УДК 51:378.147≡371.3
ББК 22.1г + 74.202
Б 36

БЕВЗ В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. – К.: НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.

У монографії розглядаються проблеми, пов'язані з визначенням місця, функцій і значення історії математики у фаховій підготовці майбутнього вчителя математики. Подається характеристика історії математики як науки, навчального предмета та інтеграційної основи навчання дисциплін математичного циклу. Розкривається методична система навчання історії математики. Детально висвітлюються особливості вивчення історії вітчизняної математики. Подаються конкретні рекомендації щодо пропедевтичного вивчення історії математики.

Для науковців у галузі теорії та методики навчання математики, викладачів математичних дисциплін, аспірантів і студентів університетів, вчителів математики, всіх тих, хто цікавиться історією і методикою математики.

Рецензенти: ***З. І. Слєпкань***, доктор педагогічних наук, професор (*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова*);

Т. В. Крилова, доктор педагогічних наук, професор (*Дніпродзержинський державний технічний університет*);

В. І. Лагно, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу та інформатики (*Полтавський державний педагогічний університет імені В. Г. Короленка*).

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова
(протокол № 7 від "24" березня 2005 р.)

ISBN 966-660-224-5

© Бевз В. Г., 2005
© НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА **5**

РОЗДІЛ 1. ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ У НАУКОВОМУ І ОСВІТНЬОМУ ПРОСТОРІ 7

1.1. Історія математики як галузь науки 7

1.2. Історія математики як навчальний предмет 21

1.3. Історія математики як інтеграційна основа навчання предметів математичного циклу 36

1.4. Психолого-педагогічні основи підготовки майбутніх учителів математики 51

РОЗДІЛ 2. ПРОПЕДЕВТИЧНЕ ВИВЧЕННЯ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ 69

2.1. Ознайомлення першокурсників з історією математики на факультативних заняттях 69

2.2. Відображення історичного матеріалу в курсі елементарної математики 85

2.3. Елементи історії математики в курсах вищої математики 100

2.4. Особливості використання історичного матеріалу в курсі методики навчання математики 120

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ 140

3.1. Цілепокладання у вивченні курсу "Історія математики" в педагогічному університеті 140

3.2. Відбір і структурування змісту навчального матеріалу 155

3.3. Організаційно-методичний інструментарій навчання історії математики 168

3.4. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем у навчанні історії математики 181

РОЗДІЛ 4. ВИСВІТЛЕННЯ ІСТОРІЇ ВІТЧИЗНЯНОЇ МАТЕМАТИКИ 194

4.1. Особливості відбору і систематизації навчального матеріалу 194

4.2. Зародження і розвиток перших математичних уявлень у праукраїнців 204

4.3. Поширення математичних знань на території України до XIX століття 209

4.4. Математика в Україні у XIX столітті 220

4.5. Математика в Україні у XX столітті 233

РОЗДІЛ 5. ВЧЕНІ-МАТЕМАТИКИ НПУ ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА ТА ЇХ ВНЕСОК У РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ 241

5.1 Еволюція математичних кафедр університету 241

5.2. Розвиток вищої математики вченими університету 263

5.3. Розвиток вченими університету теорії математичного аналізу та диференціальних рівнянь 282

5.4. Розвиток методики математики вченими університету 297

5.5. Наукові здобутки вчених кафедри інформатики 317

ВИСНОВКИ 326

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 328

ПЕРЕДМОВА

Зміст освіти сьогодні – це не тільки знання, навички і уміння в певній освітній галузі, а загальнолюдська культура, яка знаходить вираження в цій галузі. Сучасні тенденції оновлення змісту освіти передбачають, крім усього іншого, його культуровідповідність, гуманізацію, гуманітаризацію, інтеграцію й особистісну орієнтацію. Тому ефективним засобом оновлення змісту математичної освіти у вказаних напрямах має стати історія математики. А забезпечити культурологічний характер сучасної математичної освіти покликана історико-методологічна підготовка вчителя математики.

Історія науки вводить нас у творчу лабораторію вчених, учить бачити в математиці не суму незмінних правил і догм, а результат довгих і наполегливих пошуків багатьох поколінь, показує, що за кожним математичним фактом, за кожною науковою теорією приховані зусилля конкретних дослідників. Математичні поняття, відношення та теорії завдяки історичній динамічності стають ближчими і зрозумілішими. Історія математики репрезентує багатий матеріал про діяльність учених як яскраве свідчення величі їх праці і наочне підтвердження великої цінності наукового знання. Таке реальне життя науки, включене до змісту навчальної дисципліни, створює суттєвий вплив спеціальних математичних знань на психологічну структуру особистості, а загалом – на формування математичної культури майбутнього вчителя математики.

Мета вивчення історії математики в педагогічному університеті має два взаємопов'язані аспекти – загальнонауковий і фаховий. Загальнонаукова мета вивчення курсу "Історія математики" полягає в тому, щоб висвітлити історію формування, розвитку і трансформації математичної науки. Вивчення історії математики в рамках фахової підготовки має на меті дати майбутнім учителям історико-математичні знання, необхідні їм для правильного вирішення методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі.

У фаховій підготовці майбутнього вчителя історія матема-

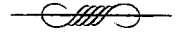
тики має стати також інтеграційною основою навчання предметів математичного циклу з метою об'єднання всіх ланок навчального процесу у цілісну дидактичну систему. Це забезпечить студентам одержання комплексу фундаментальних і гуманітарних знань, які майбутній вчитель математики зможе творчо використати у своїй професійній діяльності.

В університеті майбутнім учителям бажано засвоїти історію розвитку математики як цілісної науки, а також сформувати правильні уявлення про історію розвитку окремих її галузей, особливо тих, що визначають математику як навчальний предмет. З цією метою в педагогічних університетах ми пропонуємо вивчати "Історію математики" у вигляді навчального комплексу, в якому лекційний курс будується на хронологічному принципі, а практичний – охоплює історію розвитку окремих математичних галузей.

Проблема відбору і структурування змісту курсу "Історія математики" полягає в тому, що для навчального предмету потрібно з великого обсягу історичних відомостей, накопичених і систематизованих наукою, вибрати ті, які можуть сприяти формуванню математичної культури та фахової компетентності спеціаліста, а також допоможуть йому в подальшій професійній діяльності.

У сучасному світі стало прийнятним вважати науку феноменом інтернаціональним. Але це не означає, що відмирає поняття національної культури взагалі і науки, зокрема. Для ствердження себе у світовій спільноті і виховання підростаючого покоління в дусі патріотизму і національної гідності необхідно вивчати і знати свою власну культурну історію. Саме тому в курсі історії математики значне місце слід відводити історії вітчизняної математики.

Ці та інші проблеми, пов'язані з визначенням місця, функцій і значення історії математики у фаховій підготовці майбутнього вчителя математики, розкриваються в даній монографії.



РОЗДІЛ 1

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ У НАУКОВОМУ І ОСВІТНЬОМУ ПРОСТОРІ

1.1. ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ ЯК ГАЛУЗЬ НАУКИ

1.1.1. Як самостійна галузь науки історія математики почала формуватися лише у кінці XVIII столітті. Але вже давньогрецькі вчені, принаймні в епоху еллінізму, виділяли цей аспект математики і відводили йому значне місце у своїх дослідженнях (Аристотель, Евдем Родоський, Папп Александрійський, Теон Александрійський, Симплікій, Євтокій з Аскалона, Теофраст, Прокл Діадох).

Евдем Родоський написав "Історію геометрії і астрономії" (II половина IV ст. до н. е, в цей час ще не існувало "Начал" Евкліда), в якій, зокрема, відмічав, що піфагорійці "надали геометрії характеру справжньої науки" [113, с.177]. Ця праця не збереглася, але деякі уривки з неї переказували у своїх коментарях Симплікій, Гемін Родоський і Прокл Діадох. Завдяки одному з цих уривків, який Симплікій, як він сам говорив, слово в слово переписав з "Історії геометрії і астрономії" Евдема, додаючи деякі пояснення з Евкліда, до нас дійшов спосіб, яким Гіппократ Хіоський квадрував серпики, намагаючись розв'язати задачу про квадратуру круга [133, с.184].

Коментарі Прокла Діадоха до першої книги "Начал" Евкліда (після втрати праць Евдема і Теофраста) стали фактично єдиним джерелом наших знань про історію геометрії до Евкліда в Стародавній Греції.

Папп Александрійський у творі "Математичне зібрання" (III ст.) об'єднав усе цікаве, на його думку, з праць попередників, що стосу-

валося: кривих вищих порядків, квадратури круга, подвоєння куба, трисекції кута, методу аналізу тощо. Ця робота дала можливість дізнатися про зміст втрачених творів Евкліда і Аполлонія. Папп не тільки пояснював праці великих геометрів, але й доповнював їх власними міркуваннями і лемами.

До нашого часу дійшло дуже мало відомостей про цю частину наукової спадщини стародавнього світу. Більше того, писці та коментатори античного світу, а саме вони були першими істориками науки тієї епохи, вносили зміни до оригіналів, скорочували тексти, доповнювали їх на власний розсуд. І все ж навіть окремі фрагменти творів античних істориків науки мають велике значення і залишаються незамінними джерелами для сучасної історії науки.

Крах античного рабовласницького суспільства та поширення нової релігії, дії інквізиції спричинили занепад математичної науки в Європі. Головною ареною прогресу математики епохи середньовіччя стають країни Середнього і Близького Сходу. До нашого часу дійшли твори видатного середньоазійського вченого Абу-Рейхана аль-Біруні "Пам'ятки минулих поколінь" і "Книга ключів астрономії про те, що відбувається на поверхні сфери", в яких висвітлювалися цінні відомості з історії математики. Рукопис останньої книжки було знайдено тільки незадовго до 1000-ліття від дня народження аль-Біруні. Цей твір суттєво доповнив існуючі знання про історію розвитку математики в Індії та Середній Азії. В ньому цитується і переказується зміст деяких математичних праць (втрачених пізніше), наводяться відомості про їх авторів, підбивається підсумок дискусії з приводу пріоритету у відкритті теореми синусів тощо [433].

Інтерес до питань історії розвитку математики знову виникає у Європі в XVI–XVII ст., про що свідчать роботи П. Раме, Б. Бальді, А. Таке, Д. Валліса та ін. Початок серйозного вивчення історії математики в Англії пов'язується з роботою Д. Валліса "Історичний і практичний трактат з алгебри", в якому підсумовувалося все те, що було зроблено в алгебрі до 1685 року. Аналізуючи цю роботу в своєму науковому дослідженні, Т. Ф. Ніконова, крім усього іншого, відмічала, що "тут епоха передавала частину свого спадку далі" [351, с. 12].

В XVII столітті відбуваються зміни у формах існування математи-

ки. На зміну ентузіастам-одинакам приходять наукові організації та спілки, які стають плідними осередками колективної праці вчених над складними проблемами науки під опікою держави. З 1662 року розпочало свою діяльність Лондонське королівське товариство, а в 1666 році організовано Паризьку академію. Майже відразу по створенню ці наукові товариства практикували детальні огляди розвитку тієї чи іншої галузі науки. І хоча багато з таких оглядів носили переважно описовий характер і зосереджувалися на досить вузьких проблемах, вони мали велике значення для розвитку відповідної наукової дисципліни: популяризували зроблені досягнення, висували актуальні проблеми, полегшували оволодіння методикою дослідження.

У Паризькій академії наук звіти з історії наук складали Б. Фонтенель, Ж. Д'Аламбер, Н. Кондорсе. Крім того, Ж. Д'Аламбер підготував для "Енциклопедії наук, мистецтв і ремесел" вступну статтю – "Нарис про походження і розвиток наук", а Н. Кондорсе опублікував кілька біографій, в тому числі Х. Гюйгенса, Ж. Роберваля, Е. Маріотта.

У Берлінській академії наук питаннями історії науки опікувався Г. Лейбніц. Він постійно підкреслював роль історії науки для мистецтва відкриттів і наголошував, що це не просто хронологія подій та каталог імен і праць, а історія ідей. Великий математик вказував на необхідність проведення досліджень у цьому напрямі, щоб краще розібратися в способах відкриття істини і, зокрема, відмічав, що потрібно описати, як і в якому порядку слідували один за одним математичні відкриття, і кому за них ми зобов'язані.

У Петербурзькій академії наук у 1761 році з доповіддю "Слово про користь вправ у чистих математичних міркуваннях" виступив С. Котельников. Для аргументації головних тез він вміло використовував матеріали з історії математики, фізики та астрономії, посилався на Піфагора, Евкліда, Аполлонія, Декарта, Ньютона і Лейбніца [103], [405].

У формуванні історії математики як науки значну роль відіграли історичні екскурси, які були важливою складовою частиною деяких класичних наукових творів ("Аналітична механіка" (1787) і "Теорія аналітичних функцій" (1797) Ж. Лагранжа) та спеціальні праці, присвячені історії математики ("Історія математики" у 2–х томах (1758) Ж. Монтюкла, "Історія математики" (1796–1800) А. Кестнера, "Нарис загальної історії математики" (1802) Ш. Боссю).

Подальший розвиток математичних теорій та швидке розгалуження напрямів математичних досліджень пробуджують у науковців інтерес до історії виникнення математичних понять і методів, викликають необхідність глибше проникнути в їх історичні та логічні джерела. Історико-математичні дослідження стимулюються виданнями класичних та невідомих чи недоступних раніше математичних творів, відкриттям способів розшифровки єгипетських папірусів і вавилонських клинописних табличок, необхідністю висвітлення і систематизації математичних досягнень в окремих країнах. Збільшується кількість науковців, для яких історія математики стає їх основною спеціальністю. Серед них на передній план виходять: німецький історик математики М. Кантор – автор чотиритомника "Лекції з історії математики"; датський історик математики Г. Цейтен, книжки якого з історії математики перекладені і на українську мову; французький історик математики і астрономії П. Таннері – автор праці "Історичний нарис розвитку природознавства в Європі", значне місце в якій відведено історії математики; російський історик математики В. Бобинін – автор низки досліджень з історії математики, засновник журналу "Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем"; американський історик математики Ф. Кеджорі – автор "Історії елементарної математики". Історія розвитку науки викликає інтерес у видатних математиків того часу (М. Шаль, Г. Ганкель, Ф. Клейн та ін.) і вони все більше і частіше включаються в роботу над проблемами історико-математичного характеру.

Таким чином, у XIX столітті історія математики стає повноправним і професійним розділом математики. В ній формується власний предмет вивчення, урізноманітнюються напрями і завдання дослідження, розширюються джерела та засоби, якими вона користується, поповнюється фактологічний матеріал, висуваються і перевіряються гіпотези. Розпочинають діяльність історико-математичні наукові об'єднання та спілки, створюються спеціальні періодичні видання, збираються регіональні та міжнародні з'їзди з історії науки. Секція з історії математики стає постійно діючою на кожному з математичних з'їздів. Збільшується коло творців і дослідників історії математики, що сприяє розширенню їх напрямів діяльності.

1.1.2. Особливості історії математики як галузі науки розкриємо через окремі характеристики науки взагалі. А саме: а) наука – це система знань, що постійно розвивається; б) наука – специфічний вид духовного виробництва; б) наука – соціальний інститут, тобто об'єднання професійно зайнятих науковою діяльністю людей і матеріальних засобів її здійснення у вигляді системи організацій та установ для виконання функцій свідомого і цілеспрямованого керування науковою діяльністю.

За час професіоналізації історії науки неодноразово виникали і видозмінювалися підходи до визначення місця і ролі історії в науці, функціонували різні теорії і концепції історії науки взагалі та історії математики, зокрема. Всі вони створювалися, розвивалися і домінували в різні історичні періоди, а деякі співіснують і донині.

Серед останніх вирізняються чотири основні моделі історичних реконструкцій науки:

- Історія науки, як комулятивний, лінійний, прогресивний процес. За цією концепцією історія не має значення для науки, бо всі ті факти, які витримали деякі випробування, є змістом теперішнього етапу науки, а ті, які були виключені, – не входять в її предметну сферу.

- Історія науки як нелінійні, дискретно-стрибкові процеси, розвиток через наукові революції. Основоположники цієї концепції розглядали історію науки як історію послідовності наукових теорій, концепцій, вчень, парадигм. З часом у ній виділилися два напрями – інтерналізм і екстерналізм. В інтерналізмі історія науки розуміється як об'єктивована, незалежна від загального культурного контексту історія ідей, яка розглядається без врахування зовнішніх для науки визначальних факторів, – наприклад, соціально-економічних, політичних, психологічних та інших. Історія для екстерналізму – це персоналізована історія, пов'язана з діяльністю вченого у виробництві знань, заглиблена в контекст соціальних, політичних, релігійних та інших відношень.

- Історія науки як сукупність окремих ситуацій (case studies – кейс стадіс). У цій концепції історична подія розглядається як неповторна, невідтворювана в інших умовах, а історик вивчає факт як подію, подію багатьох особливостей розвитку науки, для того щоб вирізнити її серед інших. В кейс стадіс з двох полюсів наукового дослідження, суб'єкт – предмет, суб'єкт стає домінуючою діючою особою.

• Історія науки як сукупність моделей. Під моделюванням тут розуміється застосування наукових абстракцій і специфічних ідеалізацій. Суть моделювання полягає в пізнанні предмета використання інформації, що міститься в його замінниках. Предметом дослідження виступають історичні джерела – рукописи, книги, архівні матеріали та інші пам'ятки історії науки. Модельні дослідження надають можливість впорядкувати у синхронному розумінні широкий історичний матеріал деякої галузі, а потім розглянути його значення протягом тривалого періоду. В історико-наукових дослідженнях розрізняють моделі, що відтворюють унікальні конкретні події і процеси у минулому ("реконструктивні"), і моделі, що відтворюють тенденції і процеси у формі, яка дає змогу імітувати різні можливі, зокрема і реалізовані в минулому явища ("ретроспективні"). Існує думка, що "концептуальна моделізація" повинна взаємно доповнюватися іншими підходами і перш за все системними, інформаційними, синергетичними [300], [301].

Історія математики вивчає зміни в математичній науці, що відбуваються в часі. При цьому рівноважливими є два основні аспекти: вивчення минулого як такого і його реконструкція та інтерпретація. Минуле як таке це – документи, архіви, події і т. д., які містять факти, що складають основу теорій минулого і з яких розвинулися сучасні теорії і методи. Вони дають змогу розкрити зміст емпіричних і теоретичних фактів, а також визначити послідовність подій і тим самим становлять частину вихідних даних історії математики. Значення окремої події або факту істотно залежить від того, як ми його витлумачимо. Програма раціональної реконструкції історії математики має враховувати різноманітність підходів до збирання й упорядкування фактів, а також тлумачення вихідних положень. Виділяють чотири основні підходи: емпірична реконструкція; концептуальна реорганізація; соціальний, економічний і культурний розвиток; зразки відкриттів [412].

Емпірична реконструкція полягає у вивченні джерел, збиранні фактів, розташуванні їх у хронологічному порядку, науковому викладі для здійснення об'єктивного звіту про історичний прогрес математичних ідей.

Концептуальна реорганізація тлумачить і оцінює математику минулого крізь призму сучасної науки, мовою прийнятих сьогодні концепцій і теорій.

Соціальний, економічний і культурний розвиток. Тут історія вивчається з погляду сил зовнішніх стосовно математичної теорії і структур. Ці аспекти

вмонтовані в конкретну культуру і конкретний час. Хоча вони безпосередньо і не стосуються математичних теорій, проте досить часто визначають основний напрямок і темпи розвитку математики.

Зразки відкриттів у математиці досліджуються на основі вивчення наукових внесків і особливостей індивідуальних творчих процесів. У такий спосіб історична наука намагається розкрити і сформулювати логіку математичних відкриттів і психологію винаходів. Ця сфера торкається важливої проблеми: як зробити математику значущою у рамках усієї культури в цілому та інтелектуально доступною на всіх рівнях.

Історія математики відтворює процеси розвитку математики, розглядаючи її в просторі, часі та в особах. Необхідність і можливість такого відтворення виникає тільки в умовах досягнення певного рівня свідомості людини, розвитку суспільства, а отже, і самої математики.

1.1.3. Вивчаючи події, що вже відбулися, історія математики може отримувати достовірні відомості й оперувати ними в подальших дослідженнях лише в тому випадку, коли ці події залишили після себе прямі чи непрямі сліди. Саме тому історія математики має специфічні джерела та засоби дослідження: вивчення рукописних чи друкованих математичних текстів, дослідження життя народів (спільноти людей), які мають низький рівень розвитку, вивчення різних мовних структур, приказок, прислів'їв, дослідження археологічних знахідок, спостереження за математичним розвитком дитини. Наведемо конкретні приклади.

До прямих джерел історії математики належать Лондонський та Московський папіруси, давньовавилонські клинописні тексти на глиняних дощечках, рукописні твори античних математиків, друковані математичні твори тощо. Робота з оригінальними друкованими та рукописними творами дає не тільки міцне підґрунтя для функціонування історії математики, але й може зробити послугу для власне математики. З великої кількості таких прикладів нагадаємо той, що стосується вітчизняних вчених.

У 1951 році Є. Я. Ремез і Б. В. Гнєденко вивчали математичний архів М. В. Остроградського. В результаті цього чисто архівно-історичного дослідження Є. Я. Ремезу вдалося відшукати на клаптиках паперу намітки двох

алгоритмів, які слугували для наближення ірраціональних чисел раціональними. Ці намітки навели Є. Я. Ремеза на цікаві дослідження властивостей вказаних алгоритмів. З'ясувалося, що обидва алгоритми М. В. Остроградського мають велику швидкість збіжності.

Про значення історії математики для творчої діяльності окремих вчених вказував А. П. Юшкевич в одній з дискусій, що відбулась на об'єднанні істориків природознавства і техніки: "... Важко собі уявити, щоб теорія множин Г. Кантора могла бути створена людиною, яка не продумала весь хід розвитку математичного аналізу і, зокрема, поняття про нескінченне. Історичний підхід відіграв певну роль в направленості тих досліджень, які привели Ф. Клейна до Ерлангенської програми, А. Лебега – до його теорії міри та інтеграла, Д. Гільберта – до аналізу нескінченно великої кількості змінних і до робіт з математичної логіки" [178, с. 456].

Непрямими джерелами історії математики є зарубки на кістках тварин, орнаменти на посуді та прикрасах, плани стародавніх поселень, правильні форми архітектурних споруд тощо. Оскільки єгипетські піраміди збудовані з каменів, що мали форму прямокутного паралелепіпеда, то їх творці мали уявлення про прямі кути, паралельні і перпендикулярні прямі. Якщо в стародавньому світі у колісниць були колеса зі спицями, то це означає, що тодішні майстри вміли ділити коло на рівні частини.

Точної відповіді на питання про те де, коли і як виникло вперше поняття числа та геометричної фігури дати неможливо, але простежити за тим, як поступово виникали у людини перші уявлення математичного характеру можна з допомогою вивчення побуту, мови та культурних цінностей відсталих та високорозвинених народів. Строга математична обробка систематичних і випадкових спостережень мандрівників та дослідників дає можливість з достатньою вірогідністю відтворити картину осягання людиною перших математичних відомостей.

Археологічні пам'ятки доводять, що людина мала уявлення про числа та геометричні фігури ще в кам'яному віці (40–10 тис. р. до н. е.). Так, на місці відомої Мізинської стоянки (тепер територія України), вік якої 30–25 тис. років, знайдено вироби із кісток, прикрашені геометричними орнаментами, зокрема браслети. Один із них складається із п'яти смуг, прикрашених паралельними штрихами у вигляді ялинки. Вивчення цього орнаменту наводить на ду-

мку, що у його творця існували ідеї кількості і рахунку (кількість штрихів на смугах однакова), симетрії, вимірювання (відстань між штрихами і їх довжина однакові), кута і нахилу, перші уявлення про геометричну форму (відрізок прямої, точка, квадрат, трикутник).

Ще одним прикладом високого рівня математичної освіченості, зокрема будівельників, може бути монументальна споруда Херсонеського театру, побудованого ще в елліністичну епоху і майже знищеного у середньовіччі. Його було відкрито у 1954 р. і реконструйовано в 1960 р. О. І. Домбровським. Він, напевно, складався з восьми секторів і вміщував близько 3 тисяч глядачів.

Відомий математик-педагог К. Ф. Лебединцев у своїй роботі"Розвиток числових уявлень у дитини. Педагогічне дослідження" (1923) дійшов висновку, що уявлення про числові кількості виникають у дитини спочатку без перелічування конкретних предметів, а через їх безпосереднє сприймання дотиком і зором групи однорідних предметів, тобто лічба, як така, є порівняно пізнім надбанням дитячої психіки. Цей факт виступає ще одним доказом того, що мав пройти довгий шлях, перш ніж людина від первісних кількісних понять перейшла до лічби.

Використання в історії математики непрямих джерел викликане цілою низкою причин: розвиток математичних знань не завжди фіксувався повністю та ще й у письмовому вигляді, деякі математичні твори повністю чи частково втрачені, окремі праці дійшли до нашого часу в пізніх копіях і перекладах з перекрученнями, перебільшеннями та тенденційними викривленнями, не всі давні тексти можна опрацювати в сучасних умовах, в той час як деякі з опрацьованих мають різні тлумачення.

1.1.4. Як і кожна інша наука, історія математики розвивається в процесі постановки і розв'язання гіпотез. Зокрема, в історії античної математики гіпотези стосуються трьох основних груп нерозв'язаних проблем. До першої належать проблеми, пов'язані з хронологією: визначення дат наукових відкриттів чи творів, встановлення біографічних даних окремих математиків. До другої групи входять проблеми, що стосуються математичних прийомів і методів, з допомогою яких античні вчені отримували свої результати. Третя група проблем пов'язана із загальною характеристикою розвитку математики вказаної епохи.

Характеристику предмету історії математики дав В. В. Бобинін у доповіді "Сучасний стан викладання історії математики", прочитаній на секції математики й астрономії VIII з'їзду природодослідників і лікарів 2 січня 1890 року: "Предмет історії математики полягає у вивченні поступового розвитку математики, шляхів, якими він відбувався, і законів, якими він керувався" [30, с. 10].

Пізніше К. О. Рибніков визначив історію математики як науку про об'єктивні закони розвитку математики і вказав, що її предметом є з'ясування закономірностей виникнення, розвитку і взаємодії складових математичної науки (фактів, гіпотез, теорій, законів, методології) в різні історичні періоди, а також визначення перспектив прогресу математики взагалі і окремих її галузей, зокрема [416, с. 6].

Основними напрямами і завданнями дослідження історії математики є:

1. Відтворення фактичного змісту історичного розвитку математики. А саме: а) висвітлення виникнення і подальшого розвитку математичних понять, ідей та методів; б) показ історії творення окремих математичних теорій; в) з'ясування характеру і особливостей розвитку математики в окремих народів у певні історичні періоди; г) визначення і описання внеску, зробленого в математику великими вченими минулого, зокрема вітчизняними вченими.

2. Висвітлення багатогранних зв'язків математики. Серед них: а) зв'язок між окремими галузями математики; б) зв'язок математики з розвитком інших наук; в) зв'язок математики з практичними потребами і діяльністю людей; г) вплив економічної і соціальної структури суспільства на зміст і характер розвитку математики.

3. Розкриття обумовленості логічної структури сучасної математики, шляхів її розвитку та перспектив.

4. Створення правильного погляду на математику як цілісну науку і складову частину загальнолюдської культури.

Предмет і завдання історії математики породжують дискусії, пов'язані з тим, до якої галузі науки її слід відносити. З цього приводу існують різні погляди.

К. О. Рибніков: "Історія математики – одна з математичних дис-

циплін" [416, с. 5].

Б. Гнєденко і Й. Погребиський: "Історія математики у відповідності до своєї назви – наука одночасно історична і математична. Але цей висновок в свою чергу вимагає уточнення. В процесі вивчення закономірностей розвитку математики в різні епохи елемент історичний і елемент власне математичний знаходяться у різних співвідношеннях. Грубо говорячи, з наближенням до сучасності підсилюється другий, з віддаленням від неї – перший" [178, с. 444]. В той же час, аналізуючи завдання історії математики, Б. В. Гнєденко відмічає: "Історія математики є наукою не тільки математичною, але і соціальною. Її завданням є не лише вивчення і опис того шляху, який пройшла математика в своєму розвитку, і закономірностей її розвитку, але і з'ясування причин цього прогресу".

О. М. Боголюбов, наполягаючи на соціальному характері історії математики, вживає термін "соціальна історія науки". Визначаючи предмет історії науки ("становлення і розвиток в часі і просторі якої-небудь однієї конкретної науки чи групи наук, чи суми знань, причому досліджуються логічні зв'язки і залежності наступних знань від попередніх"), він підкреслює необхідність в її соціалізації. "Соціальна історія науки відрізняється від історії науки тим, що вона не задовольняється дослідженням процесу розвитку науки, хоча він і входить в межі дослідження. Але поряд з питанням ***як*** вона ставить і питання ***чому***. Об'єктом історії науки є всі літературні джерела, видані чи рукописні, причому об'єктом історії науки вони стають з моменту свого завершення. Крім того, історія науки вивчає і життя вчених, в основному як ***творців науки***. Соціальна історія науки не задовольняється цим: вона досліджує питання взаємовпливу науки чи наук на сусідні галузі знань, їх місце в загальній культурі, взаємовпливи науки і техніки, науки і літератури, науки і мистецтва, роль науки в соціальному житті людини" [101, с. 4].

1.1.5. Формування Української школи історії математики починається у післявоєнний період, але окремі дослідження проводились ще наприкінці XIX століття на математичних кафедрах Харківського і Ки-

ївського університетів, а також у Ніжинському фізико-математичному ліцеї. Першим науковим дослідженням з історії математики в Україні була магістерська дисертація М. А. Дяченка на тему "Рассуждение об успехах после Эйлера, сделанных в нахождении интегралов определенных и об употреблении их" (1835) [251, с.133].

Видатним істориком математики кінця XIX століття був М. Є. Ващенко-Захарченко. В 1880 році вийшла друком його книжка "Начала Евкліда", яка була вільним перекладом з грецької відомого трактату Евкліда і містила нарис про геометрію Лобачевського. Його перу належить велика праця "История математики" (1883), в якій висвітлювалися історії розвитку геометрії та алгебри в різних школах та в окремих народів. Деякі питання з історії математики М. Є. Ващенко-Захарченко висвітлював у статтях, опублікованих у 1884 році в "Журнале Элементарной математики": "О времени возникновения некоторых из алгебраических символов", "Выражение площади треугольника в функции его сторон" (історія формули Герона та її виведень).

Велику увагу історії математики приділяли в своїх роботах М. М. Бубнов, Б. Я. Букреєв, Д. О. Граве, В. Ф. Каган, П. К. Покровський, М. О. Тихомандрицький та інші.

Особливого пожвавлення і піднесення історико-математичні дослідження в Україні набувають на початку 50-х років XX століття. І пов'язується це з діяльністю Б. В. Гнеденка. Саме з його ініціативи було скликано перше засідання Київського семінару з історії математичних наук і засновано відділ історії математики в Інституті математики АН УРСР. Досить скоро семінар з невеликого гуртка ентузіастів-дослідників історії розвитку математики і механіки перетворився на авторитетний науковий центр досліджень з історії математичних наук, діяльність якого стала широко відомою за межами Києва і Української республіки. Цьому сприяла і реорганізація відділів історії математики, історії техніки та інших в сектор історії природознавства і техніки при Інституті історії АН УРСР.

Діяльність семінару визначали актуальні проблеми історії математичних наук:

– історія вітчизняних математики, механіки та суміжних наук;

– історія окремих фундаментальних напрямків світової математичної думки;

– розвиток окремих наукових проблем та понять;

– огляд творчості окремих учених, наукових колективів і установ;

– історія математичної освіти;

– філософські та методологічні питання математики;

– актуальність тематики започаткованих досліджень тощо [201, с. 57].

Київський семінар з історії математичних наук, очолюваний Й. З. Штокалом, був другим в СРСР після семінару в МДУ імені М. Ломоносова. Пізніше розпочав роботу аналогічний семінар в Ленінграді під керівництвом проф. М. М. Матвєєва і другий семінар у Києві під керівництвом члена-кореспондента АН УРСР О. М. Боголюбова.

В цей час в Україні суттєво збільшується кількість істориків математики, розширюється географія їх представництва: Харків, Одеса, Полтава, Чернівці, Ужгород, захищаються кандидатські та докторські дисертації, видається багато наукових праць з історії математики. Особливо слід відзначити багатотомну колективну монографію "История отечественной математики" (відповідальний редактор Й. З. Штокало, заступники – О. М. Боголюбов, А. П. Юшкевич), відзначену в 1971 році медаллю А. Койре, а також повні зібрання творів М. В. Остроградського та Г. Ф. Вороного. Широкої популярності за межами України набули довідкові видання О. І. Бородіна і А. С. Бугая "Библиографический словарь деятелей в области математики" та О. М. Боголюбова "Математики. Механики".

Велике значення для поширення та популяризації результатів досліджень з історії математики мали періодичні видання. З 1959 року в Києві почав виходити "Історико-математичний збірник" під редакцією Й. З. Штокало, який продовжувався під різними назвами, а врешті отримав назву "Нариси з історії природознавства і техніки", під якою продовжує виходити і зараз. В 1994 р. засновано серію наукових видань "Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування", в рамках якої виходять "Нариси з історії математики і математичного природознавства".

В останні роки діяльність в галузі історії науки і, зокрема, математики особливо активізувалась і набула актуальності. Про це свідчать матеріали Українського математичного конгресу УМК–2001, симпозіумів, наукових конференцій та семінарів з математики, історії математики та історії науки, що проводяться під егідою Національної академії наук України, Інституту математики, Українського математичного товариства, Центру досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г. М. Доброва, Українського товариства істориків науки тощо. Тематику актуальних досліджень з історії математики занесено до "Програми науково-дослідних робіт з математики в установах НАН України та вищих навчальних закладах України на 2000–2010 роки" [394, с. 43]. Вона включає такі напрями:

– дослідження життя і творчості видатних математиків;

– дослідження з історії розвитку в Україні математики та математичного природознавства;

– видання довідників з історії математики і математичного природознавства.

В 2003 році ВАК України вніс зміни і доповнення до Переліку спеціальностей, за якими проводяться захисти дисертацій на здобуття наукових ступенів кандидата наук і доктора наук, присудження наукових ступенів і присвоєння вчених звань, і постановив проводити захисти дисертацій за спеціальністю 01.06.01 – історія фізико-математичних наук (з присудженням наукових ступенів кандидата фізико-математичних наук і доктора фізико-математичних наук) [132]. Паспорт спеціальності подає її формулу і визначає напрями досліджень.

Формула спеціальності 01.06.01 (історія фізико-математичних наук): наукознавча дисципліна, що досліджує процеси еволюції наукових ідей і теорій, окремих наукових напрямів у галузі фізико-математичних наук, творчу діяльність наукових шкіл та окремих учених з фізико-математичних наук.

Напрями досліджень:

– Виявлення тенденцій і логіки розвитку науки, дослідження процесів її диференціації й інтеграції, історії розвитку фундаментальних наукових ідей і теорій, окремих наукових напрямків у галузі фізико-математичних наук.

– Дослідження структурних особливостей фізико-математичних наук, еволюції їх ідей, методів і концепцій.

– Дослідження наукової та науково-організаційної діяльності вчених, їх внеску в розвиток фізико-математичних наук.

– Історія становлення і розвитку окремих наукових проблем і напрямків у галузі фізико-математичних наук. Відновлення пріоритетів українських учених, відродження забутих і замовчуваних імен.

Фахівці з історії математики, як і дослідники історії інших наук, прагнуть до міжнародної співпраці, обміну досвідом, широкого обговорення існуючих проблем і координації наукових досліджень. З цією метою створюються міжнародні об'єднання з історії науки. Вищою формою міжнародного об'єднання і спілкування істориків науки є міжнародні конгреси. Крім того, наукові установи й організації з історії науки об'єднуються в Міжнародний союз історії та філософії науки, а провідні вчені – в Міжнародну академію історії науки [235], [376], [378], [468].

