51(07)
С-47
6541/—

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Игорь Фёдорович СЛЕДЗИНСКИЙ

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЙ РАССТОЯНИЯ И МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА У УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

(Диссертация написана на украинском языке)

(13.00.02 — методика преподавания математики)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук по методике математики

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313918

КИЕВ — 1973

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького.

Научный руководитель — кандидат педагогических наук, доцент ТАРАСЮК В. Е.

Официальные оппоненты:

Доктор педагогических наук, профессор ТЕСЛЕНКО И. Ф.

Кандидат педагогических наук, доцент ХРОМОЙ Я. В.

Ведущее научное учреждение — Дрогобычский государственный педагогический институт имени И. Я. Франко.

Автореферат разослан «. . .» . . . . . 1973 г.

Защита диссертации состоится «. . .» . . . . . 197 г.

на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького (14 ч., ауд. 431), Киев — 30, ул. Пирогова, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале института.

Ученый секретарь совета.

Стремительный рост и широкое использование математических методов в самых различных областях человеческой деятельности, важная роль математических наук в современном научно-техническом прогрессе требуют улучшения математической подготовки учащихся, на что неоднократно указывалось в руководящих партийных и правительственных документах об общеобразовательной школе.

В соответствии с этим приобретает большое значение проблема формирования у учащихся научных понятий, в которых резюмируются знания, полученные в результате изучения школьной математики. Важными являются понятия расстояния и метрического пространства, которые занимают фундаментальное место во всей системе математических знаний. Они обладают очень богатым содержанием, тесно связанным с функциональным анализом и теоретической физикой, многими прикладными разделами математики. Эти понятия соединяют в себе наглядность с математической тонкостью и поэтому могут служить хорошим дидактическим средством для иллюстрации учащимся сложных математических абстракций, имеющих большое теоретическое и практическое значение. Их рассмотрение в школе позволяет плодотворно формировать у учащихся материалистическое понимание генезиса современных понятий математической науки, систематизировать, углублять и обобщать изучение многих вопросов школьной математики в рамках единой концепции метрического пространства, способствует более четкому пониманию учащимися идей аксиоматического и координатного методов.

Формирование на теоретико-множественной основе понятий о расстоянии помогает учащимся лучше усвоить сущность геометрических преобразований.

Современный школьный курс математики базируется на группе перемещений и на группе преобразований подобия, использующих понятие расстояния. Построение метрического пространства Евклида на основании понятия о группе перемещений, основным инвариантом которых является расстояние, вносит в школьную математику движение и диалектику, позволяет применить общий функциональный подход к изучению различных вопросов этой дисциплины.

Выяснение богатства геометрических возможностей, связанных с понятием метрического пространства, позволяет естественно и сравнительно просто поставить перед учащимися вопрос о существовании геометрий, отличных от евклидовой, ввести школьников в мир неевклидовых метрических пространств, помочь им понять роль обобщений в математике, ее практическую значимость.

Формирование понятий расстояния и метрического пространства углубляет идейное содержание школьной математики, приближает ее к современной науке, расширяет научную и политехническую направленность математических знаний, повышает их познавательно-практическую и методологическую роль.

Вопросы методики формирования указанных понятий у учащихся средней школы пока еще разработаны недостаточно.

Модернизация школьного математического образования изменила теоретические основы толкования некоторых традиционных вопросов, в частности «метрических». Поэтому возникла необходимость теоретической и методической разработки вопросов, касающихся формирования у учащихся средней школы понятий расстояния и метрического пространства. Педагогических исследований по изучению этих понятий в средней школе почти нет. В учебных пособиях для средней школы и в методических руководствах эти вопросы освещены частично.

Поэтому актуальной является проблема исследования образовательного и познавательно-практического содержания понятий расстояния и метрического пространства, вводимых на теоретико-множественной основе, определение содержания и методики

изучения этих понятий в курсе математики средней школы.

В процессе исследования этой проблемы диссертант выдвинул в качестве рабочей гипотезы следующие положения:

1) Формирование понятий расстояния и метрического пространства в процессе изучения учащимися математики в школе повышает ее научный уровень, содействует объединению, обобщению и систематизации математических знаний.

2) Изучение указанных понятий должно содействовать развитию мышления и познавательных способностей учащихся, формированию научно-материалистического мировоззрения.

