИМ ЗНАЧЕННЯМ АРГУМЕНТУ»

Мета роботи: Формування умінь виконувати обчислення з наближеними величинами різними методами НО. Вироблення навичок роботи з комп'ютерною програмою Advanced Grapher. Порівняти точність обчислень значення заданого виразу трьома способами.

Обладнання: Аркуш паперу, ручка, комп'ютер із встановленою програмою Advanced Grapher.

Хід роботи

Завдання 1. Обчисліть за допомогою комп'ютера з точністю до сотих значення функції $y = \frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$, якщо точне значення аргументу $x = 1{,}73$.

Завдання 2. Обчисліть за допомогою комп'ютера значення функції $y = \frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$, якщо значення аргументу $x \approx 1{,}73$:

а) за методом підрахунку цифр;

б) за методом меж;

в) за допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher, використовуючи вікно «Обчислення».

Знайдіть межу абсолютної та відносної похибок. Порівняйте отримані результати. Зробіть відповідний висновок.

Завдання 1. Оскільки значення аргументу є точним числом, то усі цифри в записі значення $\sqrt{2{,}35x}$ будуть правильними. Для проміжного значення кореня $\sqrt{2{,}35x}$ його наближене значення повинно бути знайдено з однією запасною цифрою – з точністю до тисячних. Цю цифру слід відкинути під час запису відповіді. Запис обчислень може бути представлений у вигляді таблиці 2.3.2. Як бачимо, наближене значення функції дорівнює $y(1{,}73) \approx 0{,}08$.

Таблиця 2.3.3

x	x^2	$x^2-5{,}522$	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$
1,73	,9929	–2,5291	4,0655	2,0163…≈ ≈2,016	4,032	–0,5131≈0,513	–6,5611≈ –6,561	0,0782…≈0,08

Таблиця 2.3.4

x	x^2	$x^2-5{,}522$	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$
1,73	2,9929≈ 2,993	–2,529	4,0655 ≈4,066	2,01643 …≈2,016	4,032	–0,513	–6,561	0,07818…≈0,078

Таблиця 2.3.5

	x	x^2	$x^2-5{,}522$	$2{,}35x$	$\sqrt{2{,}35x}$	$2\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}$	$x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}$	$\frac{x^2-5{,}522+\sqrt{2{,}35x}}{x^2-5{,}522-2\sqrt{2{,}35x}}$
ВМ	1,735	3,010225	-2,511775	4,07725	2,019221	4,038442	-0,492554	-6,538559	0,08151383…
НМ	1,725	2,975625	-2,546375	4,05375	2,013392	4,026784	-0,532983	-6,584817	0,07480147…

Завдання 2. а) Під час виконання розрахунків за методом підрахунку правильних цифр у результатах проміжних дій слід залишити на одну цифру більше, ніж за відповідними правилами. Результати обчислень представлені у таблиці 2.3.4. Таким чином, з урахуванням відкинутої запасної цифри значення функції $y(1{,}73) \approx 0{,}07818 \ldots \approx 0{,}078$.

Інакше кажучи, $y(1{,}73) = 0{,}078 \pm 0{,}0005$. При цьому межа абсолютної похибки h=0,0005, а межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}0005}{0{,}078} = 0{,}0064 \ldots \leq 0{,}0065 = 0{,}65\%$. Отже, ε =0,65%.

б) Обчислення значення заданої функції за методом меж. Оскільки значення аргументу наближене, то його записують у вигляді подвійної нерівності $1{,}725 < x < 1{,}735$, де 1,725 – нижня межа (НМ), а 1,735 – верхня межа (ВМ) значення аргументу. Тоді бланк для запису проміжних розрахунків під час виконання наближених обчислень буде представлений у вигляді таблиці 2.3.5.

Отже, $0{,}074 \ldots < y(1{,}73) < 0{,}081 \ldots$. Визначимо правильні цифри:

$0{,}07 < y(1{,}73) < 0{,}09$. Тоді $y(1{,}73) = 0{,}08 \pm 0{,}01$. Як видно, перші дві цифри – нулі – правильні, а третя –8 – сумнівна.

Таким чином, $y(1{,}73) = 0{,}08 \pm 0{,}01$.

Додаток В3

Практична робота

«ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДИНИЧНОГО КОЛА»

Зміст роботи. Побудова на одиничному колі точок, що відповідають заданим кутам та визначення значень тригонометричних функцій цих кутів через координати відповідних точок. Визначення межі абсолютної та відносної похибки розрахунків.

Обладнання. Аркуш міліметрового паперу, циркуль, лінійка, транспортир.

Приклад завдань.

1. На міліметровій сітці зобразіть систему координат і оберіть одиничний відрізок. Накресліть одиничне коло.
2. За допомогою транспортира побудуйте на колі точки, що відповідають кутам: а) 35°; 158°; 216°; 354°; 430°; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{5}$; 1,4; 2,8; 3,62.
3. Визначте координати відповідних точок. Запишіть значення синуса та косинуса відповідних кутів.
4. Обчисліть значення тангенса та котангенса відповідних кутів.
5. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибки розрахунків.

Під час виконання такої роботи слід урахувати, що транспортир дає змогу побудувати кути з точністю до градуса, тому визначати значення синуса, косинуса будемо не для точного кута 35°, а для кута $(35 \pm 1)^\circ$. Результат можемо записати ***не більше***, ніж з точністю до 0,1 – ціна поділки міліметрової сітки.

Додаток В4

Практична робота

«ВИЗНАЧЕННЯ ДОТРИМАННЯ САНІТАРНИХ НОРМ ЩОДО ОБ'ЄМУ ПОВІТРЯ В ПРИМІЩЕННІ»

Мета роботи. Здійснити розрахунок об'єму повітря на одного учня в класній кімнаті та порівняти його з санітарними нормами.

Хід роботи.

1. Виміряйте довжину, ширину та висоту класної кімнати, в якій ви знаходитесь (для визначення висоти приміщення можна скористатися технічним паспортом будівлі).
2. Оцініть межі похибок проведених вимірювань.
3. За допомогою методів НО обчисліть об'єм повітря в класній кімнаті та обчисліть, скільки повітря приходиться на одного учня. Оцініть точність проведених обчислень.
4. Порівняйте отриманий результат із санітарними нормами: на 1 дорослого повинно бути 10 $м^3$ повітря, на дитину до 14 років – 7,5 $м^3$ повітря.
5. Зробіть висновок: чи достатньою є кількість повітря у вашій класній кімнаті. Яким повинен бути об'єм кабінету, для дотримання санітарних вимог?

Аналогічні вимірювання і розрахунки учні можуть провести для квартири, в якій мешкають.

Додаток Г1

СИСТЕМА ВПРАВ, ЯКА ФОРМУЄ У СТАРШОКЛАСНИКІВ НАВИЧКИ ЗНАХОДИТИ НАБЛИЖЕНІ КОРЕНІ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.

1. а) Перевірте, що числа 2,9 і 2,8 є десятковими наближеннями числа $\sqrt{8}$ з точністю до 0,1 з надлишком і з недостачею відповідно.

б) Перевірте, що числа 2,83 і 3,82 є десятковими наближеннями числа $\sqrt{8}$ з точністю до 0,01 з надлишком і з недостачею відповідно.

2. Знайдіть за допомогою калькулятора з точністю до тисячних: а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{3}{7}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; г) $\sqrt{13}-\sqrt{6}$; д) $5\sqrt{3}$.

3. Виконайте попереднє завдання, використовуючи: а) метод підрахунку правильних цифр; б) метод меж. Оцініть межі похибок обчислень.

4. Розв'яжіть рівняння: а) $x^2+3x-5=0$; б) $1{,}2x^2-7{,}2x+3{,}4=0$ з точними коефіцієнтами за методом меж. Оцініть похибки обчислень.

5. Розв'яжіть рівняння з наближеними коефіцієнтами $2{,}56x^2+3{,}7x+0{,}235=0$ за методом меж. Оцініть похибки обчислень.

6. Розв'яжіть рівняння завдання 4 та 5 за методом підрахунку правильних цифр. Порівняйте отримані результати.

7. За допомогою калькулятора знайдіть наближені значення функції $y=x^2$ для наближених значень аргументу та заповніть таблицю:

X	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2													

За знайденими значеннями на міліметровому папері побудуйте графік функції $y=x^2$. Виготовить шаблон графіка цієї функції.

8. Користуючись виготовленим шаблоном, побудуйте графік функції:

а) $y=-x^2$	в) $y=x^2-1{,}2$	д) $y=1{,}5x^2$	е) $y=0{,}2x^2-2{,}5$	з) $y=\lvert 0{,}2x^2-2{,}5\rvert$
б) $y=(x+1)^2$	г) $y=(x-0{,}5)^2+1$	є) $y=-0{,}5x^2$	ж) $y=2(x-2{,}5)^2$	і) $y=2(\lvert x\rvert-2{,}5)^2$

9. Розв’яжіть графічно рівняння: $1{,}5x^2 = 2{,}5x + 3$. Перевірте отриманий результат за допомогою комп’ютерної програми Advanced Grapher.