Все це підтверджує професіоналізацію історії математики як самостійної наукової дисципліни та її статус соціальної інституції.

1.2. Історія математики як навчальний предмет

1.2.1. Історія математики, як і історії інших наук, виконує важливі функцій у підготовці майбутніх спеціалістів відповідної наукової галузі, а тому на її основі будується *навчальна дисципліна – історія математики*. Історію математики як науку потрібно відрізняти від курсу історії математики, що є навчальним предметом. Для навчального предмету потрібно з великого обсягу історичних відомостей, накопичених і систематизованих наукою, вибрати основні, які можуть сприяти формуванню математичної культури та фахової компетентності спеціаліста, а також допоможуть йому в подальшій професійній діяльності.

Проблема використання історії науки в навчальному процесі вищих навчальних закладів цікавила науковців ще в XIX столітті. В цей час зростав інтерес до досліджень з історії науки, і багато викладачів

включали історичний матеріал у свої лекції з математики. В другій половині XIX століття окремі курси історії математики (обов'язкові або факультативні) читали:

– Г. Г. Цейтен (Копенгагенський університет, Данія);

– М. Кантор (Гейдельберзький університет, Німеччина);

– А. Фаворо (Падуанський університет, Італія);

– П. Манзіон (Гентський університет, Бельгія);

– Г. Хелстед (Техаський університет, США) та інші.

В кінці XIX століття журнал "*Bibliotheca mathematika*" публікує програми з історії математики для університетів, підготовлені Г. Енстремом, В. Бобиніним, П. Манзіоном та ін.

Ще в ті часи актуальною стала проблема підвищення якості викладання історії математики у вищих та середніх закладах освіти, над розв'язанням якої відразу почали працювати провідні науковці. Зокрема, професор Гентського університету П. Манзіон наголошував на необхідності використання у навчальному процесі підручника з історії математики і хрестоматії, яка б містила уривки з математичних творів різних часів. На його думку, наявність у студентів таких книжок дасть змогу викладачу скоротити енциклопедичну частину курсу і розширити висвітлення інших аспектів історії математики.

В Росії перший навчальний курс з історії фізико-математичних наук розробив і прочитав Петро Лаврович Лавров (1823–1900). Ідея створення такого курсу народилася, ймовірно, ще в ті часи (1856–1859), коли він з метою узагальнення і систематизації використовував елементи історії науки на лекціях з математики. В 1864 році П. Л. Лавров прочитав публічні лекції з історії науки в Михайлівській артилерійській академії, а з 1865 року опрацьовані матеріали лекцій публікувалися в "Артиллерийском журнале" і "Морском сборнике". Арешт і висилка не дали можливості Петру Лавровичу завершити фундаментальну працю "Очерк истории физико-математических наук". Надруковано було лише три її частини: 1) Вступ, 2) Греція, 3) Александрія [203].

В 1882 році Віктор Вікторович Бобинін (1849–1919) починає читати курс історії математики в Московському університеті. Обставини змушували його кілька разів перебудовувати курс за змістом і структурою. Остаточний варіант передбачав два паралельних річних курси з однією лекцією на тиждень. Перший курс присвячувався історії математики з найдавніших часів до епохи Відродження (33 лекції), а другий – історії математики Нового часу: XV–XVII століття (26 лекцій). На думку І. Г. Башмакової і Л. Є. Майстрова,

"курс історії математики, який прочитав Бобинін у 1882–1885 р., був найбільш повним курсом, що коли-небудь читався студентам, певно, в будь-якому університеті світу" [30, с. 17].

На початку XX століття кількість університетів, у яких читався курс історії математики, значно збільшилася: розширилась географія і урізноманітнився зміст. Лекції про розвиток математики з найдавніших часів і до XIX ст. читали Д. Е. Сміт (Нью-Йорк) і Ф. Р. Штурм (Бреслау). Розвиток математики в окремі історичні епохи висвітлювали М. Симон (Страсбург) і К. Бонн (Хайдельберг). Діяльність математичних шкіл і окремих вчених розглядали на лекціях М. Брендель (Геттінген) і П. Штекель (Кіль).

Про актуальність проблеми вивчення історії математики у вищих закладах освіти в той час свідчить те, що питання викладання цієї дисципліни починають широко обговорюватися на міжнародних конгресах з історії наук [235], [376], [378], [468]. Звіти про роботу цих конгресів показують, що викладання історії науки взагалі та історії математики зокрема в різних країнах і в різних університетах організовувалося на різних засадах: запроваджувалися курси історії науки і техніки; вивчався курс історії науки та курс історії окремої наукової галузі (за фахом); читалися загальні курси історії математики або цикли лекцій, в яких висвітлювалося життя і діяльність визначних математиків; розглядалися окремі математичні школи та їх здобутки; аналізувався розвиток математики в певні історичні періоди тощо.

Наприкінці 20-х років XX століття О. Ю. Шмідт прочитав у Московському університеті цикл лекцій під назвою "Історія і методологія математики та природничих наук". Курс цей складався з 16 лекцій і охоплював період від найдавніших часів до середини XIX століття. Дві останні лекції виходили за межі хронологічного викладу: 15-та лекція мала методологічний зміст, а 16-та присвячувалася теорії відносності [104], [504].

Питання про введення історії математики в навчальні плани учительських інститутів в Росії обговорювалося на I Всеросійському з'їзді викладачів математики в 1911 році. Але довгий час в учительських і педагогічних інститутах курс історії математики читався факультативно. В СРСР лише в 50-х роках XX ст. цей курс було включено до навчальних планів педагогічних університетів, але на досить короткий час (навчальними планами 1963-го, а

потім і 1970–го курс історії математики віднесено до факультативних).

В цей час було надруковано нові програми для університетів і педагогічних інститутів. Програма з історії математики А. П. Юшкевича і С. А. Яновської для фізико-математичних і механіко-математичних факультетів державних університетів (1949) містила такі розділи:

– завдання курсу;
– вступ;
– історія математики в давнині;
– історія математики в середні віки;
– математика нового часу;
– математика в радянський період.

Розкриваючи завдання курсу автори наголошували: "На відміну від курсів історії математики, що читалися в минулі роки, курс має бути доведений до сучасності і містити висвітлення історії розвитку радянської математики" [399].

Для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів І. К. Андронов, М. Я. Виготський, І. Я. Депман та ін. розробили програму з історії елементарної математики, в якій передбачалося вивчення таких тем:

1. Вступ (Значення історії математики для вчителя математики).
2. Розвиток елементарної арифметики.
3. Розвиток елементарної алгебри.
4. Розвиток елементарної геометрії.
5. Нарис розвитку тригонометрії.
6. Виникнення і перші етапи розвитку математики змінних величин.

У пояснювальній записці до програми відмічалося: "Курс історії елементарної математики має на меті дати майбутнім учителям історичні знання, необхідні їм для правильного розв'язування методичних і методологічних питань, які виникають в процесі викладання математики" [395].

І все ж майже 20 років історія математики в педагогічних інститутах і університетах СРСР вивчалася факультативно, або не вивчалася зовсім. Такий стан підготовки фахівців з математики не задовольняв провідних викладачів-математиків. З цього приводу було багато дискусій на конференціях і в педагогічній пресі, в яких наголошувалося, що виключення обов'язкового курсу історії математики наносить значну шкоду історико-математичній і методико-математичній підготовці молодих спеціалістів [339].

З 1986/1987 навчального року історія математики стає обов'язковою дисципліною як в університетах так і в педагогічних інститутах СРСР. В цей час створюються і обговорюються кілька проектів програми з історії математики для педагогічних інститутів.

Програма К. О. Рибнікова [402] призначалася вчителям шкіл, студентам і викладачам педагогічних навчальних закладів. В її пояснювальній записці відмічалось, що "деякі розділи програми можуть бути включені до планів роботи інститутів підвищення кваліфікації вчителів, регіональних конференцій, методологічних семінарів та інших навчально-педагогічних заходів, а також використовуватись з метою самоосвіти". Структура програми досить гнучка і складалася з трьох частин різного рівня і призначення:

1. Про розвиток початкових математичних уявлень та елементарних розділів математики (як формувалися початкові математичні уявлення, якими шляхами відбувалося формування математичної науки, геометрія: наука і навчальна дисципліна, тригонометрія, арифметика – практична і теоретична, початок історичного шляху алгебри; математичний аналіз: початковий період його історії).

2. Формування класичних основ сучасної математики (алгебра: історія розвитку її основ; історичний розвиток основ геометрії, із історії основ математичного аналізу; нариси історії математики нашої Батьківщини).

3. Елементи методології математики.

Програма з історії математики авторського колективу на чолі з Б. В. Гнєденком [398] розрахована на 16 лекцій і 4 семінарських заняття. Значну її частину автори присвятили розділам близьким до шкільних. Так, з 16 лекцій 9 присвячено історії розвитку математики сталих величин, 6 – математиці змінних величин і одна – вітчизняній математиці. У пояснювальній записці до програми визначається місце і значення історичного матеріалу в підготовці майбутнього вчителя математики, подаються конкретні рекомендації щодо організаційних форм і методів навчання, вказується на доцільність розширення історико-математичної та методологічної підготовки студентів за рахунок додаткових факультативних занять.

1.2.2. На рубежі XX–XXI ст. відбувається реформування освіти взагалі і математичної зокрема, яке визначається світовими суспільними процесами, культурним і науковим розвитком людства. На зміну освітній парадигмі просвітительства приходить парадигма культу-

ротворчості і культуроосвіченості. Основними тенденціями оновлення педагогічного процесу стають гуманізація і гуманітаризація. Все це з новою силою підносить актуальність використання елементів історії у вивчанні математики, а також впровадження історії математики, як необхідної складової підготовки майбутнього вчителя-математика. Таким чином, на межі третього тисячоліття важливою частиною досліджень у галузі математичної освіти стає проблема використання історії науки у навчанні математики та визначення її ролі у підвищенні якості математичної освіти на всіх рівнях освітньої системи. Інтерес до цієї проблеми спостерігається з боку математиків, істориків математики та педагогів усіх країн.

Як підтвердження цьому наведемо перелік завдань, сформульованих Міжнародною комісією математики (ICMI), для всебічного вивчення, висвітлення і подальшого обговорення на Міжнародному конгресі математичної освіти (ICME) в Японії в 2000 році.

– Діти в початковій школі і студенти в університеті мають різні потреби і можливості щодо вивчення історії математики. Як освітній рівень слухачів визначає місце, шляхи і значення використання історії математики в навчальному процесі?

– Які питання з історії математики слід включати у навчальні плани і висвітлювати, щоб це було доцільно для заданої аудиторії слухачів?

– Якими є функції курсу історії математики як складової частини підготовки вчителів. Які розділи історії математики слід включати в систему навчання майбутніх учителів?

– Які особливості включення історичного матеріалу до робочих програм і використання у навчанні з різних математичних дисциплін (алгебра, геометрія, математичний аналіз тощо)?

– Яким є місцевий контекст навчання історії математики? Наскільки позначається практика навчання математики в різних частинах світу чи культурних групах на попиті використання історії математики і вимогах до її змісту?

– Яка роль історії математики у підтримці спеціальних освітніх потреб студентів різного рівня підготовки?

– Якими є мета вивчення історії математики і шляхи її використання у навчальному процесі?

– Якими мають бути форми і засоби організації навчання історії мате-

матики? Як організувати діагностику знань з історії математики? Які практичні "керівництва" і підтримки потрібні викладачам?

– Яка роль історії математики в дослідженні проблеми математичної освіти?

– Національні особливості висвітлення історії математики в навчальних планах.

Підтвердженням активного впровадження історії математики в практику навчання можуть слугувати "Описи курсів історії математики" в університетах різних країн, які широко представлені в Інтернеті. Проаналізуємо сучасний стан викладання історії математики на основі цих Описів, літературних джерел та спілкувань з окремими викладачами.

В державах далекого зарубіжжя університетський курс "Історія математики" пропонується для вивчення студентам не лише математичних спеціальностей. Його вивчають як окрему навчальну дисципліну, так і разом з історією науки, історією культури, історією філософії чи методологією. Зокрема, вищі навчальні заклади Великобританії пропонують такі курси: історія математики; розвиток математики; історія і розвиток математики; математика: історія і культура; математика і суспільство; суспільні та історичні аспекти математики; від Евкліда до Мандельброта; грецька геометрія та її детальний аналіз тощо.

Обсяг годин, завдання курсу, його структура і форми контролю у різних навчальних закладах різні. Аналіз "Описів" показує, що на вивчення курсу відводиться від 150 до 350 год., з яких аудиторні заняття складають 10–15 %.

Наведемо для прикладу короткі характеристики курсів історії математики, що пропонуються в університетах Великобританії [523], [522].

1. University of Leicester. Department of Mathematics and Computer Science.

Лекції – 18 год., самостійне вивчення –130 год.

Оцінювання: аудиторні заняття – 10%, есе – 30%, проект – 60%.

Пояснення передумов. Не існує модулів, які спеціально призначені для формування передумов вивчення історії математики. Але для вивчення цього

курсу студенти повинні мати добру загальну математичну підготовку – скажімо, два роки навчання на ступінь бакалавра.

Опис курсу. Математика – це людська діяльність, історія якої сягає у давнину на 5000 чи й більше років. У її розвиток зробили внесок багато різних культур, а сама вона суттєво вплинула на світ, який ми маємо зараз. Цей курс представляє студентам історію математики через вивчення характерних історичних прикладів. Лекції проводяться у вигляді симпозіумів, під час яких студенти працюють разом у невеликих неформальних групах над спеціально відібраними викладачем текстами. Необхідні контексти пояснює викладач. Ці заняття спрямовані на те, щоб загалом зорієнтувати студентів на предмет і пояснити, як готувати письмову подачу результатів навчання. Проте основна частина часу студента все ж відводиться на пошуки тем для есе і проекту. Продовження роботи над есе і проектом відбувається під керівництвом викладача і з участю університетської бібліотеки. Хоча списком тем для проектів студенти забезпечуються, вони також можуть вибирати власну тему після обговорення її з керівником.

Мета курсу. Розкрити студенту культурний і гуманітарний діапазон математики і цим самим збільшити цінність отриманих раніше математичних знань. Передбачається формування навичок виконання наукових досліджень і письмових повідомлень, а також досягнення впевненості в читанні математичної літератури.

Завдання. Читати історичні математичні свідчення (першоджерела); розуміти, що минулі міркування щодо математики можуть суттєво відрізнятися від наших власних; осягнути внесок окремих культур в математику і сформувати широкий погляд на розвиток предмету; навчитись послуговуватися літературою для дослідження тем з історії математики; писати прозорі (зрозумілі), доступні повідомлення (звіти) про результати досліджень.

Навички, які передаються. Навички наукових досліджень, коли використовуються і ресурси бібліотеки, і електронні бази даних; читання і розуміння уривків з різних історичних джерел; написання повідомлень.

Рекомендований список програми читання. Великий і детальний список літератури забезпечується на курсі, але головний текст, який рекомендується для загального використання, – це C.B.Boyer & U.Merzbach, *A History of Mathematics*, Wiley.

Деталі оцінювання. Підсумкова оцінка цього модуля ґрунтується на внесках 10% від двох коротких лекційних занять, зроблених в перші 3–4 тижні; 30% – від есе (1600–2000 слів), створено протягом весняного семестру і

оціненого перед великодними канікулами; 60% – від письмового проекту (4000–6000 слів), який має подаватися завчасно.

2. University of Manchester. Department of Mathematics

Загальне описання. Чи справді математика – одвічний пошук істин? Чи мають різні культури і різні часи різні види математики?

Мета курсу – Дати студентам розуміння історії математики, а також розуміння математики як частини загальної культури.

Передумови вивчення: математична підготовка, яка включає деякі числення.

Зміст: вавилонська математика; грецька математика; Ренесанс: тригонометрія і перспектива; змішана математика: Галілео; Національне числення: Ньютон, Лейбніц; аналіз; математична фізика; наука суспільства: статистика; революційні зміни: неевклідові геометрії; стилі в математиці: Норберт Вінер і Джон фон Нейман; організація математики; висновки.

Методи навчання і викладання. Дві лекції щотижня плюс година на додаткове читання.

Оцінювання.

Діяльність	Проміжок часу	Вага (значення) в межах одиниці
Одне есе		50%
Екзамен у кінці семестру	2 години	50%

Матеріал для основного вивчення. Підручники.

I. Grattan-Guinness, The Rainbow of Mathematics, The Fontana History of the Mathematical Sciences, 1997.

2. Victor J. Katz, A History of Mathematics, Addison-Wesley, 1998.

3. Morris Kline, Mathematics in Western Culture, Allen and Unwin, 1954.

В Росії історія математики є обов'язковим предметом в класичних і педагогічних університетах. В класичних університетах викладається курс "Історія і методологія математики". Він є загальноматематичним курсом, тісно пов'язаним з вивченими раніше курсами математичного аналізу, алгебри, геометрії, і читається на завершальному етапі підготовки студентів.

В Іркутському державному університеті, наприклад, на вивчення курсу відводиться 30 аудиторних годин (лекцій). Він містить такі основні розділи:

"Предмет математики" (2год), "Число" (4 год.), "Алгебра" (6 год.), "Геометрія" (8 год.), "Аналіз" (10 год.). На самостійне опрацювання виноситься кілька питань з кожного розділу [328].

Для прикладу в таблиці 1 наведемо зміст розділу "Число".

Таблиця 1

Назва тем і розділів	*Усього (годин)*	*Аудит. занять (год.)*		*Самостійна робота*
		Л	*С*	
Число – Походження натуральних чисел і побудова сукупності кардинальних чисел. – Теорія відношень піфагорійців, відкриття несумірності, означення величини за Евдоксом. – Означення і різні моделі дійсних чисел.	4	4	–	– Походження від'ємних чисел. – Походження уявних комплексних чисел.

Підсумковий контроль передбачається у формі екзамену. Кожен екзаменаційний білет містить 2 питання і 7–10 задач.

Наприклад:

1. Поясніть з точки зору теорії Галуа, чому задачі на подвоєння куба і трисекцію кута не розв'язуються за допомогою циркуля і лінійки.

2. Вкажіть дискриптивне означення інтеграла у Лебега. До чого звів Лебег проблему інтегрування?

3. "Куча, її $\frac{1}{3}$, її $\frac{1}{8}$ складають 7. Визначіть величину кучі".

4. Для алгебраїчного рівняння $x^3-6x-6=0$ вкажіть його резольвенту і радикальний вираз для коренів, побудуйте групу Галуа і її композиційний ряд.

5. Проведіть елементарний вивід рівняння дотичної до кривої $y=x^n$, де n – натуральне.

6. Відновіть неправильне доведення методом "неподільних" теореми про те, що площа паралелограма дорівнює добутку його сторін.

7. Покажіть, що функція Діріхле не входить в клас B_1, але входить в клас B_2.

8. Використовуючи механічний прийом Архімеда, знайдіть центр ваги сектора круга.

9. У вказаній формалізації "числення диференціалів" Лейбніца знайти інтеграл від x^3 на відрізку [0, 2].

Всі питання і задачі, які виносяться на екзамен, містяться в літературі, що видається кожному студенту.

В педагогічних університетах вивчення курсу "Історія математики" передбачається державним навчальним стандартом. Цей курс (54 год.) входить до дисциплін предметної підготовки (федеральний компонент), а його мінімальний зміст визначається у такий спосіб:"Основні періоди розвитку математики. Значення різних цивілізацій (Стародавній Єгипет, Римська імперія, Греція, Індія і Китай, епоха Відродження та ін.) в розвитку математичної науки. Біографії видатних вчених-математиків. Історичний розвиток кожної змістово-методичної лінії шкільного курсу математики". Єдиної програми курсу не існує, а кожен викладач складає її самостійно, враховуючи вимоги Державного навчального стандарту.

Детальний аналіз курсу "Історія математики", що читається в Московському міському державному університеті представлено в роботі [77]. Тут і на практиці автор виділяє такі теми для лекцій:

1) Вступ;

2) Формування початкових математичних уявлень;

3) Формування математичної науки;

4) З історії арифметики;

5) Початок формування алгебри;

6) У витоків тригонометрії;

7) З історії становлення математичного аналізу;

8) Геометрія: наука і навчальна дисципліна;

9) Період сучасної математики.

Курс "Історії та методології математики" вивчається в університетах Республіки Білорусь. Зокрема в Гродненському державному університеті на вивчення курсу "Історія і методологія математики" відводиться 30 лекційних годин [180]. Передбачається самостійне вивчення студентами окремих тем і написання рефератів.

Програма курсу складається з п'яти основних розділів:

- період зародження математичних знань;

- період елементарної математики;
- період математики змінних величин;
- початок періоду сучасної математики;
- математична освіта і наука в Гродненському університеті.

Аналіз цієї програми та порівняння її з іншими, побудованими на хронологічній основі, показують, що не традиційним є включення до періоду зародження математики питань про розвиток математики в середньовічних Китаї, Індії та стародавній Русі. Досить вузько висвітлюється період сучасної математики. В основному тут розглядаються питання, що стосуються: створення та інтерпретацій неевклідової геометрії; формування основ сучасної алгебри, проблеми загальної теорії алгебраїчних рівнянь, створення теорії груп; основні напрямки розвитку сучасної математики.

Як позитивне слід відмітити регіональну спрямованість програми. Передбачається ознайомити студентів з розвитком математики і математичної освіти в Білорусії. Детально також розглядаються основні етапи розвитку математичної освіти і науки в Гродненському університеті: створення педагогічного інституту і фізико-математичного факультету; формування перших математичних кафедр; математичне життя у Гродненському педагогічному інституті; математична освіта і дослідження з математики в Гродненському університеті; створення університету і математичного факультету; діяльність математичного факультету у вісімдесяті роки; математичний факультет в останнє десятиліття XX сторіччя.

1.2.3. В Україні систематичний курс "Історія математики" є однією зі складових підготовки вчителів математики. Його вивчають у всіх класичних та педагогічних університетах. У переважній більшості навчальних закладів за навчальним планом цей предмет входить до варіативної частини циклу професійно-орієнтованої підготовки спеціалістів (дисципліни, які встановлює університет) і його вивчають на останніх курсах. Це пов'язано з тим, що вивчення історії математики можливе лише після опанування студентами основних математичних дисциплін: алгебри, геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірності тощо. Пропедевтично окремі історико-математичні відомості студенти отримують на лекціях і практичних заняттях з елементарної математики, вищої математики, методики

викладання математики, фізики, інформатики тощо.

Структура і програма систематичного курсу історії математики визначається специфікою університету, майбутньою спеціальністю студентів, а також уподобаннями викладачів.

В класичних і педагогічних університетах студентам пропонується курс лекцій в обсязі 18–36 годин. Аналіз робочих програм показує, що виклад матеріалу будується в основному на хронологічній основі з розширенням окремих питань за рахунок історико-географічного і концептуально-логічного способів.

Для прикладу наведемо основні розділи лекційного курсу з історії математики в Кіровоградському педагогічному університеті (укладач програми З. Ю. Філер).

1. Періодизація історії розвитку математики (а також історія математики в системі підготовки вчителя математики).
2. Математика в стародавніх цивілізаціях.
3. Математика в стародавній Греції.
4. Арабська математика.
5. Епоха європейського Середньовіччя і Відродження.
6. Математика XVII століття.
7. Математика XVIII століття.
8. Деякі питання розвитку математики у XIX столітті.
9. Розвиток математики в Україні (середньовічна Київська держава, козацька доба, перші українські університети у XIX ст.).
10. Розвиток тригонометрії.
11. Сучасні математичні школи в Україні (Інститут математики (Київ), Інститут прикладної математики та механіки (Донецьк), Інститут математичної фізики (Львів)).

Характерною рисою всіх сучасних робочих програм з історії математики є висвітлення розвитку математики в Україні. В педагогічних університетах розглядаються також питання, пов'язані з місцем і значенням історії математики у фаховій підготовці та діяльності вчителя математики.

Семінарські заняття, як спеціальна форма організації навчальної діяльності студентів з вивчення історії математики, проводяться в педагогічних університетах. За навчальними планами на них відводиться від 10 до 52 годин. Діяльність студентів на таких заняттях визначається і спрямовується викладачем. У Кіровоградському педагогічному університеті, наприклад, на

заняттях-семінарах обговорюються реферати студентів з історії математики за темами, обраними за порадою викладача (той чи інший період розвитку математики чи її галузі, життя й творчість конкретно математика чи математичні дослідження якоїсь школи тощо).

В Сумському державному педагогічному університеті передбачається проведення семінарсько-практичних занять [337]. Їх зміст і структуру представлено у таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	Тема заняття	К-ть годин	Форма заняття	Діяльність студентів
1	Задачі стародавнього Єгипту	2	Практичне	Розв'язування стародавніх задач
2–3	Задачі стародавньої Греції. Три знамениті задачі давнини	4	Семінарсько-практичне	Доповіді студентів, розв'язування запропонованих задач (задачі на побудову, задачі на доведення)
4–5	Деякі проблеми сучасної математики	4	Семінарське	Доповіді студентів

Найбільша кількість годин на проведення семінарських занять з історії математики виділяється в Чернігівському державному педагогічному університеті. Це дає змогу присвятити окремі семінарські заняття висвітленню таких питань:

– елементи історизму на уроках алгебри;
– елементи історизму на уроках алгебри і початків аналізу;
– елементи історизму на уроках геометрії;
– історичні відомості на факультативних заняттях;
– використання елементів історизму в позакласній роботі.

Аналіз науково-методичної літератури та вивчення стану викладання історії математики в педагогічних і класичних університетах України та інших держав свідчить, що протягом останнього часу сформувалося кілька способів побудови курсу "Історія математики" як навчального предмету, а саме:

– історико-хронологічний (визначальним для нього є час, коли відбулась та чи інша подія, сформувались поняття, теорії та методи, виникли нові галузі, розширились межі застосувань тощо. Використовуючи цей спосіб простіше простежити історію розвитку матема-

тики в цілому, показати її взаємозв'язки з розвитком суспільства, культури та іншими науками);

– предметно-модульний (вивчається історія розвитку окремих галузей математики, наприклад: історія арифметики, історія алгебри, історія геометрії, історія математичного аналізу, або історія сучасних математичних теорій: нестандартний аналіз, теорія категорій, теорія нечітких множин, теорія катастроф);

– історико-географічний (навчальний матеріал структурується відповідно до розвитку математики в деяких народів: племена майя, ацтеки; на територіях окремих країн: Греція, Індія, Китай);

– концептуально-логічний (історія математики вивчається як історія ідей та методів: розширення поняття числа, функціональна залежність, інтегральне і диференціальне числення, аксіоматична побудова геометрії, неевклідові геометрії, групи підстановок);

– домінантний (детально розглядається та аналізується якась одна ідея чи метод: розв'язування алгебраїчних рівнянь, інфінітезимальні методи, аксіоматичний метод, обґрунтування математики);

– персоніфікований (історія математики вивчається через біографії визначних вчених та їх внесок у розвиток науки: Мухаммед ал-Хорезмі, Омар Хайям, Джироламо Кардано, Франсуа Вієт, …, Нільс Абель, Еваріст Галуа).

– комбінований.

Кожен із цих способів має свої недоліки і переваги, але за конкретних умов може стати оптимальним і найбільш поширеним. Історико-хронологічний та предметно-модульний способи частіше використовуються для побудови систематичних курсів з історії математики (особливо лекційних). Концептуально-логічний і домінантний методи найкраще використовувати на семінарських і на факультативних заняттях, організованих як доповнення до систематичного курсу. Історико-географічний та персоніфікований способи доцільно використовувати в побудові пропедевтичних курсів з історії математики. На нашу думку, в умовах невеликої кількості годин, які відводяться на вивчення систематичного курсу історії математики, найкращим є комплексний підхід, що базується на комбінованому способі побудо-

ви навчальної дисципліни. Наше бачення методичної системи вивчення історії математики в педагогічному університеті представлено в третьому розділі.

1.3. Історія математики як інтеграційна основа навчання предметів математичного циклу

1.3.1. Сучасна епоха розвитку цивілізації характеризується бурхливими інтеграційними процесами в науці, культурі і суспільстві. Ці процеси супроводжуються також виникненням нових наук, суміжних і комплексних галузей знань, розвитком нетрадиційних напрямів у культурі, утворенням різних суспільних і політичних об'єднань, а отже – диференціацією.

Інтеграція та диференціація докорінно змінюють зміст і структуру сучасного наукового знання, значення і можливості окремих наук, шляхи і пріоритети розвитку наукових теорій. Процеси інтеграції та диференціації, що відбуваються в науці, знаходять своє відображення в освіті та її компонентах, суттєво впливають на навчальні плани, програми та методичні підходи до вивчення наукових дисциплін у вищих закладах освіти. Все це вимагає детального аналізу інтеграції та диференціації в науці для відповідного обґрунтування і адекватного відображення їх у навчальному процесі вищої школи.

Диференціація – поділ, розчленування чого-небудь на окремі різнорідні елементи. *Інтеграція* – об'єднування чого-небудь у єдине ціле. В нашому дослідженні ці терміни вживатимуться саме у такому розумінні.

Диференціація в математиці – це "процес виникнення нових наукових теорій і дисциплін в результаті"подрібнення" колись єдиної науки і "заглиблення" в якийсь спеціальний її розділ.

Інтеграція в математиці – це "синтез і взаємопроникнення теорій, розділів науки, "стирання "різких граней між ними, побудова спільних теорій" [334, с. 34].

Процеси інтеграції та диференціації в математиці простежується

уже з античних часів і постійно супроводжували хід розвитку математичних знань. Про це свідчить створення математики як науки на основі розрізнених фактів та виділення в ній чотирьох складових, що поступово виокремилися в різні галузі науки. Вже у піфагорійській школі знали і розрізняли 4 "μαυημα (матема)": 1) вчення про число (арифметика), 2) вчення про фігури (геометрія), 3) вчення про пропорції в природі і мистецтві (гармонія), 4) вчення про форми світу (астрономія). Усі інші знання, зокрема фізику, географію, історію тодішні філософи не відносили до науки, бо вважали, що тільки "матема" має тверді логічні основи, здобуті вищою субстанцією – розумом.

Розвиток математики в Індії та арабському Халіфаті – приклади взаємодії інтеграції та диференціації наукових знань. В середньовічній Індії виокремлюється в самостійну галузь вчення про тригонометричні величини (гоніометрія). В "Трактаті про повний чотирибічник" (XIIIст.) Насіреддіна ат-Тусі тригонометрію вперше викладено як самостійний розділ математики. З роботою Мухаммеда ал-Хорезмі "Кітаб ал-джебр ал-мукабала" пов'язано виділення алгебри як науки про рівняння. В епоху Відродження всі ці знання потрапляють в Європу і стають основою для подальшого розвитку арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії.

У XVII столітті починається активне формування нових математичних дисциплін, що відбувається трьома шляхами: створення окремих дисциплін на основі нових теорій (математичний аналіз, теорія ймовірностей); відокремлення кількох дисциплін від уже існуючих і подальший їх самостійний розвиток (теорія диференціальних рівнянь, теорія рядів, теорія функцій); синтез знань кількох дисциплін (аналітична геометрія, диференціальна геометрія).

Прикладом інтеграційних процесів у науці, що призвели до створення нової галузі знань, може слугувати історія розвитку векторного числення. Принаймні три джерела створювали основу і надавали сил новому розділу математики – векторному численню. Це *геометричне* (числення відрізків), *механічне* (дослідження векторних величин), *алгебраїчне* (теорія кватерніонів). Детальніше передумови творення векторного числення в кожному зі згаданих напрямів розглянуто в на-

шій статті [61].

Методологічними передумовами інтеграції та диференціації в науці є принципи історизму, системності, єдності якості та кількості, діалектичного заперечення, розвитку, каузальності, об'єктивності, науковості, взаємозв'язку та взаємообумовленості явищ. Процеси інтеграції та диференціації об'єктивно пов'язані з матеріальною єдністю світу, неперервним логічним розвитком соціальних систем. Єдність світу як цілісної системи не виключає, а передбачає якісну багатоманітність явищ. Звідси випливають дві тенденції: прагнення відобразити єдину картину світу, подати його як єдине ціле (процес синтезу, інтеграція), друге – глибше і конкретніше пізнати закономірності та якісну різноманітність різних структурних систем (процес аналізу, диференціація).

Суб'єктивні фактори інтеграції та диференціації пов'язані з особливостями нервової системи і психічних властивостей людини, а також з її інтелектуальними можливостями. У кожної людини узагальнена картина про цілісність світу формується індивідуально і залежить від синтезу інтуїтивного і дискурсивного знання.

Механізми взаємодії інтеграції та диференціації, а також їх вплив на розвиток науки розкрито в роботах [349], [355], [356], [429].

На сучасному етапі проблема інтеграції та диференціації постає в науці й освіті у новому ракурсі і вимагає розв'язання на основі сучасних методологічних підходів. За останні 10–20 років робилися спроби встановити передумови інтеграції та диференціації на основі історичності в еволюційних теоріях, концепції структуралізму, голізму (холізму), синергетики. Детальний аналіз цих течій та їх положень, що стосуються обґрунтування інтеграції та диференціації, проведено в роботах [123], [271], [282], [312], [347].

Процеси інтеграції та диференціації, що відбуваються в науці, знаходять своє відображення в освіті та її компонентах і стають предметом дослідження філософів, педагогів, психологів і методистів. Загальні питання проблеми інтеграції та диференціації (сутність, форми, чинники, засоби, види, функції) висвітлювалися в роботах:

• українських вчених В. П. Андрущенка, П. Р. Атутова, С. У. Гончаренка, Р. С. Гуревича, О. С. Дубинчук, І. А. Зязюна, В. Р. Ільченко, І. М. Козловської, С. Ф. Клепка, В. Лутая, Ю. І. Мальованого, Н. Г. Ничкало, О. Я. Савченко, В. К. Сидоренка, Д. А. Тхоржевського, М. І. Шкіля, Т. С. Яценко;

• російських вчених А. С. Антонова, М. М. Берулави, В. Г. Буданова, А. Я. Данилюка, І. Я. Лернера, В. М. Максимової, М. А. Морозової, В. Г. Разумовського, М. Н. Скаткіна, Н. Ф. Тализіної;

Сучасні ґрунтовні теоретичні розробки проблеми інтеграції і диференціації та їх практичне впровадження у навчальний процес в основному стосуються загальноосвітньої і професійно-технічної школи. Результати теоретичних і практичних досліджень висвітлювалися в монографіях [86], [271], [282], підручниках і навчально-методичних посібниках [29], [213], [244], [345], на сторінках науково-методичних журналів і збірників [84], [155], [187], [188], [194], [241], [407], [427]. Для цих освітніх галузей характерними є дослідження, присвячені:

– різним аспектам міжпредметних зв'язків;

– умовам створення і функціювання інтегрованих курсів;

– видам інтеграції, інтегративним чинникам, особливостям здійснення інтеграції;

– видам диференціації, її місцю і значенню в навчальному процесі.

В сучасній філософії та дидактиці проблема інтеграції та диференціації в освіті досліджується на основі різних наукових теорій і методологічних підходів, а результати цих досліджень знаходять відображення в шкільній практиці. В той же час стосовно методики навчання у вищій школі, зокрема в педагогічних університетах, ця проблема має свою специфіку, а тому вимагає відповідного обґрунтування і шляхів розв'язання.

В науково-методичній літературі з проблем вищої школи висвітлюються такі питання: встановлення міжпредметних зв'язків між окремими навчальними дисциплінами; створення і впровадження в навчальний процес інтегративних курсів; інтеграція науки, вищої освіти і виробництва; формування у студентів наукової картини світу.

Слід зауважити, питання, присвячені процесам інтеграції у навчанні математики у вищій школі, зокрема у підготовці вчителів математики, розроблены ы висвытлены не достатньо.

1.3.2. З самого початку існування вищої школи для її організації характерними є процеси об'єднання і розмежування.