В данном исследовании поставлена цель решить следующие конкретные задачи:

1. На основе теоретического анализа изучить различные концепции понятия расстояния и последующей экспериментальной проверкой определить, какое именно толкование этого понятия наиболее соответствует учебно-воспитательным задачам советской школы, возрастным особенностям учащихся.

2. Проанализировать состояние знаний учащихся средней школы, связанных с понятиями «расстояние» и «метрическое пространство».

3. Определить роль этих понятий в системе школьных математических знаний, в сознательном и глубоком усвоении научных идей новой программы.

4. Вычленить и дидактически обработать учебный материал для поэтапного формирования понятий расстояния и метрического пространства:

а) в IV—VIII классах;

б) в процессе проведения внеклассной работы в IV—X классах;

в) в процессе проведения факультативных занятий в IX—X классах.

5. Составить, экспериментально проверить и обосновать программу изучения отобранного материала.

6. Разработать систему упражнений для формирования у учащихся метрических понятий, экспериментально проверить целесообразность и доступность этой системы упражнений.

7. Исследовать, как формирование понятий расстояния и метрического пространства по разработанной методике содей-

ствует развитию познавательных способностей учащихся, формированию их научного мировоззрения.

8. Дать практические рекомендации учителю по формированию у учащихся средней школы метрических понятий.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы исследования:

1. Изучение трудов классиков марксизма-ленинизма и современных исследований по вопросам генезиса и диалектики развития научных понятий.

2. Анализ научной, научно-популярной, общепедагогической, методической и учебной литературы, школьных программ по математике.

3. Изучение и обобщение опыта работы передовых учителей математики (по формированию в учащихся «метрических» понятий).

4. Констатирующий эксперимент, который проводился с целью выявления уровня знаний учащихся по вопросам школьной программы, связанных с понятием расстояния и метрического пространства. Значительное место в нем отводилось наблюдениям, устным беседам с учащимися и анкетированию.

5. Обучающий эксперимент, при помощи которого проверялась предлагаемая диссертантом методика формирования метрических понятий.

6. Лабораторный эксперимент, давший возможность проверить особенности усвоения учащимися каждого упражнения, входящего в предложенную автором систему упражнений для формирования метрических понятий.

7. Эксперимент по установлению корреляционных связей между умением решать задачи на разыскание множеств точек с определенными метрическими свойствами и количеством усвоенных «элементов знаний» об определении расстояний между геометрическими фигурами как множествами точек.

8. Специальный констатирующий эксперимент, который был проведен с помощью тестов в различные периоды экспериментального обучения для выявления влияния изучения метрических понятий по предложенной методике на развитие познавательной способности учащихся.

Материалы констатирующего эксперимента собирались в процессе 20-летней работы автора преподавателем математики в средних школах Тернопольской области (Залесецкая СШ, Дунаевская СШ, Кременецкая СШ № 1), в Кременецком и Тернопольском педагогических институтах. Кроме того, в 1966/1967 учебном году был проведен специально организованный констатирующий эксперимент.

Обучающий эксперимент проводился в 1967—1972 годах по разработанной автором методике и при его непосредственном участии в следующих школах Тернопольской области: Великоглыбочецкой средней школе, Великобережецкой восьмилетней школе, Кременецкой средней школе № 1, Тернопольской средней школе № 14, Устечковской восьмилетней школе. В нем принимали участие учителя математики: Дробоцкая Л. П., Киндрацкая Н. Н., Когут Г. Б., Крошко Л. Н., Лысенко М. А., Панченко Я. Н., Соколовский Т. Н., Хмуркивская Н. И., Черненко О. В. и другие.

В основном эксперименте принимало участие 537 учеников IV—VIII классов и членов факультативных групп IX—X классов. Получен материал, результаты качественной и количественной обработки которого представлены в диссертации в виде таблиц, схем.

Диссертация состоит из введения, трех глав, общих выводов, библиографии и приложения.

Во введении аргументируется актуальность рассматриваемых вопросов, формулируется задача исследования и методы ее решения, описывается методика организации и проведения педагогического эксперимента.

ПЕРВАЯ ГЛАВА — «Основы формирования понятий расстояния и метрического пространства у учащихся средней школы». В ней изложены теоретико-логические и психолого-дидактические основы формирования понятия расстояния и метрического пространства, дан анализ отечественной и иностранной литературы по рассматриваемым в диссертации вопросам.