10. Розв’яжіть графічно нерівність: $1{,}5x^2 \le 2{,}5x + 3$. Перевірте отриманий результат за допомогою комп’ютерної програми Advanced Grapher.

11. Знайдіть радіус, при якому площа круга дорівнюватиме площі квадрата, сторона якого має ту саму довжину.

12. Висота мідного бруса, що має форму прямокутного паралелепіпеда, в основі якого лежить квадрат, дорівнює 12,1см. Знайдіть довжину невідомих ребер бруса, якщо його маса 971г (визначте густину міді за таблицею).

13. Вкладник поклав до банку 1000 грн. За перший рік йому нарахований відсоток річних, який другого року збільшений на 2%.У кінці другого року на рахунку було 1188 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка першого року?

14. Вексель в 3000 руб. проданъ за 1 годъ и 10 дней до срока, съ уплатою 7 ½ % и полученные деньги отданы въ ростъ по 6 сложныхъ процентовъ на два года. Как велика будетъ эта сумма по прошествіи 2-х лът?

Додаток Г2

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ ПО ТЕМІ «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ»

Корінь n-го степеня та його властивості.

1. Знайдіть за допомогою калькулятора значення виразів з точністю до сотих, вважаючи підкореневі вирази точними числами: а) $\sqrt[5]{378}$; б) $\sqrt[3]{23{,}4}$; в) $\sqrt[4]{23}+2$; г) $\sqrt[3]{187}-4$. Оцініть межу абсолютної та відносної похибки.

2. Обчисліть значення виразу, користуючись методом підрахунку правильних цифр: а) $\sqrt{3{,}5}$; б) $\sqrt[3]{0{,}37}$; в) $\sqrt[3]{1{,}70}+\sqrt[3]{3{,}48}$; г) $\sqrt{4{,}25}-\sqrt[3]{2{,}3}$.

3. Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x$, де Δx – величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів: а) $\sqrt{1{,}002}$; б) $\sqrt{9{,}01}$; в) $\sqrt{0{,}98}$; г) $\sqrt{25{,}036}$.

4. Виконайте завдання 2, 3 за допомогою методу меж. Порівняйте отримані результати. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибок.

Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її властивості.

5. Користуючись калькулятором, обчисліть наближені значення функції для вказаних у таблиці наближених значень аргументу:

а) $y=\sqrt{x}$

x	0	0,5	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
y														

б) $y=\sqrt[3]{x}$

x	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y													

6. Користуючись даними, отриманими у завданні 5, побудувати на міліметровій сітці графіки функцій $y=\sqrt{x}$ та $y=\sqrt[3]{x}$. Зробіть шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

7. Скористайтеся виготовленим шаблоном та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки функцій:

а)$y=\sqrt{x+1}$; б)$y=\sqrt{2x}$; в)$y=0{,}5\sqrt{x}$; г)$y=-2\sqrt{x}$; д)$y=1{,}5-3\sqrt{x}$;

е)$y=\sqrt[3]{x}+1$; є)$y=\sqrt[3]{0{,}5x}$; ж) $y=\sqrt[4]{|x|}$; з)$y=3\sqrt[3]{x-1}$; и) $y=\left|1{,}5+\sqrt[3]{x}\right|$.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\sqrt[3]{x}-1{,}5$ та $y=2+x$ а) на міліметровій сітці; б) за допомогою комп'ютерної програми. Визначте координати точки перетину графіків. Оцініть точність отриманого результату.

Ірраціональні рівняння та нерівності.

9. Розв'яжіть рівняння графічним способом, виконавши побудову графіків функцій на міліметровій сітці: а) $\sqrt{0{,}3x}-x+2{,}3=0$; б) $1{,}5+\sqrt[3]{x-2}=2x$. Оцініть межу абсолютної похибки результату.

10. Розв'яжіть нерівність графічно, виконавши побудову графіків відповідних функцій на міліметровій сітці: а) $\sqrt{x}>x+1{,}2$; б) $\sqrt[3]{x-0{,}5}\le x$. Оцініть межу абсолютної похибки результату.

11. Виконайте завдання 9 та 10 за допомогою комп'ютерної програми. Порівняйте отримані результати та зробіть відповідні висновки.

Степінь з раціональним показником. Степенева функція.

12. За допомогою калькулятора знайдіть значення степеневих функцій $y=x^{1.4}$, $y=x^{\sqrt{2}}$ з точністю до тисячних для вказаних значень аргументу (Значення аргументу вважати точним числом). Порівняйте отримані результати.

x	2	3	4	5	6
$x^{1.4}$					
$x^{\sqrt{2}}$					

13. Обчисліть значення функції $y=x^{\sqrt{2}}$, округлюючи показник степеня з точністю до сотих для наближених значень аргументу а) 3,2; б) 3,20; в) 3,2000.

14. Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу $(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x$, де Δx – величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів: а) $1{,}003^{52}$; б) $0{,}996^5$.

15. Виконайте завдання 14, користуючись методом меж. Порівняйте отримані результати.

16. Виконайте розрахунково-графічну роботу (додаток Б): Скласти таблицю наближених значень заданої функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ із заданим кроком Δx, якщо:

а) $f(x) = x^2$, $a = -3{,}00$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

б) $f(x) = x^3$, $a = -2{,}00$; $b = 2{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

в) $f(x) = x^{-2}$, $a = -3{,}00$; $b = -0{,}40$; $\Delta x = 0{,}20$ та

$f(x) = x^{-2}$, $a = 0{,}40$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

г) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $a = 0$; $b = 9{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$;

д) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -3{,}00$; $b = -0{,}40$; $\Delta x = 0{,}20$ та $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0{,}40$; $b = 3{,}00$; $\Delta x = 0{,}20$.

Під час роботи користуйтеся методом меж. У відповідь записуйте лише правильні цифри числа. За складеною таблицею значень нанесіть точки з відповідними координатами на координатну площину, зображену на міліметровій сітці. Побудуйте графіки відповідних функцій. Виготовте шаблони за допомогою побудованих графіків функцій.

17. Побудуйте в одній системі координат за допомогою виготовлених раніше шаблонів графіки функцій: а) $y = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$, $x \geq 0$; б) $y = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^3$. Що можна сказати про точність побудови ескізів графіків?

18. Розв'яжіть графічно рівняння: а) $(x - 1{,}5)^{0{,}5} = -x^2 + 2x$; б) $x^{-2} = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$.

19. Знайдіть множину розв'язків нерівності, використовуючи комп'ютерну програму: $(x + 2)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{x - 2{,}5}$.

Математичні моделі реальних процесів.

20. Залежність енергії E рухомого тіла при сталій масі m від його швидкості v виражається формулою $E = \frac{1}{2}mv^2$. Обчисліть енергію тіла, маса якого $m \approx 2{,}20$ кг, якщо воно рухається із швидкістю 18,23 км/год.

21. Ціна газу для населення складала 0,68 грн за 1 куб. м. після подвійного підвищення тарифу на x% ціна стала 1,12 грн за 1 куб. м. Визначте, на скільки відсотків підвищувалася щоразу ціна?

Додаток Г3

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕМИ «ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»

Тема «Тригонометричні функції»

1. За допомогою калькулятора зайдіть радіанні міри кутів: а) 27°; б) $37^\circ 54'$; в) $36^\circ 54' 23''$.

2. За допомогою калькулятора зайдіть градусні міри кутів: а)0,235; б) 2,650; в) 1,3256.

3. На одиничному колі приблизно відмітьте точки, що відповідають числам 1,2; -3,55; 22.

4. Обчисліть довжину дуги радіуса R=15,0 см, що відповідає центральному куту, який дорівнює α, якщо $\alpha = 75^\circ$; $\frac{\pi}{16}$; 2,120.

5. За допомогою калькулятора зайдіть наближені значення тригонометричних функцій кута α, якщо $\alpha \approx 0{,}18;\ 2{,}43;\ 32^\circ 14'$.

6. Використовуючи формули додавання, обчисліть з точністю до 0,001 значення $\sin 15^\circ$; $cos 75^\circ$.

7. Обчисліть без таблиць значень тригонометричних функцій значення $\sin 46^\circ$ з точністю до 0,001, якщо $\cos 32^\circ \approx 0{,}848$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\sin 46^\circ = \sin(30^\circ + 16^\circ)$.