На початку XIX століття в Росії "Уставом навчальних закладів" (1804 р.) передбачалось 4 типи навчальних закладів: приходське училище, повітове училище, гімназії та університети. На той час єдиної і постійної системи підготовки вчителів ще не було. Вчителі математики для середньої школи готувалися в різних навчальних закладах: в університеті, педагогічному інституті, учительській семінарії, на педагогічних курсах. Тодішні гімназії, як новий тип середньої школи, ставили досить високі вимоги до учителів математики. Учительська семінарія, яка готувала вчителів з випускників духовної семінарії, з такими завданнями впоратися не могла. Саме тому з 1804 по 1858 роки підготовка вчителів математики покладалась тільки на університети і Петербурзький педінститут.

Математичні курси в цьому педагогічному інституті спочатку поділялися на чисту математику і змішану математику.

Чиста математика: арифметика, алгебра, геометрія, прямолінійна тригонометрія, сферична геометрія, вища геометрія.

Змішана математика: механіка, гідростатика, аерометрія, гідравліка, оптика, котоптрика, діоптрика, перспектива, астрономія, математична географія, гномоніка, хронологія, цивільна архітектура, артилерія, фортифікація.

Пізніше програми суттєво змінено – до них включалися нові теми, що відповідало розвитку математичної науки на той час.

Чиста математика: вступні читання, диференціальне числення, теорія чисел, вища алгебра, інтегрування функцій, інтегрування диференціальних рівнянь.

Прикладна математика: сферична тригонометрія, аналітична геометрія, застосування диференціального числення до теорії кривих, застосування інтегрування функцій до аналітичної геометрії, теорія пове-

рхонь, аналітична механіка, основи теорії ймовірностей, астрономія.

Як бачимо, характерними рисами навчальних планів того часу були: перевантаженість, прикладна спрямованість, багатопредметність і мала питома вага спеціальних дисциплін. Реформи, що відбувалися у початковій і середній школах, обминули вищі навчальні заклади, хоча характер підготовки вчителів у питаннях освіти завжди був тісно пов'язаний з політикою уряду.

Зміни в математичній підготовці вчителів стосувалися відмови від багатопредметності (за рахунок об'єднання кількох суміжних дисциплін і виключення з навчальних планів "непотрібних"), виділення спецкурсів, введення методики математики.

Тому в 1935 році на перших двох курсах, що були спільними для вчителів математики і фізики, вивчалися такі предмети: елементарна математика – 114 год.; аналітична геометрія – 176 год.; математичний аналіз – 495 год. Починаючи з третього курсу майбутні вчителі математики вивчали: спецкурс з елементарної математики – 164 год.; спецкурс з аналізу – 230 год.; вищу алгебру – 114 год.; вищу геометрію – 100 год.; теорію і практику обчислень – 88 год.; теорію ймовірностей – 51 год.; теоретичну механіку – 164 год.; астрономію – 94 год.; методику математики – 126 год.

Отже, на цьому етапі відбувалися яскраво виражені процеси інтеграції навчальних дисциплін, хоча вже з початку 40–х років можна спостерігати як з окремих предметів виділяється кілька дисциплін. Наприклад, зі спецкурсу по аналізу виокремились диференціальна геометрія та теорія функцій дійсної і комплексної змінної, а замість вищої геометрії студенти вивчали: основи геометрії, проективну і нарисну геометрію (з 1963 року основи геометрії, нарисна і проективна геометрії знову об'єднуються в один предмет).

Сучасні навчальні плани підготовки майбутніх учителів математики і програми математичних дисциплін визначаються нормативними документами: Положенням про освітньо-кваліфікаційні рівні (ступенева освіта), галузевими стандартами, освітньо-кваліфікаційними характеристиками. В той же час ці плани і програми відповідних навчальних дисциплін мають враховувати зміни, що

відбуваються в математичній науці.

Сучасна математика – це складна наукова система з певною ієрархією між складовими. В неї, як підсистеми, входять різні наукові дисципліни. Щоб підкреслити складність структури і взаємопов'язаність її елементів, Н. Бурбакі писав, що математика – це "... велике місто, передмістя якого не перестають розростатися дещо хаотично, у той час як центр періодично перебудовується, додержуючи щоразу все чіткішого плану і прагнучи до величнішого розташування, у той час як старі квартали з їх лабіринтом провулків зносяться для того, щоб прокласти до околиці вулиці, все прямiші, все ширші, все зручніші" [404, с. 12].

Головними (основними) складовими сучасної математики є такі дисципліни: теорія множин, математична логіка, арифметика, теорія чисел, алгебра, геометрія, топологія, математичний аналіз, теорія функцій, функціональний аналіз, теорія диференціальних і інтегральних рівнянь, комбінаторика, теорія алгоритмів, теорія ймовірностей, математична статистика та інші. Всі ці дисципліни якоюсь мірою перетинаються і кожна з них, у свою чергу, містить більш спеціалізовані математичні галузі. Так, скажімо в алгебру входять: теорія груп, гомологічна алгебра, теорія категорій та інші. Існують суміжні галузі, наприклад: алгебраїчна геометрія, алгебраїчна топологія, топологічна алгебра, топологічна геометрія.

В Mathematical Subject Classification зазначається 60 основних математичних галузей, що включають 467 розділів, які, в свою чергу, розпадаються на 2950 тем.

Математика, як і кожна інша наука, включає в себе: факти, накопичені в ході її розвитку; гіпотези, тобто основані на фактах наукові припущення, що підлягають в подальшому перевірці досвідом; результати узагальнення фактичного матеріалу, виражені в математичних теоріях і законах; методологію математики, тобто загальнотеоретичні тлумачення математичних законів і теорій, які характеризують загальний підхід до вивчення предмету математики.

В математиці існує власна диференціація, тобто розподіл на окремі галузі: алгебра, геометрія, математичний аналіз, теорія ймові-

рностей, математична статистика тощо. Ця диференціація знайшла своє відображення і в процесі навчання. Тут вона полягає у вивченні студентами окремих науково-пізнавальних комплексів – навчальних дисциплін, кожна з яких тією чи іншою мірою розкриває предмет, основні завдання, методи, засоби і шляхи розвитку відповідної галузі. Зокрема, нові навчальні плани підготовки учителів (для рівня бакалавр) включають 18 математичних дисциплін.

Вже на першому курсі студенти фізико-математичного факультету (спеціальність "математика") вивчають три математичні дисципліни: математичний аналіз, вищу алгебру і аналітичну геометрію. Такий розподіл математики на навчальні дисципліни виправдовує себе, бо дає можливість грунтовніше підійти до вивчення кожної з них, глибше зрозуміти їх теоретичні основи і застосування, сприяє одночасному просуванню студентів різними напрямами, швидкому накопиченню нових знань, умінь та навичок. Але вивчення математики у такий спосіб не сприяє створенню у студентів правильного погляду на математику в цілому, не дає зрозуміти її суть, побачити спільність предмету. Математика постає перед студентами у вигляді набору розрізнених теорій, які начебто зовсім не пов'язані між собою.

Сучасна система вищої педагогічної освіти орієнтується на нове соціальне замовлення – заміну освітньої парадигми просвітительства на парадигму культуротворчості і культуроосвіченості, а тому передбачає поруч з диференціацією активне впровадження інтеграційних процесів у навчання. Говорячи про інтеграцію не мається на увазі тільки поєднання в одне ціле різних математичних дисциплін і усунення їх специфіки. Процес інтеграції може протікати у різних формах. Одна з них – взаємозв'язок, взаємовплив, взаємопроникнення наукових ідей, принципів, понять, законів і теорій, що входять у зміст навчальних дисциплін з метою формування всебічної, комплексної системи наукових знань. Це традиційний підхід і він полягає у встановленні і використанні міжпредметних зв'язків.

Інший підхід полягає в тому, що за основу інтеграційного процесу вибирають певний комплекс знань і навичок, який дає можливість зрозуміти складну структуру математики, її внутрішні і зовнішні

зв'язки, шляхи і перспективи розвитку. Інтеграційною основою навчання математичних дисциплін, на нашу думку, може стати історія математики.

Робочі програми з різних курсів вищої математики містять окремі питання, пов'язані з історією відповідної галузі. Історичні відступи містяться також у деяких підручниках і навчальних посібниках для вищої школи. Але зменшення кількості годин, що відводиться на вивчення тієї чи іншої математичної дисципліни, не сприяє широкому використанню історичного матеріалу. В процесі вивчення конкретної математичної дисципліни кожен викладач подає поняття, ідеї чи методи з точки зору свого предмету. Нестача часу не сприяє висвітленню особливостей їх використання в інших предметах. Тим більше, не вистачає часу для ознайомлення студентів з історією виникнення і розвитку відповідних понять, ідей та методів. Хоча саме історія їх створення демонструє єдність математики, глибокий взаємозв'язок її розділів.

Курс історії математики, вивчаючи становлення самої математики, краще, ніж будь-яка інша математична дисципліна, сприяє формуванню у студентів цілісного погляду на математику, на єдність її ідей, методів і понять. Враховуючи той факт, що систематично історія математики вивчається на випускних курсах, пропонуємо на першому курсі запровадити факультативний курс "Математика як наука і навчальний предмет". Основною метою цього курсу є формування у студентів цілісного погляду на математику як складову загальнолюдської культури.

На факультативних заняттях студенти ознайомлюються з деякими питаннями методології математики, з основними періодами розвитку математики, її творцями, з історією формування математичної мови. Зміст курсу створює умови для встановлення зв'язків між окремими математичними дисциплінами, дає студентам можливість побачити перспективи у навчанні математики, допомагає глибше зрозуміти деякі математичні поняття, сприяє підвищенню інтересу до вивчення математики.

1.3.3. Модель інтеграції навчання предметів математичного циклу на основі історії математики подано у вигляді схеми 1.

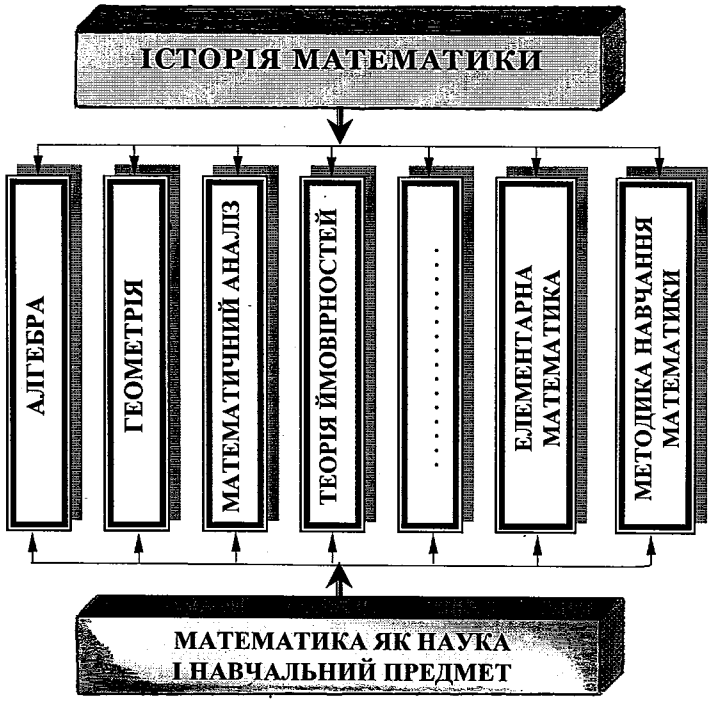


Схема 1

Шкільна математична підготовка першокурсників надає можливість розглянути окремі питання історії елементарної математики, що, в свою чергу, викликає інтерес у студентів і створює проблемні ситуації, які знаходять своє розв'язання в курсах вищої математики. Особливої уваги для висвітлення на факультативному курсі потребують такі питання з історії математики, які пізніше розглядатимуться відразу в кількох навчальних дисциплінах. Це стосується, наприклад, постановки та дослідження стародавніми греками знаменитих задач: про подвоєння куба, трисекцію кута і квадратуру круга.

Організувати вивчення цієї проблеми можна у такий спосіб. На лекції викладач повідомляє першокурсникам три визначні задачі давнини:

1. Користуючись тільки лінійкою і циркулем побудувати куб, об'єм якого більший об'єму заданого куба.

2. З допомогою лише лінійки і циркуля поділити даний довільний кут на три рівні частини.

3. Побудувати, користуючись тільки циркулем і лінійкою, квадрат, рівновеликий даному кругу.

Після такого переліку викладач дає коротку історичну довідку, яка може бути такою. Багато вчених намагалися розв'язати ці задачі (Гіппократ Хіоський, Архіт Таренський, Гіпій Елідський, Діностpат, Платон, Архімед, Ератосфен Кіренський та ін.). Простота формулювання цих задач породжувала багато легенд та ілюзій щодо простоти розв'язання. Деякі вчені, не в силах розв'язати сформульовані задачі, змінювали вимоги їх або шукали інші засоби побудови. Зокрема, для розв'язання задачі на подвоєння куба Платон використовував механічний спосіб, а Ератосфен Кіренський сконструював спеціальний прилад – мезолябій.

Задача про квадратуру круга – найдавніша з цих трьох задач. Їй близько чотирьох тисяч років. Раніше від греків цією задачею займалися вавилоняни та єгиптяни, а незалежно від греків – китайці та індійці. Задача про квадратуру круга була найпопулярнішою з усіх математичних задач. Розв'язати її намагалися багато відомих математиків давнини, зокрема Гіппократ Хіоський, якому вдалося деякі криволінійні фігури (гіппократові серпики) перетворити на рівновеликі їм многокутники. Однак перетворити круг на рівновеликий йому квадрат ні Гіппократові, ні комусь іншому не вдалося. Чому – про це стало відомо тільки після двох тисяч років безплідних пошуків.

Доцільно також запропонувати студентам розв'язати задачу про "луночки Гіппократа".

Корисним буде диференційоване домашнє завдання:

– Які легенди пов'язані з визначними задачами давнини?

– Які механічні пристрої використовували для розв'язування цих задач?

– Розв'яжіть алгебраїчно вказані задачі.

– Хто з математиків і коли строго довів нерозв'язність за допомогою циркуля і лінійки задач про подвоєння куба і трисекцію кута?

– Хто з математиків і коли строго довів нерозв'язність за допомогою циркуля і лінійки задачі про квадратуру круга?

Ці завдання цілком доступні для першокурсників, якщо дати їм відпові-

дну літературу. Наступну лекцію можна почати з обговорення заданих завдань, що сприятиме активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів і встановленню реальних зв'язків між елементарною математикою, алгеброю і геометрією. Щоб підкреслити це, можна зробити наступне зауваження:

Доведення того, що сформульовані вище задачі не можна розв'язати вказаними засобами, розглядатиметься в курсі алгебри і теорії чисел. Як саме мають задаватися відрізки, щоб їх можна було побудувати за допомогою циркуля і лінійки, стане зрозумілим на заняттях з конструктивної геометрії.

З історії відомо, що найважливіші математичні ідеї виникали в ті моменти, коли найповніше проявлявся зв'язок різних розділів математики. Вивчення цих зв'язків і проникнення у їх суть приводило до розширення предмета математики в цілому і окремих її розділів. Яскраве підтвердження цього – створення методу координат. Ідея зіставлення точок площини з відповідними числами дала потужний стимул для розвитку алгебри і геометрії. І все ж, головне значення методу координат полягає в тому, що він став основою для введення поняття "функції", яке, в свою чергу, створило міцне підґрунтя для формування математичного аналізу.

Висвітлення історії творення методу координат і його значення для подальшого розвитку математики сприятиме усвідомленню студентами єдності математичної науки, її понять і методів. Багатогранна діяльність творців методу координат – П. Ферма і Р. Декарта – яскравий приклад різноманітних зв'язків у математиці: між окремими галузями, між минулим і майбутнім, між інтуїцією і логікою тощо.

Підвищений інтерес викликає у студентів історія Великої теореми Ферма, що створює міцний ланцюжок, яким пов'язані математичні знання від "Арифметики" Діофанта до наших днів.

Внесок Р. Декарта у розвиток математики надзвичайно великий і вагомий. В основному його розглядають в систематичному курсі математики. Першокурсників же бажано ознайомити з Р. Декартом, як творцем математичної мови. Єдність мови усіх математичних дисциплін є ще одним підтвердженням цілісності математики. Математична мова формувалася й удосконалювалася протягом тисячоліть і набула такої довершеності, що використовується у багатьох інших науках і навіть у побуті. Жодній іншій мові не вдалося досяг-

ти такої інформаційної ємності та отримати таку відповідність між змістом і формою.

Систематичний курс історії математики вивчається на завершальному етапі вивчення математики. Його мета, крім іншого, систематизувати й узагальнити знання, отримані студентами в процесі вивчення інших математичних дисциплін. У такий спосіб здійснюється остаточна інтеграція математичних знань майбутніх учителів. Ілюстрацією цьому може слугувати семінарське заняття на тему "Історія алгебри". Для прикладу наведемо окремі його фрагменти [56, с. 40].

Точка зору на те, що таке алгебра, неодноразово змінювалася. В різні часи під алгеброю розуміли різні вчення: про рівняння, про буквені обчислення, про алгебраїчні структури. В період зародження математики до алгебраїчних методів відносили визначення невідомих величин за даними співвідношеннями між ними і відомими. Найдавнішими джерелами, які свідчать про зародження алгебри в давні часи, є вавилонські глиняні дощечки. Характерною ознакою алгебри вавилонян є виділення і використання "канонічних" чи "стандартних" рівнянь і систем рівнянь, які розв'язувалися за готовими формулами.

Продовженням вавилонської алгебри стала геометрична алгебра греків. Грецькі математики будували алгебру на геометричній основі, оперуючи відрізками, площами, об'ємами, а не числами.

Від геометричної алгебри відрізняються алгебраїчні методи Діофанта. Його головна праця – "Арифметика" – займає особливе місце в розвитку математики. В ній Діофант не звертався до геометричних побудов, а формулював правила алгебраїчних операцій з степенями невідомого, вводив спеціальні назви і скорочення для невідомого і його степенів, застосовував інші символічні позначення.

Саме слово "алгебра" – арабського походження. У математику воно ввійшло завдяки праці "Кітаб ал-джебр і ал-мукабала" ("Книга про відновлення і протиставлення") середньоазіатського математика Мухаммеда бен-Муси ал-Хорезмі (IX ст.), в якій алгебра вперше розглядається як самостійна галузь математики. Згодом цю працю під назвою "Algebr" перекладено латинською мовою. Звідси і походить назва науки – "алгебра". У цьому творі розглядаються рівняння 1-го і 2-го степенів та нові для того часу загальні правила їх розв'язування.

У XVIII ст. в алгебрі основні зусилля математиків були спрямовані на

розв'язання трьох проблем: 1) доведення основної теореми алгебри; 2) розв'язування в радикалах алгебраїчних рівнянь степеня вищого за четвертий; 3) розв'язування систем алгебраїчних рівнянь з кількома невідомими.

Новий етап у підході до предмету алгебри починається з другої половини XIX ст. Алгебра з цього часу розвивається новими напрямами (теорія груп, теорія кілець і полів, алгебраїчні криві, лінійна алгебра і т. д.), дослідження все більше групуються навколо проблеми, яку сьогодні вважають основною в алгебрі, – вивчення алгебраїчних структур.

Сучасна точка зору на алгебру як на загальну теорію алгебраїчних операцій сформувалась на початку XX століття під впливом робіт Д. Гільберта, Е. Штейнца, Е. Артіна, Е. Нетер і остаточно ствердилась з виходом у 1930 р. монографії Б. Ван дер Вардена "Сучасна алгебра".

Таким чином, корисно розрізняти кілька різних понять: елементарна (шкільна) алгебра; вища алгебра – вчення про алгебраїчні рівняння і системи рівнянь; сучасна алгебра – вчення про алгебраїчні структури; алгебра як одна з математичних структур.

Вивчення основних етапів формування і розвитку алгебри, встановлення змістових, ідейних і часових зв'язків між її складовими, висвітлення ролі окремих математиків у зміні її пріоритетів і напрямків розвитку створює у студентів цілісне уявлення про алгебру як науку та її складові. Історія формування і розвитку алгебри як науки допоможе студентам краще зрозуміти, як змінювався предмет алгебри, і встановити зв'язки між алгеброю, геометрією, математичним аналізом і теорією чисел.

В окремих математичних курсах навчання організовується на високому рівні логічної строгості, що позбавляє можливості ознайомити студентів з подальшим розвитком ідеї, яка вивчається, з новими поняттями чи методами, породженими вивченим поняттям. Деталізація викладу навчального матеріалу, брак часу не завжди дає можливість студентам побачити процес в цілому, утруднює розуміння структурних зв'язків між поняттями і теоріями. У викладачів не вистачає часу на розкриття особливостей розвитку сучасної математики, перспектив її розвитку. На усунення цих недоліків спрямований курс історії математики.

Розглядаючи період сучасної математики, студенти дізнаються

про швидкі темпи розвитку математики в XX столітті та її основні складові. Їм, зокрема, повідомляється, що на математичному конгресі у Парижі (1900 р.) працювало 6 секцій (арифметики і алгебри, аналізу, геометрії, механіки і математичної фізики, історії і бібліографії, викладання і методології), а на сучасних конгресах проходить робота у 19 секціях. Крім того, в другій половині XX століття відбулась також і зміна пріоритетів. Якщо на початку століття провідним напрямом в математиці був аналіз з усіма його розгалуженнями, то в другій половині століття перевага надається топології, алгебрі, алгебраїчній геометрії, теорії груп Лі. Про це свідчить і список філдсовських медалістів: із усіх медалей, присуджених в післявоєнний період лише три присуджено за досягнення в галузі аналізу, а дев'ять – за топологічні дослідження.

В процесі вивчення історії математики є можливість розглянути проблеми, які не знайшли місця в інших дисциплінах, але відіграють велике значення для з'ясування суті самої математики. Курс історії математики озброює студентів знаннями важливих методологічних і філософських проблем математики, створює наукову базу для викладання математики в різних закладах освіти. В курсі історії математики розглядаються питання, пов'язані з вивченням засобами математики навколишнього світу, створенням адекватних математичних моделей для характеристики різного роду явищ і процесів, а тому цей курс є дієвим засобом демонстрації прикладних аспектів математики і формування наукового світогляду студентів.

Історія математики виступає також інтеграційною основою навчальної діяльності студентів з різних дисциплін. Вивчення студентами історії математики вимагає і відбувається за умови добре організованої самостійної діяльності, опрацювання відповідної популярної, навчальної і наукової літератури. Вивчення історичного матеріалу вже у рамках факультативного курсу "Математика як наука і навчальний предмет" сприяє формуванню в першокурсників таких елементів історико-математичної культури, як уміння працювати з різними джерелами інформації, структурувати історичну та математичну інформацію, оцінювати значення різного роду інформації для по-

дальшої навчальної діяльності. Якщо з першого курсу навчати студентів, як самостійно працювати з літературою, як складати короткі історичні повідомлення і робити реферати за визначеними темами, то ці знання й уміння стануть основою для написання курсових і кваліфікаційних робіт з математики і методики математики.

Інтеграційні функції виконує історія математики і у підготовці студентів до майбутньої педагогічної діяльності. Висвітлення на засіданнях гуртка з методики математики особливостей використання історизмів у процесі навчання математики в школі підготує студентів до складання поурочних планів, організації позакласної роботи з математики, визначення тем наукових учнівських робіт в рамках Малої академії наук. Інтеграція знань з математики, історії математики і методики математики та їх використання вчителями в процесі викладання математики в школі чи іншому освітньому закладі сприятиме підвищенню наукового, розвиваючого і виховного рівня математичної освіти.

1.4. Психолого-педагогічні основи підготовки майбутніх учителів математики

1.4.1. Формування майбутнього вчителя певної дисципліни відбувається в педагогічному університеті у процесі спеціального навчання студентів. Студент як людина певного віку і як особистість у психології характеризується з трьох сторін: біологічної, соціальної і власне психологічної.

Біологічна сторона (зовнішній вигляд, фізична сила, інстинкти і рефлекси, тип вищої нервової діяльності та ін.) визначається спадковістю і вродженими задатками і може змінюватися під впливом умов життєдіяльності.

У соціальній характеристиці втілюються національність, ментальність, суспільні стосунки та інші якості, які породжуються належністю студентів до певної соціальної групи.

В основі психологічної характеристики студента лежить єдність

психологічних процесів, станів і властивостей особистості. Основне в психологічній стороні – психічні властивості (спрямованість, темперамент, характер, здібності). Від них залежить протікання психічних процесів, виникнення і прояв психічних станів.

У дослідженнях, присвячених аналізу і характеристиці особистості студента, підкреслюються суперечливість внутрішнього світу студентів, складність формування власної індивідуальності, протиріччя між можливостями і їх реалізацією тощо. Аналізуючи особу студента як суб'єкта навчальної діяльності, Л. Д. Столяренко [53] відмічає, що студентство характеризується найвищою соціальною активністю і гармонічним поєднанням інтелектуальної і соціальної зрілості. Врахування цієї особливості студентства має лежати в основі ставлення викладача до кожного студента як партнера педагогічного спілкування, цікавої для викладача особистості. Студенту властива специфічна спрямованість пізнавальної і комунікативної активності на розв'язання конкретних професійно-спрямованих завдань. А.А. Вербицький [136] наголошує, що основним напрямом навчання студентів є контекстний – цілеспрямоване моделювання майбутньої професійної діяльності у процесі навчання.

Педагогічна діяльність – це особливий вид соціальної діяльності, що передбачає передавання накопичених людством культури і досвіду від однієї особи до іншої, створення умов для їх особистісного розвитку і підготовки до виконання певних соціальних ролей у суспільстві. Таку діяльність, з різною мірою компетентності та відповідальності, здійснюють батьки, однолітки чи інші особи, засоби масової інформації, громадські установи тощо.

Професійно-педагогічна діяльність – це педагогічна діяльність, яка здійснюється учителями, вихователями, педагогами та психологами в спеціально організованих освітніх установах [341, с. 130].

Проблема професійно-педагогічної підготовки вчителя взагалі і математики, зокрема, розглядалася в роботах провідних вітчизняних і зарубіжних психологів, педагогів і методистів. Значний внесок до розв'язання цієї проблеми зробили: А. М. Алексюк, Г. О. Атанов, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, Б. В. Гнєденко, О. С. Дубинчук, М. І. Жалдак,

П. Я. Касярум, Л. Д. Кудрявцев, Г. Л. Луканкін, М. В. Метельський, А. Г. Мордкович, І. О. Новик, А. М. Потоцький, В. А. Сластьонін, З. І. Слєпкань, А. А. Столяр, Р. С. Черкасов, М. І. Шкіль та інші.

Детальний огляд психолого-педагогічних досліджень з проблеми фахової підготовки вчителя математики зроблено в монографії Г. О. Михаліна "Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу". В цій роботі, зокрема, відмічається, що загальною метою професійної підготовки вчителя математики є формування його професійної культури, основними компонентами якої є математична, методична, педагогічна, психологічна, інформаційна, мовна, естетична та інші культури. Під професійною культурою вчителя математики автор розуміє "сукупність його практичних, матеріальних і духовних надбань, що визначають якість його професійної діяльності" [340, с. 14].

Професійно-педагогічна діяльність має складну структуру і є предметом вивчення психології та педагогіки. Психологічна наука розглядає її як багаторівневу систему, компонентами якої є ціль, мотиви, дії і результат. У диференціальній психології розглядається придатність людини до певної діяльності, яка інтерпретується з двох протилежних позицій: 1) як прихована в людині особливість, яку можна розкрити, застосовуючи адекватні методики в будь-який момент і за будь-яких умов; 2) як властивість людини, що формується в процесі виконання діяльності, під її безпосереднім впливом.

У прикладній психології дотримуються погляду, згідно з яким професійна придатність – це складне багатокомпонентне (системне) явище, яке утворюється і виявляється в діяльності. Її складовими є: 1) професійні знання, уміння, навички; 2) психофізіологічний потенціал; 3) професійна мотивація; 4) задоволеність (незадоволеність) працею [406, с. 438].

В акмеології (спеціальний розділ вікової психології, або наука про період розквіту всіх життєвих сил людини) професіоналізм розглядається як система, що складається з двох взаємопов'язаних підсистем – професіоналізму особистості та професіоналізму діяльності

і відповідно до цього будують модель професіонала. Модель професіонала включає такі компоненти:

– властивості людини як цілого (відношення до зовнішнього світу, спрямування, особливості прояву креативності, емоційність, інтелектуальні й операційні риси індивідуальності, професійні очікування, уявлення про своє місце в професійній спільноті);

– праксис професіонала (специфічні риси, моторика, вміння, навички, дії);

– гнозис професіонала (специфічні риси, сприймання інформації, її опрацювання і прийняття рішень, гностичні вміння, навики і дії);

– інформованість, знання, досвід і культура професіонала (специфічні риси, орієнтація в галузі науки і теоретичні знання, професійні знання з предметної галузі);

– психодинаміка (інтенсивність, швидкість зміни, навантаження і труднощі в даній професійній галузі).

Узагальнюючи результати психологічних досліджень особливостей професіоналізму, його проявів та критеріїв, Н. І. Пов'якель в монографії [379, с. 25] розробила систему психологічних показників професіоналізму (схема 2).

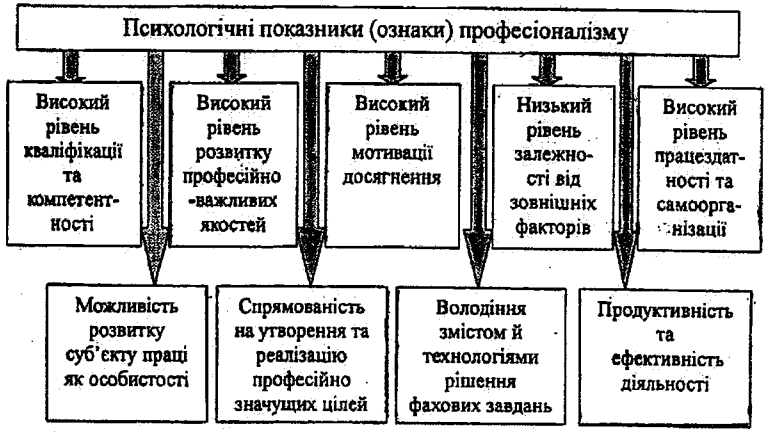


Схема. 2. (за Н. І. Пов'якель)

У сучасній педагогіці професійно-педагогічна діяльність розкривається через виділення її компонентів, а професіоналізм учителя описується на основі аналізу функціональної структури його професійної діяльності. Виділяють, зокрема, такі взаємопов'язані види діяльності вчителя: а) діагностичну; б) організаційно-прогностичну; в) конструктивно-проектувальну; г) організаторську; д) інформаційно-пояснювальну; є) комунікативно-стимуляційну; ж) аналітико-оцінну; з) дослідницько-творчу [341, с. 132].

Система освіти в педагогічному університеті не може в повному обсязі підготувати вчителя-професіонала, але вона має забезпечити кожного студента необхідними передумовами, які О. Г. Мордкович назвав "основами професійної майстерності вчителя математики" [346].

Формування професійної майстерності майбутнього вчителя математики починається і відбувається протягом усіх п'яти років навчання в університеті. На нього впливає весь комплекс навчальних дисциплін, передбачених навчальними планами відповідної спеціальності. В сучасних умовах заміни освітньої парадигми просвітительства на парадигму культуротворчості і культуроосвіченості підготовка майбутнього вчителя взагалі і математики зокрема, підпорядковується стратегічній меті освіти – всебічному розвитку людини.

Освіта XXI століття – це освіта для людини. Її стрижень – розвиваюча, культуротворча домінанта, виховання відповідальної особистості, яка здатна до самоосвіти і саморозвитку, вміє використовувати набуті знання і вміння для творчого розв'язування проблем, критично мислити, опрацьовувати різноманітну інформацію, прагне змінити на краще своє життя і життя своєї країни, здатна до продуктивного діалогу з природою і соціумом [108, с. 4].

Такий підхід до розуміння освіти породжує новий погляд і тлумачення поняття навчання. На нашу думку, *навчання у вищій школі* – це цілісний двосторонній процес педагогічної діяльності викладача та навчально-пізнавальної діяльності студентів, спрямований на розвиток особистості як самоцінності і мети суспільного розвитку, в результаті якого відбувається засвоєння суб'єктами навчання знань, навичок і умінь, які в цілому сприяють формуванню конкурентоспро-

можного на ринку праці фахівця.

Педагогічні основи навчання вивчаються у дидактиці. В ній навчання розглядається як складна цілісна система, найважливішими компонентами якої є: цільовий, стимулюючо-мотиваційний, змістовий, операційно-діяльнісний, контрольно-регулятивний і оцінювально-результативний. Головна проблема дидактики полягає у встановленні найсприятливішої взаємодії між основними компонентами навчання [223, с. 97].

Щоб мати чітке уявлення про внутрішню структуру і організацію навчання, Н. Є. Мойсеюк подає його у вигляді схеми, на якій відображається взаємодія педагога і учнів [341, с. 191]. Аналогічно можна побудувати структуру навчального процесу у вищій школі (схема 3).

Навчаюча діяльність викладача		**Навчально-пізнавальна діяльність (НПД) студентів**
Визначення викладачем і повідомлення в аудиторії цілей і завдань НПД студентів	↔	Усвідомлення студентами цілей і завдань НПД
Формування у студентів потреб у знаннях і мотивів НПД	↔	Розвиток, поглиблення потреб і мотивів НПД
Визначення змісту нового матеріалу та включення його до системи раніше засвоєних знань	↔	Визначення змісту нового матеріалу та включення його до системи раніше засвоєних знань
Використання доцільних форм, методів і засобів для формування знань і умінь студентів, підвищення їх загального розвитку і підготовки до фахової діяльності	↔	Сприймання, осмислення і запам'ятовування нового матеріалу. Застосування отриманих знань на практиці. Розвиток загальної і професійної культури
Контроль і регулювання ходу НПД студентів	↔	Самоконтроль і внесення корективів у власну НПД
Оцінка результатів НПД студентів	↔	Самооцінка результатів НПД

Схема 3.

Процес навчання є безперервним. На схемі 3 показано один із циклів взаємодії викладача і студента. Необхідною умовою ефективності навчання, що випливає з важливого закону дидактики – активності студентів у навчанні, стає активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів на кожному з етапів навчання: визначення цілей і завдань, формування потребнісно-мотиваційної сфери, усвідомлення і засвоєння змісту, контролю і оцінювання тощо.

У психології виховання і навчання вважають формою психічного розвитку людини. Виховна і навчальна діяльність за своєю суттю мають скеровувати, спрямовувати, організовувати індивідуальне становлення людської особистості, формувати її риси та якості згідно з вимогами суспільства. Сучасна психологічна наука розглядає особистість як складну систему, в якій диференціюються та інтегруються психічні властивості, що розвиваються в індивіді під впливом соціальних факторів в умовах здійснення ним діяльності та спілкування з іншими людьми. Здійснивши аналіз основних наукових напрямів формування базових засад побудови цілісної структури особистості, В. В. Рибалка [406] розробив модель системної психологічної структури особистості. Схематично цю модель подають у вигляді трьох ортогональних базових вимірів (схема 4).

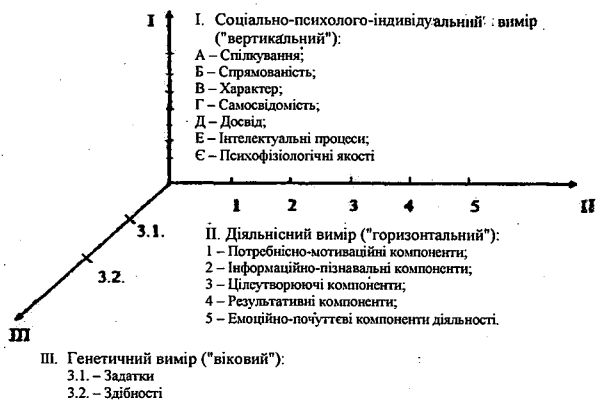


Схема 4 (за В. В. Рибалком)

Модель системної психологічної структури особистості:

I – соціально-психолого-індивідуальний вимір ("вертикальний"): спілкування, спрямованість, характер, самосвідомість, досвід, інтелектуальні процеси, психофізіологічні якості;

II – діяльнісний вимір ("горизонтальний"): потребісно-мотиваційні компоненти, інформаційно-пізнавальні компоненти, цілеутворюючі компоненти, результативні компоненти, емоційно-почуттєві компоненти діяльності;

III – генетичний вимір ("віковий"): задатки, здібності.