В начале главы рассмотрены генезис и особенности эволюции понятий расстояния и метрического пространства, иллюстрирующие положение диалектического материализма о том, что каждый новый уровень абстракций является даль-

нейшим обобщением существующего знания на основе новых данных, полученных наукой и в соответствии с логикой исследуемого предмета, с законами и принципами диалектического мышления. Цель изложения — показать, что метрическое пространство является продуктом многоступенчатой абстракции, структурой сложной по своему составу, широкой по своему объему. Поэтому формирование этого понятия в отрыве от исторических источников его абстрагирования может привести учащихся к формализму. Он проявляется в неумении находить соответствующие метрическому пространству изоморфные структуры, практически использовать его свойства в процессе решения разных метрических задач. Делается вывод о том, что понятия расстояния и метрического пространства в школьном курсе математики целесообразно рассматривать в несколько этапов, изучая каждый раз их на высшем уровне абстракции, с большей степенью обобщения (учитывая при этом общий уровень математических знаний и возрастные особенности учащихся).

Значительное внимание уделено изложению научно-методических основ формирования у учащихся понятий «расстояние» и «длина». Автор исходит из того, что абстрактно-математическое понятие «расстояние» целесообразно интерпретировать понятием расстояния в геометрии Евклида, так как она изучается в школе и является наиболее знакомой математической моделью пространственных форм реального мира. Опираясь на теоретико-методические концепции А. Н. Колмогорова, В. М. Депутатова, В. Клиффорда, на результаты психологических исследований И. М. Сеченова, Б. Г. Ананьева, Е. Фишбэйна (теория фигурных концептов), автор аргументирует необходимость трактовать в школьном курсе геометрии понятие «расстояние» как скалярную величину, мерой которой служит неотрицательное действительное число.

Использование на начальных и средних этапах обучения в школе классического толкования расстояния (длины отрезка) как числа сопряжено из существенными методическими недостатками:

1) величины не рассматриваются независимо от процесса измерения, что мало содействует материалистическому пониманию учащимися происхождения математических понятий;

2) толкование понятия расстояния как числа в условиях школы, где последнее рассматривается в генетическом плане, приводит к «порочному кругу»: целесообразность введения дробных и иррациональных чисел аргументируется необходимостью измерения величин, а потом эти же величины определяются как числа;

3) ученики до 7-го класса не могут поставить в соответствие каждому отрезку его длину — число, так как им еще не знакомо множество неотрицательных действительных чисел.

Поэтому более приемлемой на начальных и средних этапах обучения в школе является концепция, в основании которой лежит четкое разграничение геометрической фигуры как носителя величины, самой величины и ее меры — неотрицательного действительного числа. Целесообразность этой концепции диссертант видит в том, что она:

1) плодотворно содействует формированию у учащихся общеобразовательной школы материалистического понимания понятий «расстояние» и «длина», понимание того, что числа служат средством выражения величин;

2) не содержит указанного выше «порочного круга»;

3) соответствует навыкам реального мышления учащихся;

4) способствует установлению межпредметных связей, широкому использованию метрических понятий в учебных предметах естественно-научного цикла. А это, как показали психологические исследования (Б. Г. Ананьев, Ю. О. Самарин), ведет к созданию межсистемных или межпредметных ассоциаций, которые способны обеспечить целостность и полноту знаний, объективно верное отображение окружающего мира в процессе обучения.

Теоретический анализ и проведенные исследования привели автора к заключению, что наиболее приемлемым для школы является определение скалярной величины, данное академиком А. Н. Колмогоровым[1]. Ознакомить с ним учащихся можно, начиная с седьмого класса (после введения понятия действительного числа). В IV—VI классах целесообразно

[1]) А. Н. Колмогоров. О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики. — «Математика в школе», 1971, № 2. с 17—22.

дать учащимся понятие о скалярных величинах на интуитивно-описательной основе.

Опираясь на исследования С. Л. Рубинштейна, В. В. Давыдова, Н. А. Менчинской и других психологов, автор аргументирует необходимость и возможность одновременно с формированием метрических понятий развивать познавательные способности учеников.

Значительное внимание в работе уделяется понятию расстояния между двумя фигурами (выпущенное из поля зрения школьных учебников), рассмотрение которого содействует более глубокому усвоению учащимися одного из основополагающих понятий курса математики — понятия множества точек, обладающих определенными свойствами.