8. Для кожного з даних кутів знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс:

1) $20^\circ 48'$	4) $88^\circ 54'$	7) $61^\circ 13'$	10) $45^\circ 07'$
2) $35^\circ 06'$	5) $20^\circ 50'$	8) $88^\circ 51'$	11) $87^\circ 11'$
3) $61^\circ 12'$	6) $35^\circ 05'$	9) $44^\circ 03'$	12) $65^\circ 05'$

9. Знайти гострий кут за заданим значенням синуса (косинуса):

1) 0,1874	4) 0,9903	7) 0,9412	10) 0,9441
2) 0,5577	5) 0,2682	8) 0,4381	11) 0,9944

3) 0,9078	6) 0,8264	9) 0,8760	12) 0,0020

10. Знайти гострий кут за заданим значенням тангенса (котангенса):

1) 0,2698	4) 0,9903	7) 0,9412	10) 0,9441
2) 2,2250	5) 0,2682	8) 0,4381	11) 0,9944
3) 3,9230	6) 0,8264	9) 0,8760	12) 0,0020

11. Виконайте розрахунково-графічну роботу і виготовте шаблон графіка функції $y = \cos x,\ y = \sin x$. **Вказівка.** Для побудови синусоїди користайтеся рівністю $\cos x = \sin(x - \frac{\pi}{2})$.

Тема Тригонометричні рівняння і нерівності

12. Обчислити в градусах і в радіанах: $arcsin 0{,}4587$; $arccos 0{,}3245$; $arctg 2{,}7087$; $arcctg(-3{,}4587)$; $arcsin(-0{,}5034)$.

13. Розв'яжіть рівняння а) $cosx = 0{,}23$; б) $2sinx = 1{,}234$; в) $tg(2x) = -3{,}2$.

14. Розв'яжіть графічно рівняння $sinx = 1 - x$. Відповідь запишіть з точністю до 0,01. Визначте, чи розв'язки рівняння визначені з надлишком, чи з недостачею.

15. Знайти корені рівняння з точністю до тисячних: а) $\cos x = x - 1$; б) $\sin x + 0{,}5 = x$.

16. Скільки коренів має рівняння $10\sin x = x$?

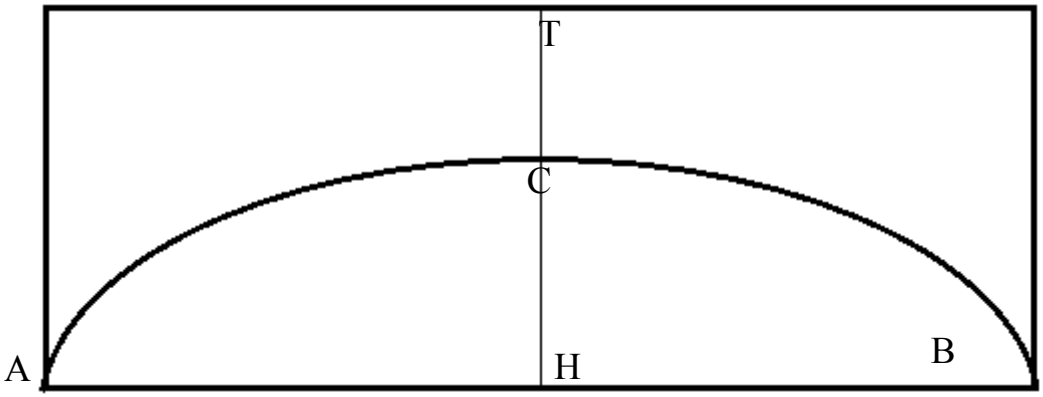
17. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $tgx = 1 - x$ з точністю до 0,01. Виконайте завдання за допомогою комп'ютерної програми.

18. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте графіки функцій $y = \sin x$, $y = x^2$ та розв'яжіть графічно рівняння з точністю до 0,001: $x^2 = \sin x$.

Задачі практичного змісту

19. Колесо радіуса 2,2 м повернулось на кут $88^\circ 51'$. Знайдіть довжину шляху, пройденого точкою на ободі цього колеса. *Вказівка.* Скористайтеся формулою $l = \alpha R$, де кут α вимірюється в радіанах.

20. На рисунку зображено переріз мосту, де АСВ – дуга кола. АВ=20м, СН=1,2м і СТ=1м. Знайдіть площу цього перерізу.



21. Знайдіть напрям і рівнодійну двох сил, прикладених до точки А, якщо одна з них дорівнює 5Н, друга – 7Н, а кут між ними 80°.

22. Промінь світла проходить через скляну пластину товщиною *d*. Визначити величину паралельного зміщення цього променя, якщо кут падіння дорівнює α, а показник заломлення скла дорівнює n.

23. Кривошип ОР довжина якого 13см, обертається проти стрілки годинника із кутовою швидкістю 180 обертів за хвилину. У початковий момент часу він нахилений під кутом 48° до додатного напряму осі абсцис. Визначити закон руху проекції точки Р на вісь абсцис.

24. У мережі змінного струму між силою струму і часом задано залежність $I = 2{,}75\sin(700t + 1{,}44)$. Визначте максимальне значення сили струму, кількість періодів у секунду і початкову фазу. Побудуйте графік залежності сили струму від часу.

25. Знайдіть напрям і рівнодійну трьох сил, прикладених до точки М, якщо їх величини дорівнюють 12Н, 20Н, 33Н відповідно, а кути, утворені з додатним напрямом осі абсцис дорівнюють 21°, $43^\circ 14'$, $105^\circ 34'$.

26. З вершини пагорба, який знаходиться на лівому березі річки, цей берег видно під кутом $33{,}4^\circ$ до лінії горизонту, а правий берег – під кутом $27{,}9^\circ$. Визначте висоту пагорба і відстань до берега річки, якщо ширина річки дорівнює 125,0м.

27. Сила змінного струму є функцією, що залежить від часу і виражається формулою $J = Asin(wt + \varphi)$, де A– амплітуда коливань, w– частота, φ– початкова фаза. Побудуйте графік цієї функції, якщо $A = 2, w = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$.

28. Літак, який видно з бази пошукової групи під кутом 15°, інформує на базу, що він знаходиться на висоті 800 м над об'єктом, що розшукується. Знайти відстань від бази до об'єкта, що розшукується.

29. Під час фотографування оборотної сторони Місяця автоматична міжпланетна станція знаходилася від нього на відстані, що приблизно дорівнює 65 000 км. Під яким кутом в цей час було видно Місяць? Радіус Місяця прийняти рівним 1740 км.

30. М'яч, кинутий вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 40 м/с$, через t секунд виявляється на висоті $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ метрів від точки кидання, де $g \approx 9{,}8 м/с^2$. Знайдіть h при $t = 3; 7$ секунд.

31. За допомогою калькулятора обчисліть період коливання маятника довжиною 18,5 см за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l – довжина маятника (виражена в метрах), $g \approx 9{,}8 м/с^2$, T– період коливань (у секундах).

Додаток Г4

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕМИ «ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ»

Показникова функція

1. Користуючись калькулятором чи таблицями, обчисліть з точністю до 0,0001 значення: а) $10^{1,7}$ та $10^{1,8}$; б) $10^{1,73}$ та $10^{1,74}$; в) $10^{1,732}$ та $10^{1,733}$; г) $10^{1,7320}$ та $10^{1,7321}$. Скориставшись отриманими значеннями, знайдіть значення $10^{\sqrt{3}}$ з точністю до 0, 001.

2. Знайдіть значення функції $y = 3{,}25^{x-1}$ за відомим значенням аргументу: а)$x = 2{,}1; 2{,}75;\ 3{,}146;$ б)$x \approx 0{,}3; 1{,}12; 3{,}146.$ Основу функції вважати точним числом. Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

3. Для функції $y = 1{,}34^x$ основа є наближеним числом. Знайдіть за допомогою обчислювальних засобів значення функції, якщо: а) $x = 0{,}1; 1{,}34;\ 2{,}109;$ б)$x \approx 0{,}8; 1{,}08; 3{,}270.$ Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

4. Обчисліть значення виразу: $2{,}4^{1,32} + \frac{0{,}75-1{,}02^3}{3\cdot 5{,}12^{-0{,}41}}$, якщо: а) усі числа є точними; б) основи степенів – точні, а показники – наближені числа. Порівняйте отримані результати.

5. Скористайтеся виготовленими шаблонами та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки показникових функцій: а) $y = 2^{-x}$; б) $y = 0{,}5^{x-2}$; в) $y = 3 \cdot 2^x$; г) $y = -3^{2x}$; д) $y = 3 - 2^{x+1}$; е) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$; є)$y = 0{,}5^x + 1{,}5$; ж) $y = 2^{|x|}$; з)$y = 4^{|x-1|}$; и) $y = |2 - 0{,}5^x|$.

6. Розв’язати рівняння графічно на міліметровій сітці: а) $2^x = 2{,}5 + x$; б) $2^{x-1} = x^2$; в) $3^x = 3x + 0{,}5$. Знайдіть наближені значення коренів рівнянь. Оцініть межу абсолютної похибки.