Розвиток особистості у вертикальному та горизонтальному вимірах – це єдиний процес. Будь-яка психічна функція горизонтального ряду залишає свої сліди у вертикальному ряді нашарувань, диспозицій і навпаки. За допомогою вікового виміру характеризується рівень розвитку властивостей особистості, її задатків і здібностей на певному етапі становлення індивіда як особистості [406, с. 118].

У цьому контексті психологічні основи навчання розкриваються через аналіз і синтез системної психологічної структури особистості. Як зазначає С. Д. Максименко, "структура особистості тісно пов'язана з процесом її становлення: структура є водночас результатом становлення, його умовою і фактором подальшого розвитку особистості" [325, с. 3].

Застосовуючи принцип "накладання", доходимо висновку, що **психолого-педагогічні основи навчання** визначаються положеннями про:

– вікові особливості (задатки і здібності) суб'єкта навчання;

– компоненти діяльності суб'єкта навчання;

– соціально-психолого-індивідуальні особливості суб'єкта навчання;

– зміст і процесуальну сторону навчання.

Розглянемо, як вікові особливості студентів відображаються на їх соціально-психолого-індивідуальних особливостях і разом впливають на навчання студентів математики та підготовку їх до майбутньої професійно-педагогічної діяльності.

1.4.2. Вікові особливості студентів, як і взагалі дорослих людей, розглядаються в акмеології. Час людського життя між юністю та старістю називають циклом дорослості. Вікові межі дорослості (від 17–18 років до 55–60 років) визначаються комплексом соціальних та біологічних причин і залежать від конкретних соціально-економічних умов індивідуального розвитку людини [413, с. 193]. В рамках циклу дорослості виділяють два періоди життя – ранню і середню дорослість. Перша фаза ранньої дорослості триває приблизно до 30 років життя і збігається з періодом молодості людини, частина якої може відбуватися у формі студентського життя.

Аналізуючи психічний розвиток людини в молодості, а саме під час освоєння майбутньої професії, О. П. Щотка зауважує: "Навчання студентів у вузах може мати форму професійної освіти або професійної підготовки. У першому випадку навчання спрямовується на розвиток особистості студентів, зокрема самостійності, комунікативних якостей, гуманістичних установок, аналітичних та інтелектуальних здібностей, сприяє культурному збагаченню та формуванню творчих ідей та задумів тощо. Другий напрямок спрямований перш за все на забезпечення студентів необхідними для роботи знаннями і практичними навичками, що в цілому сприяє підвищенню конкурентоспроможності майбутнього фахівця на ринку праці" [507, с. 47].

Час навчання в університеті можна умовно розділити на два основних етапи: етап молодших курсів, коли відбувається адаптація студента-новачка до навчального закладу, до діяльності в умовах вищої школи, і етап старших курсів (починаючи з третього) – основний етап професійного самовизначення студента як майбутнього спеціаліста.

На першому етапі відбувається корінна ломка уявлень, звичок школяра, яка пов'язана з необхідністю змінювати й перебудовувати свою поведінку і діяльність, „входити" в нові умови. Головною метою для студента на цьому етапі є оволодіння способами і прийомами навчальної діяльності. Першокурсники інколи неуспішно засвоюють знання зовсім не тому, що отримали слабку підготовку в школі, а тому, що у них не сформовані такі якості особистості, як здатність навчатися

самостійно, контролювати і оцінювати себе, рефлексувати свої індивідуальні особливості пізнавальної діяльності, вміння правильно розподілити робочий час для самостійної підготовки. Більшість студентів не уміють слухати і записувати лекції, конспектувати необхідну літературу, виступати перед аудиторією, спілкуватися у формі диспуту, аналізувати проблеми тощо. У них недостатньо сформоване прагнення до самоосвіти та самовиховання.

Система навчання в університеті відрізняється від шкільної, бо розрахована на високий рівень свідомості та особисті інтереси студентів. Тут формально відсутня жорстка система щоденної шкільної перевірки, „страх" перед учителем, необхідність щоденно вчити уроки. Деякі студенти, які витримали складний і важкий вступний конкурс, потім виявляються непідготовленими до відповідального ставлення до навчання. Психологи відносять такі процеси до "кризи першого курсу" (криза адаптації до умов навчання в університеті). З цього приводу слушним є зауваження З. І. Слєпкань: "Навчальна діяльність студентів багатогранна і досить велика за обсягом. Це пов'язано із значною кількістю предметів і досить великою складністю частини з них. Тому вже у перші тижні навчання у вузі слід навчати студентів вчитися. Цю роботу мають проводити в першу чергу викладачі, які викладають відповідні курси, куратори академічних груп, працівники бібліотеки" [439, с. 58].

Враховуючи ці обставини, які особливо проявляються в процесі вивчення студентами вищої математики, навчальний процес на першому курсі слід організувати у такий спосіб, щоб допомогти студентам з меншими втратами перейти на вищий рівень навчання. З цією метою для студентів організовуються регулярні консультації з кожної математичної дисципліни, проводиться міжсесійний контроль, створюються методичні рекомендації щодо вивчення конкретної математичної дисципліни. Щоб сформувати студента як суб'єкта навчально-пізнавальної діяльності, необхідно навчити його планувати і організовувати свою діяльність. Зразок такої діяльності мають подавати студентам викладачі.

Молодість – це важливий етап розвитку розумових здібностей

людини..У становленні цілісності інтелекту визначну роль відіграє освіта (обсяг засвоєних знань, загальний рівень інформації) і навчання, тобто діяльність щодо засвоєння знань, навичок, умінь. Саме тому в структурі інтелекту особливо значне місце відведено мисленню та пам'яті. Мислення в цей період значно відстає від рівня розвитку пам'яті, що знижує ефективність засвоєння і збереження навчального матеріалу. В той же час потік інформації, що постає перед студентами, зростає набагато швидше, ніж розвивається пам'ять. Усе це вимагає правильної організації навчання.

На перших курсах відповідальність за організацію навчального процесу більшою мірою повинна покладатися на викладачів. Навчальний матеріал для першокурсників має спеціально структуруватися і подаватися невеликими дозами. У дослідженні [14, с. 22] встановлено також, що з метою кращого запам'ятовування навчального матеріалу для студентів молодших курсів важливо кодувати запропонований для вивчення матеріал символами, які містять менше інформації, але подавати такий матеріал з більшою частотою.

Перевести отримані знання у довготривалу пам'ять можливо лише за умови активного повторення. В цьому випадку повторення має полягати у збудженні асоціацій і використанні відомого студентам матеріалу в нових умовах. А тому кожну лекцію бажано починати з повторення основних положень попередньої лекції, а закінчувати – доступними проблемними запитаннями, які спонукатимуть студентів до активного опрацювання лекційного матеріалу вдома.

Введення нового поняття слід супроводжувати роз'ясненням його місця в системі вивчених раніше понять та встановленням перспективних зв'язків з поняттями, що вивчатимуться пізніше. Для цього бажано використовувати таблиці, схеми чи діаграми. Позитивні асоціації для запам'ятовування викликатимуть також цікаві повідомлення з історії створення і розвитку поняття чи методу, який вивчається.

Наприклад, першокурсникам цікаво буде дізнатися, що перший підручник з математичного аналізу з'явився у 1696 р. Його написав маркіз Гійом Франсуа Лопіталь під назвою "Аналіз нескінченно малих для позначення кривих ліній" (Analyse des infiniment petits).

В 10 главах книги давалися означення постійних і змінних величин, а також диференціала, пояснювалися використані позначення *dx*, *dy* та інші, виводилися правила диференціювання алгебраїчних виразів, розглядалися застосування диференціального числення для знаходження дотичних до кривих, максимумів і мінімумів, точок перегину і т. д. У цій книзі вперше побачило світ і "правило Лопіталя".

Книга Г. Лопіталя добре написана і містила багато прикладів: легких, середніх та складніших. Саме з появою цього підручника розпочалося широке знайомство з аналізом нескінченно малих і поступове проникнення його в математичну практику.

Після смерті Г. Лопіталя відомими стали передумови написання книги. В 1690 р. в Парижі в літературному салоні філософа Мальбранша відбулася зустріч вже відомого на той час математика Г. Лопіталя і 23–річного Й. Бернуллі. В бесіді на математичні теми з'ясувалось, що задачі, які Г. Лопіталь вважав важкими і навіть нерозв'язними, молодий Й. Бернуллі розв'язував легко, наче граючись. Г. Лопіталь відразу попросив Й. Бернуллі прочитати йому кілька лекцій з нового числення. Спочатку заняття проходили у вигляді усних бесід, але з часом Г. Лопіталь попросив, щоб Й. Бернуллі передавав матеріали у письмовому вигляді. Й. Бернуллі погоджується на цю пропозицію, але не лише пише лекції для Г. Лопіталя, а й залишає копії для себе. Ймовірно, це відбувалося з двох причин: за лекції був призначений дуже солідний гонорар, а ще Йоган збирався використати їх у виданні узагальнюючого твору з нового числення. Як бачимо, Г. Лопіталь випередив учителя і опублікував першу частину лекцій у вигляді підручника (друга частина курсу, викладеного Й. Бернуллі, – "Інтегральне числення" – опублікована в 1742 р. в повному зібранні творів Й. Бернуллі).

В основу своєї книги Г. Лопіталь поклав лекції Й. Бернуллі й те, що він здобув із праць і листів Й. Бернуллі та Г. Лейбніца (зокрема, відоме "правило Лопіталя" слід було б назвати "правилом Бернуллі"). Самостійними у книзі Г. Лопіталя є лише окремі приклади і деяка частина книги, що стосується дослідження особливих точок кривих. Але з точки зору впорядкування і розміщення матеріалу, доступності та системності викладення, книга Г. Лопіталя досить оригінальна і цінувалася вище, ніж курс Й. Бернуллі.

Дієвим стимулом у підтриманні уваги та інтересу до навчального предмету може стати використання коротких повідомлень про творчість видатних математиків. Наприклад, розглядаючи в курсі проективної геометрії теорему Паскаля, викладач може повідомити студе-

нтам про надзвичайно ранній прояв математичних здібностей у Блеза Паскаля.

У 12 років він самостійно встановив, що сума кутів трикутника дорівнює двом прямим кутам, а також написав свою першу роботу про звук, в якій самостійно обґрунтував причини його появи і зникнення. В 1639 році, коли Паскалю було 16 років, він настільки опанував геометрію, що зробив повідомлення про конічні перерізи, в якому вивів їх властивості з "містичного" шестикутника. Це повідомлення справило на слухачів настільки сильне враження, що було вирішено називати нову теорему теоремою Паскаля. Згодом Паскаль написав роботу про конічні перерізи, яка отримала високу оцінку Дезарга і Декарта, останній відмовлявся повірити, що автору 16 років. Казали, що з часів Архімеда не з'являлося нічого такого, з чим би можна було порівняти його за силою генія, – настільки це був незвичайний твір.

Зацікавивши студентів коротким екскурсом, доцільно вказати джерела для детальнішого ознайомлення з життям і творчістю вченого, наприклад, нашу статтю [64].

На основі розвитку інтелектуальних здібностей у студентів формується нове ставлення до світу і до себе, нова система цінностей. У процесі навчання студентське мислення виходить на рівень власної позиції в судженнях. Його якісні перетворення відстежуються через ряд стадій:

1) стадію мислительного дуалізму (опора молодої людини на прості альтернативи);

2) стадію мислительного релятивізму (формування здатності виявляти толерантність до точок зору, які суперечать одна одній);

3) стадію відповідального вибору судження та оформлення власної позиції (здатність брати на себе відповідальність за вибір власних цінностей, поглядів та власного способу життя).

На першій фазі дорослості людина вже здатна осмислювати протилежні думки, синтезувати їх та інтегрувати. Особливо важливий аспект такого мислення – інтеграція ідеального та реального. Якраз у цьому виявляється сильна сторона мислення дорослої людини [507, с. 56].

Цю здатність мислення студентів слід використовувати для навчання студентів складати конспекти поурочних планів та позаклас-

них заходів. Привчати студентів до такої діяльності можна вже на третьому курсі, починаючи з перших занять з методики математики. Теми уроків для цього слід добирати так, щоб студенти мали змогу проявити творче мислення, використати власний досвід навчання в школі, знання математики, отримані в університеті, а також відповідну навчальну і методичну літературу.

Практична підготовка молодих спеціалістів починається здебільшого на 4-му курсі, а якщо навіть раніше, то в невеликому обсязі. У таких випадках студент почасти позбавлений можливості побачити, відчути те, на що він здатен як фахівець, і напрацювати внутрішні критерії професійного розвитку. Тому вже на третьому курсі варто залучати студентів до участі в гуртку з методики навчання математики. Студенти мають можливість у неформальній обстановці ознайомитися з передовим педагогічним досвідом, зразками інтенсифікації та активізації навчального процесу за допомогою різних засобів і форм. Значну увагу та великий інтерес викликає у студентів заняття гуртка, присвячене використанню на уроках математики та в позакласній роботі елементів історії математики, дидактичних ігор, логічних задач тощо.

Поступово зі здобуттям професійних знань студенти починають глибше осмислювати тонкощі своєї майбутньої спеціальності, у них формується певне ставлення до майбутньої професійної діяльності. Разом з тим відбувається розширення уявлень про себе як про особистість та майбутнього фахівця. У процесі професійної підготовки формується перш за все уявлення студентів про свої інтелектуальні можливості, лідерські якості й популярність. Розчарування в обраній професії, несвоєчасно зроблений вибір і діяльнісний мораторій породжує у багатьох студентів у другий період навчання кризові переживання – кризу третього курсу (ревізії професійного вибору), яка ускладнюється невикористаністю, низьким престижем фахівців, віддаленістю професійного навчання від реального життя. Криза виявляється у невдоволеності змістом навчання, зростанні невпевненості у майбутньому, розгубленості, пошуках нових можливостей для реалізації та ін. [507, с. 48].

Саме для студентів цієї вікової категорії актуальними будуть

педагогічна практика, зустрічі з провідними фахівцями у галузі математики, педагогіки і психології. Зацікавлять студентів лекції, прочитані співробітниками Інституту математики НАН України або дійсними членами Академії педагогічних наук України. В рамках гуртка з методики математики можна організувати зустрічі з провідними вчителями математики і авторами шкільних підручників. Цікавими можуть стати спільні семінари і конференції студентів і вчителів-практиків. Студенти, зокрема, можуть підготувати повідомлення про використання історизмів на уроках і в позакласній роботі, а також продемонструвати застосування комп'ютера чи інших сучасних засобів навчання.

На п'ятому курсі відбувається багато подій, що зумовлюють різні психологічні зміни особистості. Більшість випускників перебувають на етапі переходу від одного соціального рівня до іншого, пов'язаного з системними та якісними новоутвореннями у сфері соціальних відносин, провідної діяльності. На цьому етапі розвитку особистості здійснюється перехід до нового типу взаємовідносин з оточуючими, при якому потрібно враховувати нові можливості, зміну „соціальної ситуації розвитку", виду діяльності та роду занять, перебудову всієї структури свідомості особи, переорієнтацію на нові життєві цілі. Усе це помітно впливає на розвиток особистості, а тому говорять про кризу випускника (кризу п'ятого курсу).

У реалізації вибудованих у молодості планів та сподівань молодої людини щодо майбутньої кар'єри може допомогти зустріч із досвідченою людиною-наставником. Наставник виконує у житті молодої людини роль компетентного вчителя, сприяє посадовому зростанню, є еталоном для наслідування і втілює високий рівень досягнень. У цей період життя людина особливо відкрита до спілкування з іншою людиною, а знайомства та дружні зв'язки, що створюються в цей час, можуть зберігатися впродовж усього життя.

Випускники особливо потребують співпраці з фахівцями в обраній професійній сфері. Неоднорідність студентської аудиторії потребує різних видів допомоги і співпраці. Студенти, що сподіваються продовжити навчання (в магістратурі, аспірантурі) і займатися нау-

ковими дослідженнями, хочуть отримати оцінку своїх досягнень, консультації з приводу актуальності тієї чи іншої теми дослідження, поради про місце і форми продовження навчання тощо. На іншу співпрацю сподіваються студенти, які вже працюють у школі, і хочуть використати останній рік навчання над кваліфікаційною роботою для підвищення своєї теоретичної підготовки.

Генетичний вимір в структурі особистості, крім вікових особливостей, характеризується задатками і здібностями. В контексті дослідження студентської молоді є сенс зупинитися на проблемі їх здібностей, тобто таких психологічних особливостях, які дозволяють успішно оволодіти запропонованим матеріалом. У структуру здібностей входять увага, спостережливість, деякі якості мислення, пам'яті, уяви і так далі. Однією з передумов успішного розвитку здібностей у студентів є їх інтерес до своєї майбутньої професії, працелюбство та наполегливість. Під впливом професійного навчання та адаптації до вимог професії у цей час активно формуються спеціальні педагогічні здібності.

Педагогічні здібності – це якості особистості, що інтегровано виражаються в нахилах до роботи з дітьми, любові до дітей, отримання задоволення від спілкування з ними. Виділяють такі головні групи здібностей:

1. *Організаторські* – уміння вчителя згуртовувати учнів, залучати їх до праці, розподіляти обов'язки, планувати роботу, підбивати підсумки зробленого.

2. *Дидактичні* – уміння підбирати і готувати навчальний матеріал, наочність, обладнання; доступно, ясно, виразно, переконливо і послідовно викладати навчальний матеріал; стимулювати розвиток пізнавальних інтересів і духовних потреб, підвищувати навчально-пізнавальну активність.

3. *Перцептивні* – уміння проникати в душевний світ вихованців, об'єктивно оцінювати їх емоційний стан, виявляти особливості психіки.

4. *Комунікативні* – уміння вчителя встановлювати педагогічно доцільні стосунки з учнями, їх батьками, колегами, керівниками навчального закладу.

5. *Сугестивні* – уміння вчителя здійснювати емоційний вплив на учнів.

6. *Дослідницькі* – уміння пізнавати й об'єктивно оцінювати педагогічні ситуації і процеси.

7. *Науково-пізнавальні* – вміння засвоювати наукові знання у своїй галузі.

Досить поширеною серед педагогів є думка про те, що професійно-педагогічна діяльність обумовлюється педагогічними здібностями і за сприятливих умов набуває певного рівня успішності виконання – професіоналізму. Практична педагогічна діяльність лише наполовину побудована на раціональних технологіях, друга її половина – мистецтво. Тому перша вимога до професійного педагога – наявність педагогічних здібностей [223, с. 456]. На нашу думку, педагогічні здібності (талант, покликання, задатки) – важлива, але не вирішальна передумова оволодіння педагогічною професією. Відсутність яскраво виражених здібностей може бути компенсована розвитком інших важливих професійних якостей – працелюбства, серйозного ставлення до своїх обов'язків, систематичної і постійної роботи над собою.

Визначальною ознакою професіоналізму вчителя є його готовність до професійно-педагогічної діяльності. Під професійно-педагогічною готовністю студента розуміють інтегративну особистісну якість та істотну передумову ефективності діяльності після закінчення педагогічного закладу освіти. Професійно-педагогічна готовність допомагає молодому спеціалісту успішно виконувати свої обов'язки, правильно застосовувати знання, досвід, зберігати самоконтроль і знаходити своєчасно оптимальні рішення в складних непередбачених педагогічних ситуаціях. Вона може виступати як професійно важлива якість особистості вчителя, яка є складним психологічним утворенням і має такі компоненти: мотиваційний, орієнтаційний, операційний, вольовий і оцінний.

Система професійно-педагогічної готовності випускників вищих навчальних закладів включає взаємопов'язані компоненти, а саме: психологічна готовність; практична готовність до виконання

педагогічної діяльності; готовність до подальшого удосконалення себе як спеціаліста, фахівця.

У процесі опанування майбутньою професією студенти не тільки мають оволодіти певною системою знань, а й виробити у себе звичку до постійного навчання і удосконалення себе як фахівця і особистості. Зразком у цьому можуть стати викладачі університету, які демонструють на лекціях і семінарських заняттях останні здобутки математичної і педагогічної науки, показують особисту зацікавленість у розв'язуванні нових проблем, залучають студентів до опрацювання нової літератури тощо.

Наприклад, студентам, кваліфікаційні роботи яких пов'язані з асимптотичними методами розв'язування диференціальних рівнянь чи їх систем, слід ознайомитися з історією цієї проблеми, розглянути здобутки вітчизняних вчених у її вирішення. Щоб повністю висвітлити проблему вивчення векторів у класах різних профілів, студенти мають розглянути основні джерела формування векторного числення та історію його подальшого розвитку.

Зміст і процесуальна сторона навчання, з відображенням на них особливостей діяльнісного виміру структури особистості (потребнісно-мотиваційних, інформаційно-пізнавальних, цілеутворюючих, результативних та емоційно-почуттєвих компонентів діяльності) будуть розглядатися в другому і третьому розділах на конкретних прикладах навчання предметів математичного циклу і методичної системи навчання історії математики.

РОЗДІЛ 2

ПРОПЕДЕВТИЧНЕ ВИВЧЕННЯ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

2.1. ОЗНАЙОМЛЕННЯ ПЕРШОКУРСНИКІВ З ІСТОРІЄЮ МАТЕМАТИКИ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ

2.1.1. Вивчення математичних дисциплін на першому курсі педагогічного університету викликає у студентів багато труднощів, пов'язаних з великим обсягом і складністю навчального матеріалу та переходом на нові форми навчання. Першокурсники відразу починають вивчати кілька математичних дисциплін, які читають різні викладачі послуговуючись різними методами та вимогами. Ці дисципліни (лінійна алгебра, аналітична геометрія і математичний аналіз) відрізняються від шкільних алгебри і геометрії та одна від одної. Студенти намагаються пристосуватися до вивчення кожної з дисциплін окремо, не розуміючи спільності їх предмету, зв'язку з шкільним курсом математики і необхідності інтеграції отриманих в процесі їх вивчення знань для майбутньої педагогічної діяльності.

Набутих у школі математичних знань для більшості першокурсників не достатньо, щоб свідомо і швидко, як це передбачається сучасними навчальними планами і програмами опанувати знаннями з вищої математику. Традиційні методи навчання в школі не сприяють формуванню в учнів умінь і потреб користуватися науковою і навчальною літературою, самостійно опрацьовувати окремі положення теоретичного матеріалу, розв'язувати незнайомі типи задач тощо.

Щоб допомогти першокурсникам швидше, активніше і свідоміше включитися у навчальний процес в університеті для них пропонуються факультативні курси. В різні часи існували різні підходи до визначення теми і спрямованості таких факультативних курсів. У прак-

тиці роботи педагогічних інститутів й університетів для математичних спеціальностей вводилися такі курси: "Вступ до спеціальності", "Вступний курс математики", "Вибрані питання шкільного курсу математики" та інші – за вибором факультетів чи кафедр. Основною метою таких факультативних курсів було:

– розкрити зміст і особливості майбутньої професійної діяльності;

– ознайомити студентів з основними математичними поняттями і відношеннями, математичною мовою та елементами логіки;

– вирівняти математичну підготовку студентів за допомогою повторення окремих тем з шкільного курсу математики.

Досвід показав, що суттєвого впливу на навчальну діяльність першокурсників такі факультативні курси не мали. Власне до професійно-педагогічної діяльності студентам було ще далеко, тому слабко спрацьовував мотиваційний фактор. Вибрані теми з шкільного курсу математики переважну більшість студентів зацікавлювали мало, бо асоціювалися з шкільною програмою.

З 2002 року в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова для студентів першого курсу за нашою ініціативою і підтримкою Ради фізико-математичного факультету введено факультативний курс "Математика як наука і навчальний предмет" (18 годин у I семестрі).

Мета цього факультативного курсу – дати першокурсникам, тобто майбутнім учителям математики, пропедевтичні знання з історії розвитку і сучасного стану математичної науки, а також з математичних курсів, які вивчаються в школах і університетах.

На нашу думку, вивчення математики в університеті має сприяти становленню у студентів правильних уявлень про природу науки, її предмет і методи, джерела і стимули розвитку, місце і роль у суспільстві та в системі інших наук. Математика знаходиться у постійному розвитку: з'являються нові галузі, розширюються існуючі. Цим вона схожа на велике місто, а її складові частини – на окремі його квартали. Щоб одержати певні знання про якесь місто, бажано спочатку ознайомитись з його картою чи загальним планом, а потім детально вивчати окремі райони. Що стосується вивчення математики, то тут

все відбувається інакше.

Протягом п'яти років студенти вивчають окремі, начебто зовсім не пов'язані між собою, навчальні дисципліни, кожна з яких тією чи іншою мірою розкриває предмет, основні завдання, методи, засоби і шляхи розвитку відповідної галузі. Але вивчення математики у такий спосіб не сприяє створенню у студентів правильного погляду на математику в цілому, не дає зрозуміти її суть, побачити спільність предмету.

Майбутні вчителі математики мають добре знати не тільки арифметику, алгебру, математичний аналіз, геометрію та інші складові математичної науки, а й математику в цілому. Образно кажучи, перш ніж ознайомлювати майбутніх лісників з окремими групами дерев у лісі, їм бажано дати деякі відомості і про весь ліс. Математика є складовою частиною загальнолюдської культури, а тому загальний погляд на математику, її зміст та застосування має знати кожна освічена людина.

Досить часто студенти не розуміють, навіщо вчителю вивчати вищу математику, якщо шкільні курси базуються на елементарній математиці. Запропонований курс допоможе першокурсникам переконатися в тому, що вища математика створює міцну базу для наукового підходу до побудови і реалізації шкільного курсу математики, а також створює умови для розвитку загальної культури вчителя.

Деякі з питань, що розглядаються на факультативному курсі, бажано обговорити повніше і детальніше на старших курсах, зокрема – в процесі вивчення історії математики, методики математики, на спеціальних курсах з вищої математики тощо. Там це можна зробити глибше і аргументованіше. На початку ж навчання ці питання досить розглянути в пропедевтичному плані, з метою інтеграції предметів математичного циклу та надання студентам допомоги у свідомому опануванні математичними знаннями.

Такий факультативний курс потрібний першокурсникам, щоб:

1) краще забезпечити наступність у навчанні, перехід від шкільної математики до математики вищої школи;
2) сформувати правильний погляд на математику в цілому, а не лише

на окремі складові частини;
3) дати основні знання з історії та методології математики;
4) поліпшити гуманізацію навчання математики;
5) показати місце математики в системі інших наук, а також роль математики на сучасному етапі;
6) зіставити зміст і методи математичної науки, університетського курсу і шкільної математики;
7) ліквідувати прогалини у знанні математичної мови

ЗМІСТ КУРСУ

1. МАТЕМАТИКА ЯК НАУКА:
   Що таке математика?
   Математика в системі інших наук;
   Основні етапи розвитку математики;
   Сучасна математика і її архітектура.
2. ІСТОРІЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ:
   Історія арифметики;
   Історія алгебри;
   Історія геометрії;
   Історія тригонометрії.
3. МОВА СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ:
   Як створювалася математична мова;
   Творення української математичної термінології;
   Означення і класифікації математичних понять;
   Основні символи і терміни та правила їх вживання.
4. МАТЕМАТИКА ЯК НАВЧАЛЬНИЙ ПРЕДМЕТ У СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ:
   З історії шкільної математики;
   Співвідношення між наукою і навчальними предметами;
   Навчальні плани і програми, підручники і навчальні посібники;
   Загальна характеристика складових математичної підготовки.
5. МАТЕМАТИКА ЯК НАВЧАЛЬНИЙ ПРЕДМЕТ У ВИЩІЙ ШКОЛІ:
   Структура математичної підготовки у педагогічному університеті;
   Навчальні плани і програми, підручники і навчальні посібники;
   Загальна характеристика складових математичної підготовки;
   Основні види діяльності, що забезпечують навчання математики.

В контексті нашого дослідження розглянемо, як у факультативному курсі "Математика як наука і навчальний предмет" висвітлюються питання історії та методології математики.

На першій лекції розглядається питання про з'ясування різних підходів до визначення предмету математики. Наведемо наш погляд на висвітлення цього питання першокурсникам.

Запитання "Що таке математика?" завжди було надто дискусійним. З приводу нього дискутували не тільки, навіть не стільки математики, скільки філософи. І це не випадково. За довгий час свого існування математика зазнала суттєвих змін та значного розвитку. Була вона "царицею" і "служницею", ставала надбанням "аристократів" і "широких народних мас", виступала "інструментом пізнання" й "універсальною мовою" тощо. І весь час не припинялися дискусії навколо питання про предмет математики.

Здавна математики і філософи різних країн намагалися визначити предмет математики, акцентуючи основну увагу при цьому на питанні про відношення математики до матеріальної дійсності. Стосовно цього питання вже давньогрецькі філософи дотримувалися різних поглядів. Аристотель стверджував, що математичні поняття є абстракціями реальних речей. Платон, навпаки, вважав, що математичні поняття знаходяться між світом чуттєвих речей та світом ідей і є слабкими тінями останніх. В подальшому погляди Аристотеля і Платона неодноразово обговорювалися та піддавалися критиці, але саме питання так і залишалося не з'ясованим.

Матеріалісти стверджували, що поняття і закони математики є відображенням, отриманим в результаті абстрагування від реальних речей та їх властивостей. Суб'єктивні ідеалісти вважали, що поняття і закони математики є продуктами вільної творчості думки. Об'єктивні ідеалісти розглядали поняття і закони математики як такі, що існують самостійно, незалежно від світу реальних речей.

За допомогою кодоскопу чи мультимедійної установки студентам демонструються висловлювання про математику, що характеризують різні підходи до її тлумачення. Наприклад:

Математика – це наука про просторові форми і кількісні відношення дійсного світу

Ф. Енгельс

Математика – це наука про математичні структури.

Н. Бурбакі

Студентам пропонується записати ці висловлювання, після чого викладач дає характеристику кожному з них.

Довгий час радянські вчені мали дотримуватися означення математики за Ф. Енгельсом, хоча воно не відповідає суті сучасної математики. Перші абстракції справді виникали як відображення деяких предметів і явищ матеріального світу. Але так було в період з а р о д ж е н н я математики, у наступні періоди розвитку математика істотно змінилась. У навколишньому матеріальному світі немає жодної прямої, якою уявляють її в геометрії – без товщини, ідеально рівною і нескінченною в обидва боки. І геометричної площини, яка б поділяла весь світ навпіл, не існує.

А в сучасній математиці розглядаються не тільки такі елементарні поняття, як пряма, площина, натуральні чи раціональні числа, а й набагато складніші конструкції з таких понять і абстракцій вищих порядків. Ідеться про абстракції від абстракцій, а не від об'єктів і процесів матеріального світу. Наприклад, функції $y = 3x$, $y = -0{,}5x + 1$ – абстракції. Абстрагуючись від них переходять до абстракцій вищого порядку – лінійної функції $y = ax + c$. Абстрагуючись від понять лінійної, квадратичної, степеневої та інших функцій переходять до ще абстрактнішого і загальнішого поняття – числової функції $y = f(x)$. Так само розширювалося поняття числа: від натуральних чисел через раціональні та ірраціональні числа приходять до поняття дійсних чисел, потім – до комплексних, кватерніонів та інших гіперкомплексних чисел. Так поступово створювали порівняно загальніші і абстрактніші математичні конструкції, все віддаляючись від об'єктів і процесів матеріального світу. Тому стосовно сучасної математики неправомірно стверджувати, що предметом її вивчення є просторові форми і кількісні відношення дійсного світу.

За таких обставин прийняте формулювання доповнювалося:

Як у результаті внутрішніх потреб математики, так і нових запитів природознавства, коло кількісних відношень і просторових форм, які вивчає математика, надзвичайно розширюється: сюди входять відношення, що існують між елементами довільної групи, векторами, операторами у функціональних просторах, уся різноманітність форм просторів будь-якого числа вимірів та ін. При такому широкому розумінні термінів "кількісні відношення" і "просторові форми" наведене означення Енгельса застосовуване і на сучасному етапі її розвитку.

А. М. Колмогоров

.Н. Бурбакі (псевдонім, під яким група математиків різних країн, переважно французьких, зробила спробу дати систематичний виклад сучасної математики на основі аксіоматичного методу; припинила діяльність у 1968 р.) стверджували: "Математика – це наука про математичні структури".

Математична структура є множиною, між елементами якої встановлено одне або кілька відношень. При цьому виділяються три типи основних структур: алгебраїчні структури (групи, кільця, поля і т. д.), структури порядку і топологічні структури.

З поняттям математичних структур знайомляться здебільшого тільки студенти математичних відділень університетів. Випускникам середніх шкіл і спеціалістам-нематематикам це поняття не відоме. Тому їм означення математики через математичні структури не зрозуміле. До того ж навіть немало математиків, які добре розбираються в суті і ролі математичних структур, не погоджуються з таким означенням, бо воно дещо однобічне, не враховує прикладної математики.

Дискусії з приводу обґрунтувань математики не припиняються і в наш час. Детальніше про це можна прочитати в роботах [14], [40], [125].

Неоднозначність розуміння суті математичної науки, розгалуженість її розділів та застосувань дають підстави деяким науковцям висловлювати думку, що сформулювати означення математики чи вичерпно описати її предмет неможливо.

Р. Курант, написавши разом з Г. Роббінсом велику книгу "Що таке математика", згодом зробив такий висновок:

На запитання "Що таке "математика?" неможливо дати ґрунтовну відповідь на основі самих лише філософських узагальнень, семантичних означень або за допомогою обтічного газетно-журнального багатослів'я. Так само як не можна дати загальне означення музики чи живопису: ніхто не може оцінити ці види мистецтва не розуміючи, що таке ритм, гармонія і лад у музиці, або форма, колір і композиція у живописі. А для розуміння суті математики ще більшою мірою потрібне справжнє проникнення у складові її елементи

Р. Курант

Сучасний етап розвитку математики та математичної освіти тісно пов'язаний з переходом від індустріального до інформаційного суспільства. В такому суспільстві всі структури, технічна база та людський потенціал мають існувати в умовах оптимального перетворення знань в інформаційний ресурс і подальшої трансформації цього ресурсу з метою переробки пасивних форм ін-

формації в активні (моделі, програми). Таким чином, коло застосувань математичних методів в наш час суттєво розширюється. Зростають відповідно і потреби в ґрунтовній математичній підготовці майбутніх фахівців. Усе це потребує створення у широкого загалу правильного уявлення про те, що таке математика і математична модель.

Математична модель – система математичних співвідношень, яка описує розглядуваний об'єкт, процес або явище. Приклади математичних моделей – рівняння (алгебраїчне, трансцендентне, диференціальне і т. ін.), система чи сукупність рівнянь (нерівностей), графіки, діаграми тощо. Математичні моделі можуть бути неперервними, дискретними, стохастичними і т. ін. Користуючись математичними моделями, можна досліджувати об'єкти, процеси, явища, не вдаючись до дорогих натуральних експериментів, а замінюючи їх імітацією у вигляді математичних перетворень і обчислень.

Для сучасної математики поняття математичної моделі одне з найважливіших. З його допомогою коротко і доступно зміст математичної науки можна описати так.

Математика – це наука про математичні моделі та їх застосування до розв'язування задач.

А задачі можуть бути різними: досить важливими прикладними, і такими, "практична користь яких зводиться до нуля". Було б неправильно бачити тільки щось одне: прикладні питання чи абстракції, що не мають ніякої практичної цінності. Коли математичну науку вважають продуктивною силою, то мають на увазі її прикладну складову. Друга складова математики, "практична користь від якої зводиться до нуля", не є безпосередньою продуктивною силою суспільства. Але не слід її ігнорувати, бо вона відіграє приблизно таку ж роль, як спорт, живопис, віршоскладання. Дослідження в геометрії трикутника, в теорії простих чисел, в n – вимірних векторних просторах тощо в жодному разі не гірші за гру в шахи чи інші інтелектуальні ігри, які людство цінить заради торжества розуму, допитливості й винахідливості, що власне робить людину homo sapiens. Результати досліджень в чистій математиці оцінюють за рівнем їхньої логічної завершеності та майстерності виконання, а тому їх місце – серед культурних цінностей людства.