Анализируется возможность и целесообразность рассмотрения в школьной математике расстояния между двумя точками на призматических и пирамидальных евклидовых поверхностях, поверхностях вращения.

В этой главе дан анализ основных принципов построения метрических пространств в современной науке и возможностей их адаптации для школьного преподавания.

Автор рассматривает числовое n-мерное евклидово пространство, сферическое пространство и пространство непрерывных на отрезке функций, дает приемлемое для учеников IX—X классов доказательство теоремы о том, что n-мерное (при $n = 3$) евклидово пространство является метрическим. Ознакомление учащихся с этими примерами позволяет рассмотреть разные вопросы геометрии, алгебры и анализа в рамках единой структуры метрического пространства, показать учащимся, что геометрия была и остается основным источником развития богатой и плодотворной математической интуиции.

Тщательный анализ метрических систем аксиом Д. Биркгофа и А. Н. Колмогорова (где использованы аксиомы метрического пространства, предложенные Р. Фреше), позволяет сделать вывод, что учебно-воспитательным задачам нашей школы наиболее соответствует изучение геометрии Евклида на основании компактной и простой для интерпретации аксиоматики А. Н. Колмогорова.

На основании краткого обзора научно-методических иссле-

дований по внедрению в школу понятий о неевклидовых геометриях (И. Ф. Тесленко, З. А. Резниченко, В. Е. Шевченко и другие) автор приходит к выводу, что изучение элементарных сведений из теории неевклидовых метрических пространств позволяет учащимся понять роль идеализации в научном естествознании, показать взаимоотношение между геометрией как абстрактной математической дисциплиной и геометрией как естественно-научной дисциплиной, изучающей определенную категорию свойств реального мира. В этом большая научно-познавательная и воспитательная роль рассмотрения различных примеров метрических пространств в школе.

В этой главе дан краткий анализ теоретико-групповых принципов построения метрических пространств (на основании схемы Ф. Клейна).

В заключении первой главы делается вывод о том, что понятие расстояния и метрического пространства целесообразно формировать в два этапа:

а) на первом этапе (младшие и средние классы) понятия расстояния (главный составной объект понятия метрического пространства) целесообразно толковать как неотрицательную скалярную величину;

б) на втором этапе (старшие классы) следует перейти к классическому определению понятия расстояния над полем неотрицательных действительных чисел и к явному определению метрического пространства (классического).

Такой порядок изучения этих важных математических структур определяет творческий характер преподавания математики, усиливает возможности воспитывающего воздействия на учащихся.

ВТОРАЯ ГЛАВА — «Формирование у учащихся IV—VIII классов понятий расстояния и метрического пространства».

В ней излагается система, содержание и методика формирования метрических понятий при изучении геометрического и алгебраического материала, анализируются результаты экспериментального обучения по предложенной методике, обуславливается необходимость широкого использования межпредметных связей в процессе изучения метрических понятий, рассматривается практическое осуществление таких

связей школьной математики с географией, физикой, черчением и трудовым обучением.

В диссертации приведена предлагаемая автором программа формирования метрических понятий, где указывается, при изучении какой темы вводится то или другое понятие, пониманию какого материала оно способствует, где применяется. Программа составлена так, чтобы вводимые метрические понятия изучались в органической связи с другими понятиями школьной математики. Наряду с математическими понятиями, введение которых предусмотрено новой программой, автор предлагает ввести в IV—VIII классах понятия о расстоянии от точки до фигуры, о расстоянии между двумя фигурами, рассмотреть вопрос о приближенном вычислении длины дуги путем ее «спрямления». Значительное внимание уделено вопросам геометрического моделирования, работам по определению расстояний между двумя точками на поверхности выпуклых тел. Обосновывается целесообразность введения в VII—VIII классах понятия о метрическом пространстве на основании рассмотрения его простейших интерпретаций.

В основу методики формирования понятий расстояния и метрического пространства положено систему целесообразно подобранных упражнений, которые обладают большой вариативностью и выполнение которых требует комплексного применения новых и ранее усвоенных знаний, умений и навыков. Их реализация на этапах закрепления и обобщающего повторения вопросов школьной программы предполагает:

а) широкое применение таких видов работы, которые требуют многократных переходов от наглядно-образного к логическому мышлению и от теории к практике;

б) увеличение удельного веса самостоятельной работы учащихся;

в) повышение их творческой активности;

г) развитие познавательных способностей учащихся;

д) реализацию межпредметных связей.