7. Виконайте попереднє завдання за допомогою комп’ютерної програми. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

8. Розв'язати рівняння графічно за допомогою комп'ютерної програми: а) $3^{x-0,25}=3+2x$; б) $1,5-2^{0,5x}=x^2$; в) $2^{3x}=3x+x^2$. Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

9. Розв'язати нерівності графічно на міліметровій сітці: а) $0,5^x \geq 2x-3$; б) $2^{x-1} \leq x^2$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 3x+0,5$.

10. Розв'язати нерівності графічно за допомогою комп'ютерної програми: а) $1,5-2^{0,5x}=x^2$; б) $(1,3)^{2x-0,25}=3+2x^2$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}=\frac{3x+x^2}{2}$. Запишіть множину розв'язків нерівності з точністю до сотих; тисячних.

Логарифмічна функція

11. Знаючи, що $\lg 2 \approx 0,3010$, $\lg 3 \approx 0,4771$, $\lg 5 \approx 0,6990$, знайдіть десяткові логарифми наступних чисел: 12; 18; 20; $\frac{2}{15}$; $\sqrt[3]{15}$; $\sqrt[5]{2}$; $\frac{1}{27}$; $\log_{0,5} 3$; $\log_2 125$; $\log_2 18$.

12. Знайти значення $\lg 2, \lg 5$, якщо добуток цих десяткових логарифмів наближено дорівнює 0,2104.

13. Користуючись інженерним калькулятором, обчисліть $\lg 2,7$; $\ln 3,45$; $\log_{0,3} 7$ з точністю до 0,001.

14. Знайдіть значення функції $y=\log_{3,5} x$ за відомим значенням аргументу: а) $x=2,1; 2,75; 3,146$; б) $x \approx 0,3; 1,12; 3,146$. Основу логарифма вважайте точним числом. Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

15. Знайдіть за допомогою обчислювальних засобів значення функції $y=\ln(2x)$, якщо: а) $x=0,1; 1,34; 2,109$; б) $x \approx 0,8; 1,08; 3,270$. Укажіть межу абсолютної та відносної похибки.

16. Обчисліть значення виразу: $\sqrt{3+\log_{1,2} 6,75}$, якщо: а) усі числа є точними; б) число 6,75 є наближеним; в) числа 1,2 та 6,75 є наближеними. Порівняйте отримані результати.

17. Знаючи, що $\log_2(\sin\varphi)\approx 0{,}1919, \log_2(\cos\varphi)\approx 0{,}1157$, знайти логарифми $\log_2(tg\varphi), \log_2(ctg\varphi)$.

18. Скористайтеся виготовленими шаблонами та за допомогою елементарних геометричних перетворень побудуйте графіки наступних функцій: а)) $y = 3lnx$; б) $y = -ln(2x+1)$; в) $y = \log_{3,5} x$; г) $y = log_{3,5} x - 1$; д) $y = |3 - lnx|$.

19. За допомогою обчислювальних засобів знайдіть корені рівняння: а) $10^{2x-1} - 1 = 7$; б) $5^{3x+1} = 19{,}5$.

20. Розв'язати рівняння графічно, користуючись міліметровою сіткою: а) $\log_2 x = x - 3$; б) $\log_2(x+3) = 3 - x$; в) $\log_2 x = \frac{1}{x}$. Знайдіть точність наближених значень коренів рівнянь.

21. Виконайте попереднє завдання за допомогою комп'ютерної програми. Порівняйте отримані результати. Зробіть висновки.

22. Розв'язати рівняння графічно за допомогою комп'ютерної програми: а) $\log_{1,5}(2x-3) = 3 + 2x$; б) $1{,}5\cdot 2^{0,5x} = \log_3 x^2$; в) $\ln(5 - 1{,}7x) = 3x - x^2$. Знайдіть наближені значення коренів цих рівнянь з точністю до 0,1; 0,01.

23. Розв'язати нерівності графічно на міліметровій сітці: а) $\log_{1,5} x \geq 3 + 2x$; б) $\log_2 x \prec \frac{1}{x}$; в) $\ln(5 - x) \leq 3x - x^2$.

24. Розв'язати нерівності графічно за допомогою комп'ютерної програми: а) $0{,}5^x \geq \lg(2x-3)$; б) $\log_{0.2}(x-2) \leq x^2$; в) $-2\log_{3.4}(x - 2{,}8) \leq 3x + 0{,}5$. Запишіть множину розв'язків нерівності з точністю до сотих; тисячних.

Прикладні задачі

Показникова функція

25. 1 січня 2014 року бізнесмен вирішив питання про придбання копіювально-розмножувальної техніки на суму 43,256 млн. грн. Термін придатності техніки – 5 років, після чого вона повністю зношується. Щорічний прибуток від використання – 13,174 млн. грн. Щорічні витрати на її використання розподіляються за роками наступним чином: 2,365; 3,325; та

4,129 млн. грн. При цьому прибуток отримуємо в кінці року, а відповідні витрати на використання виплачуються відразу при отриманні прибутку. Техніку, що придбали продати не можливо. Чи є глузд у придбанні техніки при умові, що ставка банківського прибутку за депозитом (виплачується один раз на рік) до 1 січня 2019 року буде постійною та складає 17% на рік? Інфляція у розрахунок не приймається.

26. Чисельність деякої популяції складає 8200 осіб. Останнім часом вона щорічно зменшувалась на 9,5%. Коли чисельність популяції досягне 1800 осіб, вона почне вимирати. Скільки років залишилось існувати популяції? (формула складних відсотків)

27. Прикладом швидкого розмножування бактерій є виготовлення дріжджів, під час якого по мірі росту бактерій проводиться відповідне додавання цукрової маси. Знайти масу дріжджів, якщо їх початкова маса складає 5,3 кг, а тривалість процесу 4,0 год. Обчислення проводяться за формулою $m = m_0 \cdot 1{,}2^t$, де m_0– початкова маса дріжджів, t– час бродіння в годинах.

28. Якою була чисельність населення міста 10 років тому, якщо в даний час проживає 300 тис. чоловік, а щорічний приріст населення складає 3,5%.

29. Обчислити, яким буде атмосферний тиск на вершині Ельбрусу, висота якого 5,60 км, якщо залежність атмосферного тиску p від висоти (вираженої у кілометрах) h над рівнем моря виражається формулою: $p = 76 \cdot 2{,}7^{\frac{h}{8}}$.

30. Вартість обладнання дорівнює 500 тис. грн.. Відомо, що через 10 років вартість цього обладнання через амортизацію буде дорівнювати 200 тис. грн. Знайдіть відсоток щорічної амортизації обладнання. $(\mathrm{B_п} = \mathrm{B_0} \cdot (1 - \frac{\mathrm{p}}{100}))^{\mathrm{п}}$.

31. Перший міжнародний еталон радію був виготовлений Марією Кюрі в серпні 1911 року, і складав 16,74 мг чистого радію. Яка кількість радію міститься в еталоні в 2015 року? Розрахунки слід проводити за формулою

$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$, де m_0– початкова маса речовини, t– час, що пройшов з 1911 року.

Логарифмічна функція

32. Вкладник поклав до банку 10 000 грн під 12% річних. Через скільки років сума на рахунку подвоїться?

33. Населення міста зростає щорічно на 3%. Через скільки років населення міста збільшиться у 5 разів.

34. Альпіністи, які підкорювали пік Перемоги, досягли висоти, де тиск був рівний 304 мм рт. ст. обчислити на якій висоті находяться альпіністи, якщо p0 = 760 рт. ст. Висота над рівнем моря обчислюється за формулою $h = \frac{8000}{0{,}4343} \cdot \lg\frac{p_0}{p}$, де p_0- тиск над рівнем моря, p– тиск на висоті h.

35. Початкова кількість бактерій в колонії складала 8, а через 2 години після того як їх розмістили в сприятливе середовище, число збільшилось до 100. Через який період часу можна очікувати колонію в 500 бактерій. Розрахунки слід проводити за формулою $x = \frac{t\cdot(\lg B - \lg Q)}{\lg P}$, де Q– початкова кількість бактерій, t– час, P – число, що показує, у скільки разів змінилася кількість бактерій за вказаний час, B – кінцева кількість бактерій.

Додаток Г5

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

Похідна функції

1. Обчисліть з точністю до 0,1: а) $\sqrt{9{,}02}$; б) $\sqrt{12{,}07}+\frac{2}{7}$; в) $5\sqrt{36{,}4}$.

2. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення квадрата числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення числа: $1{,}02^2$; $0{,}97^2$; 102^2; 97^2.

3. Скориставшись формулою наближених обчислень значення функції, обчисліть наближено $1{,}002^5$; $2{,}006^5$; $3{,}001^4$.

4. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення кореня квадратного з числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення кореня: $\sqrt{1{,}01}$; $\sqrt{0{,}98}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{96}$.