Всі висловлювання про математику, які демонструються студентам, не обов'язково записувати на лекції. Роздрукований текст лекції студенти можуть опрацьовувати в позааудиторний час, виписуючи додатково матеріал, що їх зацікавив на лекції.

Виклад історії розвитку математики доцільно почати з характеристики основних періодів розвитку математики. Спочатку студентам повідомляється, що за періодизацією академіка А. М. Колмогорова в істо-

рії математики розрізняють чотири найголовніші періоди:

1) зародження математики (від найдавніших часів до VI-V ст. до н. е.);
2) математика сталих величин (VI-V ст. до н. е. – кінець XVI ст. н. е.);
3) математика змінних величин (XVII – середина XIX ст.);
4) сучасна математика (друга половина XIX ст. – наші дні).

Послідовність і тривалість основних періодів розвитку математики бажано зобразити наочно за допомогою схеми. Після чого подати коротку характеристику кожного періоду. Зробити це можна, скажімо, так.

Перший період. Він найдавніший і найдовший. Важким і довгим був шлях людини до таких елементарних і разом з тим фундаментальних математичних понять як число і фігура. Форми й шляхи розвитку математичних знань у різних народів були досить різноманітні, але спільним для них залишалося, що всі основні поняття математики – число, фігура, площа, об'єм тощо – виникли з практики й пройшли довгий шлях становлення та вдосконалення. Різні народи неодночасно оволодівали цими знаннями.

Спочатку люди не мали уявлення про число, не вміли рахувати і запам'ятовувати сукупності використовуючи їх кількісні характеристики. І все ж "рахувати" люди навчилися задовго до того, як виникли назви чисел. Рахунок вівся зіставленнями. Первісна людина тримала в пам'яті не загальну кількість предметів деякої сукупності, а окремі уявлення про їх зовнішні ознаки (колір, форма, розміри, особливі прикмети тощо).

Числові терміни з'явилися дуже поступово на другому етапі. Спочатку вони мали в основному якісний характер, тобто вказували на різницю "один" і "багато". Поняття "один" виділялося, бо людина могла прихопити рукою один предмет. Бачила "Сонце" і "Місяць", усвідомлювала себе – "Я". Пізніше виникло поняття "два": дві руки, два вуха і т. д. Про те, що виділялось поняття "два", свідчать двоїсті терміни в багатьох мовах. Наприклад, у деяких австралійських племенах використовувались такі назви чисел: "1 – гуна", "2 – баркула", "3 – баркула гуна", "4 – баркула баркула".

Числові записи збереглися у вигляді вузлів, зарубок, камінців тощо. Минуло багато часу, доки людство від перших кількісних понять перейшло до лічби на пальцях. Вказівний палець відігравав роль 1. Щоб використовувати великі числа потрібно давати їм назву. Але для всіх чисел зробити це неможливо, що й призвело до виділення одиниць вищого розряду, а потім – до нумерацій і систем числення.

Найбільш розвиненою на кінець першого періоду була математика в Дав-

ньому Єгипті та Вавилоні, про що свідчать єгипетські папіруси і вавилонські клинописні таблички, які дійшли до нашого часу. У цей період нагромаджувався фактичний матеріал. Математики як окремої науки ще не було.

Великий інтерес у першокурсників викликає навчальна екскурсія до історичного музею, де на справжніх експонатах їм демонструють окремі етапи розвитку математичних знань у стародавні часи на території України.

Другий період охоплює час від VI–V ст. до н. е. до кінця XVI ст. Цей період для зручності характеристики можна розбити на декілька етапів (підперіодів).

За математичним змістом його поділяють на такі етапи:

– V ст. до н. е. – II ст. н. е. (переважає розвиток геометрії);

– III ст. – XVI ст. (переважає розвиток алгебри і тригонометрії).

За історичними умовами і територіальними ознаками виділяють такі етапи:

– грецький (VI–V ст. до н. е. – V ст. н. е.);

– східний (V ст. до н. е. – XV ст.);

– західноєвропейський (XI ст. – XVI ст.).

Аналізуючи грецький етап у розвитку математики слід зупинитися на діяльності перших математичних шкіл, виділивши серед них такі:

1. Іонійська школа Фалеса Мілетського.

2. Школа Піфагора Самоського.

3. Афінські школи (Академія Платона і Лікей Аристотеля).

4. Александрійські школи (перша: Евклід, Архімед, Ератосфен, Аполлоній; друга: Герон, Менелай, Птоломей, Папп, Діофант, Гіпатія).

Детально з першими математичними школами студенти ознайомляться в систематичному курсі історії математики, а на факультативних заняттях їм бажано повідомити таку інформацію.

Фалес Мілетський – філософ, державний діяч, купець, інженер, астроном і математик. Його вважають родоначальником грецької математики, першим за часом вченим-геометром. Саме він увів у геометрію ідею доведення, і саме з Іонійської школи починається новий розвиток геометрії, геометрії як науки.

Про знання Фалеса з геометрії свідчать коментарі Прокла, який повідомляє, що Фалес довів такі твердження:

Діаметр ділить круг навпіл.

Вертикальні кути рівні.

Рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника.

Рівність трикутників за стороною і двома кутами.

Кут, вписаний у півколо, – прямий.

Як бачимо, про теорему, яка носить ім'я Фалеса, Прокл нічого не повідомляє. Чому ж теорему, про перетин сторін кута паралельними прямими називають теоремою Фалеса? Справді, таку теорему Фалес не доводив і не знав. Цю теорему, яку вивчають всі учні, назвали на честь першого вченого-геометра, щоб зберегти його ім'я для майбутніх поколінь. Цей факт студенти зможуть використати на заняттях з методики математики й у подальшій педагогічній діяльності.

Засобом мотивації до вивчення студентами математики може послужити епізод із життя Фалеса. Аристотель розповідав про мистецтво Фалеса наживати багатство. Коли Фалесу докоряли, що начебто заняття філософією ніякого баришу не приносять, то він, передбачаючи на основі астрономічних даних, багатий урожай олив, ще взимку роздав невелику суму грошей в задаток власникам всіх олійниць у Мілеті і на Хіосі. Олійниці Фалес законтрактував дуже дешево, бо не мав у той час конкурентів. Коли настав час збору олив водночас виник несподіваний попит багатьох осіб на олійниці. Фалес тоді почав віддавати на відкуп законтрактовані ним олійниці за значно більшу ціну. Набравши таким шляхом багато грошей, Фалес довів тим самим, що і філософам при бажанні розбагатіти не важко, але не це становить предмет їхніх інтересів.

З іменами математиків Александрійської школи та їх здобутками студенти зустрічатимуться в процесі вивчення вищої та елементарної математики, а тому на факультативному курсі доцільно розглянути відповідні історичні відомості. Наприклад, алгоритм Евкліда вивчається в теорії чисел і елементарній математиці, а тому для встановлення перспективних зв'язків студентам бажано повідомити таку інформацію.

Спочатку (III ст. до н. е.) алгоритм Евкліда був запропонований у геометричній формі для знаходження найбільшої спільної міри двох відрізків. У цій формі він є у VII книзі "Начал" Евкліда тому й називається алгоритмом Евкліда, або ще – способом послідовного ділення. Пізніше (II ст. до н. е.) для знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел при скороченні дробів використовувався подібний спосіб у пам'ятці стародавньої китайської математики – "Математика у дев'яти книгах".

В аналітичній геометрії розглядаються криві другого порядку. Студенти вивчають означення, аналітичне задання, зображення і властивості кожної з

кривих. Доброю пропедевтичною підготовкою до сприймання і засвоєння цього матеріалу вважається висвітлення деяких історичних аспектів.

Вперше криві другого порядку як перерізи конічної поверхні відкрив давньогрецький математик Менехм (IV ст. до н.е). Він розглядав параболу, гіперболу і еліпс як перерізи трьох конусів обертання – прямокутного, тупокутного і гострокутного – площиною, перпендикулярною до твірної. Ератосфен назвав утворені фігури тріадою Менехма. Пізніше (II ст. до н.е) Аполлоній у праці "Конічні перерізи" представив останні як довільні плоскі перерізи довільного конуса (рис. 1).

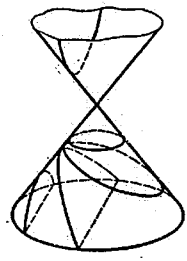


Рис. 1

Східний період у розвитку математики пов'язаний з історією розвитку математики в Індії, Китаї і арабських країнах. На цей час математики Сходу мали такі здобутки:

– створення позиційної десяткової нумерації і систематичне використання від'ємних чисел в Індії;

– розробка загальних методів розв'язування систем лінійних рівнянь;

– знаходження коренів алгебраїчних рівнянь різних степенів у Китаї;

– виділення в окремі математичні галузі алгебри і тригонометрії в роботах арабських математиків.

У курсі лінійної алгебри студенти вивчають метод Гаусса для розв'язування систем лінійних рівнянь. Саме тому їм цікаво буде дізнатися на факультативних заняттях, що вперше такий спосіб почали використовувати в Китаї. Його детально описано в творі "Математика в дев'яти книгах" (II ст. до н. е.) під назвою "фан-чен" – метод розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Цей метод полягав у тому, що на дошці зображали відповідну таблицю "фан-чен" (у сучасних термінах – матриця заданої системи), а потім поступово перетворювали цю таблицю способом, що нагадує дії над стовбчиками матриць у сучасному вигляді. Послідовне виключення невідомих приводило до обчислення розв'язків системи. Пізніше цей метод було перевідкрито в Європі і він дістав назву методу Гаусса чи метода послідовного виключення невідомих.

Переходячи до розгляду західноєвропейського етапу (XI ст. – XVI ст.) в розвитку математики, студентам слід пояснити, що відбувалося з європейською математикою після V століття.

Після надзвичайно високого розвитку математики в Стародавній Греції

в Європі настав її тимчасовий занепад. Вона не тільки не розвивалась, а й виганялася з пам'яті як шкідливі залишки язичництва. З математикою та математиками вели жорстоку боротьбу: спалювали музеї, школи, бібліотеки, знищували вчених. Зокрема, знищили Александрійську бібліотеку, зруйнували останню Александрійську школу, а її вчительку – першу жінку-математика Гіпатію – прилюдно розтерзали. Кодекс імператора Юстиніана містив спеціальний закон "Про злочинців математиків і тому подібних", у якому, крім іншого, говорилося: "Гідне осуду мистецтво математики забороняється зовсім".

Якщо розвиток математики в Європі зобразити графічно (рис. 2), відкладаючи на осі абсцис час, а на осі ординат кількість математичних відомостей найосвіченіших людей, то від V до XV ст. на тому графіку була б велика яма.

Навіть найосвіченіші люди не знали і тисячної частки того, що було відкрито за часів Діофанта чи Архімеда. Випала тисяча років розвитку людства, а для Східної Європи – майже півтори тисячі років.

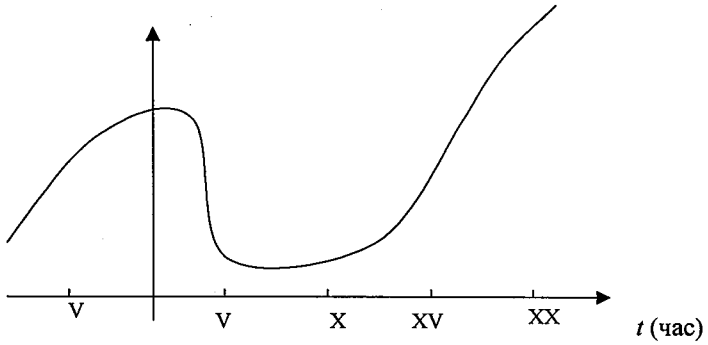


Рис. 2

Бурхливий розвиток математики в Європі починається з епохи Відродження. В цей час головним чином розвивається алгебраїчна символіка, узагальнюються методи розв'язування рівнянь, завершується формування тригонометрії, створюється теорія логарифмів. В цей час працюють такі математики:

– У. Вагнер, Й. Відман, Й. Мюллер (Німеччина);
– Л. да Вінчі, С.Ферро, Н. Фонтано, Дж. Кардано (Італія);
– М. Шюке, Ф. Вієт (Франція).

Третій період. Починаючи з XVI ст. математика розвивалась у нових економічних умовах. Виробництво вимагало створення різних технічних пристроїв і машин, унаслідок чого виникали задачі, що не розв'язувалися методами елементарної математики. Період елементарної математики закінчується тоді, коли починається перехід від математики сталих до математики змінних величин, тобто коли основним об'єктом вивчення в математиці стають процеси та рухи.

Поворотним пунктом в математиці була Декартова змінна величина. Завдяки цьому в математику ввійшли рух і тим самим діалектика і завдяки цьому стало надто необхідним диференціальне й інтегральне числення.

В цьому періоді створюються аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення. На перший план висувається поняття функції, яке відіграє таку саму основну роль, як раніше відігравало число або величина. Формується багато нових розділів математичної науки: теорія диференціальних рівнянь, варіаційне числення, теорія ймовірностей, проективна та диференціальна геометрія. Виникають і розвиваються прикладні розділи математики. Створюється аналітична механіка, що значно просунула вперед розвиток астрономії. Почалася математизація фізики. В геометрію входять рух і перетворення.

Й. Кеплер, Р. Декарт, П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс проклали шлях до диференціального та інтегрального числення, який завершили І. Ньютон і Г. Лейбніц.

Але в цей час ще не були повністю сформовані поняття: границя, похідна, первісна, збіжність нескінченного ряду та ін. Фундамент математичного аналізу – теорія границь тільки починала розроблятися.

Четвертий період починається з середини XIX ст. Нагромадження величезного фактичного матеріалу зумовило необхідність його глибокого логічного аналізу. Вже в першій половині XIX ст. було встановлено нерозв'язаність у радикалах алгебраїчних рівнянь 5–го й вищих степенів, розроблено теорію функцій комплексної змінної, обґрунтовано аналіз нескінченно малих, створено неевклідову геометрію. Такими були фундаментальні відкриття, що лягли в основу сучасної математики.

Наприкінці XIX ст., коли було створено теорію множин, багато уваги приділяється питанням обґрунтування математики. Продовжує розвиватися класичний математичний аналіз: розробляється вчення про функціональні простори, створюється функціональний аналіз, теорія диференціальних та інтегральних рівнянь.

У XX ст. всі розділи математики розвиваються значно інтенсивніше, ніж у попередні періоди, як за кількістю праць, так і за довершеністю методів та значущістю результатів. З'являються та набирають швидких темпів розвитку нові галузі математики, зокрема теорія катастроф, комп'ютерна математика, фрактальний аналіз, теорія нечітких множин.

Третій і четвертий періоди розвитку математики детально розглядаються в систематичному курсі історії математики, оскільки студенти ще не мають необхідних для цього математичних знань. Перші два періоди можна розглянути детальніше, – зупинившись на питаннях, які допоможуть кращому засвоєнню математичних дисциплін, знадобляться студентам для написання курсових робіт, а також сприятимуть активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів і розвитку їх творчого мислення.

Предметом вивчення на факультативних заняттях є формування математичної мови. На конкретних прикладах, що подаються за допомогою таблиць, кодоплівок, комп'ютера, студенти знайомляться з еволюцією математичних символів (нумерації, способи виконання арифметичних дій, записи рівнянь, геометрична символіка тощо).

Студенти дізнаються, скажімо, що позначення точок буквами зустрічається вже в „Началах" Евкліда. Систематично позначав вершини трикутника буквами A, B, C, а відповідні сторони – через a, b і c Л. Ейлер. У прямокутному трикутнику буквою С він позначав вершину прямого кута. Знак трикутника Δ, поряд із знаком ∇, використовував ще Папп Александрійський (IV ст. н. е.).

Перше позначення направленого відрізка – рисочку над буквою – ввів Ж. Арган (1806). Знаки $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ для позначення одиничних векторів увів У. Гамільтон (1853). Їх часто замінюють знакам: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Позначення векторів жирними буквами запропонував О. Хевісайд (1891). Позначення $\left|\overline{AB}\right|$ для довжини вектора ввів Ганс (1905).

Розглядаючи творення і впровадження спеціальних математичних термінів і символів, бажано звернути увагу студентів на історію формування і розвитку української математичної термінології.

Українська математична термінологія почала формуватися у Східній Галичині в середині XIX ст. У 1849 р. там було надруковано перший підручник арифметики українською мовою Ф. Мочніка (1814–1892) – професора

елементарної математики і купецької арифметики Львівської технічної академії. Формували українську математичну термінологію О. Дейницький, Е. Савицький, П. Огоновський, В. Левицький, М. Грицак у процесі перекладу іншомовних підручників та написанні власних. Зібрав і впорядкував матеріали з української термінології В. Левицький. У 1902 р. надруковано словник математичних термінів, упорядкований В.Левицьким і схвалений Львівським науковим товариством ім. Т. Г. Шевченка.

Подана тут українська математична термінологія мала ще багато недоліків, але з часом вона удосконалювалася і наближалася до норм літературної мови. І все ж той словник подобався насамперед галичанам. Для Наддніпрянської України шкільну математичну термінологію почали розробляти пізніше. Весною 1919 р. було організовано Математичну підкомісію, яка влітку доручила скласти проект математичного термінологічного словника Ф. Калиновичу – співробітнику Інституту математики й Інституту української наукової мови. Проект такого словника він склав до середини 1920 р. Так швидко впорався із завданням, бо "в основу всього матеріалу лягли матеріали до математичної термінології д-ра В. Левицького", надруковані у Львові. Істотно інші терміни пропонував відомий український методист К. М. Щербина, а в Одесі організувалась термінологічна комісія під головуванням проф. Д. А. Крижановського тощо. Творення математичної термінології, яка б задовольнила більшість українців, тривало.

Над проблемою української наукової термінології з математики працював М. А. Чайковський. 26 травня 1923 р. він виступив у Львові з доповіддю "Завдання української наукової і технічної термінології", а в 1924 р. в Берліні надрукував "Систематичний словник української математичної термінології". Талановитий математик і далі продовжував працювати над цією важливою проблемою, але арешт і заслання на довгі роки відсунули завершення розпочатої роботи. Тільки аж у 1960 р. АН УРСР видала "Російсько-український математичний словник", співавтором якого був М.А.Чайковський. В 1990 р. вийшло нове видання словника, що містить понад 12000 термінів.

Завданням факультативного курсу "Математика як наука і навчальний предмет" є, крім іншого, ознайомлення першокурсників з науковою і популярною літературою з історії математики. З цією метою їм пропонується самостійно опрацювати матеріали про життєвий і творчий шлях видатних математиків – на вибір, відповідно до теми,

що вивчається, дібрати їхні висловлювання про математику та інших математиків про них.

За бажанням, підготовлені вдома матеріали студенти висвітлюють на лекції. Така форма роботи з першокурсниками сприяє створенню на лекції атмосфери співпраці і спілкування, що активізує й умотивовує навчально-пізнавальну діяльність майже всіх студентів. Цікаві повідомлення підносять студентів в очах викладача і одногрупників. Аудиторія сприймає їх уважно і з великим інтересом, а тому добре запам'ятовує. У багатьох студентів з'являється потреба підготувати цікавий матеріал на наступне заняття. Пожвавлює такі лекції демонстрація портретів учених, фотографії пам'ятників М. В. Остроградському (Полтава) і М. А. Кравчуку (Київ).

Практика проведення факультативного курсу "Математика як наука і навчальний предмет" показала, що студенти з великим задоволенням відвідують лекції, опрацьовують додаткову літературу, готують і виступають з короткими повідомленнями. Все це сприяє підвищенню загальної культури першокурсників, їх адаптації до вивчення різних предметів математичного циклу і цілісного сприйняття математики. Засвоєний на факультативних заняттях матеріал з історії та методології математики допомагає студентам свідоміше засвоювати деякі математичні факти і стає їм у нагоді під час написання курсових робіт.

2.2. Відображення історичного матеріалу в курсі елементарної математики

2.2.1. Аналіз програми курсу "Елементарна математика" дає можливість встановити тісні зв'язки з історією розвитку математики та відобразити їх у навчальному процесі. На нашу думку, це стане у нагоді студентам як для засвоєння елементарної математики, так і для вивчення історії математики. А в цілому така інтеграція знань сприятиме підвищенню якості підготовки майбутнього вчителя математики.

Зупинимось детальніше на структурі курсу елементарної матема-

тики в педагогічному університеті, який є важливою складовою у підготовці майбутніх учителів. Вивчення студентами елементарної математики забезпечує їм міцну теоретичну базу для викладання шкільного курсу математики, сприяє розширенню та поглибленню математичних знань, готує їх до майбутньої професійної діяльності – вчителя математики.

У програмі з елементарної математики [4] визначено мету цього навчального предмету – підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв'язувати шкільні задачі з математики як на підвищеному, так і на поглибленому рівнях (рівень факультативних занять, класів і шкіл з поглибленим вивченням математики, конкурсних завдань, олімпіад юних математиків і т. д.). Програмою передбачено лекційні та практичні заняття, зміст яких охоплює вибрані питання арифметики, алгебри, геометрії, теорії ймовірності та комбінаторики. Для прикладу наведемо питання з арифметики, що розглядаються в курсі елементарної математики:

– *лекційний курс*: різні види чисел; арифметичні дії та їх властивості; подільність натуральних чисел; прийоми та способи розв'язування задач на подільність; відсотки та пропорції; арифметична та геометрична прогресії; арифметичні задачі і методи їх розв'язування;

– *практичний курс*: невід'ємні цілі числа; подільність чи́сел; невизначені рівняння першого степеня; діофантові рівняння; принцип Діріхле та його застосування до розв'язування задач; розв'язування задач арифметичним способом; задачі на відсотки, арифметичну та геометричну прогресію.

Висвітлення кожного з цих питань можна вдало поєднати з історією їх становлення та розвитку, але це вимагатиме суттєвого збільшення кількості годин на вивчення курсу елементарної математики. В той же час існують теми, вивчення яких слід супроводжувати історичним матеріалом. Наведемо кілька прикладів.

2.2.2. Перші лекції з елементарної математики присвячені вивченню різних множин чисел (невід'ємні цілі, невід'ємні раціональні,

раціональні, дійсні). Цей матеріал не зовсім новий для студентів. З співвідношеннями між множинами натуральних (N), цілих (Z), раціональних (Q) і дійсних (R) чисел у вигляді $N \subset Z \subset Q \subset R$ учнів знайомлять в школі, теорію дійсного числа та поняття потужності множини студенти вивчали в курсі математичного аналізу, властивості дій з числами розглядали в лінійній алгебрі як властивості операцій, введених у відповідних математичних структурах. В лінійній алгебрі студенти ознайомились також з множиною комплексних чисел. На факультативних заняттях "Математика як наука і навчальний предмет" студенти дізналися, що ще в школі Піфагора (VI ст. до н. е.) виявили існування відрізків, довжину яких не можна виразити раціональним числом, проте ірраціональних чисел вони не ввели. Поняття ірраціонального й від'ємного числа виникли набагато пізніше, ніж поняття дробового числа.

Таким чином, для вивчення різних видів чисел в курсі елементарної математики створена міцна база. На лекціях з елементарної математики відбувається узагальнення і систематизація знань про число. Для комплексного вивчення нового поняття чи теорії слід з'ясувати його походження, основні етапи розвитку та визначити його місце серед інших понять.

Ми пропонуємо в матеріал лекції про дійсні числа включити історичний огляд розширення поняття числа, звернувши увагу на такі моменти:

– історично першим виникло поняття *натурального* числа. Тривалий час поняття натурального числа в науці не обґрунтовувалося. Аксіоматичне обґрунтування поняття натурального числа в 1891 р. дав італійський математик Дж. Пеано;

– першим розширенням поняття числа було приєднання до множини натуральних чисел множини всіх *дробових* додатних чисел. Спочатку з'явилися аліквотні і шістдесяткові дроби в Єгипті і Вавилоні. Стародавні греки розглядали відношення натуральних чисел у вигляді дробу $\frac{m}{n}$. В XV–XVI ст. вчення про дроби набуває сучасного вигляду;

– систематичне використання *нуля* як цифри і числа відносять до індійської математики IX ст. В Європі в XV ст. нуль ще не вважали числом. В

1629 р. А. Жірар вперше почав вважати нуль коренем рівняння, а отже, числом. В "Універсальній арифметиці" (1768) Л. Ейлер відніс нуль до натуральних чисел;

– поняття *від'ємного* числа вперше зустрічається в китайській (II ст. до н. е.) та індійській (V ст.) математиці. У Європі в явному вигляді від'ємні числа вперше застосував французький математик Н. Шюке (XV ст.). Широкого застосування в Європі від'ємні числа набули після створення Р. Декартом і П. Ферма аналітичної геометрії;

– поняття *ірраціонального* числа вперше ввели вчені Близького і Середнього Сходу (X–XII ст.), на початку XIII ст. ірраціональні числа з'являються в працях західноєвропейських вчених, насамперед у працях Л. Пізанського. Строга теорія ірраціонального, а з ним і *дійсного* числа була створена в другій половині XIX ст. німецьким математиком Р. Дедекіндом.

Історичний матеріал лектор може повністю висвітлити у ході останньої лекції, присвяченої дійсним числам, або розбити його на частини відповідно до виду чисел, що вивчається. Можна також запропонувати студентам самостійно ознайомитися з цим матеріалом, якщо підготувати відповідну роздруківку, або запропонувати доступну літературу.

Актуальною проблемою у підготовці майбутнього вчителя є забезпечення його математичною і методичною підготовкою з тих тем, що останнім часом активно впроваджуються в шкільний курс математики, а саме: комбінаторика, теорія ймовірностей, математична статистика. Елементи комбінаторики розглядаються в лекційному і практичному курсах елементарної математики. Програмою передбачається вивчення таких питань:

лекційний курс: перестановки, розміщення, комбінації (з повтореннями і без); формула бінома Ньютона;

практичний курс: основні комбінаторні задачі; перестановки, розміщення і комбінації без повторень і з повтореннями; розв'язування задач.

Лекцію можна розпочати описом предмету комбінаторики та коротким оглядом історії розвитку комбінаторики як науки*.

*Докладно даний матеріал висвітлено у нашій роботі [56].

Активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі вивчення формул:

$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3...m}$ і $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$, а також підвищенню їх інтересу до навчального матеріалу сприятиме використання прийому, який застосовував Шрідхара. Правило знаходження числа комбінацій із n елементів, взятих по 1,2,3,.., m,..., n елементів він подавав у вигляді:

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Для ілюстрації цього правила Шрідхара наводить приклад: „Кухар готує різні страви з шести смаковими відтінками: гострий, гіркий, терпкий, кислий, солоний, солодкий. Друже, вкажи число усіх різновидів". Розв'язання подає таке. „Запишемо по черзі числа від 6 до 1, а саме 6|5|4|3|2|1, а потім запишемо їх від 1 до 6, а саме 1|2|3|4|5|6.

Розділимо числа першого ряду на відповідні числа другого ряду, отримаємо:

6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6

Спочатку маємо $\frac{6}{1} = 6$, це число страв з одним смаковим відтінком: гострий, гіркий, терпкий, кислий, солоний, солодкий. Потім маємо $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, це число страв з двома смаковими відтінками: гостро-гіркий, гостро-терпкий і т. д. Потім маємо $15 \cdot \frac{4}{3} = 20$, це число страв з трьома смаковими відтінками: гостро-гірко-терпкий, гостро-гірко-кислий і т. д. Потім маємо $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$, це число страв з чотирма смаковими відтінками: гостро-гірко-терпко-кислий і т. д. Потім $15 \cdot \frac{2}{5} = 6$, це число страв з п'яти смаковими відтінками: гостро-гірко-терпко-кисло-солоний. Потім $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$, це число страв з шістьома смаковими відтінками: гостро-гірко-терпко-кисло-солоно-солодкий. Отже, маємо 6; 15; 20; 15; 6; 1 комбінацій. Їх сума 63".

Значення C_n^0 не розглядали. Йшлося про формулу $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$.

Цей приклад досить наочно і доступно ілюструє правило знаходження числа комбінацій із n елементів, взятих по 1,2,3,.., m,..., n

елементів. Студенти можуть занести його до своєї "скриньки знахідок" і використати пізніше у професійній діяльності.

Сучасні вимоги до змісту шкільної математичної освіти вимагають ознайомлення учнів 5–6 класів з елементами комбінаторики і теорії ймовірностей. Першими доступними для дітей цього віку можуть стати задачі на заповнення пропусків у магічних чи напівмагічних квадратах – розташування перших n^2 натуральних чисел у квадраті $n \times n$ так, щоб усі суми рядочків, стовпчиків і діагоналей дорівнювали одному й тому самому (магічному) числу (рис. 3). Щоб реалізувати цю ідею на практиці вчителі мають розуміти значення і можливості магічних квадратів для розвитку обчислювальної та логічної культури учнів. Впровадження їх у практику навчання математики в шкільний та позаурочний час сприятиме розвитку інтересу учнів до математики.

На практичних заняттях з елементарної математики студентам бажано розповісти про історію магічних квадратів, їх види та правила побудови. Зацікавить студентів задача про визначення магічного числа конкретного і довільного магічного квадрата, яке однозначно визначається розмірами квадрата.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 3

В квадраті розміром $n \times n$ розташовуються числа від 1 до n^2. Їх суму можна знайти: $1 + 2 + 3 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$.

Якщо m – магічне число, то сума усіх чисел квадрата становить mn.

Отже, $mn = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, звідки $m = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

Розглядаючи формулу бінома Ньютона, бажано повідомити студентам, чому ця формула має таку назву. Багато з учителів думають, що вперше її вивів І. Ньютон і тому вона має таку назву. Насправді формула бінома Ньютона для натуральних n була відома і використовувалася задовго до І. Ньютона вченими Сходу, Індії і Китаю. Багато уваги біноміальним коефіцієнтам приділяли Ф. Вієт і Б. Паскаль.

Зокрема Б. Паскаль у роботі „Трактат про арифметичний трикутник" (1665 р.) описав прийом побудови коефіцієнтів розкладу $(a+b)^n$ для різних показників степеня. Всі коефіцієнти Б. Паскаль розташував у вигляді трикутника, принцип побудови якого був таким:

1) в горизонтальному рядку записувались один за одним деяка кількість одиниць;

2) в наступному рядку під кожним з чисел першого записували суму цього числа з усіма, які знаходяться від нього зліва;

3) чисел в кожному наступному рядку на одне менше ніж, у попередньому.

Числа, що розташовані на основах рівнобедрених трикутників, дають коефіцієнти різних степенів бінома.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	24	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Рис. 4

Таке розташування чисел назвали трикутником Паскаля, хоча індійські математики знали його майже на 1000 років раніше, ніж Паскаль.

На рис. 8 можна побачити коефіцієнти для розкладів:

$$(a+b)^2 - (1;2;1),$$

$$(a+b)^5 - (1;5;10;10;5;1),$$

$$(a+b)^9 - (1;9;36;84;126;126;84;36;9;1).$$

Розглядуваний арифметичний трикутник Паскаля давав можливість записати вираз будь-якого степеня бінома з натуральним показником.

Розклад бінома для загального випадку $(a+b)^n$, $n \in R$ запропонував уперше І. Ньютон. Він показав, як утворюються коефіцієнти розкладу множенням за допомогою формули:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(u-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}a^{u-k}b^k + \ldots \qquad (*)$$

Застосовуючи цю формулу для натурального n в правій частині рівності завжди отримують скінченну кількість членів, а саме $n+1$, коефіцієнти яких збігаються з відповідною n-ою стороною трикутника Паскаля. Основна заслуга І. Ньютона полягала в тому, що він поширив формулу бінома на випадок довільного дійсного n. У випадку дробових і від'ємних показників кіль-

кість членів розкладу бінома завжди нескінченна, тобто зводиться до нескінченних рядів.

І. Ньютон вперше став систематично застосовувати відмінні від натуральних показники бінома. Поширення формули (*) на дійсні показники мало велике значення для подальшого розвитку математики. Саме тому формулу (*) і для натурального n називають біномом Ньютона.

Одна з лекцій курсу елементарної математики присвячена тригонометрії. Пропонується розглянути питання: синус, косинус, тангенс і котангенс дійсного числа; основні тригонометричні тотожності; поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса дійсного числа; основні тотожності; способи перетворення тригонометричних виразів.

За винятком обернених тригонометричних функцій, цей матеріал добре знайомий студентам ще з школи. Щоб підвищити увагу й інтерес до розгляду цих питань, студентів можна залучити до обговорення таких питань:

– Що називається синусом дійсного числа α?

– Як зміниться означення, якщо розглядати коло довільного радіуса?

– Чому при розгляді одиничного кола не порушується загальність?

– Хто вперше запропонував розглядати коло одиничного радіуса?

Зрозуміло, що на перші три запитання студенти зможуть дати правильну відповідь. На останнє дає відповідь викладач. Його відповідь може бути і значно ширше.

Тригонометрія виникла в глибокій давнині як допоміжний розділ астрономії. Давні історики приписували створення тригонометрії "батьку грецької астрономії" Гіппарху (II ст. до н. е.). Повний виклад давньогрецької тригонометрії зроблено в "Альмагесті" Птолемея. Там виведено основні тригонометричні співвідношення, але формулювалися вони з допомогою поняття хорди замість лінії синусів розглядали хорду відповідного центрального кута. Птоломей ділив коло на 360 частин, діаметер – на 120, радіус – на 60, а кожну утворену частину – ще на 60 і т. д. Це надавало йому змогу знаходити хорди користуючись шістдесятковою системою.

Хорди були замінені синусами в індійській математиці. Індійці ввели також поняття косинуса і синус-верзуса ($1-cos\alpha$). Тригонометрія як наука оформилась в працях математиків Близького і Середнього Сходу (IX–XII ст.). Важливе значення для розвитку тригонометрії мало нововведення, зроблене Абу

Райхан Беруні – він замінив радіус круга, що приймався як і в Птолемея у 60 частин, на одиницю. Детальне пояснення цьому він дав у третій книзі "Канона Мас'уда": "Ми віддаємо перевагу для числа діаметра таке, щоб воно було з двох частин, тобто одиниць, аби половина діаметра, яка називається найбільшим синусом, а іноді – повним синусом, була одиницею. Тоді в наших діях відпадає необхідність згадувати множення на нього і ділення на нього, а також перетворення його в мінути чи пониження на розряд, як це все було б необхідним, якби він мав 60 частин" [433, с. 81].

2.2.3. На практичних заняттях з елементарної математики історичний матеріал може бути представлений через *історичні задачі*. Історичні задачі – це задачі, збережені історією, що передаються від покоління до покоління. Це – задачі з давніх історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками або іншими історичними постатями, задачі з давніх підручників і трактатів, журналів та інших друкованих джерел, а також задачі з математичних фольклорів різних народів. Багато задач, які дійшли до нас з сивої давнини, цікаві не стільки в математичному, скільки в історичному розумінні: вони дають можливість сучасникам оцінити рівень розвитку математики в різні часи.

Історичні математичні задачі стимулюють підвищення інтересу студентів до вивчення елементарної математики, розширюють науковий світогляд і піднімають загальний рівень культури. Історичні задачі сприяють не лише пожвавленню занять, а й дають можливість більш ґрунтовно і свідомо засвоювати математичні поняття. Аналіз історичних задач та їх розв'язувань спонукає студентів до знаходження різних способів розв'язування та визначення найбільш раціонального.

Розглянемо, які історичні задачі можна використовувати на практичних заняттях з елементарної математики.

Програма практичного курсу передбачає розв'язування задач, пов'язаних з подільністю і діленням чисел з остачею.

Задачі на ділення з остачею (як абстрактні так і прикладні) розв'язували математики різних країн і часів. Цікавий спосіб розв'язування таких задач запропонував китайський математик

Сунь–Цзи (III ст.).