Предлагаемая методика изучения метрических понятий предполагает формирование уже у учеников IV—V классов понятия о длине отрезка (расстоянии между двумя точками) как о величине (скалярной), мерой которой служит число. В ней отражены связи изучаемого материала с жизненным опытом учащихся.

Рассмотрение упражнений на определение расстояний (как конкретных практических проблем, решать которые должны сами учащиеся) активизирует мышление, способствует прочному усвоению изучаемого материала.

Опыт убедил нас в том, что уже в IV—V классах целесообразно рассмотреть на операционном уровне метод последовательных приближений, суть которого особенно четко прослеживается при решении задач на вычисление длины дуги кривой и исследовании полученных результатов (в зависимости от выбора звена ломаной, вписываемой в эту дугу).

При решении задач на определение расстояния между геометрическими фигурами целесообразно использовать понятие прямоугольной проекции точки (вводимого на оперативном уровне с четвертого класса), способствующее лучшему пониманию учащимися как этих задач, так и многих вопросов физической географии V—VI классов. Это понятие является хорошей пропедевтикой к изучению проекционного черчения и построению в старших классах изображений пространственных фигур.

Вопрос об определении расстояний между двумя фигурами рассматривается в V классе в тесной связи с вопросом о пересечении двух множеств.

В процессе изучения геометрических преобразований уделяется внимание вопросу нахождения характеристических точек фигур, что способствует пониманию учащимися расстояния как основного инварианта перемещений.

Опыт показал, что учащимся VI класса трудно понять, что каждое из рассматриваемых свойств расстояния является необходимым, а все вместе — достаточным для данного аксиоматического определения его. Преодолеть эти трудности помогают специальные упражнения. В частности, более глубокому пониманию учащимися основных свойств расстояния, его роли в построении метрического пространства Евклида, содействуют упражнения на построение графических схем генетического дерева метрических теорем.

Лучшему усвоению понятия расстояния особенно способствует решение задач на разыскание множеств точек, обладающих определенными метрическими свойствами. Автором реферируемой работы предложена система таких задач и раз-

работана методика их решения. В частности, здесь важную роль играет формула расстояния между двумя точками координатной плоскости, использование которой дает учащимся возможность на доступных примерах понять важнейшую функцию метода координат — перевода геометрических соотношений на алгебраический язык. А это способствует расширению кругозора учащихся в доступной им области приложений математики, позволяет постепенно формировать понятие абстрактного метрического пространства (на множестве действительных чисел).

Проведенные исследования подтвердили возможность создания системы задач (примеры таких задач рассмотрены в диссертации), позволяющих осуществить постепенный переход от толкования расстояния как скалярной величины (младшие и средние классы) к рассмотрению расстояний как конкретных значений числовой метрической функции (старшие классы), что существенно влияет на сознательное усвоение этого важного понятия.

В диссертации также показано, как следует развивать и актуализировать (на простейших примерах, начиная с VII класса) тезис о существовании неевклидовых пространств с тем, чтобы в IX—X классах подойти к абстрактному метрическому пространству (первое знакомство с которым в явной форме получают по предложенной программе ученики VIII класса).

Формирование у учащихся понятия о мере расстояния на алгебраическом материале тесно связывается с геометрической интерпретацией модуля числа, что позволяет рассмотреть в V—VII классах очень простой и наглядный способ «геометрического» решения некоторых уравнений и неравенств, содержащих модуль. Например, решение неравенства $|x - a| + |x - b| < c$ (VII класс) интерпретируется на языке расстояний как задача отыскания координат x таких точек X, сумма мер расстояний которых от точек $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой меньше числа c. Такое решение уравнений и неравенств создает наглядную основу для усвоения в старших классах важного понятия предела числовой последовательности, больше способствует развитию мышления учащихся, чем «алгебраическое» определение модуля числа

и использование метода интервалов. Использование координатной прямой как изоморфной модели выполняемых действий помогает учащимся лучше осознать действие, дает хорошую опору для самоконтроля.

В диссертации обращается внимание на необходимость уточнения содержания понятий «числовая прямая» (числовая плоскость») и «координатная прямая» (координатная плоскость»): «числовая прямая» — это числовое одномерное евклидово пространство (R, d), которое можно изометрически отобразить на различные евклидовы прямые (или на одну и ту же прямую при различном выборе начала отсчета и масштаба) и вследствии этого получить различные координатные прямые или модели числовой прямой.