5. Цікавим є спосіб, за допомогою якого наближене значення квадратного кореня шукали стародавні вавилоняни ще за дві тисячі років до нашої ери. В сучасній математиці цей спосіб може бути поданий у вигляді формули $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$. Скориставшись зазначеною формулою, обчисліть значення коренів $\sqrt{1{,}01}$; $\sqrt{0{,}98}$; $\sqrt{101}$; $\sqrt{96}$. Порівняйте відповіді з результатами, отриманими у вправі 4. Зробіть висновок.

6. Користуючись формулою для знаходження наближеного значення кореня квадратного з числа, що близьке до одиниці, обчисліть наближене значення кореня: $\sqrt[4]{1{,}08}$; $\sqrt[3]{27{,}05}$; $\sqrt[8]{1000}$.

7. За допомогою формул наближеного значення функції, обчисліть значення виразів $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$. *Вказівка. Врахуйте, що* $3=1{,}7^2+0{,}11$, $2=1{,}2^3+0{,}272$, $2=1{,}2^4-0{,}0736$.

8. За допомогою формул наближеного значення функції, обчисліть значення виразів $(27\cdot 2)^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[4]{625\cdot 3}$; $162^{\frac{1}{4}}$.

Застосування похідної

9. На початку радіоактивного розпаду мали 1 г радія А. Через скільки хвилин його залишиться 0,125 г, якщо його період напіврозпаду дорівнює 3 хв?

10. Період напіврозпаду радіоактивної речовини дорівнює 1 год. Через скільки годин його кількість зменшиться у 10 разів?

11. Обчисліть, яка доля радія залишиться через 1000 років, якщо період його напіврозпаду дорівнює 1550 років.

12. Визначити розміри циліндричної закритої консервної банки, об'єм якої V см^3, щоб затрати жерсті на її виготовлення були найменшими.

13. З трьох однакових дощок завширшки a см потрібно зробити жолоб, поперечний переріз якого має форму рівнобічної трапеції. Знайдіть величину кута нахилу бічних сторін перерізу до лінії горизонту, при якому жолоб буде мати найбільшу пропускну здатність?

Додаток Г6

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕМИ «ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

Визначений інтеграл

1. Обчисліть наближене значення визначеного інтеграла: а) $\int\limits_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{5}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$, якщо межі інтегрування є точними числами.

2. Виконайте попереднє завдання, вважаючи межі інтегрування наближеними значеннями.

3. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть: а) $\int\limits_{2,5}^{3,1} \frac{1}{x}\,dx$; б) $\int\limits_{1,4}^{2,3} e^x\,dx$, якщо межі інтегрування є точними числами.

4. Виконайте попереднє завдання, вважаючи межі інтегрування наближеними значеннями.

5. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^2 + 2x$ та прямими $x = 1{,}2;\ x = 2{,}4$: а) за методом прямокутників, здійснюючи розбиття проміжку на 3; на 6 рівних відрізків; б) за допомогою комп'ютерної програми.

6. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$ та $y = \sin x$: а) за методом підрахунку правильних цифр, визначивши межі інтегрування з точністю до сотих; б) за допомогою комп'ютерної програми. порівняйте отримані результати.

Прикладні задачі.

7. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 2t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 7$ с.

8. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю *v(t)* (м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за інтервал часу від t_1 до t_2, якщо $v(t) = t^2 - 5t + 6,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1.$

9. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, що змінюється за законом $v(t) = t^2 - 5t + 6$(м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за інтервал часу від t_1=1 с до t_2=5 с.

10. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює R = 1,80 м, а висота – H = 3,50 м.

11. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб розтягнути пружину на 0,06 м, якщо сила 12 Н розтягує її на 0,01 м. *(Вказівка. За законом Гука, сила F пропорційна розтягуванню або стисканню пружини, тобто F = kx, де x – величина розтягування або стискання. З умови задачі можна знайти k. Оскільки при x = 0,01 м сила F дорівнює 12 Н, то* $k = \frac{F}{x}; k = \frac{12}{0{,}01} = 1200.$ *Отже, F = kx = 1200x).*

12. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на 3,5 см, якщо відомо, що сила 2,0 Н стискає пружину на 1,2 см?

13. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями: а) $y = \sqrt{x}$; $x = 0{,}1;\ x = 2{,}3;$ б) $y = 1 - x^2;\ x = -0{,}5;\ x = 0{,}5.$

14. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m=15,00 кг підняти з поверхні Землі вертикально вверх на висоту h=3,5м.Радіус Землі R=6371,032км. *(Вказівка до розв’язання:За законом Ньютона сила F притягання тіла Землею дорівнює:* $F = \gamma \frac{mM}{x^2}$*,де M – маса Землі,* $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot сек^2}$ *- гравітаційна сила, x – відстань від центра тіла до центра Землі).*

Додаток Г7

СИСТЕМА ЗАДАЧ І ВПРАВ З ТЕМИ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ»

1. Проведіть експеримент по підкиданню монети 30 разів. Обчисліть відносну частоту випадання «герба», «числа» з точністю до тисячних. Якою буде ймовірність випадання «герба»? відповідь запишіть у відсотках. Оцініть точність отриманого результату.

2. Визначте, як часто зустрічаються в районі вашої школи різні види дерев. Результати занесіть у таблицю частот. Визначте відносну частоту та ймовірність (у відсотках) того, що вибране навмання дерево буде деревом конкретної обраного Вами виду. Оцініть точність отриманого результату.

3. Проведіть аналогічне до попереднього дослідження щодо: а) кольору волосся учнів Вашого класу; б) розміру взуття учнів Вашого класу. Оцініть точність отриманого результату.

4. Гравець вносить 100грн у касу грального клубу. У процесі гри підкидають гральний кубик. Якщо випадає число 6, гравець виграє 200грн, випадає число 5 – виграє 100грн, випадає число 4 або 3 – не виграє нічого, випадає двійка – програє 50грн, випадає число один – програє 100грн. Визначте, чому дорівнює математичне сподівання щодо вигашу під час цієї гри. Проведіть експеримент 30; 60 разів та знайдіть середнє арифметичне отриманих значень. Порівняйте результати обчислень

5. Гру вважають справедливою, якщо математичні сподівання усіх учасників гри однакові. Чи справедливою буде наступна гра: підкидають дві монети. Гравець 1 отримує 2 очки, якщо одночасно випадають «герб» і «число». В усіх решта випадках він отримує 0 очок. Гравець 2 отримує 3 очка, якщо одночасно випадають два «герба». В усіх решта випадках він отримує 0 очок..

6. Застосуйте біном Ньютона до наближених обчислень: $(1+x)^n \approx 1+nx.$

Знайдіть наближені значення наступних виразів:

а) $1{,}002^{10}$ г) $0{,}09^{10}$ є) $\sqrt{0{,}93}$ и) $\sqrt{2\sqrt{0{,}24}}$ й) $\frac{1}{0{,}97}$

б) $1{,}01^{6}$ д) $0{,}96^{7}$ ж) $\sqrt[5]{1{,}02}$ і) $\left(\sqrt[3]{0{,}95}\right)^{4}$ к) $\frac{1}{1{,}02}$

в) $0{,}98^{8}$ е) $\sqrt{1{,}03}$ з) $\sqrt[9]{0{,}99}$ ї) $\frac{1}{\sqrt{0{,}98}}$ л) $\frac{1}{\left(\sqrt[5]{0{,}98}\right)^{3}}$

Додаток Д

ФОРМУВАННЯ УМІНЬ ЗАСТОСОВУВАТИ ПОХІДНУ ДЛЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Приклад. *Користуючись формулою, відомою з курсу математичного аналізу* $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1+\frac{1}{2}\Delta x$*, де* Δx *– величина, близька до нуля, обчисліть наближені значення виразів: а)* $\sqrt{1{,}002}$*; б)* $\sqrt{25{,}036}$*. Виконайте завдання за допомогою методу меж, вважаючи, що підкореневі вирази містять лише правильні цифри у строгому розумінні. Порівняйте отримані результати. Обчисліть межу абсолютної та відносної похибок.*

Розв'язання. а) Подамо підкореневий вираз у вигляді суми і скористаємося вказаною формулою:

$$\sqrt{1{,}002} = \sqrt{1+0{,}002} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}002 = 1{,}001.$$

Виконаємо обчислення за методом меж. Для цього нагадаємо, що у різній методичній літературі різних часів поняття правильної цифри вводилося по-різному. Домовимося вважати, що *якщо межа абсолютної похибки не перевищує одиниці відповідного розряду, то таку цифру будемо вважати правильною у широкому розумінні; якщо межа абсолютної похибки не перевищує половини одиниці відповідного розряду, то цифру будемо вважати правильною у строгому розумінні.* Тому для нашої задачі $1{,}002 = 1{,}002 \pm 0{,}0005$. Функція $y=\sqrt{x}$ є неперервною та зростаючою на області визначення. Тоді

$$1{,}0015 < 1{,}002 < 1{,}0025$$

$$\sqrt{1{,}0015} < \sqrt{1{,}002} < \sqrt{1{,}0025}$$

$$1{,}000749\ldots < \sqrt{1{,}002} < 1{,}001249\ldots$$

Як бачимо, перші три цифри – правильні. Перевіримо четверту цифру:

$$1{,}000 < \sqrt{1{,}002} < 1{,}002$$

$$\sqrt{1{,}002} = \frac{1{,}002+1{,}000}{2} \pm \frac{1{,}002-1{,}000}{2} = 1{,}001 \pm 0{,}001.$$

Отже, $\sqrt{1{,}002} = 1{,}001 \pm 0{,}001 \approx 1{,}001$ (у широкому розумінні). Порівнюючи результати, отримані різними шляхами, бачимо, що отримані значення рівні між собою. Межа абсолютної похибки обчислень h =0,01, межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}01}{1{,}001} = 0{,}00999 \ldots \approx 0{,}01 = 1\%$.