Задача. *Знайдіть число, яке від ділення на 3 має в остачі 2, а від ділення на 5 має в остачі 3, нарешті, від ділення на 7–остачу 2.*

Розв'язання. Сунь–Цзи розв'язує свою задачу за таким правилом: "Від ділення на 3 остача – 2, тому візьміть 140. Від ділення на 5 остача – 3, тому візьміть 63. Від ділення на 7 остача – 2, тому візьміть 30. Складіть їх разом, отримаєте 233. Від цього легко відніміть 210, і ми отримаємо відповідь".

Відповідь. Таких чисел безліч ($x = 23 + 105p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$). Сунь-Цзи вказує найменше з них – 23.

Зрозуміло, що такий спосіб не є універсальним, але в той же час він не вимагає умінь розв'язувати системи діофантових рівнянь. Розглянувши авторське розв'язування задачі, викладачу бажано запропонувати студентам розв'язати її звичним для них способом. Складена ними система рівнянь стане хорошою мотивацією для вивчення діофантових рівнянь і їх систем.

Ознайомлюючи студентів з прийомами та способами розв'язування задач на подільність, лектор може продемонструвати один із таких прийомів за допомогою задачі французького математика і філософа Софі Жермен (1776–1831).

Задача. *Довести, що кожне число виду* $a^4 + 4$ *є складене* ($a > 1$).

Розв'язання. Перетворимо вираз

$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$.

Тут $a^2 + 2 + 2a \neq 1$, $a^2 + 2 - 2a = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$.

Тому, $a^4 + 4$ має два різних дільники, відмінні від самого числа й одиниці. Отже, це число складене.

При розгляді ознак подільності доцільно запропонувати студентам для самостійного розв'язування (в аудиторії чи вдома) задачу з журналу "Вестникъ опытной физики и элементарной математики".

Задача. *Сума цифр тризначного числа, записаного в десятковій системі, дорівнює 7. Доведіть, що необхідна і достатня умова подільності цього числа на 7 полягає у тому, щоб цифра одиниць дорівнювала цифрі десятків.*

Історичний матеріал доцільно використати в курсі елементарної математики розглядаючи арифметичні задачі та способи їх розв'язування.

Арифметична задача у традиційному розумінні – це математична задача, в якій всі дані є раціональними числами, а залежності між даними і невідомими можна подати рівняннями першого степеня. Від-

мінність арифметичної задачі від інших математичних задач полягає у способі її розв'язання: допускається введення букв для позначення невідомих, але не дозволяється виконувати над ними дії. Арифметичний спосіб розв'язування задачі – це спосіб, коли всі математичні дії та логічні операції в процесі розв'язування задачі проводяться над конкретними числами і основою міркувань є розуміння смислу арифметичних дій.

Розв'язування арифметичних задач пронизує увесь курс математики 5–6 класів. У роботі [321] підкреслюється, що для учнів цих класів, в силу переваги у них образного мислення над формальним, саме арифметичний спосіб має стати домінуючим у системі розвиваючого навчання. Тому майбутньому вчителю корисно знати різні способи розв'язування арифметичних задач. Великий арсенал різноманітних способів і прийомів можна побачити у зразках розв'язування старовинних задач. Серед них: спосіб хибного припущення, правило трьох, правило інверсії, зведення кількості роботи до одиниці, оригінальні схеми тощо.

Особливі труднощі виникають в учнів (а інколи й у вчителів) під час розв'язування задач на спільну роботу. Їх можна розв'язувати різними способами, а не лише арифметичним. Цікавий спосіб розв'язування задач на спільну роботу пропонувався в старовинних російських рукописах. Розглянемо одну з них.

Задача. *Чотири теслі хочуть побудувати будинок. Перший тесля один може побудувати будинок за рік, другий тесля може побудувати будинок за два роки, третій – за три роки, четвертий – за чотири роки. За який час вони побудують будинок, якщо працюватимуть разом ?*

Розв'язання за оригіналом. "Возьми число первому плотнику 12, а другому вполы – 6, а третьему $\frac{1}{3}$ – 4, а четвертому $\frac{1}{4}$ – 3. Сочти же все те перечни как 12 да 6 да 4 да 3, станет 25. То стал деловой перечень. Разости же те 12 годов – первое число на дни; умножи с 365–ю дни, придут 4380 дней. Дели же те дни на 25, придет 175 $\frac{1}{5}$ дни, столько они вместе делали. Станет 25 недель 4 $\frac{4}{5}$ часа" [360, с. 13].

Таким чином, у рукописі задача розв'язується зведенням кількості роботи кожного теслі до одного і того ж часу, а саме до 12 років. За 12 років пер-

ший тесля побудує 12 будинків, другий – 6, третій – 4, четвертий – 3, а разом вони побудують 25 будинків. Тому один будинок вони побудують у 25 разів швидше, тобто за $175\frac{1}{5}$ днів.

Заслуговують уваги майбутніх учителів оригінальні схеми, за допомогою яких у давнину розв'язували задачі на суміші.

Задача. *В одного чоловіка була для продажу олія двох сортів: вартість однієї – 10 гривень за відро, а другої – 6 гривень за відро. Скільки частин кожної олії потрібно взяти, щоб отримати відро олії вартістю 7 гривень?*

Розв'язання. Наведемо старовинний спосіб розв'язування задач на суміші за допомогою схеми, зображеної на рисунку 5, що утворюється у такий спосіб:

- Один під одним пишуться вартості кожної олії;
- Ліворуч від них – вартість олії, яку хочуть отримати після змішування;
- Меншу ціну віднімаємо від ціни змішаної олії, а результат записуємо праворуч від більшої ціни;
- Від більшої ціни віднімаємо ціну змішаної олії, а результат записуємо праворуч від меншої ціни.

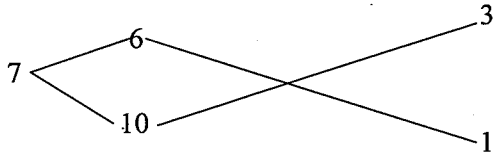


Рис. 5

Отримана схема дає можливість зробити висновок: дешевої олії потрібно взяти втричі більше, ніж дорогої. Отже, щоб отримати відро олії вартістю 7 гривень, потрібно взяти $\frac{1}{4}$ відра олії за 10 гривень і $\frac{3}{4}$ відра олії вартістю 6 гривень [360, с.29].

Розглянувши таку задачу і її старовинний спосіб розв'язання, викладачу варто дати студентам для домашнього завдання інші задачі на змішування, зокрема на змішування трьох компонентів. Наприклад таку.

Задача. *Один чоловік має чай трьох сортів – цейлонський по 5 гривень за фунт, індійський по 8 гривень за фунт і китайський по 12 гривень за фунт. Скільки частин кожного чаю потрібно взяти, щоб отримати чай вартістю 6 гривень за фунт ?*

При розв'язуванні задачі потрібно двічі застосувати прийом, який використовували при розв'язуванні попередньої задачі. Причому перший раз взяти чай з найбільшою і найменшою вартістю, а другий раз – з найменшою та середньою вартістю (рис. 6).

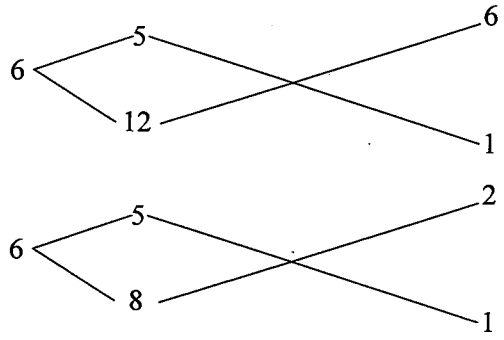


Рис. 6

Отже, щоб отримати чай вартістю 6 гривень за фунт, потрібно взяти 8 частин чаю вартістю 5 гривень і по одній частині чаю вартістю 8 гривень і 12 гривень за один фунт.

Корисно також запропонувати студентам обґрунтувати розглянуті способи і з'ясувати, чи завжди за їх допомогою можна отримати правильну відповідь.

Значна частина курсу елементарної математики відводиться вивченню геометрії. При розгляді чудових точок і ліній в трикутнику студентам бажано повідомити, що деякі властивості трикутників виявили ще античні геометри. Зокрема, вони встановили, що всі три медіани перетинаються в одній точці і всі три бісектриси також перетинаються в одній точці. Італійський математик Д. Чева узагальнив ці твердження і встановив необхідну і достатню умову перетину трьох прямих, що проходять через вершини трикутника. Л. Ейлер довів, що в одному трикутнику ортоцентр, центр вписаного і центр описаного кола лежать на одній прямій (пряма Ейлера), що середини сторін трикутника та основи його висот лежать на одному колі (коло Ейлера). Л. Ейлер довів також багато метричних співвідношень.

Розширенню знань студентів з геометрії сприятиме використання історичного матеріалу під час розв'язування задач про коло та його властивості. Для прикладу зупинимось на геометричних дослідженнях видатного ученого античності Архімеда. Учням і студентам більш відомі його закони фізики і різноманітні винаходи: машина для зрошування полів, гвинт, система важелів, військові метальні машини, способи визначення складу сплавів тощо. Але майбутнім учителям математики слід знати, що Архімед зробив значний внесок у розвиток геометрії. Про це свідчать навіть назви його творів: "Книга про круги, що дотикаються", "Книга про вимірювання круга", "Книга про побудову круга, поділеного на сім рівних частин", "Про кулю і циліндр" тощо. Наведемо одну з теорем Архімеда, яка стосується кола. Ця теорема була високо оцінена арабським математиком Ал-Біруні, який часто використовував її і дав кілька власних доведень [433].

Теорема Архімеда. Якщо з середини дуги, описаної навколо ламаної з двох ланок, опустити перпендикуляр на більшу ланку, то він розіб'є всю ламану на дві частини, які мають рівні довжини.

За допомогою цієї теореми спрощується розв'язання широкого класу задач. Наведемо приклад.

Задача. *Нехай X – довільна точка кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що один із трьох відрізків XA, XB, XC дорівнює сумі двох інших.*

Доведення. Доведемо, що $XA = XB + XC$ (рис. 7).

Опустимо перпендикуляр BH на AX. Тоді $XB = 2HX$, бо $\angle BXA = \angle BCA = 60°$.

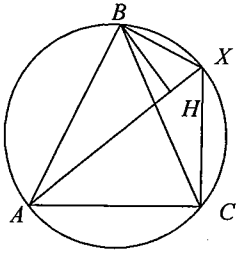


Рис. 7

За теоремою Архімеда, $AH = HX + XC$.

Маємо: $XA = AH + HX = HX + XC + HX = 2HX + XC = XB + XC$.

Багато тверджень з геометрії кола Архімед довів у "Книзі лем". Сформульовані Архімедом леми і задачі, які раціонально розв'язуються з їх допомогою, можна знайти в роботі [74].

Стереометричні задачі Архімеда розглядаються в нашій статті [68]. В ній також подається стереометричний аналог теореми Піфагора (задача Фаульгабера) та інші історичні задачі.

Програма з курсу елементарної математики передбачає розгляд на практичних заняттях розв'язування різнорівневих завдань на атес-

тат про середню освіту, а також конкурсних і олімпіадних завдань. Серед них зустрічаються задачі на знаходження сум послідовностей. Представлено такі задачі і в шкільних підручниках. Досить простий і в той же час загальний спосіб для підсумовування не лише рядів, що розглядаються в елементарній алгебрі, а й для багатьох інших як скінченних, так і нескінченних рядів запропонував В. Я. Буняковський у статті "Изложение элементарного способа для суммирования конечных рядов, рассматриваемых в начальной алгебре, с приложением его к некоторым бесконечным строкам" (1853). Описаний спосіб широко використовувався вчителями в кінці XIX ст. Доцільно з цим способом ознайомити і студентів.

В зазначеній статті В. Я. Буняковський пропонує знаходити суми членів скінченних послідовностей на основі тотожності

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = u_n, \qquad (1)$$

всі члени якої вважаються додатніми.

Для демонстрації його способу знайдемо суму ряду

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1)n + n(n+1)$.

Розв'язання. Розглянемо ряд

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n(n+1)(n+2)$,

тоді відповідно до рівності (1) отримаємо:

$3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 3 \cdot n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)$,

звідки легко отримати шукану суму:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Для підсумування деяких нескінченних рядів В. Я. Буняковський виводить рівність

$$u_1 = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + (u_4 - u_5) + \ldots \qquad (2)$$

Цією рівністю користуються для обчислення, наприклад, суми ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots .$$

За бажанням студенти можуть самостійно ознайомитись з цим способом, а також способами знаходження сум квадратів і кубів натуральних чисел, сум квадратних, п'ятикутних, пірамідальних чисел і т. д., які запропонував В. Я. Буняковський.

Розв'язування історичних задач служить одним із шляхів активізації пізнавальної діяльності студентів і вказує на особливу педагогі-

чну цінність цих задач як одного з ефективних способів створення проблемних ситуацій.

На практичних заняттях викладач може використовувати історичні задачі як для проведення мотивації вивчення нової теми (зацікавити студентів, дати їм зрозуміти, що питання цієї теми цікавили математиків та вчених давнини), так і при закріпленні нового матеріалу: запропонувати студентам розв'язати історичну задачу, підібрану відповідно до теми практичного заняття, одним із способів, які вони знають, а потім продемонструвати те розв'язання, яке наводять видатні математики і вчені давнини. Студентам буде цікаво дізнатися, на якому науковому рівні знаходилася елементарна математика, чим вона приваблювала не лише математиків, а й поетів, художників, людей різних професій у різні епохи. Варто пропонувати такі задачі не лише на практичних заняттях, а й давати їх для домашнього виконання.

Історичний матеріал у різних формах (коротке повідомлення, біографічна довідка, історична задача, творче завдання для самостійної роботи) можна використовувати з різною метою і на різних етапах навчання. Наведені приклади демонструють освітні, розвиваючі та виховні функції історизмів у навчальному процесі. Впровадження історичного матеріалу в курс елементарної математики сприяє розвитку інтересу студентів до навчального предмету, активізації їх навчально-пізнавальної діяльності, а вцілому – підвищенню математичної культури майбутніх учителів.

Спеціального дослідження, на нашу думку, потребує проблема створення інтегрованого курсу"Елементарна математика та історія її розвитку" для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

2.3. Елементи історії математики в курсах вищої математики

2.3.1. Фундаментальна підготовка майбутніх учителів математики відбувається під час вивчення вищої математики, окремі кур-

си якої охоплюють основні галузі сучасної математики. Наука математика будується на принципах строгої об'єктивності отримуваних знань, всі особистісні та суб'єктивні моменти з неї беззастережно вилучаються. Сучасні математичні знання – абстрактні або максимально ідеалізовані, до того ж вони виражені за допомогою системи штучної мови. Завдяки цьому вони набувають необхідної точності, однозначності та здатності до концентрації й ущільнення. Але саме ці обставини створюють труднощі для сприйняття і засвоєння математичних знань.

Добираючи зміст навчального предмету, що відповідає певній математичній галузі, не можна обмежуватися лише сухим викладом об'єктивованого змісту науки, бо такі знання поповнюють лише когнітивний компонент освіти майбутнього вчителя математики. Таке навчання не спроможне впливати на особистісну і ціннісну сфери особистості, не розвиває інтерес у студентів, не сприяє активізації їх навчально-пізнавальної діяльності.

Сучасні тенденції оновлення змісту освіти передбачають, крім іншого, його культуровідповідність, гуманітаризацію й особистісну орієнтацію. Ефективним засобом оновлення змісту математичної освіти у вказаних напрямах має стати історія математики.

Історія науки вводить нас у творчу лабораторію вчених, вчить бачити в математиці не суму незмінних правил і догм, а результат довгих і наполегливих пошуків багатьох поколінь, показує, що за кожним математичним фактом, за кожною науковою теорією приховані зусилля конкретних дослідників. Історія математики репрезентує багатий матеріал про діяльність учених як яскраве свідчення величі їх праці і наочний показник великої цінності наукового знання. Таке реальне життя науки, включене до змісту навчальної дисципліни, здійснює суттєвий вплив спеціальних математичних знань на психологічну структуру особистості, а загалом – і на формування математичної культури майбутнього вчителя математики. З цього приводу Г. О. Михалін у монографії "Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу" відзначає, що математичну культуру вчителя математики, крім іншого, визначають знання найяскравіших фактів з

історії математики й уміння використовувати факти з історії математики для підвищення інтересу учнів до математики та активізації процесу навчання математики [340, с. 18].

Викладаючи вищу математику в педагогічному університеті, слід представляти її, особливо першокурсникам, в науковому, історичному і культурному аспектах. Історичний підхід у навчанні служить сильним і дієвим засобом у боротьбі з догматизмом і формалізмом, сприяє свідомому засвоєнню математичних знань і формуванню творчої особистості. Проте на практиці, зокрема у побудові навчальних курсів, це враховується не завжди. Про це слушно зауважував академік А. М. Колмогоров у вступі до відомої книги А. Лебега: "*...У математиков существует наклонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и непригодным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений*" [316, с. 10].

Для методики математики вищої школи велике значення має розв'язання проблеми правильного співвідношення історичного і логічного в змісті навчального матеріалу. В практиці навчання вона часто розв'язується неправильно – шляхом надання переваги одній з двох крайностей: 1) зміст навчання має виключно абстрактний характер; 2) у навчальному курсі намагаються відтворити історичний шлях розвитку відповідної галузі знань.

Наші дослідження показали, що ефективними є такі форми використання історії математики в процесі навчання вищої математики:

– самостійне вивчення студентами історичного матеріалу, який подається в підручниках і навчальних посібниках;

– вступна лекція на початку викладу навчальної дисципліни;

– історичні екскурси;

– історико-методологічні повідомлення;

– коротка біографічна довідка про вченого, ім'я якого згадується в процесі навчання;

– демонстрація студентам портрета вченого, його праць та фраг-

ментів з них;

– ознайомлення студентів з висловлюваннями про математику і математиків;

– розв'язування історичних задач;

– самостійне опрацювання студентами життєвого і творчого шляху видатних математиків;

– творча робота студентів з історичними відомостями у процесі підготовки курсових, дипломних та інших студентських наукових робіт.

На конкретних прикладах продемонструємо, як ті чи інші форми можуть бути реалізовані під час навчання математичних дисциплін в педагогічному університеті.

Історичні відомості, що стосуються вищої математики, подаються окремими виданнями [183], [198], [249], [418], [513], додатками до підручників чи навчальних посібників або у вигляді вкраплень до відповідних тем. В підручнику для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів В. М. Костарчука і Б. І. Хацета "Курс вищої алгебри" історичні відомості подаються трьома блоками, які розміщуються після кількох розділів і розкривають історію розвитку відповідних понять, правил і теорій. Наприклад, після розділів "Детермінанти" і "Системи однорідних рівнянь" подаються історичні зауваження, прочитавши які студенти дізнаються про такі факти.

Загальний метод розв'язування систем лінійних рівнянь вперше досить докладно розробили китайські математики. У 1683 році японський математик Кова-Секі удосконалив цей метод, наблизивши його до ідеї теорії детермінантів. Вивченням систем лінійних рівнянь у 1678 р. зацікавився Г. Лейбніц. Він запропонував для позначення коефіцієнтів систем рівнянь подвійні індекси і завдяки цьому дістав формули для побудови чисельників і знаменників формул розв'язків (по суті – детермінантів). Однак ці результати Г. Лейбніца не були вчасно опубліковані. У 1750 р. швейцарський математик Г. Крамер опублікував без доведення загальні правила побудови розв'язку системи лінійних рівнянь. Цей результат дістав назву – правило Крамера.

Згодом детермінанти досліджують видатні математики XVIII–XIX ст. – Е. Безу, О. Вандермонд, П.Лаплас, К. Гаусс, О. Коші, М. Лобачевський, К. Якобі, М. Остроградський та ін. Найбільш повний виклад теорії детермінантів дав О. Коші у 1815 р. Він увів термін "детермінант" і скорочені по-

значення детермінантів, близькі до сучасних.

М. Остроградський (1801–1861) і К. Якобі ввели до розгляду функціональні детермінанти, елементами яких є функції. З цього часу апарат детермінантів широко використовується не тільки в алгебрі, а й в аналізі, геометрії, теорії диференціальних рівнянь та інших галузях математики [298, с. 124].

Автори "Курсу вищої алгебри" подають в кінці підручника список літератури, в якому виділено основну літературу з історії алгебри і деякі класичні навчальні підручники. Цей матеріал викладачі можуть використати для консультацій з підготовки курсових робіт і виступів на конференціях, а також іншої індивідуальної роботи з студентами.

Навчальний посібник Л. С. Атанасяна і В. Т. Базилева "Геометрія, Ч. II", який розрахований на студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів, містить історичний матеріал у різних формах. Серед них:

– короткі відомості про творців геометрії: Ж. Дезарга, Г. Монжа, Ф. Хаусдорфа та інших в окремих параграфах;

– характеристика внеску окремих математиків у розвиток деякої теорії (стосовно загальної теорії випуклих многогранників, наприклад, повідомляється: "Роботами О. Д. Александрова були в основному завершені дослідження з метричної теорії многогранників, які розпочав ще О. Коші. На основі цих досліджень А. В. Погорєлов створив основи загальної теорії випуклих поверхонь" [22, с.166]);

– окремий розділ "Історичний огляд обґрунтувань геометрії. Елементи геометрії Лобачевського";

– додатковий матеріал в кінці посібника "З історії геометрії", в якому подаються короткі відомості з історії проективної і диференціальної геометрії.

Великий історичний нарис виникнення основних ідей математичного аналізу міститься в навчальному посібнику Г. М. Фіхтенгольца "Основи математичного аналізу" [469, с. 411–434].

У навчальному посібнику М. І. Жалдака та інших [215] "Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології" перший параграф присвячено історії розвитку теорії ймовірностей та її застосувань.

Цікавий і різноманітний історичний матеріал міститься також у роботах: Г. О. Михаліна, Л. І. Дюженкової "Елементи теорії множин і тео-

рії чисел", Л. М. Вивальнюка "Числові системи", О. І. Бородіна "Теорія чисел", С. Т. Завала, С. С. Левіщенка та ін. "Алгебра і теорія чисел".

2.3.2. Знання історичних аспектів математики допомагає викладачам вищої математики знайти вдале розв'язання важливої проблеми – з чого починати виклад математичної дисципліни і якою має бути послідовність викладу всього навчального матеріалу. Важливим елементом гуманізації навчання є висвітлення у першій лекції таких питань: визначення місця навчальної дисципліни в математичній науці та системі інших навчальних дисциплін; коротка характеристика історії виникнення та подальшого розвитку відповідної наукової галузі; предмет і методи відповідної галузі та їх еволюція тощо.

Саме так пропонує будувати вступну лекцію з аналітичної геометрії (навчальна дисципліна і галузь науки) М. В. Працьовитий, визначивши її структуру у такий спосіб:

– Предмет та метод аналітичної геометрії.

– Аналітична геометрія і геометрія елементарна (порівняльний аналіз).

– Історія розвитку аналітичної геометрії.

– Сучасна геометрія [384, с.14].

Зацікавить студентів, а також сприятиме активізації їх навчально-пізнавальної діяльності історичний екскурс лектора на початку вивчення нарисної геометрії.

Нарисна геометрія вивчає способи зображення просторових фігур на площині та розв'язування просторових задач на площині за допомогою цих зображень.

Походження нарисної геометрії тісно пов'язано з практикою архітекторів, каменерізів, художників, інженерів. Прообразами ортогонального проектування, що лежать в основі нарисної геометрії, є плани. Ними користувалися древні, зводячи будинки і забудовуючи міста. Вже в античному світі мистецтво зображати навколишні предмети досягло високого ступеня досконалості, залишаючись, проте, у рамках мистецтва.

Основи теорії і практики перспективи закладено вченими Західної Європи. Відомий німецький художник, математик і теоретик живопису А.Дюрер близько підійшов до відкриття нарисної геометрії. Він не тільки

розвинув теорію перспективи, але і значно просунув розробку основ ортогонального проектування. В останній книзі геометричного трактату "Чотири книги про пропорції" (1528) він розглядав проекції різних частин людського тіла на дві і три взаємно перпендикулярні площини. А.Дюрер виклав також засоби зображення гвинтових ліній і конічних перерізів, розв'язав задачу побудови тіней куба.

У 1640 р. вийшла невеличка брошура Ж.Дезарга, у якій викладались основи архітектурного креслення і теорії різання каменів. Вчений відносив просторовий об'єкт до трьох взаємно перпендикулярних площин і проектував його на одну з площин координат, одержуючи так звану першу проекцію. Потім об'єкт разом з осями і першою проекцією проектував на площину зображення, де, таким чином, утворювалися дві проекції; з їх допомогою вже точно можна побудувати даний об'єкт. Розвиток цього методу надалі призвів до створення аксонометрії.

Формування нарисної геометрії в особливу математичну науку закінчилося в роботах Г. Монжа. Для одержання фахової освіти 18–літній Г. Монж став навчатися у школі військових інженерів. Його зарахували не в офіцерський клас (не мав дворянського походження), а на відділення кондукторів, де готували майстрів і виконавців робіт. Учні там опановували елементи алгебри, геометрії, креслення, виготовляли моделі склепів тощо.

Займаючись побудовами, Г. Монж зацікавився проблемами ортогонального проектування. Як казав П.Дюпен, саме різання каменів, їх застосування в архітектурі і фортифікації дали можливість Г. Монжу розвити свої методи нарисної геометрії. Щоб запобігти громіздким обчислювальним процедури для упорядкування планів військових споруд, Г. Монж застосував геометричні методи, заклавши тим самим основи нарисної геометрії як самостійної наукової дисципліни.

Г. Монж розробив цю дисципліну в 1760–1770 рр. Вона виявилась настільки важливою для військової справи, що понад 20 років уряд Франції зберігав її як військову таємницю. З 1795 р. Г. Монж читав у політехнічній школі лекції про ортогональне проектування на площині. У 1798–1799 рр. він опублікував уже розроблений курс нарисної геометрії у вигляді підручника, що складався з п'яти розділів.

У своїх лекціях „Нарисна геометрія" (1799 р.) Г. Монж уточнив основну мету і завдання своєї дисципліни:

– дати методи для зображення на папері, що має тільки два виміри – довжину і ширину будь-яких тіл природи, які мають три виміри – довжину,

ширину і висоту, при умові, що ці тіла можуть бути точно задані;

– дати засіб визначати форми тіл і виводити всі закономірності, що випливають із їхньої форми і їхнього взаємного розташування, на підставі точного зображення.

Це був рідкісний випадок, коли нова дисципліна раптово з'явилась з уже утвореним предметом, своїми методами й чітко визначеними межами застосувань.

У вступній лекції з математичного аналізу варто зауважити, що сучасний порядок викладання тем математичного аналізу пов'язаний з вимогами до математичної строгості і відрізняється від того шляху, яким математичний аналіз розвивався історично. Перші теми курсу присвячені дійсним числам, пізніші – теорії границь, і лише потім починається систематичний виклад диференціального та інтегрального числення. Історичний же порядок був якраз оберненим: диференціальне та інтегральне числення зародилося у XVIII ст.; теорія границь стала фундаментом для математичного аналізу на початку XIX ст., і тільки у другій половині XIX ст. була створена чітка концепція дійсного числа, яка обґрунтовувала найбільш тонкі положення самої теорії границь.

Знання цього факту допоможе також майбутньому вчителю зрозуміти, чому тема "Границі" є набагато складнішою, ніж тема "Похідна", а тому вимагає використання усього арсеналу педагогічного інструментарію для її викладання в школі.

Повідомлення та зауваження історико-математичного характеру у вивченні різних тем математичного аналізу не мають на меті підмінити історію математичного аналізу. Вони покликані торкнутися генезису основних понять, створити у студента загальну орієнтацію в хронології найважливіших подій з історії аналізу, гуманізувати зміст курсу, ознайомлюючи слухачів з творцями цієї математичної галузі.

Слід відмітити, що історичні зауваження органічно вплітаються у лекційний курс математичного аналізу, оскільки більшість теорем цього курсу – "іменні" теореми. Розглянемо, якого характеру історичні повідомлення та зауваження доцільно зробити в процесі вивчення окремих тем курсу.

Вивчаючи розділ "Дійсні числа", а саме – питання "Множина ірраціональних чисел", доцільно зауважити, що вперше ірраціональні числа з'явилися ще в середні віки (у вигляді виразів, що містять радикали). У XVIII ст. питання про ірраціональні числа розглядалися у зв'язку з вираженням геометричних величин. Критичний напрямок у математиці, який виник у кінці XVIII – на початку XIX ст., висунув вимогу точного означення основних понять аналізу і строгого доведення його основних положень. Це, в свою чергу, зробило необхідним побудову логічно досконалої теорії ірраціональних, а потім і дійсних чисел на основі чисто арифметичного їх означення. У кінці XIX ст. було створено кілька таких теорій, різних за формою, але по суті рівносильних. Основні з них:

- Теорія Гільберта (аксіоматична теорія),
- Теорія Вейєрштрасса (ґрунтується на десятковому зображенні дійсного числа),
- Теорія Дедекінда (на основі перерізів),
- Теорія Кантора (за допомогою фундаментальних послідовностей).

Однією із важливих теорем, які вивчаються в цьому розділі, є теорема про існування точних меж. Вона "безіменна", тому варто повідомити, що вперше ця теорема (тільки в інших термінах) була сформульована у 1817 році чеським математиком Бернгардом Больцано (1781–1848).

Творчий шлях Б. Больцано цікавий і тернистий. Основні його наукові результати стали відомі і отримали визнання лише у 80–х роках XIX ст., а найважливіший твір "Вчення про функції" опубліковано в 1930 р. Його математичні досягнення довгий час не були відомі широкому загалу через те, що, виступаючи за звільнення своєї Батьківщини (Чехії) від австрійської монархії, Больцано потрапив під таємний нагляд поліції. Його позбавили права публічно виступати і друкуватися, а згодом (1820) звільнили з університету. Лише п'ять робіт з математики побачили світ за його життя, а решту опублікували через сто років. Зараз історичну справедливість відновлено і деякі теореми математичного аналізу носять подвійне ім'я: теорема Больцано – Коші, теорема Больцано – Вейєрштрасса.

Обмаль часу не дає змоги лектору висвітлити досягнення Б. Больцано в розвитку математики, але студентам можна запропону-

вати самостійно ознайомитися з життям і науковим доробком видатного вченого, використавши для цього додаткову літературу. В процесі вивчення наступних тем студенти можуть повідомляти, які поняття і теореми Б. Больцано ввів і обґрунтував раніше О. Коші, К. Вейєрштрасса і Г. Кантора.

Предметом математичного аналізу є функція. Тому після ознайомлення студентів з поняттям функції, з основними способами задання функції, варто коротко зупинитися на генезисі цього поняття.

Виникненню поняття функції передувало введення в математику змінної величини, яке зазвичай пов'язують з іменем французького математика Р. Декарта (1596–1650). Самий термін функція з'явився у роботі Г. Лейбніца у 1692 р. і використовувався для характеристики різних відрізків, пов'язаних з точками деякої кривої. Перше означення функції, яке вже не було пов'язане з геометричними уявленнями, дав Й. Бернуллі у 1718 р. Л. Ейлер (1707–1783) у 1748 році дав означення функції, за яким вона ототожнювалася з тим аналітичним виразом, яким вона була задана. Він же ввів звичне для нас позначення $f(x)$. М. Лобачевський у 1834 р., а П. Діріхле у 1837 р., означаючи поняття функції, на перший план висувають ідею відповідності між елементами двох числових множин.

На першій лекції з розділу "Теорія границь" варто повідомити, що поняття границі є основою для строгої побудови всього математичного аналізу. Це поняття пронизує сьогодні весь математичний аналіз. Хоча так було не завжди. Як відмічалося раніше, теорія границь була створена пізніше інтегрального і диференціального числення.

Вперше означення поняття границі з'являється у роботі англійського математика Дж. Валліса (1616–1703), датованій 1655 р. Зародки теорії границь можна зустріти і у І Ньютона, він же ввів символ *lim*. Велику роль у створенні і розвитку теорії границь зіграли Л. Ейлер, Б. Больцано та інші. І тільки в руках французького математика О. Коші (1789–1857) теорія границь стала дійовим знаряддям для строгого обґрунтування і логічної побудови всього математичного аналізу. Позиція Коші розвіяла містичний туман, яким до нього були покриті початки аналізу, і отримала загальне визнання. (На нашу думку, варто продемонструвати портрет Коші, відмітити, що Коші належить до "чистих" математиків XIX ст., оскільки він надавав великого значення не тільки гнучкості, але й точності як форм, так і висновків. Роботи Коші, які були присвячені різним галузям математики, відзначалися сучасною строгістю, обґрунтованістю викладок. Математичні

журнали Франції епохи Коші не встигали друкувати його праці).

Що стосується вивчення неперервності функції однієї змінної, то чотири основні теореми цієї теми "іменні" (дві теореми Больцано-Коші, дві теореми Вейєрштрасса). Тому бажано показати портрети Больцано і Вейєрштрасса, відмітивши їх великий внесок у розвиток математики в цілому. Крім того, можна зауважити, що для окремого випадку (коли розглядувана функція є цілим многочленом) теореми Больцано-Коші були сформульовані, без достатнього обґрунтування у роботах Л. Ейлера і Ж. Лагранжа. Відповідну строгість доведення теорем про властивості неперервних функцій отримали лише на основі розвинених у другій половині XIX ст. арифметичних теорій дійсних чисел.

Під час вивчення основ диференціального та інтегрального числення треба звернути увагу студентів на те, що ідеї цього числення зародилися ще в XVII ст. Основоположниками диференціального та інтегрального числення були англійський фізик, астроном і математик Ісаак Ньютон (1642–1727) та німецький філософ і математик Готфрід Лейбніц (1646–1716). Перший з них виходив з механічних ідей (задача про швидкість), а другий – із геометричних (задача про дотичну). Після формулювання означення похідної функції в точці варто відмітити, що самий термін "похідна" був введений Ж. Лагранжем на межі XVIII і XIX ст. І.Ньютон користувався терміном флюксія.

Для актуалізації опорних знань студентів доцільно продемонструвати їм портрети цих вчених і з'ясувати, які відомості про життєвий і творчий шлях І.Ньютона і Г. Лейбніца студенти отримали в школі. Для підвищення інтересу студентів до теми і систематизації отриманих знань бажано показати різні символи, які використовувалися для позначення похідної:

$\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$	(Г. Лейбніц);
$\dot{y}$ (похідна часу)	(І. Ньютон);
y' або $f'(x_0)$	(Ж. Лагранж);
Dy або $Df(x_0)$	(О. Коші).

Після введення означення диференціала функції варто зауважити, що поняття диференціала і самий термін "диференціал" (від латинського слова *differentia*, що означає різниця) належить Г. Лейбніцу, який точного означення цьому поняттю не дав. Поряд з диференціалами Г. Лейбніц розглядав частки двох диференціалів, що рівносильно зараз сучасному позначенню похідних $\frac{dy}{dx}$. Саме диференціал був для Г. Лейбніца основним поняттям. І тільки з часів О. Коші, який своєю теорією границь створив фундамент для аналізу і вперше чітко визначив похідну як границю, стало звичним спочатку розглядати похідну, а поняття диференціала будувати вже на основі похідної.

Всі теореми теми "Теореми про середнє значення" – "іменні". Тому бажано на лекції дати студентам таке домашнє завдання: підготувати коротку біографічну довідку про П'єра Ферма, Мішеля Ролля і Жозефа-Луї Лагранжа. На практичному занятті під час розв'язування задач на застосування відповідних теорем можна обговорити відомості, підготовлені студентами.

Детальніше про використання історизмів у процесі навчання математичного аналізу в педагогічному університеті можна прочитати в нашій роботі [45].