Содержание предлагаемого автором материала для IV—VIII классов и методика его изучения проверялась на протяжении шести лет.

Отдельный параграф второй главы посвящен анализу полученной информации, статистическая обработка которой представлена в 12-ти таблицах.

Для получения необходимой информации о доступности усвоения метрических понятий по предложенной методике автор, наряду с традиционными средствами проверки знаний учащихся, широко использовал и тестовую[1]. В частности, использованы специальные тесты для проверки и сопоставления уровней развития познавательных способностей учащихся экспериментальных и контрольных классов (примеры их даны в диссертации).

Для оценки эффективности примененных автором методических решений количественного и качественного анализа изменения в знаниях учащихся экспериментальных классов, обусловленных введением определенных педагогических приемов и методов обучения, приняты критерии качества знаний, предложенные И. Т. Огородниковым[2]: объем, системность и осмысленность знаний, их прочность и действенность.

---

[1]) Тестовая проверка знаний часто осуществлялась с помощью сконструированной автором контролирующе-тренировочной машины «Квантор».

[2]) Огородников И. Т. Программированные методы обучения. — «Народное образование», 1969, № 1, с. 53—58.

Опытным путем определены количественные показатели этих критериев. Проведенный сравнительный анализ показал, что качество усвоения теоретического и практического материала о метрических понятиях учащимися экспериментальных классов выше, чем учащимися контрольных классов. Объясняется это тем, что предложенная методика изучения метрических понятий способствует формированию у учащихся множественных вариативных ассоциаций, развитию их мышления и памяти.

Теоретические исследования и эксперимент дают основание утверждать, что формирование метрических понятий в тесной связи с изучением всего курса школьной математики IV—VIII классов содействует не только сознательному усвоению их учащимися, но и более глубокому пониманию многих вопросов школьной программы.

Этому также способствует установление тесной связи между классными и внеклассными занятиями.

Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что формирование метрических понятий по предложенной программе, которая осуществляется за счет более рационального использования времени, отведенного на закрепление и обобщенное повторение материала школьной математики, способствует развитию школьников, повышает их физическую работоспособность и расширяет возможности участия их во внеклассной деятельности.

Вместе с тем проведенные исследования показали несостоятельность некоторых первоначальных теоретических предпосылок автора. В частности оказалось преждевременным ознакомление учеников шестого класса с понятием метрического пространства (на простейших примерах, в процессе закрепления свойств расстояний).

ТРЕТЬЯ ГЛАВА диссертации — «Логическое развитие понятий расстояния и метрического пространства у учащихся IX—X классов». В ней на основании проведенных автором исследований (в лабораторных условиях, условиях проведения кружковой работы и специального факультатива) указаны реальные перспективы формирования у учащихся IX—X классов понятий расстояния и метрического пространства при изучении математики по новой программе.

Здесь аргументируется утверждение о том, что наиболее реальным на ближайшие годы является путь «метрического» построения геометрии на основании дополнений планиметрической системы аксиом А. Н. Колмогорова пространственными аксиомами. При этом подчеркивается возможность широкого использования аппарата векторной алгебры при решении геометрических задач, указывается один из возможных путей установления связей между скалярным произведением (векторов) и расстоянием между двумя точками.

Автор обосновывает целесообразность рассмотрения в IX классе следующего аксиоматического определения расстояния:

1. Для каждой пары точек A и B определено расстояние, которое обозначают d (A, B).

2. Расстояние d (A, B) является неотрицательным действительным числом.

3. $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$.

4. $d(A, B) = d(B, A)$.

5. $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ для любых трех точек A, B, C.

На этой простой и компактной аксиоматике расстояния можно, как показали наши исследования, в доступной форме ознакомить учащихся с идеями аксиоматического метода в математике и с некоторыми путями их решения, с понятием интерпретации. Здесь четко и просто прослеживается сущность доказательства в математике. Эксперимент подтвердил целесообразность аксиоматического построения предложенных автором фрагментов теории метрических пространств, идея создания которых принадлежит Р. Неванлинне, И. Ф. Тесленко и другим ученым.