б) Деяка відмінність характеризує знаходження значення другого кореня. Вона полягає в тому, що підкореневий вираз має бути поданий у вигляді суми одиниці і малої величини. Тому винесемо з-під знака кореня множник 25 і застосуємо до отриманого кореня попередні міркування:

$$\sqrt{25{,}036} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{\frac{25{,}036}{25}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{25 + 0{,}036}{25}} = 5 \cdot \sqrt{1 + \frac{0{,}036}{25}}$$

$$\approx 5 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}036}{25}\right) = 5 + \frac{18}{5000} = 5{,}0036.$$

Отже, $\sqrt{25{,}036} \approx 5{,}0036$.

Додаток Е

ФРАГМЕНТ ДІЮЧОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ УЧНІВ 5-9 КЛАСІВ.

Математика, 5 клас

К-ть год	**Тема**	**Державні вимоги до рівня навчальних досягнень учнів**
64	**Тема 2. ДРОБОВІ ЧИСЛА** Дробові числа. Звичайні дроби. Правильні та неправильні дроби. Мішані числа. Порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками. Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Десятковий дріб. Запис і читання десяткових дробів. Порівняння і округлення десяткових дробів. Додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів. Відсотки. Знаходження відсотків від	**Розпізнає** звичайний дріб, дробове число; десятковий дріб. **Дотримується правил:** порівняння, додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння, округлення, додавання, множення і ділення десяткових дробів. **Формулює:** означення правильного і неправильного дробів. **Називає** розряди десяткових знаків у записі десяткових дробів. **Читає і записує** звичайні та десяткові дроби. **Описує:** поняття: масштаб, відсоток; правило порівняння десяткових дробів. **Розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження дробу від числа і числа за його дробом; перетворення мішаного числа у неправильний дріб; перетворення неправильного дробу в мішане число або натуральне число; порівняння, додавання, віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння десяткових

	даного числа. Знаходження числа за його відсотками. Масштаб. Середнє арифметичне, його використання для розв'язування задач практичного змісту. Середнє значення величини. Розв'язування текстових задач.	дробів, додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів; округлення десяткових дробів до заданого розряду; використання масштабу; знаходження відсотків від числа та числа за його відсотками; знаходження середнього арифметичного кількох чисел, середнього значення величини. **Розв'язує** текстові задачі на основі аналізу залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру.

Математика, 6 клас

	Тема	**Державні вимоги до рівня навчальних досягнень учнів**
0	**Тема 2. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ** Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Найменший спільний знаменник. Зведення дробів до спільного знаменника. Порівняння дробів. Додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів. Знаходження дробу від числа і числа за його дробом. Перетворення	**Наводить приклади:** звичайних дробів; десяткових дробів, зокрема нескінченних періодичних десяткових дробів. **Формулює** основну властивість дробу. **Описує** правила: порівняння, додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів; перетворення звичайного дробу в десятковий; знаходження дробу від числа та числа за його дробом. **Розв'язує вправи, що передбачають:** скорочення дробу і зведення дробів

	звичайних дробів у десяткові. Нескінченні періодичні десяткові дроби. Десяткове наближення звичайного дробу. Розв'язування вправ на всі дії зі звичайними дробами. Розв'язування текстових задач.	до спільного знаменника; порівняння дробів; додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів; знаходження дробу від числа та числа за його дробом; запис звичайного дробу у вигляді десяткового дробу. **Розв'язує** текстові задачі.

Алгебра, 7 клас

	Тема	**Державні вимоги до рівня навчальних досягнень учнів**
	Тема 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ Рівняння з двома змінними. Розв'язок рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: графічним способом; способом підстановки; способом додавання. Розв'язування задач за	**Наводить приклади:** рівняння з двома змінними; лінійного рівняння з двома змінними; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. **Формулює** означення: лінійного рівняння з двома змінними; розв'язку рівняння з двома змінними; розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. **Описує** способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. **Розрізняє** системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, що мають: один розв'язок; безліч розв'язків; не мають розв'язків. **Розв'язує:** системи двох лінійних рівнянь з двома змінними вказаними у змісті

	допомогою систем лінійних рівнянь.	способами; задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Додаток Є1

Анкета для вчителів

Шановний учителю!

Просимо Вас відповісти на запропоновані запитання. Вони допоможуть нам у розробці методичних рекомендацій щодо вивчення окремих розділів шкільного курсу математики.

Посада _____

Кваліфікаційна категорія, звання (нагороди)_____

_____

_____

Стаж робот вчителем математики_____

1. Що Ви розумієте під поняттям «наближені обчислення»?
2. Чи потрібне, на Вашу думку, впровадження вивчення наближених обчислень в курсі математики загальноосвітньої школи? Якщо так, то коли і в якому обсязі це потрібно робити?
3. Яким є сучасний стан вивчення наближених обчислень в загальноосвітній школі?
4. Якою, на Вашу думку, є мета впровадження вивчення наближених обчислень в шкільний курс математики, зокрема в старшій школі?
5. Чи можливе вивчення наближених обчислень лише в старшій школі?
6. Які методи, форми роботи з учнями та технології слід використовувати під час вивчення наближених обчислень?
7. Чи використовували Ви в своїй роботі літературу (підручники, посібники тощо) з наближених обчислень? Якщо так, то яку? Як давно і як часто Ви нею користувалися?
8. Які Ви знаєте джерела наближених обчислень?
9. Назвіть методи наближених обчислень.
10. Чи володієте Ви поняттями абсолютної та відносної похибки? Якщо так, то в чому принципова різниця цих понять?
11. В чому полягає правило підрахунку правильних цифр?

12. Поясніть, будь ласка різницю між правильною та значущою цифрами. Наведіть приклади.

13. Чого слід уникати при розв’язуванні прикладних та практичних задач на заняттях з предметів природничо-математичного циклу?

14. Як Ви оцінюєте свій рівень культури наближених обчислень?

Додаток Є2

ЗАДАЧІ КОНСТАТУВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

І варіант

1. Яке з наближених значень числа $\frac{2}{11}$ є точнішим: *0,18* чи *0,19*?
2. Оцініть абсолютну та відносну похибки наближеного значення числа $6{,}125 \cdot 10^2$.
3. Відомо, що $x \approx 46{,}24$, $y \approx 25{,}2$. Обчисліть значення виразів:

   а) $x + y$; б) $x : y$; в) $xy - 5y$.

4. Скільки кілограмів фарби потрібно, щоб пофарбувати підлогу в двох кімнатах, розміри яких $5{,}5 \times 4{,}3$ м і $5{,}2 \times 4{,}6$ м? На 1м^2 підлоги використовується 0,17 кг фарби.

ІІ варіант

1. Яке з наближених значень числа $\frac{6}{13}$ є точнішим: *0,46* чи *0,47*?
2. Оцініть абсолютну та відносну похибки наближеного значення числа $4{,}6 \cdot 10^{-4}$.
3. Відомо, що $x \approx 10{,}2$, $y \approx 2{,}08$. Обчисліть значення виразів:

   а) $x - y$; б) $x \cdot y$; в) $\frac{x + y}{xy}$.

4. Потрібно перевезти $1000 \pm 20\,\text{м}^3$ бетону. У кузов самоскида заливають $2{,}25 \pm 0{,}02\,\text{м}^3$ бетону. Скільки рейсів треба зробити самоскиду, щоб виконати всю роботу?

Додаток Ж

БЛАНК ДЛЯ ЗАПИСУ ПРОМІЖНИХ РОЗРАХУНКІВ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Завдання 1. Знайдіть наближене значення функції $y = \frac{2{,}35x^2 - 8{,}6}{7{,}469}$:

а) з точністю до десятих;

б) з точністю до сотих;

в) з точністю до тисячних,

якщо значення аргументу $x = 1{,}2$ – точне. Оцініть межу абсолютної та відносної похибки обчислень. Порівняйте отримані результати.