Матеріал з історії розвитку математики допоможе викладачам в процесі навчання вищої математики виховувати у студентів патріотизм і гордість за свою Батьківщину. Наприклад, програма курсу математичного аналізу передбачає в розділі "Невизначений інтеграл" вивчення теми "Інтегрування раціональних функцій". В процесі вивчення цієї теми студенти знайомляться з методом М. В. Остроградського, за допомогою якого, не виконуючи попередньо інтегрування і не розкладаючи знаменник на множники, можна виділити раціональну частину інтеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$. А саме: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$, де $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний дріб, $Q_1(x)$ – найбільший спільний дільник $Q(x)$ і $Q'(x)$, $Q_2(x)=\frac{Q(x)}{Q_1(x)}$, $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – мно-

гочлени степеня відповідно на одиницю менше, ніж степені многочленів $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$.

Їх можна знайти методом невизначених коефіцієнтів з тотожності $\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Ця формула дає змогу виділяти раціональну частину інтеграла не виконуючи інтегрування і не розкладаючи знаменники на множники.

Пояснюючи студентам цей метод викладач має чудову нагоду зробити короткий історичний екскурс, скажімо, так:

- Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) – славетний український математик і механік, видатний вчений, організатор наукової школи прикладної математики і механіки, талановитий педагог і прогресивний реформатор математичної освіти.

Багато теорем і формул Остроградського увійшли в різні математичні курси. Добре відомі математикам усього світу метод інтегрування Остроградського, правило Остроградського, формула Остроградського і таке ін. На жаль, його ім'я не завжди згадується. Через непорозуміння досі говорять про теорему Ліувілля, метод Карно, принцип Рімана, хоч пріоритет у цих і багатьох інших питаннях належить саме М. Остроградському. Видатні заслуги М. В. Остроградського визнані усім науковим світом. Його обрали академіком Російської, Туринської, Римської, Американської академій, членом-кореспондентом Паризької академії наук та ін.

Студентам бажано повідомити, що детальніше про життєвий і творчий шлях нашого співвітчизника, а також про Перший український математичний конгрес, який проводився до 200–річчя від дня народження вченого, можна прочитати в такій літературі: [52], [361], [500] тощо.

Вивчення розділу "Кратні інтеграли" може завершитися зауваженням такого характеру. Поняття подвійного інтеграла встановив у 1769 р. Л. Ейлер і на різних прикладах показав, як його обчислювати і застосовувати. Слідом за ним Ж. Лагранж прийшов до потрійних інтегралів (1773 р.) і розглянув для них питання про перетворення змінних. У 1836 році М. В. Остроградський у повідомленні Петербурзькій академії наук на тему "Про перетворення змінних у кратних

інтегралах" встановив неправильність міркувань Ж. Лагранжа і дав оригінальне тлумачення цього питання.

Після доведення формули Остроградського (розділ "Поверхневі інтеграли") варто зробити застереження: інколи формулу Остроградського пов'язують з іменем Гаусса. Насправді ж у Гаусса зустрічаються тільки окремі випадки цієї формули, причому кожен раз заново дається їх виведення. У загальній формі ця формула була вперше подана у 1828 р. М. Остроградським, який застосував її до питання про поширення тепла у твердому тілі.

В курсі лінійної алгебри студенти вивчають векторні простори і, зокрема, евклідовий векторний простір. На практичних заняттях пропонується розв'язати таку задачу: "Довести, що в евклідовому векторному просторі Е для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність Коші-Буняковського $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$". Розв'язування цієї задачі дає можливість викладачу продемонструвати зв'язки між різними розділами математики, наступність між програмами середньої та вищої школи, а також подати короткі відомості про визначного вченого В. Я. Буняковського, який народився в Україні.

В середній школі, у курсах елементарної математики та математичного аналізу нерівність Коші-Буняковського традиційно записується у такому вигляді

$$(x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^2(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2)^2.$$

Для аналітичної геометрії та лінійної алгебри характерним є використання її векторної форми. Але де б студенти не зустрічалися з цією формулою, викладачам бажано наголосити, що Віктор Якович Буняковський (1804–1889) народився і провів дитячі роки в м. Барі на Вінниччині. Основні його праці стосуються теорії чисел, теорії ймовірностей та її застосувань. Чимало його праць присвячено питанням математичного аналізу, геометрії й алгебри. У математичному аналізі велике значення має відкрита В. Я. Буняковським у 1859 році нерівність

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [\psi(x)]^2 dx \ge \left[\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Іноді її називають "нерівністю Шварца", хоча Шварц вивів її лише в 1875 р., тобто на 16 років пізніше. Заслуги В.Я.Буняковського високо поціновуються сучасниками і нащадками. Він був віце-президентом і почесним віце-президентом Академії наук, почесним членом усіх російських університетів і багатьох наукових товариств, зокрема Харківського. Академія наук заснувала премію його імені за кращі твори з математики. Детальніше в роботах [251], [317], [405], [503] та ін.

Такі приклади виховують у молодого покоління гордість за державу і народ. Відрадно усвідомлювати, що поруч з Ж. Фур'є, О. Коші, С. Пуассоном, К. Якобі і К. Гауссом працювали і досягли значних успіхів у розвитку математики вихідці з України.

В курсі геометрії історичні відомості можуть стосуватися таких питань: створення та розвиток векторного числення, конічні перерізи, геометричні перетворення, перша теорема топології, односторонні поверхні, неевклідова геометрія тощо.

Історичні довідки про створення неевклідової геометрії традиційно присутні в навчальній літературі і використовуються викладачами на лекціях. Але не всі викладачі звертають увагу на те, що матеріал цей важкий і його можуть усвідомити далеко не всі студенти. Викладачу слід повідомити студентам, що ідеї М. Лобачевського виявились незрозумілими навіть великим математикам того часу і досить довгий час не визнавалися.

Не отримав визнання за свого життя й угорський математик Янош Бойя. Його „Appendix" також містив основи неевклідової геометрії. Свої міркування стосовно V постулату побоявся опублікувати К. Гаусс.

Ситуація суттєво змінилась, коли італійський математик Е. Бельтрамі знайшов модель для неевклідової геометрії (1868 р.). Він показав, що існує реальна поверхня, на якій частково виконується планіметрія Лобачевського. Ця поверхня утворюється обертанням трактриси навколо осі ОУ і називається псевдосферою (рис. 8).

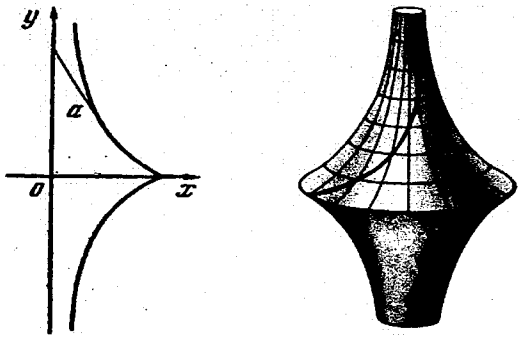


Рис. 8

Внутрішня геометрія псевдосфери ізоморфна внутрішній геометрії гіперболічної площини М. Лобачевського. Образом прямих Лобачевського стали геодезичні лінії на поверхні псевдосфери. За допомогою формул геометрії Лобачевського можна розв'язувати псевдосферичні трикутники.

Цей факт мають використати викладачі і максимально унаочнювати виклад матеріалу про неевклідові геометрії.

В роботі "Досвід тлумачення неевклідової геометрії" (1868) Е. Бельтрамі довів несуперечливість геометрії Лобачевського для деякої обмеженої частини площини. В 1901 році Д. Гільберт довів, що здійснити інтерпретацію всієї площини М. Лобачевського способом Е.Бельтрамі неможливо.

Згодом Г. Ріман створив ще одну неевклідову (еліптичну) геометрію. Планіметричною моделлю геометрії Г. Рімана є сфера, якщо вважати кожну пару діаметрально протилежних їй точок однією точкою. Площина Г. Рімана представлена евклідовою сферою. На сфері немає прямих ліній, але є великі кола.

К. Гаусс, порівнюючи гіперболічну, евклідову та еліптичну геометрії, відмітив, що в першій з них через точку поза прямою можна провести до цієї прямої дві паралельні прямі, а в другій – одну, а в третій – жодної.

Унаочнення також слід використовувати в процесі вивчення топології. Суттєву роль у створенні топології відіграли розв'язування Ейлером задачі про сім кенігсберзьких мостів і різні узагальнення теореми про многогранники (В + Г– Р = 2, де В – кількість вершин, Г – кількість граней, Р – кількість ребер опуклого многогранника). Ця теорема справедлива не тільки для опуклих многогранників, але і не для всіх.

Виняток з теореми Ейлера вперше помітив С. Люільє розглядаючи мінералогічну колекцію кристалів, серед яких були непрозорі кубічні кристали сірнистого свинцю, включені в середину прозорих кристалів польового шпату. Їх вигляд наштовхнув ученого на думку, що для многогранника з порожниною теорема Ейлера не правильна. Якщо уявити собі куб зі скла, всередині якого розташовано куб із заліза, то для кожного з кубів є правильним В + Г – Р = 2, отже для куба з кубічною порожниною будемо мати: В + Г – Р = 4.

С. Люільє помітив також, що теорема Ейлера не правильна і для многогранників з кільцевими гранями – "куб, на верхню грань якого припаяно інший куб" (рис. 9), для нього В + Г – Р = 3, і для многогранників типу "картинної рами" (рис.10), топологічно еквівалентних тору, – для них В + Г – Р = 0.

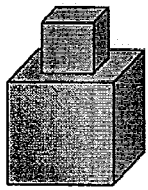


Рис. 9

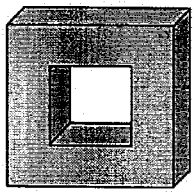


Рис. 10

В 1813 р. в роботі "Мемуар про поліедрометрію" він опублікував свої результати вказавши, що для многогранників, які мають p наскрізних отворів, має місце загальніше співвідношення: В + Г – Р = 2–2p. С. Люільє гадав, що знайшов усі виняток з теореми Л. Ейлера. Однак в 1832 р. німецький математик Геєсель знайшов нові винятки – це "многогранники-близнюки", які спаяні уздовж загального ребра, або мають загальну вершину.

Теорема Ейлера про многогранники і його розв'язання задачі про сім кенігсберзьких мостів стали першими паростками нової науки, яка сьогодні відома під назвою топологія.

Термін „топологія" вперше з'явився в роботі німецького математика і фізика Й.Лістінга „Попередні дослідження з топології" (1847р.). Й. Лістінг сам придумав цей термін, створивши його з грецьких слів *τοπος* – місце і *λογος*-вчення, і пропонував замінити ним термін І. Лейбніца „geometria situs". Як аргумент з цього приводу він висловлював такі думки: слово геометрія нагадує про вимірювання, яке не відіграє ніякої ролі в топології; термін І. Лейбніца „geometria de position" вже застосовується для позначення проективної геометрії.

2.3.3. Особливо ефективно можна використовувати історичні відомості на практичних заняттях з вищої математики. Наприклад, вивчаючи застосування визначеного інтеграла до знаходження площ плоских фігур, студентам доцільно запропонувати задачі, сформульовані і розв'язані видатними математиками:

1. Задача Торрічеллі і Роберваля. *Показати, що площа арки циклоїди дорівнює потроєній площі круга, що її утворює.*

2. Задача Торрічеллі. *Довести, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком показникової функції, пропорційна різниці значень цієї функції на кінцях відрізка.*

3. Задача Архімеда. *Обчислити площу фігури, обмеженої спіраллю Архімеда $\rho = a\varphi$ ($\varphi \in [0;2\pi]$) і полярною віссю.*

4. Задача Х. Гюйгенса і П. Ферма. *Довести, що площа фігури, обмеженої цисоїдою і її асимптотою, дорівнює потроєній площі круга, що її утворює.*

Ці задачі зацікавлюють студентів. Вони не лише не виходять за межі навчального матеріалу, а й сприяють формуванню у студентів умінь використовувати вивчені формули на практиці.

Розглядаючи на практичному занятті знаходження сум числових рядів, студентам, крім інших, слід пропонувати історичні задачі, які можна розв'язувати і в шкільному курсі математики. Наприклад.

5. Задача Х. Гюйгенса. *Знайти суму рядів*:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)};\ 2)\sum\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Вказівка. Скористатися тим, що:

$$1)\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$2)\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

а також означенням суми ряду.

Розвитку творчого мислення студентів, використанню отриманих знань у нестандартних умовах сприятиме розв'язування задачі Я. Бернуллі під час систематизації знань з теми "Теорія рядів".

6. Задача Бернуллі. *Довести, що* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}=e-1$.

Доведення. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1+1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = e - 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = e - 1,$$

оскільки $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ отримуємо із ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ при $x = 1$.

Індивідуальні творчі завдання з лінійної алгебри можна пропонувати студентам за допомогою спеціальних карток, на яких подані способи розв'язування рівнянь чи систем рівнянь у давнину. Завдання для студентів: ознайомитися із запропонованим способом розв'язування і порівняти вказаний спосіб з сучасним. Такі завдання можуть перерости у студентські наукові роботи. Для прикладу наведемо картку, в якій демонструється спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь китайськими математиками в II ст. до н. е. Студент має порівняти його з методом Гаусса (XIX ст.).

Дано систему: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, \\ 2x + 3y + z = 34, \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$

В китайській математиці вона представляла таблицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Перетворення таблиці виконувалися так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть x, y, z. Чим відрізняється запропонований китайськими математиками спосіб від методу Гаусса.

Активне і самостійне вивчення історії математики відбувається в процесі підготовки студентами курсових робіт з вищої математики.

Традиційно на перших трьох курсах навчання студенти пишуть три курсові роботи з вищої математики (алгебра, геометрія, диференціальні рівняння). Теми, що пропонуються, – різні, але майже кожна з них потребує більшою чи меншою мірою використання історичного матеріалу.

Якщо назва курсової роботи в явному вигляді містить ім'я творця математичного поняття, формули чи методу, то висвітлення короткої біографічної довідки названого математика має стати її обов'язковим компонентом. Доцільним також буде розгляд передумов створення відповідних математичних ідей і тверджень. Такого характеру історичний матеріал пропонується розглядати, наприклад, у таких роботах: "Побудови Маскероні", "Числа Фібоначчі", "Застосування принципу Діріхле у геометрії", "Піфагорові числа та Велика теорема Ферма", "Евклідова метрична геометрія" "Диференціальні рівняння Л. Ейлера другого порядку", "Доведення основних теорем шкільного курсу в системі аксіом Вейля", "Теореми Силова", "Аналіз і порівняння різних доведень нерівності Коші про середнє арифметичне і середнє геометричне" та інші.

Багато тем курсових робіт не містять у явному вигляді вказівок на персоналії, але структура і зміст роботи визначає імена математиків, які творили у відповідній галузі. Наприклад, в темі "Поняття про метричні неевклідові геометрії" передбачається висвітлення таких питань: геометрія Лобачевського; модель Пуанкаре для геометрії Лобачевського (на площині); сферична геометрія, модель геометрії Рімана. Розкриваючи тему "Трансцендентні криві" слід охарактеризувати, крім інших, спіраль Архімеда і лемніскату Бернуллі, а також описати історію їх виникнення.

Виконання інших курсових робіт потребує висвітлення історичних аспектів іншого характеру. В роботі "Основна теорема алгебри" можна висвітлити еволюцію самого твердження цієї теореми, різні шляхи і недоліки його доведення, сучасний погляд на основну теорему алгебри та її доведення. Зрозуміло, що такий підхід до роботи вимагає використання великого за обсягом і не простого за змістом історичного матеріалу. Опрацювання літератури з історії математики

також передбачається в процесі підготовки робіт на такі теми: "Циклоїда та її властивості", "Ланцюгові дроби", "Конічні перерізи", "Перша теорема топології", "Комплексні числа" та багато інших.

Історичний матеріал для виконання курсових робіт студенти мають опрацьовувати самостійно. Завдання викладача – правильно спрямувати діяльність студентів, вказавши необхідну літературу і чітко окресливши рамки дослідження.

2.4. Особливості використання історичного матеріалу в курсі методики навчання математики

Курс методики навчання математики спрямований на формування високопрофесійного, компетентного, творчого вчителя математики, готового до постійного підвищення свого наукового і методичного рівня [491, с.6]. В організації вивчення цього курсу органічно поєднуються різні форми аудиторних занять: лекційні, семінарські, лабораторні, а також позааудиторні види діяльності – педагогічна практика, написання курсових і кваліфікаційних робіт, участь в гуртках та інших наукових товариствах.

Аналіз лекційного курсу методики навчання математики показує, що багато із запропонованих для висвітлення тем сприйматимуться студентами свідоміше і з більшим інтересом, якщо у процесі їх висвітлення використовувати історичний матеріал. На наш погляд, матеріалом з історії математики слід ілюструвати виклад таких питань: *методи навчання математики, підготовка вчителя до уроку математики, факультативні заняття, позакласна робота з математики, підручники з математики, задачі у навчанні математики; специфіка навчання математики в школах різного профілю та багато інших.*

Продемонструємо це на конкретних прикладах.

1. *Методи навчання математики.* Висвітлення теми буде неповним, якщо не згадати про історико-генетичний метод навчання, розкривши його позитивні і негативні сторони, а також особливості використання. Розуміння студентами цього методу і знання основних

етапів розвитку окремих математичних дисциплін допоможе їм у майбутньому обрати правильний підхід до вивчення окремих шкільних тем і математики в цілому.

В основі історико-генетичного методу лежить ідея про те, що навчання математики в основних рисах має повторювати шлях розвитку науки математики. Доцільність такого методу підтверджується практикою і поділяється багатьма вченими. Серед них: Дж. Валліс, В. Спенсер, В. Бобинін, А. Пуанкаре, П. Каптєрєв, В. Давидов та інші. Зокрема, відомий французький математик і філософ Анрі Пуанкаре писав: "Вихователь повинен змусити дитину пройти через ті самі етапи, що і його предки; швидше, але не руйнувати етапи. Ось чому історія науки має бути нашим головним провідником". Подібних думок дотримувались і багато інших спеціалістів.

На підтвердження актуальності використання історико-генетичного методу в умовах сучасної школи можна навести такі приклади.

З історії шкільного курсу математики відомо, що вивчення алгебри може будуватися на різних основах і, відповідно, починатися з перетворення виразів, формування поняття функції, розв'язування рівнянь. Варто проаналізувати: як давно люди навчилися розв'язувати різні види рівнянь і навіщо вони це робили; як змінювалися і удосконалювалися способи запису та методи розв'язування рівнянь; звідки походить назва "Алгебра" і зіставити ці факти з процесом творення алгебраїчної символіки та виникненням поняття функції. Стає зрозумілим, що будувати шкільний курс алгебри починаючи з алгебраїчних виразів – надто формально. Майже цілий рік учні вивчатимуть степені, одночлени, многочлени та дії над ними не розуміючи, навіщо все це потрібно.

Історичний підхід у вирішенні цього питання дає можливість створити мотиваційну базу для свідомого вивчення алгебри. Продемонстувавши учням ланцюжок історичного розвитку: задача – рівняння – вирази, вчитель досить природно і переконливо може мотивувати вивчення кожної з тем. Рівняння потрібні, щоб розв'язувати задачі, зокрема практичного характеру, а перетворювати вирази необхідно для того, щоб розв'язувати складніші рівняння. Розширюються знання про числові та буквені вирази – розширюються і види рівнянь та методи їх розв'язування, а за цим – і клас задач, які можуть розв'язати учні.

Розвиток математики і потреби сучасного суспільства вимагають включення в шкільний курс все нових і нових розділів. Включення елементів теорії ймовірностей і математичної статистики не викликає сумнівів. Як же здійснювати вивчення нових тем в класах різних профілів на доступному для учнів рівні?

Вважається, що зародження теорії ймовірностей відбувалося в процесі листування Б. Паскаля і П. Ферма. Саме тому розпочати знайомство учнів з теорією ймовірностей можна з першого листа Б. Паскаля до П. Ферма від 28 листопада 1654 р.:

"Більшість людей вважають: якщо вони про щось не мають повного знання (а ми ніколи не маємо повного знання), то вони взагалі нічого про це не знають. Я ж упевнений, що такий погляд глибоко помилковий. Часткове знання теж є знання, і неповна впевненість певною мірою має деяке значення, особливо коли мені відома міра цієї впевненості. Хто-небудь може запитати: "А чи можна виміряти міру впевненості числом?" Звичайно, відповім я: особа, що грає в азартні ігри, обґрунтовує свою впевненість саме цим. Коли гравець кидає гральну кістку, він наперед не знає, яка саме кількість очок випаде. Але дещо він усе ж знає.

Наприклад те, що всі шість чисел – 1, 2, 3, 4, 5, 6–мають однакову частку успіху. Якщо ми домовимось прийняти можливість виникнення достовірного за одиницю, то можливість випадання шістки, так само як і кожного з решти п'яти чисел, виразиться дробом $\frac{1}{6}$.

...Якщо шанси настання деякої події і того, що вона не настане, точно збігаються (як, наприклад, при киданні монети шанси випадання орла і решки), то я кажу, що міра впевненості в наставанні цієї події становить $\frac{1}{2}$, тобто вона точно дорівнює мірі впевненості в тому, що ця подія не настане.

... Зауважимо відразу, що міру можливості (впевненості) події я назвав ймовірністю. Я багато розмірковував над вибором відповідного слова і, нарешті, саме його вважаю найвиразнішим. На мою думку, воно повністю відповідає звичайному слововживанню" [409].

Як бачимо в цьому листі вводяться майже всі основні поняття і залежності теорії ймовірностей. В класах не математичного профілю знайомство з понятійним апаратом паралельно з історією його виникнення створює умови для кращого розуміння і запам'ятовування.

Деталізуючи окремі фрагменти згаданого листа, вчитель може поступово вводити учнів у світ нової і цікавої теорії. Такий шлях для них буде доступнішим, цікавішим і кориснішим.

У класах поглибленого вивчення математики, взагалі кажучи, має переважати логіка, але це зовсім не означає, що тут не треба висвітлювати питань з історії виникнення та розвитку теми, що вивчається. Звичайно, не це є головним, але й тут зачитати такий лист не завадить. Він, безумовно, зацікавить обдарованих учнів і, можливо, спонукатиме їх до створення власних теорій.

Якщо до математичних понять і тверджень підходити з позицій історичного розвитку, то вони не будуть вважатися штучними, відірваними від життя, оскільки навчаючись математиці, учні повторюють історичний шлях створення різних теорій. Вміле використання цих відомостей – це один із засобів підвищення ефективності уроку.

2. *Підготовка вчителя до уроку математики.* Розглядаючи цю тему на лекції студентам бажано дати такі поради.

Навчання математики можна супроводжувати історичними екскурсами, відступами, порівняннями, історичними задачами. Такі повідомлення, як правило, мають займати небагато часу, не повинні відволікати учнів далеко в бік від безпосередніх інтересів теми, що вивчається. Виклад історичних відомостей не може бути відірваним від теми уроку. Історичні екскурси можна пропонувати учням на різних етапах уроку і з різною метою.

Наприклад, перед вивченням нової теми – з метою мотивації чи підвищення інтересу до її вивчення.

В курсі алгебри 8–го класу вивчається тема "Теорема Вієта". Як зацікавити учнів? Можна розповісти цікавий момент з життя Франсуа Вієта (1540–1603). За освітою він був юрист і служив при дворі французького короля Генріха IV. Під час війни Франції з Іспанією Ф. Вієт знайшов ключ до шифру, який застосовували іспанці, і засіб стежити за всіма змінами у ньому. Довгий час хід війни змінювався на користь Франції. Коли в Іспанії дізналися, що Ф. Вієт розшифрував їх секретну інформацію, його заочно приговорили до страти у вогні. Врятувало Ф. Вієта тільки те, що король не видав його іспанській інквізиції.

Учням корисно буде дізнатися, що в математику Ф. Вієт увійшов шляхом самоосвіти і став "батьком символічної алгебри". Саме у працях Ф. Вієта алгебра стає наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на символічних позначеннях. Вієт уперше став позначати буквами не тільки невідомі, а й коефіцієнти рівнянь, що дало змогу вивчати загальні властивості рівнянь та їх коренів.

Інший приклад (в процесі вивчення нової теми – як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів).

В 7–му класі вивчається тема "Формули скороченого множення". Вправи до цієї теми досить одноманітні. Теоретичний матеріал займає мало часу. Доцільно згадати, що формули скороченого множення були доведені геометрично ще в VI ст. до н. е. в школі Піфагора, і запропонувати учням вивести їх так, як робили це стародавні греки, використавши рисунок з підручника (рис. 11).

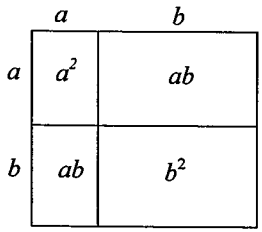


Рис. 11

В класі обов'язково знайдуться учні, які помітять, що площа великого квадрата $(a + b)^2$ дорівнює сумі площ двох квадратів a^2 і b^2 та двох прямокутників $2ab$. Отже, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Після такого доведення бажано запитати в учнів, чи не можна у виведенні формули квадрата двочлена обмежитись геометричним доведенням. Цим самим створюється проблемна ситуація. Якщо учні не можуть самостійно її розв'язати, то вчитель має наголосити, що таке доведення справедливе лише для додатних чисел, а формули скороченого множення справедливі для будь-яких чисел, про що свідчить алгебраїчне доведення. Стародавні греки не знали від'ємних чисел і тому їх влаштовувало геометричне доведення, коли число представляли у вигляді відрізка.

Багато авторів вміщувало ці рисунки чи в теоретичну частину підручника математики, чи в систему вправ, але більшість вчителів обминають їх, так і не усвідомивши їх розвивального характеру.

Після таких конкретних прикладів бажано запропонувати студентам підготувати фрагмент уроку, на якому історичний матеріал використовується після вивчення і закріплення теми – з метою узагальнення та систематизації вивченого матеріалу.

Студенти мають усвідомити, що використання історичного матеріалу "гуманізує" і "гуманітаризує" шкільну математику. Думка, що історичний матеріал забирає багато часу і перевантажує учнів, є хибною. Відомості з історії математики пожвавлюють уроки, дають

можливість більш ґрунтовно і свідомо засвоїти математичні поняття, створюють уявлення про математику як науку, що постійно розвивається. Для прикладу (як зразок для виконання домашнього завдання) студентам можна запропонувати розглянути кілька таких фрагментів уроків у вказаній літературі, або запропонувати підготовлені заздалегідь роздруківки. Одна з них може бути, наприклад, такою.

Фрагмент уроку узагальнення і систематизації з теми "Послідовності. Прогресії"

Послідовності – явище, без перебільшення, унікальне. Історія їх виникнення губиться в глибині віків. Вже у клинописних табличках вавилонян, у єгипетських папірусах, датованих II тисячоліттям до н. е., зустрічаються задачі на арифметичну і геометричну прогресії. Впродовж віків людей приваблювала внутрішня гармонія і строга краса числових рядів.

Піфагор та його учні виділяли з натурального ряду послідовності трикутних, квадратних, п'ятикутних, пірамідальних чисел та встановили багато цікавих залежностей між цими рядами (демонструються рисунки).

Цікаві властивості має послідовність простих чисел. До цього часу для її членів не знайдена ні рекурентна формула ні формула для n-го члена. Їх можна знайти лише відомим із стародавніх часів способом – з допомогою так званого решета Ератосфена.

Італійський математик Фібоначчі у зв'язку із задачею про розмноження кролів увів послідовність, де кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Для цієї послідовності є і рекурентна формула $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, і формула n-го члена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Є й чудові зразки скінченних послідовностей. Наприклад послідовності, що виражають залежність між кількістю правильних многокутників, якими може бути повністю покрита вся площина навколо точки, та числом сторін таких многокутників. Ще в школі Піфагора було встановлено, що такими многокутниками можуть бути лише трикутники, чотирикутники, шестикутники. Відповідні послідовності: 3, 4, 6 та 6, 4, 3.

Задачі, створені на основі арифметичної та геометричної прогресій були і залишаються доброю нагодою випробувати кмітливість та гнучкість розуму.

Задача *("Бахшалійська рукописна арифметика", Індія, VII ст.). Подорожній в перший день проходить дві одиниці шляху, а в кожний наступ-*

ний день – на три одиниці більше. Другий подорожній проходить в перший день три одиниці шляху, а в кожний наступний – на дві одиниці більше. Коли перший наздожене другого?

Відповідь. Наприкінці третього дня.

Інші історичні задачі до теми "Прогресія" студенти можуть підібрати самостійно. Приклади фрагментів уроків з використанням історичного матеріалу і добірки історичних задач до окремих навчальних тем студенти можуть віднайти в наших роботах [42], [44], [50], [56], [66], [68], [69] та ін.

Організувати перевірку виконання такого завдання можна різними способами: ділова гра на практичному занятті; включення розробленого фрагмента в план уроку практикуючого вчителя з подальшими відгуками вчителя і учнів; проведення уроку на відповідну тему під час практики; повідомлення на гуртку тощо. Студентам бажано запропонувати створити папку для накопичення цікавих фрагментів уроків. Вони можуть обмінюватися кращими зразками уроків і до кінця навчання отримати солідну базу, яка допоможе краще розпочати педагогічну діяльність.

3. *Факультативні заняття. Позакласна робота з математики.* Ця тема в курсі методики математики традиційно виноситься на самостійне опрацювання студентами. Для її ефективного вивчення студентам дається перелік відповідної літератури і формулюються конкретні завдання. До обов'язкової для опрацювання літератури слід включити "Програму факультативного курсу з математики для 7–9–х класів загальноосвітніх навчальних закладів" [129]. Ця програма, зокрема, передбачає на факультативних заняттях ознайомлювати учнів з деякими питаннями історії математики. Вчитель на власний розсуд може запланувати розгляд з учнями окремих питань чи блоків із запропонованих у програмі.

7 клас. Історія розвитку поняття про натуральне число. Коротка історія систем числення. Основні етапи розвитку дробів. Піфагор і вчення про числа.

Історія розвитку алгебри. Геометрична алгебра греків. Алгебра – наука про рівняння. Розвиток алгебраїчної символіки.

Як виникла геометрія? Фалес Мілетський – засновник грецької геомет-

рії. Логічна будова геометрії в "Началах" Евкліда.

Історичні задачі з арифметики, алгебри і геометрії.

Магічні квадрати. Математичні ребуси та загадки. Листок Мебіуса. Круги Ейлера. Математичні софізми. Розв'язування олімпіадних задач.

8 клас. Історія розвитку поняття про число. Несумірні відрізки й ірраціональні числа. Від'ємні числа і нуль. Дійсні числа. Поняття комплексного числа.

Історія розвитку алгебри. Розв'язування квадратних рівнянь геометричним способом. Кубічні рівняння і рівняння четвертого степеня. Вклад в алгебру Ф. Вієта, Р. Декарта та І.Ньютона. Розвиток алгебраїчної символіки. Нерозв'язність у радикалах алгебраїчних рівнянь вище четвертого степеня.

Теорема Піфагора і різні способи її доведення. Піфагор у легендах і дійсності. Центральне проектування і перспектива. Історія виникнення і розвитку теорії векторів.

Історичні задачі з арифметики, алгебри і геометрії.

Принцип Діріхле. Математичні парадокси. Золотий переріз. Розрізання фігур. Задачі поліміно. Розв'язування олімпіадних задач.

9 клас. Історія розвитку поняття функції. Основні етапи розвитку математики. Історія розвитку сучасних розділів математики – комбінаторики, теорії ймовірностей, математичної статистики, топології, фрактальної геометрії і фрактального аналізу. Розвиток математики в Україні.

Історичні задачі з арифметики, алгебри і геометрії.

Послідовність Фібоначчі. Знаходження сум. Сніжинка Коха. Килим Серпинського. Геометрія орнаментів і паркетів. Логічні задачі. Три визначні задачі давнини. Розв'язування олімпіадних задач.

Цей матеріал може послужити основою індивідуальних завдань для студентів. Вони можуть бути, наприклад, такими:

- розробити зміст факультативного заняття на обрану тему;
- підібрати історичні задачі для факультативного заняття на обрану тему;
- які теми можна запропонувати учням для підготовки рефератів;
- які засоби слід використати для ефективного проведення факультативного заняття на обрану тему;
- які питання можна розглянути на математичному гуртку (на математичному вечері, у математичній стіннівці).

Для ефективної організації позакласної роботи з математики

вчитель постійно має працювати над підвищенням свого фахового рівня. З цією метою доцільно використовувати доступну наукову, навчальну і популярну літературу. Студентам слід повідомити, що незамінним помічником у цьому для кожного вчителя і учня може стати український науково-методичний журналу "У світі математики". Журнал має багаті традиції. У передмові до першого номера редакція журналу відмітила: "Ми розглядаємо журнал як відновлення знаменитого "Журнала элементарной математики", який був започаткований у 1884 році в Києві професором Київського університету В. П. Єрмаковим і виходив до 1917 року". Він є також продовженням збірників "У світі математики", які видавалися з 1968 по 1991 рік. Усе ж розглядуваний журнал – новий, сучасний за формою і змістом. Його адресовано учням середніх шкіл, гімназій, ліцеїв, студентам і, звичайно ж, учителям математики.

Надзвичайно цікавими і корисними для учнів, студентів, учителів і навіть пересічних читачів є матеріали рубрики "Минуле і сучасне математики". За час існування журналу в цій рубриці було надруковано понад 60 статей, присвячених: всесвітньо відомим творцям математики, математикам України, розвитку математичної науки і освіти.

У журналі висвітлено життєві шляхи і діяльність найвідоміших математиків і мислителів Архімеда, Р. Декарта, П. Ферма, Д. Гільберта, М. Остроградського,. Зацікавлять читачів змістовні матеріали про українських математиків і тих, які багато років працювали в Україні (В. П. Єрмаков, К. Латишева, Б. Гнєденко, М. Крейн, М. Чеботарьова, Є. І. Ігнатьєв, М. Боголюбов, М. Гулак, М. О. Зарицький, О. Смогоржевський).

Багато нової і цікавої інформації про розвиток математики в Україні, життя і діяльність відомих математиків містять спогади авторів статей. Взагалі, спогадам у журналі відводиться особливе місце і значення. Тут можна знайти спогади про певні події і конкретних осіб, в яких читач побачить, як переплітаються долі відомих математиків, як одна зустріч чи незначна подія може вплинути на все подальше життя вченого, як математики долали перешкоди, що ставали на шляху наукових відкриттів.

Слід звернути увагу вчителів на спогади члена-кореспондента Національної академії наук України Олексія Миколайовича Боголюбова про брата – видатного математика і фізика-теоретика Миколу Миколайовича Боголюбова. Дитячі і юнацькі роки М. М. Боголюбова – це зразок того, як молода лю-

дина наперекір обставинам, завдяки наполегливості і працелюбству може досягти значних успіхів і отримати всесвітнє визнання.

Майбутньому вчителю бажано пам'ятати, що протягом усього часу навчання в школі дитина, а пізніше підліток потребують взірця для наслідування. Недаремно все більше стає футбольних фанатів, прихильників рок-зірок, тих, хто наслідує героїв бойовиків чи "мильних" опер. В інтересах суспільства та й самих молодих людей – формувати зразки для наслідування з допомогою справді видатних особистостей.

М. М. Боголюбов у віці 13 років вперше потрапив на науковий семінар академіка Д. О. Граве. З цього часу розпочинається історія його життя як вченого, хоча сам він завжди вважав, що вченим став ще у селі Велика Круча, де скінчив семирічку і отримав свідоцтво про закінчення неповної середньої школи. Це свідоцтво стало єдиним протягом усього його життя документом про освіту. Згадуючи ті часи Олексій Миколайович описує, як брат здобував освіту. "Протягом двох років навчання Котя (так Миколу Миколайовича звали в дитинстві) оволодів математикою в обсязі середньої школи. Але не всією: на селі ні в кого не було підручника з тригонометрії. Батько пам'ятав з семінарського курсу лише загальні відомості про те, чим займається тригонометрія. Ще хтось пам'ятав одну тригонометричну тотожність, й це було все. Так Котя з цієї однієї тотожності без будь-якої допомоги побудував курс тригонометрії" [98].