Автор, на основании рекомендаций О. М. Арсеньева, Г. Г. Масловой, В. М. Монахова, И. Ф. Тесленко, С. И. Шварцбурда, в которых четко определены характерные особенности факультативных курсов, а также на основании личного опыта, аргументирует целесообразность проведения в IX—X классах факультатива «Начальные сведения о метрических пространствах». Цель этого факультатива — помочь учащимся расширить их кругозор, помочь понять, что развитая гео-

метрическая интуиция была и остается очень плодотворной для формирования новых математических идей. Здесь понятие метрического пространства используется для реализации общего подхода к геометрии Евклида, к сферической геометрии и к пространству непрерывных функций, для обобщающего повторения узловых вопросов школьной математики.

Автором разработана программа указанного факультатива и методика ее реализации. В диссертации дано краткое содержание изложения следующих вопросов предлагаемой программы:

1. Основные метрические понятия (расстояние и метрическое пространство).

2. Решение задач на определение расстояний между фигурами как множествами точек.

3. Понятие о теоретико-групповых принципах построения метрического пространства Евклида.

4. Понятие о различных способах метризации множества X. Построение различных метрических пространств на общем носителе. Идеи Б. Римана.

5. Метрическое пространство непрерывных на отрезке функций и его применение в приближенных вычислениях.

6. Метрическое построение сферического пространства.

7. Аксиоматическое построение абстрактно-математического понятия метрического пространства. Непротиворечивость и независимость системы аксиом.

Автором специально построен фрагмент «геометрической» теории метрических пространств (отличных от начальных сведений о метрических пространствах в университетских курсах), который развертывается на основе использования метода аналогии и обобщения ранее изученного на уроках и факультативе так, чтобы сами учащиеся стали активными участниками его построения.

Значительное внимание уделено активно-творческим методам изучения материала, применению современных технических средств обучения. Для стимулирования познавательной активности учащихся, создания ситуации научно-познавательного поиска служит система специально созданных и подобранных задач. Широкие познавательные возможности, открывающиеся при решении таких задач, иллюстрируются в

диссертации на примере отыскания множества точек, равноудаленных от двух заданных отрезков общего положения.

В диссертации подчеркивается целесообразность установления тесной связи между факультативными занятиями и кружковой работой по математике в школе.

В конце главы дан анализ результатов исследований, полученных на основании наблюдений за развитием учащихся на уроках математики и в процессе проведения факультативных занятий, на основании выполненных старшеклассниками самостоятельных и контрольных работ (необходимая информация представлена в диссертации пятью таблицами). Результаты этих исследований дают основание для вывода о целесообразности проведения в школе факультативных занятий по курсу «Начальные сведения о метрических пространствах».

В заключении диссертации на основании полученных результатов исследования даются выводы и рекомендации, содержание которых сводится к следующему:

1. Понятия расстояния и метрического пространства имеют большое образовательное, воспитательное и практическипознавательное значение и поэтому должны занять надлежащее место в школьной системе математического образования.

2. Методами наблюдения, беседы, изучения документации и анкетирования установлено, что уровень знаний большинства учащихся о расстоянии и метрическом пространстве недостаточный для надлежащего изучения ими многих вопросов математики и физики.

3. Уточнена, получившая подтверждение гипотеза о том, что формирование понятий расстояния и метрического пространства у учащихся является эффективным, если на протяжении изучения курса школьной математики оно проводится систематически и постепенно приближается к уровню, на котором рассматривает эти понятия современная наука.

4. В VI—VIII классах понятие расстояния целесообразно трактовать как скалярную величину (мерой которой является число), а понятие метрического пространства рассматривать на доступных восьмиклассникам примерах. В IX—X классах следует постепенно подводить учащихся к классическому определению расстояния как конкретных значений мет-

рической функции (над полем неотрицательных действительных чисел) и рассмотреть более абстрактные примеры метрических пространств.

Такая последовательность уровней изучения метрических понятий согласуется с навыками реального мышления учащихся, способствует формированию материалистического понимания генезиса и особенностей эволюции фундаментальных математических понятий.

5. Намеченные в исследовании межпредметные связи школьного курса математики с физикой, географией, черчением и трудовым обучением содействуют углублению знаний учащихся о расстоянии и метрическом пространстве.

6. Эксперимент подтвердил целесообразность предложенной автором методики формирования метрических понятий, для изучения которых в школе не требуется значительного расширения школьной программы и дополнительного времени.