Розв'язання.

x	x^2	$2{,}35x^2$	$2{,}35x^2 - 8{,}6$	$\frac{2{,}35x^2 - 8{,}6}{7{,}469}$
1,2	1,44	3,384	–5,216	–0,6984…

а) –0,6984…≈ –0,7.

Межа абсолютної похибки: $|-0{,}7 + 0{,}6984 \ldots| \leq |-0{,}0016 \ldots| = 0{,}0016 \ldots < 0{,}002.$

Отже, h = 0,002. Тоді межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}002}{0{,}7} = 0{,}00285 \ldots \approx 0{,}003 = 0{,}3\%$. Отже, $\varepsilon \approx 0{,}3\%$.

б) –0,6984…≈ –0,70.

Межа абсолютної похибки: $|-0{,}70 + 0{,}6984 \ldots| \leq |-0{,}0016 \ldots| = 0{,}0016 \ldots < 0{,}002$. Отже, h = 0,002. Тоді межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}002}{0{,}70} = 0{,}00285 \ldots \approx 0{,}003 = 0{,}3\%$. Отже, $\varepsilon \approx 0{,}3\%$.

в) –0,6984… ≈ –0,698.

Межа абсолютної похибки: $|-0{,}698 + 0{,}6984 \ldots| \leq |-0{,}0004 \ldots| = 0{,}0004 \ldots < 0{,}0004$.. Отже, h = 0,0004. Тоді межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}0004}{0{,}698} = 0{,}000573 \ldots \approx 0{,}0005 = 0{,}05\%$. Отже, $\varepsilon \approx 0{,}05\%$.

Завдання 2. Знайдіть значення функції $y = 2{,}6x^2 - 4x + 1{,}32$ за методом підрахунку цифр, якщо $x \approx 3{,}24$. Обчислення виконайте за допомогою калькулятора.

Розв'язання. Результати розрахунків можна представити у вигляді розрахункової таблиці:

x	x^2	$2{,}6x^2$	$4x$	$2{,}6x^2-4x$	$2{,}6x^2-4x+1{,}32$
3,24	10,50	27,29	12,96	14,33	15,65≈15,7

Тоді межа абсолютної похибки обчислень h =0,05, а межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}1}{15{,}7} = 0{,}0063\ldots \approx 0{,}007 = 0{,}7\%$.

Завдання 3. Виконайте попереднє завдання, використовуючи метод меж. Порівняйте отримані результати, межу абсолютної та відносної похибки обчислень.

Розв'язання. Результати розрахунків можна представити у вигляді розрахункової таблиці:

	x	x^2	$2{,}6x^2$	$4x$	$2{,}6x^2-4x$	$2{,}6x^2-4x+1{,}32$
ВМ	3,25	10,5625	27,4625	13	14,5425	15,8625
НМ	3,23	10,4329	27,12554	12,92	14,12554	15,44554

$y = \frac{15{,}8625+15{,}44554}{2} \pm \frac{15{,}8625-15{,}44554}{2} = 15{,}65402 \pm 0{,}20848 = 15{,}7 \pm 0{,}3.$

$h = 0{,}3$; $\varepsilon \approx 0{,}02 = 2\%$.

Додаток 31

ПРАВИЛА ПЕРЕВЕДЕННЯ МІР КУТІВ З РАДІАН У ГРАДУСИ І НАВПАКИ

І. Переведення кута в 1 радіан у градуси.

Як відомо π=3,1415…. Округлимо до сотих це число з недостачею та з надлишком і застосуємо властивості числових нерівностей:

$$3{,}14<\pi<3{,}15;$$

$$\frac{1}{3{,}15}<\frac{1}{\pi}<\frac{1}{3{,}14};$$

$$\frac{180^\circ}{3{,}15}<\frac{180^\circ}{\pi}<\frac{180^\circ}{3{,}14};$$

$$(57{,}14285\ldots)^\circ<\frac{180^\circ}{\pi}<(57{,}32484\ldots)^\circ;$$

$$(57{,}1)^\circ<\frac{180^\circ}{\pi}<(57{,}4)^\circ.$$

$$1\text{ радіан}=\frac{57{,}4^\circ+57{,}1^\circ}{2}\pm\frac{57{,}4^\circ-57{,}1^\circ}{2}=57{,}25^\circ\pm0{,}15^\circ.$$

Отже, 1 рад $\approx 57^0$. Найбільш точне значення градусної міри кута в 1 радіан вказано у підручнику Н.Я. Вілєнкіна: 1 рад $\approx 57^\circ 17' 45''$.

ІІ. Переведення кута, вираженого у градусах, у радіани.

Для цього можна скористатися аналогічними міркуваннями:

$$3{,}14<\pi<3{,}15;$$

$$\frac{3{,}14}{180}<\frac{\pi}{180}<\frac{3{,}15}{180};$$

$$0{,}017(4)<\frac{\pi}{180}<0{,}0175;$$

$$0{,}0174<\frac{\pi}{180}<0{,}0175.$$

Таким чином,

$$1^\circ=\frac{0{,}0175+0{,}174}{2}\pm\frac{0{,}0175-0{,}174}{2}=0{,}01745\pm0{,}00005\,(\text{рад}).$$

У посібнику З.І. Слєпкань застосовується рівність $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$ радіан.

III. Форма запису градусної міри кутів, отриманої в результаті обчислень.

Розглянемо нескінченний десятковий дріб $\overline{0,abcdef\ldots}$, що виражає градусну міру кута. Переведемо цю величину в минути та секунди, пам'ятаючи, що один градус містить 60 минут, а минута – 60 секунд:

$$(\overline{0,abcdef\ldots})^\circ = \left(\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}+\frac{d}{10000}+\ldots\right)^\circ = \left(\frac{a}{10}\cdot 60\right)' + \left(\frac{b}{100}\cdot 60\right)' + \left(\frac{c}{1000}\cdot 60\right)' + \ldots =$$
$$= (6a)' + (0{,}6b)' + (0{,}06c)' + \ldots$$

Зрозуміло, що *a, b, c, d,…* – цифри, тому

$(6a)' \le 54'; (0{,}6b)' \le 5{,}4'; (0{,}06c)' \le 0{,}54';\ldots$. Тоді $(\overline{0,abcdef\ldots})^\circ \le (59{,}99\ldots)'$.

Таким чином, *для визначення наближеного значення кількості минут потрібно не більше трьох десяткових знаків заданого дробу*.

Аналогічно міркуючи, можна показати, що для визначення кількості секунд потрібно не більше трьох десяткових знаків міри кута, вираженої у минутах. Оскільки переведення у минути дає два десяткових знаки, то для переведення міри кута у секунди потрібно взяти ще одну цифру. Тобто, загалом потрібно не більше чотирьох десяткових знаків заданого дробу.

Приклад 1. Визначити градусну міру кутів правильного опуклого семикутника.

Розв'язування. З курсу планіметрії учням відомо, що градусна міра зазначених кутів може бути обчислена за формулою $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, де n = 7 – кількість сторін (кутів) многокутника. Тоді $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ \cdot 5}{7} = 128,(571428)^\circ$.

$$128,(571428)^\circ \approx 128{,}5714^\circ = 128^\circ + (5\cdot 6)' + (7\cdot 0{,}6)' + (1\cdot 0{,}06)' + (4\cdot 0{,}006)' =$$
$$= 128^\circ + 30' + 4{,}2' + 0{,}06' + 0{,}024' = 128^\circ + (34{,}284)'.$$

Переведемо $(34{,}284)'$ у минути та секунди:

$$(34{,}284)' = 34' + (2 \cdot 6)'' + (8 \cdot 0{,}6)'' + (4 \cdot 0{,}006)'' = 34' + 17{,}04'' \approx 34'17''.$$

Отже, $128{,}(571428)^\circ \approx 128^\circ 34'17''$.

Відповідь. $\approx 128^\circ 34'17''$.

Алгоритм переведення градусної міри кута, вираженого десятковим дробом, у градуси, минути і секунди:

5. Записати градусну міру кута у вигляді десяткового дробу, округливши його до чотирьох десяткових знаків за правилами округлення.

6. Подати її у вигляді суми цілої та дробової частини. Дробову частину перевести у минути, для цього помножити розряд десятих на 6; розряд сотих на 0,6; тисячних – на 0,06; десятитисячних – на 0,006 відповідно, а отримані добутки додати.

7. Дробову частину, що виражає кількість минут перевести у секунди, для цього помножити розряд десятих на 6; розряд сотих на 0,6; тисячних – на 0,06; десятитисячних – на 0,006 відповідно, а отримані добутки додати.