7. Уровень знаний учащихся, полученных ими в процессе экспериментального обучения, выше уровня знаний контрольных классов, которые обучались по традиционной программе. Это следует из того, что формирование понятий расстояния и метрического пространства по предложенной методике обеспечивает более глубокое понимание учащимися других понятий и идей школьной программы, повышает их математическую культуру.

8. Установлена целесообразность изучения понятий расстояния и метрического пространства, а именно:

а) понятие о расстоянии и длине целесообразно формировать в IV—VI классах как представление о скалярных величинах, мерой которых являются числа;

б) в VII—VIII классах понятия расстояния и метрического пространства целесообразно формировать на основании широкого использования доступных для учащихся конкретных примеров, использования межпредметных связей. В этом случае полезна система упражнений, постепенно приближающая учащихся к выводу о возможности и целесообразности замены расстояния при рассмотрении теоретических вопросов, его мерой — числом;

в) IX—X классах целесообразно реализовать логическое развитие метрических понятий на основании ознакомления

учащихся с аксиоматическим методом построения метрического пространства и его важными примерами — числовым евклидовым пространством и сферическим пространством. Для наиболее успевающих и способных учеников целесообразно организовать факультативное изучение метрических понятий по предложенной в диссертации программе;

г) для лучшего усвоения учащимися метрических понятий желательно подчеркивать им метрический характер большинства задач школьного курса и роль этих понятий в решении каждой такой задачи. Стоит уделить внимание упражнениям на построение генетического дерева метрических теорем, разыскание множеств точек, обладающих определенными метрическими свойствами;

д) в текстовых задачах по алгебре желательно уточнить метрическую терминологию («расстояние» и «длина»);

е) учитывая, что успех формирования научных понятий в значительной мере зависит от теоретической и методической подготовки учителя, необходимо уделить больше внимания рассмотрению вопросов о расстоянии и метрическом пространстве при изучении методики преподавания математики, алгебры и геометрии в педагогических институтах.

Материалы диссертации обсуждались:

а) на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского педагогического института имени А. М. Горького (1973 г.);

б) на кафедре математики и методики преподавания математики Тернопольского педагогического института (1972—1973 гг.);

в) на республиканском научно-методическом семинаре преподавателей методики математики (1969 г. — 1972 г.);

г) на республиканских педагогических чтениях (1972 г.);

д) на областных (г. Тернополь) педагогических чтениях (1969 г. — 1972 г.);

е) на отчетно-научных конференциях преподавателей Кременецкого (1966—1969 гг.) и Тернопольского (1969—1973 гг.) педагогических институтов.

Затронутые в диссертации вопросы о применении технических средств обучения и элементов программированного контроля знаний обсуждались на всесоюзных (Москва — 1966 г., 1969 г.) и республиканских (Сумы — 1966 г., Одесса — 1967 г., Ужгород — 1968 г.) научно-практических конференциях по проблемам ПО и ТСО.

Основные результаты исследования опубликованы в следующих статьях автора:

1. Формирование понятия расстояния в курсе математики средней школы. — В сб. «Методика викладання математики», вып. VII, К., «Радянська школа», 1971 (на украинском языке).

2. Формирование понятий о расстоянии и метрическом пространстве на уроках в IV—VIII классах — «Радянська школа», 1973, № 8 (на украинском языке; в соавторстве с В. Е. Тарасюком).

3. Понятие о расстоянии и метрическом пространстве в курсе математики. — «Початкова школа», 1973, № 10 (на украинском языке).

4. Формирование понятия расстояния в курсе геометрии средней школы. Доклады отчетно-научной конференции кафедр КГПИ. Кременец, 1967 г. (на украинском языке).

5[1]). Использование технических средств в процессе самостоятельной работы студентов. — Сб. «Проблеми вищої школи», вып. 3, К., «Вища школа», 1970 г. (на украинском языке).

6. Использование технических средств в процессе преподавания математических дисциплин в педагогическом вузе. Тезисы докладов на Всесоюзной межвузовской научно-технической конференции по проблеме научной организации труда в вузах. Вып. 2 МЭИ. М., 1969 г. (в соавторстве с М. Д. Касьяненком).

7. Формирование культуры вычислений в процессе ознакомления учащихся с элементами современной вычислительной техники. Тезисы докладов отчетно-научной конференции кафедр КГПИ. Кременец, 1966.

[1]) В работах 5—6 рассмотрены вопросы применения технических средств в процессе изучения математики, нашедшие отражение в данной диссертационной работе.