8. Округлити отримане число до секунд.

ДОДАТОК З2

ПРИКЛАДИ ПЕРЕВЕДЕННЯ МІР КУТІВ

Приклад 1. За допомогою калькулятора знайдіть: а) радіанну міру кутів 16°; $42^\circ 13' 49''$; б) градусну міру кута 1,96. Міри кутів вважати точними числами.

Розв'язування. а) Нехай маємо кут 16 градусів. Переведемо градусну міру кута у радіанну: $16^\circ \approx 16 \cdot 0{,}01745 \text{ рад} = 0{,}27920 \text{ рад} \approx 0{,}2792 \text{ рад}$. Як зазначалося вище, наближене число 0,01745 складається з чотирьох значущих цифр, число 16 є точним, отже за МППЦ у відповіді залишається чотири значущі цифри. Таким чином, $16^\circ \approx 0{,}2792 \text{ рад}$.

Застосуємо для виконання завдання метод меж.

За описаним вище алгоритмом $\frac{3{,}14 \cdot 16}{180} < \alpha < \frac{3{,}15 \cdot 16}{180}$, де α – заданий кут, міра якого виражена в градусах. Тоді $0{,}279111... < \alpha < 0{,}28$;

$$0{,}27 < \alpha < 0{,}28;$$

$$\alpha = \frac{0{,}28 + 0{,}27}{2} \pm \frac{0{,}28 - 0{,}27}{2} = 0{,}275 \pm 0{,}005 \text{ радіан.}$$

Як видно, правильними є лише перших два десяткових знаки отриманого числа. Межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}005}{0{,}275} \cdot 100\% = 1{,}81...\% \approx 1{,}9\%$. Така похибка є допустимою, тому немає потреби брати більш точні значення числа π.

Нехай задано кут $42^\circ 13' 49''$. Насамперед його потрібно записати у вигляді десяткового дробу. Зрозуміло, що у такій ситуації доцільно спочатку додати звичайні дроби і лише потім подавати їх суму у вигляді десяткового дробу. Міру кута достатньо записати з чотирма значущими цифрами:

$$42^\circ 13' 49'' = 42^\circ + \left(\frac{13}{60}\right)^\circ + \left(\frac{49}{3600}\right)^\circ = 42^\circ + \left(\frac{829}{3600}\right)^\circ = 42^\circ + 0{,}2302777...^\circ \approx 42{,}23^\circ.$$

Тоді $42^\circ 13' 49'' \approx 42{,}23 \cdot 0{,}01745 \text{ рад} = 0{,}7369135 \approx 0{,}7369 \text{ рад.}$

Отже, $42^\circ 13' 49'' \approx 0{,}7369 \text{ рад.}$

Застосуємо для виконання завдання метод меж. За описаним вище алгоритмом $\frac{3{,}14\cdot 42{,}2}{180}<\alpha<\frac{3{,}15\cdot 42{,}3}{180}$, де α – заданий кут, міра якого виражена в градусах. Десятковий запис градусної міри кута округляємо до трьох значущих цифр, оскільки число π записано за допомогою трьох значущих цифр. Тоді

$$0{,}736155...<\alpha<0{,}74025;$$

$$0{,}73<\alpha<0{,}75;$$

$$\alpha=\frac{0{,}75+0{,}73}{2}\pm\frac{0{,}75-0{,}73}{2}=0{,}74\pm 0{,}01(\text{рад}).$$

Як видно, правильним є лише перший десятковий знак отриманого числа. Межа відносної похибки $\varepsilon=\frac{0{,}01}{0{,}74}\cdot 100\%=1{,}35...\%\approx 1{,}4\%.$ Отже, $42^\circ 13'49''=0{,}74\pm 0{,}01(\text{рад}).$

Легко помітити, що результати наближених обчислень різними методами збігаються у записі правильних цифр кінцевого результату.

б) Подамо радіанну міру кута у градусах: $1{,}96\approx(1{,}96:0{,}01745)^\circ=(112{,}3209...)^\circ\approx 112{,}3^\circ.$

За МППЦ частка записується з чотирма значущими цифрами, оскільки 0,01745 містить чотири значущі цифри, а 1,96 – точне число. За описаним вище алгоритмом переводимо десятковий дріб у минути і секунди: $112{,}3^\circ=112^\circ+(3\cdot 6)'=112^\circ 18'$. Отже, $1{,}96\approx 112^\circ 18'$.

Застосуємо метод меж для виконання цього завдання. За звичним для старшокласників записом $1{,}96\text{ рад}=\left(\frac{1{,}96\cdot 180}{\pi}\right)^\circ$. Тоді за властивостями числових нерівностей

$$\frac{1{,}96\cdot 180}{3{,}15}<\frac{1{,}96\cdot 180}{\pi}<\frac{1{,}96\cdot 180}{3{,}14};$$

$$112<\frac{1{,}96\cdot 180}{\pi}<112{,}356...;$$

$$112 < \frac{1{,}96 \cdot 180}{\pi} < 112{,}4;$$

$$1{,}96\,\text{рад} = \frac{112{,}4 + 112}{2} \pm \frac{112{,}4 - 112}{2} = 112{,}2^\circ \pm 0{,}2^\circ.$$

Як видно, правильним є три перших цифри отриманого числа. Межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}2}{112{,}2} \cdot 100\% = 0{,}178...\% \approx 0{,}2\%.$

Відповідь. а) $16^\circ = 0{,}275 \pm 0{,}005\,(\text{рад})$; $42^\circ 13' 49'' = 0{,}74 \pm 0{,}01\,(\text{рад})$;

б) $1{,}96\,\text{рад} = 112{,}2^\circ \pm 0{,}2^\circ$.

Для ситуації, коли величина кута виражена наближеним числом, також доцільно використовувати метод меж.

Приклад 2. За допомогою калькулятора знайдіть: а) радіанну міру кута 16°; б) градусну міру кута 0,3 рад. Міри кутів вважати наближеними числами.

Розв'язання. а) Переведемо у радіанну міру кут $\alpha \approx 16^\circ$. Точність практичного вимірювання кута дорівнює ціні поділки вимірювального пристрою. Таким чином, якщо кут задається у градусах, то межа абсолютної похибки не перевищує 1°. Тоді

$$15^\circ < \alpha < 17^\circ;$$

$$\frac{15\pi}{180} < \alpha < \frac{17\pi}{180};$$

$$\frac{15 \cdot 3{,}14}{180} < \alpha < \frac{17 \cdot 3{,}15}{180};$$

$$0{,}261666... < \alpha < 0{,}2975.$$

Тоді $0{,}26 < \alpha < 0{,}30$ радіан, звідки

$$16^\circ = \left(\frac{0{,}30 + 0{,}26}{2} \pm \frac{0{,}30 + 0{,}26}{2} \right) \text{рад} = (0{,}28 \pm 0{,}02)\,\text{рад}.$$

Таким чином $16^\circ = (0{,}28 \pm 0{,}02)$ радіана. Звідси $16^\circ = (0{,}3 \pm 0{,}04)$ радіана. Тоді межа відносної похибки $\varepsilon = \frac{0{,}04}{0{,}3} \cdot 100\% = 13{,}33...\% \approx 13{,}4\%.$ Як видно, точність отриманого результату недостатньо висока. Тому можна спробувати її покращити, округливши число π до тисячних.

б) Переведемо у градусну міру кут $\alpha \approx 0{,}3$ рад. Усі цифри числа за правилом Крилова є правильними, отже межа абсолютної похибки не перевищує половини одиниці останнього розряду. Тоді

$$0{,}25 < \alpha < 0{,}35;$$

$$\frac{0{,}25 \cdot 180}{\pi} < \alpha < \frac{0{,}35 \cdot 180}{\pi};$$

$$\frac{0{,}25 \cdot 180}{3{,}142} < \alpha < \frac{0{,}35 \cdot 180}{3{,}141};$$

$$14{,}322... < \alpha < 20{,}057...;$$

$$10 < \alpha < 21;$$

$$\alpha = \left(\frac{30+10}{2} \pm \frac{30-10}{2} \right)^{\circ} = (20 \pm 10)^{\circ}.$$

Як видно з результату, вже перша цифра отриманого числа є сумнівною. Це означає, що вимірювання кута в радіанах було здійснене «грубо».

Зауваження. За МППЦ $\alpha \approx 0{,}3 \cdot 57^{\circ} = 17{,}1 \approx 20^{\circ}$. Увагу учнів слід звернути на те, що в числі 0,3 лише одна значуща цифра, тому відповідь округляємо до однієї значущої цифри. У такому разі нуль в записі числа 20 є неправильною цифрою.

Відповідь. а) $16^{\circ} \approx 0{,}3$ рад з точністю $h = 0{,}04$ рад; б) $0{,}3 \approx 20^{\circ}$ з точністю $h = 10^0$.