М. І. Шкіль пригадує розмову з М. М. Боголюбовим, у якій Микола Миколайович зазначав надзвичайну важливість і складність справи підготовки педагогічних кадрів і висловлювв вдячність своїй сільській вчительці, яка допомогла розвинути його математичні здібності

Спогадами про М. М. Боголюбова на сторінках журналу поділився і Б. І. Хацет.

"До війни я не був знайомий з М. М. (*Боголюбовим*), хоча був студентом фізико-математичного факультету Київського університету з 1938 року: М.М. тоді викладав тільки спеціальні предмети і з молодшокурсниками не зустрічався. Але ми, студенти, захопливо переказували один одному дивовижні історії та легенди про молодого професора нашого і одночасно – Московського університетів, який, наперекір усім формальностям, за спеціальним рішенням уряду був у 16 років прийнятий в аспірантуру без диплома про вищу освіту, а в 21 рік вже був доктором наук! Чували ми і про те, що ще будучи аспірантом, М.М. був відзначений престижною науковою нагородою італійського університету в Болоньї, а спільно з академіком Миколою Митрофановичем Крило-

вим праці Боголюбова з нелінійної механіки отримали широке поширення і визнання у Франції, Бельгії, США та сприймаються як фундамент нового наукового напрямку в математиці, що має винятково важливі застосування в точному природознавстві й техніці.

Приклад такої дивовижної наукової кар'єри зовсім ще молодого вченого вселяв у нас, новобранців найдревнішої науки, почуття гордості за наш університет, задоволення тим, що ми обрали таку визначну галузь пізнання, і надію зробити в неї свій внесок" [476].

Багато історичних відомостей та готових методичних розробок позакласних заходів студенти можуть знайти в газеті "Математика" і журналах "Математика в школі" і "Математика в школах України".

Опрацьований самостійно студентами матеріал, присвячений організації позакласної роботи з математики, сприятиме підвищенню загальної культури студентів, стимулюватиме їх власну навчально-пізнавальну діяльність, стане у нагоді під час проходження педагогічної практики та написання кваліфікаційних робіт.

4. *Підручники з математики.* Характеризуючи шкільні підручники математики як один із основних засобів навчання, чи аналізуючи альтернативні підручники для окремих класів викладач може зауважити, що особливістю сучасних підручників є наявність у них історичного матеріалу, який відповідає віковим особливостям учнів. Історичний матеріал у підручниках з математики М. І. Бурда розглядає як засіб забезпечення гуманістичної спрямованості змісту навчання і, характеризуючи підручник з геометрії [126], відмічає важливість такого матеріалу. "Геометричний матеріал доповнюємо епізодами з історії науки, які знайомлять учнів з боротьбою ідей, долями великих відкриттів, прізвищами вчених, які творили науку. Гуманістичну спрямованість змісту забезпечує і персоніфікований виклад матеріалу в підручнику, тобто подання, де це можливо, геометричних фактів з погляду їх історичного становлення і розвитку" [127, с. 47].

Визначаючи завдання для колоквіуму, присвяченого шкільним підручникам, студентам слід рекомендувати розглянути історичну складову підручників математики. З цим матеріалом учні можуть ознайомлюватися і самостійно, але вчитель мусить уміло організовувати цю діяльність учнів, стимулювати та оцінювати її. Саме тому

майбутнім учителям бажано знати, що історичний матеріал у шкільних підручниках математики висвітлюється по-різному і з різною метою. Елементи історії науки в них можуть бути представлені у таких формах: історико-методологічні повідомлення; використання імені вченого в процесі вивчення теоретичного матеріалу; подання портрета вченого; виклад короткої біографічної довідки; фрагменти текстів з праць видатних вчених; висловлювання про математику і математиків; історичні задачі; історичні екскурси; творчі завдання історико-біографічної тематики.

Щоб показати студентам, як можна використовувати історичні довідки, що містяться у підручниках, бажано розглянути декілька конкретних прикладів. Наприклад, в підручнику "Геометрія, 10–11" [72] до розділу "Координати і вектори в просторі" додається така історична довідка.

"*Метод координат* на площині вперше розробили Р. Декарт і П. Ферма в XVII ст. На тривимірний простір його поширили тільки у XVIII ст. Й. Бернуллі, А.Клеро та ін. Поняття "вектор" увів у 1846 р. ірландський математик В.Гамільтон. Позначення $\vec{r}$ запропонував у 1887 р. О. Коші. Першу працю "Теорія векторного числення" надрукував у 1853 р. професор Київського університету В.Єрмаков.

Спочатку вектори використовували переважно у фізиці для зображення сили, швидкості та інших векторних величин, тому вектори ототожнювали з напрямленими відрізками. В сучасній математиці поняття вектора набагато змістовніше. Вектор – це елемент векторного простору. А векторним простором називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (при цьому мають виконуватися 4 закони додавання і 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору; множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

Властивості векторів можна використовувати і в алгебрі.

Приклад. Доведіть, що коли $a > 3$, то

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}+\sqrt{a-3} \le 3\sqrt{a}$.

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{n} = (1; 1; 1)$ і $\vec{m} = \left(\sqrt{a+1}; \sqrt{a+2}; \sqrt{a-3}\right)$.

Оскільки $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $|\vec{m}| = \sqrt{a+1+a+2+a-3} = \sqrt{3a}$ і $\vec{n} \cdot \vec{m} \le |\vec{n}| \cdot |\vec{m}|$, то

$1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a+2} + 1 \cdot \sqrt{a-3} \le \sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$ або $\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}+\sqrt{a-3} \le 3\sqrt{a}$.

У цьому доведенні використано властивості векторів, але не напрямле-

них відрізків.

Гамільтон Вільям Рован (1805–1865) – ірландський математик. Читати навчився в 3 роки, в 10 років став студентом, у 12 років знав 10 мов. З 22 років – професор астрономії і директор астрономічної обсерваторії. Його основні праці стосуються механіки, диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Досліджував числові множини, створив систему кватерніонів, увів термін "вектор". У геометрії досліджував хвильові поверхні, в алгебрі – групи, одну з них називають групою Гамільтона" [72, с.92].

Зрозуміло, що дитинство В.Гамільтона, його знання іноземних мов прямого відношення до геометрії не мають. Але, думається, два-три рядки інформації про відомого математика зацікавлять учнів і стануть приводом для наслідування. Особливо, коли йдеться про гуманізацію навчання. Не стосується геометрії і наведений вище приклад застосування векторів до доведення нерівностей. Але саме такий приклад краще розкриває поняття вектора, показує його застосовність до розв'язування задач і демонструє міжпредметні зв'язки. Розв'язуючи подібні задачі, учні зрозуміють, що вектори це не тільки напрямлені відрізки.

5. *Задачі у навчанні математики.* Розглядаючи цю тему на лекції і семінарських заняттях, можна звернути увагу студентів на використання в процесі навчання математики історичних задач. Такі задачі присутні в шкільних підручниках і навчальних посібниках. Вони дають можливість учням одержати додаткову теоретичну інформацію, допомагають з'ясувати роль і місце математики в практичній діяльності людей, збуджують інтерес та любов до предмету, потяг до самостійної творчості, кмітливості. Окремі задачі сприятимуть естетичному вихованню учнів, дадуть змогу вчителю врахувати інтереси і можливості учнів за диференційованого підходу до навчання. Розв'язування таких задач дає вчителю природній привід для невеликих історичних екскурсів.

Про систему історичних задач у курсі стереометрії 11 класу та методичні особливості її використання можна прочитати в нашій статті [68]*.

* Цікаві історичні задачі, віднесені до конкретних навчальних тем з алгебри, можна знайти в наших роботах [42], [66], [69].

Розглядаючи на семінарському занятті методику використання історичних задач в шкільному курсі математики, студентам бажано наголосити:

1. В задачах історичного змісту математичний смисл не повинен затушовуватися історичними деталями. Перед розв'язуванням таких задач потрібно провести невеликий історичний екскурс (про автора цієї задачі, його досягнення та здобутки в галузі елементарної математики), яскравий, але лаконічний, доступний для сприйняття, і не перевантажувати пам'ять.

2. Там, де можливо, для ілюстрації задачі, історичних обставин, слід скористатися кінофрагментами, рисунками, звукозаписами, висловлюваннями вчених, витягами з робіт.

3. Задачі варто розв'язувати у певній послідовності. В деяких темах курсу розв'язування задач історичного змісту навіть необхідне.

4. У деяких задачах умову потрібно формулювати як демонстраційний приклад, пояснення якого і є розв'язанням задачі.

5. Розв'язуючи історичні задачі, потрібно звертати увагу учнів на ті пояснення та помилки, які допускали в тлумаченні математичних понять вчені різних часів.

Задачі у вивчанні математики мають різні функції: навчальні, виховні, розвивальні, корегувальні та контролюючі. Історичні задачі здатні виконувати кожну з цих функцій, але найкраще їх застосовувати з метою навчання, виховання і розвитку учнів. Наприклад, з метою розвитку логічного мислення і уваги учням можна запропонувати задачу А. М. Колмогорова "Яку додаткову умову потрібно накласти на значення x у формулі $f(x) = 1$, щоб дістати означення функції $f(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2$? (Відповідь: $0 \le x \le 1$).

З виховною метою можна розв'язати з учнями задачу із книги "Забавная арифметика" М. М. Аменицького та І. П. Сахарова (1910).

Задача. *Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні на таких умовах: "За це я тобі першого дня заплачу 1 карбованець, другого – 2, третього – 3, і т. д., збільшуючи щоденну плату на 1 карбованець. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого – 2, третього – 4 і т. д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі". Ба-*

гатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

Розв'язання. Сума, яку має сплатити бідняк багатію, складає суму 14 членів арифметичної прогресії, перший член та різниця якої дорівнює 1 (105 карбованців).

А багатій бідняку сплачує суму, яка складає суму 14 членів геометричної прогресії з першим членом, рівним 1, та знаменником 2 (16383 копійки або 163 карбованці 83 копійки).

Отже, багатій не лише не отримав зиску від цієї угоди, а змушений був доплатити бідняку 58 карбованців 83 копійки.

6. *Специфіка навчання математики в школах різного профілю.* Розглядаючи на семінарських чи лабораторних заняттях цю тему студентам можна запропонувати творче завдання: підготувати урок-лекцію для класу обраного профілю з теми "Призма", використавши історичний матеріал. Оскільки студенти ще не слухали курсу історії математики, то для якісного виконання домашнього завдання їм бажано роздати роздрукований дидактичний матеріал, наприклад такого змісту.

Призма. Виготовляючи необхідні для себе предмети, люди наслідували різні природні форми. Єгипетські папіруси та глиняні дощечки з Вавилону свідчать, що давні люди за 2000 років до нашої ери розв'язували задачі прикладного характеру і визначали об'єм призми як добуток площі основи на висоту. Практичні правила знаходження об'ємів тіл призматичної (в тому числі кубічної) форми були відомі також в стародавніх Індії та Китаї. Прямий паралелепіпед з квадратною основою, прямі призми з трапецевидними і трикутними основами розглядалися у V книзі стародавньому китайського математичного твору "Математика в дев'яти книгах".

Загальні поняття про геометричні тіла почали формуватися в VI ст. до н. е. в Греції. Давньогрецьким геометрам були відомі поняття "куб", "паралелепіпед", "призма". Грецьке слово "кібос" буквально означає "гральна кісточка". Тіла, що мали схожі форми, назвали кубами. Цей термін зустрічається в Евкліда. Слово "призма" також грецького походження і буквально означає "відпиляне" (тіло).

Основні теореми стереометрії викладені в XI книзі "Начал" Евкліда (III ст. до н. е.). В кінці XI книги автор розглядає паралелепіпед і вводить загальне поняття призми. Ще в давні часи існувало два підходи до означування геометричних понять:

– від фігур вищого порядку до фігур нижчого порядку (від загального поняття тіла через характеристичні ознаки до конкретної фігури);

– від фігур нижчого порядку до фігур вищого порядку (від точки через спосіб утворення до конкретної фігури).

Евклід дотримувався першого підходу. У нього "Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межі тіла є поверхні ...". Він розглядає многогранники не порожні, а заповнені (у нашому розумінні простором) і дає таке означення: "Призма є тіло, обмежене площинами, з яких дві протилежні рівні, подібні і паралельні, решта ж є паралелограмами... Куб є тіло, обмежене шістьма рівними квадратами...". Евклід не застосовував терміна "об'єм". Для нього термін "куб", наприклад, означає і об'єм куба. В XI книзі "Начал" наводяться теореми про порівняння об'ємів паралелепіпедів. Теорему про об'єм призми знав Архімед (287–212 р. до н. е.). Правила для обчислення об'ємів куба, призми, паралелепіпеда є в творах прикладного характеру Герона Александрійського (ймовірно I ст.). Він вперше поєднав два підходи до означування геометричних понять.

В науковому трактаті Леонарда Пізанського (Фібоначчі) (бл.1170 – після 1228) "Практична геометрія" доводиться, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його трьох вимірів. Цієї теореми немає у Евкліда.

В XVI столітті Христофор Клавіус (1537–1612) сформулював теорему про центр симетрії паралелограма: "Якщо паралелепіпед розсікається площиною, що проходить через центр, то він розбивається навпіл і, навпаки, якщо паралелепіпед розсікається навпіл, то площина проходить через центр".

Формула об'єму призми доводилася методом неподільних, запропонованим Б.Кавальєрі (1591–1647). Методом рівноскладеності її доведено в підручнику французького математика Лежандра (1752–1833) "Початки геометрії", який замінив підручники, що ґрунтувалися на "Началах" Евкліда. Лежандр показав, що у прямого паралелепіпеда є три площини симетрії, перпендикулярні до ребер, а у куба – 9 площин симетрії, з яких 3 перпендикулярні до ребер, а інші 6 проходять через діагоналі граней.

До означення призми поверталися математики у XVIII ст. Так, Брук Тейлор (1685–1731) дав таке означення призми: це многогранник, у якого всі грані, за винятком двох, паралельні до однієї прямої.

Формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда була доведена французьким математиком Емілем Борелем (1871–1956), який розглядав

три випадки вираження вимірів паралелепіпеда різними числами.

З обчисленням об'єму куба пов'язана визначна задача про подвоєння куба, яка була поставлена у V ст. до н. е. Усі розв'язки цієї задачі, які були запропоновані стародавніми вченими, містить твір німецького математика Йогана Вернера (1468–1528). Неможливість розв'язати задачу про подвоєння куба за допомогою циркуля та лінійки вперше довів французький математик П.Ванцель (1814–1848) у 1837 році.

Використання історичного матеріалу на уроці вимагає врахування вікових особливостей учнів, їх інтересів та профілів навчання. Студенти мають із усього запропонованого матеріалу обрати такий, що зацікавить учнів вказаного профілю і природно вплететься у зміст уроку. Доцільно запропонувати студентам використати на даному уроці історичну задачу про призму використавши для цього задачі, запропоновані в [68].

Ми навели теми, що стосуються загальної методики навчання математики. Зрозуміло, що методика навчання окремих предметів пов'язана з конкретними математичними поняттями, формулами, теоріями, які мають свою історію. У процесі вивчення курсу методики навчання математики студенти мають зрозуміти, що вдале використання історичного матеріалу в процесі формування математичних понять і розвитку необхідних умінь і навичок в учнів сприятиме свідомому і міцному запам'ятовуванню вивченого матеріалу.

7. *Педагогічна практика.* Невід'ємною складовою підготовки майбутнього вчителя математики є педагогічна практика. На традиційній конференції, що проводиться перед початком практики, студентам бажано повідомити ювілейні дати, які стосуються математики і припадають на час проведення практики. Це допоможе студентам організувати позакласну роботу з математики. З ювілейними датами на кожен місяць студенти можуть ознайомитись в журналі "Математика в школі", рубрика якого "Математичний календар" за участю автора є постійно діючою з 1999 року. В журналі також публікуються портрети визначних математиків, які студенти можуть використовувати в навчально-виховній роботі з учнями під час педагогічної практики.

Крім цього, студентам можна повідомити, що ознайомлення уч-

нів з історією математики бажано проводити на уроках і на позаурочних заняттях. При цьому не варто розраховувати на додаткові години. Навчальний план та програми загальноосвітньої школи достатньо навантажені. Запорука успіху полягає у вдалому використанні елементів історії математики таким чином, щоб вони органічно зливалися з викладом фактичного матеріалу. Мова не йде про впровадження в школі спецкурсу з історії математики (хоча в деяких школах вони функціонують довгий час). Йдеться про те, щоб при вивчені тієї чи іншої теми учитель математики повніше і глибше розкривав її зміст, звертаючись до історії науки. Якщо таку роботу розпочати у 5–му класі, то з часом історичний елемент стане для самих учнів необхідною частиною уроку.

Знайомство учнів з історією математики означає продумане, сплановане використання на уроках фактів з історії науки та їх тісне переплетення з систематичним викладом всього матеріалу програми. Всі повідомлення з історії математики мають бути достовірними, доступними розумінню учнів і не повинні заважати вивченню програмного матеріалу. Можна вказати наступні форми введення історії у викладанні математики:

1. Історичні відступи на уроках, бесіда від 2–3 до 8–10 хв.

2. Повідомлення історичних відомостей, органічно поєднаних з теорією чи задачами.

3. Спеціальні уроки з історії математики.

4. Математичні гуртки (можна організувати спеціальний математичний історичний гурток).

5. Історико-математичні вечори.

6. Організація спеціальної математично-історичної газети.

7. Домашні твори та реферати учнів.

8. Робота, пов'язана із збиранням елементів „народної математики".

9. Бесіди, лекції, доповіді вчителя або запрошених наукових працівників.

Якою б не була форма повідомлення відомостей з історії – коротка бесіда, екскурс, лаконічна довідка, розв'язування задачі, показ і пояснення рисунка – використаний час (5–13 хв.) не можна вважати

змарнованим, якщо вчитель зміг подати історичний факт у тісному зв'язку з викладеним на уроці теоретичним матеріалом. В результаті такого зв'язку в учнів підвищується інтерес до предмету і тим самим підвищується ефективність їх знань.

Для організації позакласної роботи з використанням історичного матеріалу студентам можна рекомендувати таку літературу [154], [293], [296], [495], [486]. Традиційно на 4–му курсі навчальна педагогічна практика проводиться в березні. В цей час у школах організовується святкування Міжнародного жіночого дня 8 березня. Для проведення математичного вечора чи іншого позакласного заходу студентам у нагоді стане наша розробка "Жіночі імена в пантеоні славетних математиків" [48].

Детальніше методичні особливості використання історизмів у шкільному курсі математики можна розглянути на спецсемінарах чи спецкурсах з методики математики.

8. *Курсові і кваліфікаційні роботи.* Індивідуальна форма навчання студентів у вищій школі найкраще представлена через підготовку і захист курсових і кваліфікаційних робіт. Під час виконання робіт цього виду у студентів формуються і розвиваються такі необхідні для майбутнього вчителя якості, як самостійність, ініціативність, творчість, дослідницький стиль діяльності, культура пошуку і праці. Ефективна організація індивідуальної форми навчання стимулює науково-дослідну роботу студентів, підвищує результативність навчання, сприяє інтелектуальному розвитку та творчій активності студентів.

Необхідною умовою детального аналізу і повного розв'язання проблеми дослідження, обраної для курсової чи кваліфікаційної роботи, є висвітлення її історичних аспектів. Наприклад, у курсовій роботі "Методичні особливості вивчення процентів в основній школі" студенти подають історичну довідку про виникнення поняття процента, а також розглядають історичні задачі, пов'язані з цим поняттям. У кваліфікаційній роботі "Методика вивчення функції у старшій школі" подається еволюція поняття функції. Курсова робота на тему "Комбінаторні задачі в 5–6 класах" вимагає розгляду питанн: що таке комбінаторні задачі, коли і у зв'язку з чим вони виникли, які з них

доступні для дітей цього віку? Без таких знань побудувати ефективну методику розв'язування комбінаторних задач в 5–6 класах важко.

Отже, для виконання курсових і кваліфікаційних робіт на високому науковому і методичному рівні студентам потрібно самостійно вивчити відповідні питання історії математики. Таке завдання не завжди просте, бо щоб з ним упоратися, студентам слід добре орієнтуватися в історичних аспектах теми. Оскільки на час написання курсових робіт студенти ще не слухали курсу "Історія математика", то для ефективної організації індивідуальної роботи з написання курсових робіт бажано підготувати методичні вказівки, в яких, крім іншого, окреслити питання історії математики і подати список літератури, де ці питання висвітлюються.

Підсумовуючи висвітлення проблеми використання історичного матеріалу в курсі методики навчання математики, можна зробити висновок, що історичний матеріал має стати обов'язковим компонентом у вивчанні методики математики. Для підвищення ефективності його використання слід розробити методичне забезпечення усіх форм організації навчальної діяльності студентів.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

3.1. ЦІЛЕПОКЛАДАННЯ У ВИВЧЕННІ КУРСУ "ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ" В ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

3.1.1. Навчання історії математики, як і інших навчальних дисциплін, є складною цілісною системою, основними структурними компонентами якої є: цільовий, стимуляційно-мотиваційний, змістовий, операційно-діяльнісний, контрольно регулювальний та оцінно-результативний. Виділення окремих структурних компонентів процесу навчання допомагає визначити шляхи його організації: постановка цілей навчання, визначення завдань навчальної роботи, збудження і стимулювання у студентів потреби оволодіти навчальним матеріалом; визначення змісту навчання; залучення студентів до навчально-пізнавальної діяльності; контроль і оцінювання навчальної діяльності.

Цілі є одним із найважливіших компонентів процесу навчання взагалі і методичної системи навчання історії математики зокрема. Мета (ціль) навчання – це ідеальне мисленнєве передбачення кінцевого результату процесу навчання. Цілепокладання – це, по-перше, прийняття й утримання цілей, поставлених іншою людиною перед суб'єктом, і, по-друге, самостійна постановка цілей. В основі цілепокладання лежать основні процеси свідомості суб'єкта – споглядання, уява, мислення. У монографії Ю. М. Швалба [488, С. 85] зазначається, що саме споглядання, уява і мислення визначають якісну основу цілепокладання.

Споглядання, зупиняючи хаос і надаючи йому деякого сенсу, фактично *задає картину ідеального*. Такий ідеал стає для особи осно-

вою цілепокладання. Першим, але найвідповідальнішим і найважчим кроком процесу цілепокладання є акт самовизначення особистості, коли людина для себе має відповісти на запитання: "Яким я хочу бути". На цьому етапі цілепокладання полягає у розгортанні і конкретизації сенсу як ідеального в конкретних умовах ситуації. Реалізація цілей, тобто акт діяльності, виступає у формі приведення невизначеної ситуації до осмисленого вигляду.

Образи уяви відкривають особі простір можливого, дають змогу подолати нескінченну репродукцію і редукцію повсякденного життя, створюють умови для *виходу до нового*. Для цілепокладання уява дає не тільки нове як зміст мети, але і його емоційні забарвлення і насиченість. Проте уявлення постійно змінюються, трансформуються і розпадаються. Якби цілепокладання базувалося лише на уяві, то людина ніколи б не змогла зафіксувати зміст мети в оформленому і закінченому вигляді.

Мислення зупиняє плинність образів уяви і переводить цілісний образ можливої ситуації у дискретне описання властивостей окремих елементів. Ця процедура встановлює умови майбутньої дії. Основною функцією мислення в цілепокладанні є побудова моделі ситуації. Ці моделі специфічні, оскільки містять у собі описання можливих способів дій з властивостями елементів ситуації. Способи дій утворюють логіку перетворення ситуації, тобто необхідну послідовність завдань. Форми завдання набуває і мета.

Мислення надає меті такі характеристики, які роблять її регуляторною основою діяльності, проте воно не породжує особистісно-значущі цілі.

Отже, як феномен свідомості цілепокладання набуває якісних особливостей у кожному з трьох основних процесів: у споглядані – це ствердження сенсу власного буття чи самовизначення особистості; в уяві – становлення задуму; в мисленні – побудова моделі. Особливості поєднання цих процесів та переваги одного з них визначають форми цілепокладання (табл. 3).

Таблиця 3

Форми цілепокладання

Процес свідомості	Споглядання	Уява	Мислення
Споглядання	Самовизначення особистості	Ідея	Проект
Уява	Ідея	Задум	Прийняття рішення
Мислення	Проект	Прийняття рішення	Завдання

Зазначені у таблиці форми цілепокладання визначають форми здійснення цілей (табл. 4).

Таблиця 4

Форми здійснення цілей

Форми цілепокладання	*Форми здійснення цілей*
Самовизначення особистості	Ідентифікація
Задум	Втілення
Завдання	Розв'язання
Ідея	Здійснення
Проект	Реалізація
Прийняття рішення	Вибір

Умови здійснення і функціонування у свідомості студентів цілепокладання слід враховувати в організації навчально-виховного процесу і підготовці студентів до майбутньої професійної діяльності.

Розглянемо спочатку, які цілі стосовно вивчення курсу "Історія математики" ставляться студентам ззовні та як вони реалізуються у підготовці майбутніх учителів математики.

Мета вивчення історії математики в педагогічному університеті має два взаємопов'язані аспекти – загальнонауковий і фаховий. Загальнонаукова мета вивчення курсу "Історія математики" полягає в тому, щоб висвітлити історію формування, розвитку і трансформації математичної науки. Вивчення історії математики в рамках фахової підготовки має на меті дати майбутнім учителям історико-

математичні знання, необхідні їм для правильного розв'язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі.

Мета вивчення курсу "Історія математики" визначає *завдання*, що покладаються на цю дисципліну в педагогічних закладах освіти, а саме :

- відтворити багатство фактичного змісту історичного розвитку математики, висвітлити виникнення математичних методів, понять, ідей, теорій та окремих математичних дисциплін;
- з'ясувати характер і особливості розвитку математики у різних народів у певні історичні періоди;
- показати внесок, зроблений в математику великими вченими минулого, зокрема і вітчизняними вченими;
- продемонструвати студентам багатогранні зв'язки математики: з практичними потребами і діяльністю людей, з розвитком інших наук, а також показати вплив економічного, соціального та ідеологічного стану суспільства на характер розвитку математики;
- показати, як формувалися історичні та логічні зв'язки між окремими розділами математики, розкрити історичну обумовленість логічної структури сучасної математики та діалектику її розвитку, висвітлити співвідношення частин математики та її перспективи;
- сформувати сучасний погляд на математику як на складову загальнолюдської культури;
- озброїти майбутніх учителів найважливішими знаннями з методології математики;
- розкрити психолого-методичні питання взаємозв'язку історії науки та практики шкільного навчання;
- показати місце, значення і можливості історичного матеріалу в курсі математики сучасної школи різних профілів;
- сформувати уміння та навички застосовувати історико-математичні знання до проведення наукових досліджень: виділяти та аналізувати історичні аспекти досліджуваної проблеми, визначати та опрацьовувати відповідну бібліографію.

3.1.2. Вимоги до якості освітньої та професійної підготовки, виробничої і соціальної діяльності випускників вищих навчальних закладів встановлюються освітньо-кваліфікаційною характеристикою та подаються у вигляді переліку відповідних здатностей та умінь. У галузевих стандартах вищої освіти зазначається, що освітньо-кваліфікаційна характеристика, крім іншого, має використовуватися

для професійної орієнтації здобувачів фаху.

Відповідно до посад, які може займати випускник вищого навчального закладу, він має бути здатний виконувати певні види фахової діяльності і типові завдання цієї діяльності. В освітньо-кваліфікаційній характеристиці [155] кожному типовому завданню діяльності відповідає система умінь. Виділимо з них ті уміння, формування яких у випускників вищого навчального закладу здійснюється і в процесі навчання історії математики. Для зручності систематизуємо уміння, які повинен мати випускник вищого навчального закладу, за таким принципом:

1) уміння, пов'язані з методологічними аспектами математики:

- володіти уявленнями про математику як науку і як навчальний предмет, про її місце в сучасному світі і системі наук;
- визначати, до якої галузі математичних знань належить досліджуваний об'єкт і проблема, що з ним пов'язана;
- аналізувати взаємозв'язки досліджуваного математичного об'єкта з відомими об'єктами, а математичної проблеми – з науковими фактами;
- сформулювати проблему – потребу математичного моделювання;
- наводити приклади конкретних математичних моделей фізичних, біологічних, економічних, інформаційних процесів тощо;
- встановлювати зв'язки між фактами і теоріями;
- класифікувати, систематизувати, будувати ієрархії;
- оцінювати перспективність окремого результату, факту, теорії, ідеї в чисто математичному, загальнонауковому, філософському та практичному аспектах;
- здійснювати гносеологічне, методологічне, філософське усвідомлення отриманих результатів;
- осмислювати роль, місце і значення науки у житті суспільства, пояснювати процеси перетворення навколишньої дійсності.

2) уміння, пов'язані з плануванням та проведенням навчально-виховної роботи:

- проектувати реалізацію зв'язків вивчення математики з вивченням фізики, хімії та інших предметів;

- аналізувати підручник, вибирати необхідний для засвоєння учнями фактичний матеріал;

- виявляти складні для розуміння учнями питання, проаналізувати визначення з точки зору їх точності і доступності для учнів;

- вміти відбирати з наукової і науково-популярної літератури фактичний матеріал, корисний для реалізації цілей і завдань уроку;

- враховуючи рівень пізнавальних можливостей класу в цілому й окремих учнів, а також завдання уроку і програмні вимоги, відбирати різнорівневі задачі і вправи, щоб мати можливість здійснити на уроці диференційований підхід;

- проектувати домашнє завдання з певної теми, передбачаючи окрім загального й індивідуальні завдання (розв'язок задач підвищеної складності, підготовка повідомлення тощо);

- обирати тематику предметного гуртка.

3) уміння, пов'язані з розробкою та використанням дидактичних засобів:

- володіти методикою використання системи дидактичних засобів;

- виготовляти засоби наочності для проведення уроків різних типів та позакласних заходів з математики;

- аналізувати підручники, посібники, дидактичні матеріали, методичну літературу для проектування цілісного навчально-виховного процесу.

4) уміння, пов'язані з підвищенням кваліфікації, науково-дослідною роботою:

- володіти знаннями про вимоги до проведення наукового дослідження певної проблеми;

- досліджувати історію і сучасні підходи та досягнення у вивченні даної наукової проблеми;.

- обирати методологічні засади наукового дослідження, методи дослідження і конкретні дослідницькі методики, адекватні меті і завданням дослідження;

- опрацьовувати предметну, науково-популярну, психолого-педагогічну та методичну літературу;

- писати реферати;

- виступати з доповідями;

- виконувати інформаційний пошук першоджерел і наукової навчальної літератури з розглядуваної проблеми;

Таким чином, навчання історії математики в рамках фахової підготовки студентів-математиків спрямоване на:

- формування методологічної культури вчителя;

- формування умінь, пов'язаних з використанням отриманих знань для планування та проведення навчально-виховної роботи;

- ознайомлення студентів з еволюцією засобів навчання та умовами їх використання;

- залучення студентів до самоосвіти та науково-дослідної роботи.

Розглянемо конкретніше кожен з виділених напрямів.

3.1.3. *Формування методологічної культури вчителя.* В основі професійної майстерності сучасного вчителя лежить єдність його фахової та методологічної культури. Методологія – це вчення про методи пізнання, сукупність прийомів дослідження, зведення знань в одну систему. А тому під методологічною культурою вчителя розуміють сукупність його практичних і теоретичних надбань, що пов'язані зі світоглядними принципами і філософськими основами навчальної дисципліни, її структурою і методами, зв'язками з дійсністю та іншими науками.

Раніше, коли панівною була одна партія і одна ідеологія, питанням методології в навчально-виховному процесі приділялось багато уваги. Щоправда, тоді єдино правильними визнавалися тільки марксистсько-ленінський світогляд і методи діалектичного та історичного матеріалізму. Тепер, коли в суспільстві відбувається переоцінка старих цінностей і система освіти будується на нових засадах, як ніколи раніше виникає потреба у заповнені певного вакууму, що утворився в методологічній підготовці майбутніх учителів. Зрозуміло, що заповнювати цей вакуум покликані передусім викладачі філософії. Але деякі питання методології майбутнім учителям мають висвітлювати насамперед спеціалісти математики та методики математики. Йдеться, зокрема, про такі питання:

- Що таке математика ?

- Якою є архітектура сучасної математики?
- Яке місце займає математика в системі інших наук?
- Як математика співвідноситься з дійсністю?
- Які найважливіші методи використовуються в математиці та у навчанні математики?
- Як співвідноситься логічне й історичне у навчальних курсах математики?

Сучасний вчитель математики повинен знати найважливіші класичні математичні дисципліни, мати уявлення про сучасні галузі математики і численні застосування математики та її зв'язки з іншими науками. Для досягнення цього необхідно включати методологічні проблеми математики до навчальних програм як обов'язкову складову. Методологія науки має супроводжувати фахову підготовку майбутнього вчителя математики з першого до останнього курсу і стати дійовим засобом у його подальшій педагогічній діяльності.

Висвітлення методологічних питань математики в системі підготовки майбутнього вчителя надають йому можливість:

- зрозуміти предмет, структуру, методи та особливості математики;
- з'ясувати роль математики в розвитку суспільства, її місце в загальнолюдській культурі;
- зрозуміти закони і рушійні сили математичного пізнання;
- осмислити значення математичних теорій в побудові загальної картини світу;
- встановити міжнаукові та внутрішньонаукові зв'язки;
- оглянути предмет викладання як цілісний об'єкт і встановити його місце в системі освіти;
- зрозуміти, що можливі різні логічні будови навчальних предметів, а також способи їх реалізації залежно від мети вивчення, рівня аудиторії і часу, відведеного на його вивчення.

3.1.4. *Формування умінь, пов'язаних з використанням отриманих знань для планування та проведення навчально-виховної роботи.* Щоб студенти свідомо і відповідально підійшли до вивчення курсу історії математики і зрозуміли його професійну спрямованість, викладачу

необхідно розкрити *значення, місце і можливості* історичного матеріалу в курсі математики сучасної школи. Це питання детально висвітлюється на першій лекції, розглядається на останньому семінарському занятті та проходить суцільною лінією через увесь навчальний курс з історії математики.

Значення історії математики для сучасного вчителя визначається змістом і методологічним спрямуванням самого курсу та вимогами часу. Це зумовлено тим, що історія науки є обов'язковою складовою загальної історії та історії культури, необхідною умовою сучасного розвитку науки, важливим джерелом аналізу процесів мислення, базою наукової методології, засобом подолання суперечностей між новими і старими знаннями. Історико-математична підготовка майбутніх учителів сприяє формуванню наукового світогляду, створює правильне уявлення про математику як цілісну науку, що постійно розвивається, дає можливість простежити, як виникали основні математичні поняття, ідеї та методи, як формувались окремі математичні теорії в той чи інший історичний період. Знання з історії математики дають фактичний матеріал для вивчення структури та функціонування науки.

Історія розвитку людського мислення є методом удосконалення навчання. Поняття і теорії, які з труднощами входили в ужиток науки, як правило, важко засвоюються учнями, і це слід брати до уваги вчителям. Важливу роль курс історії математики відіграє у вирішенні проблеми гуманізації та гуманітаризації освіти, бо фактично є гуманітарною складовою математичного знання. З її допомогою, використовуючи біографії творців математики, їх методи роботи, досягнення і промахи, досить просто і переконливо вдається одухотворити і олюднити математику, вплинути на формування характеру студентів, їх ідеалів та прагнень.

Сучасний вчитель математики за роки навчання має твердо усвідомити місце, значення і роль історичного матеріалу в процесі викладання математики в школі. Історичний матеріал викликає любов і підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів та подій ми-

нулого і сьогодення. Короткі екскурси в історію дають можливість знайомити учнів з фактами культурного життя людства, демонструвати тернистий шлях вчених та їх теорій до повного визнання та сприйняття сучасниками чи, можливо, лише наступними поколіннями. Математичні поняття, відношення та теорії завдяки історичній динамічності стають ближчими і зрозумілішими учням.

Розбудити інтерес до вивчення курсу історії математики допоможуть конкретні приклади, які розкривають ставлення до історії математики видатних вчених.

Геніальний український математик М. Остроградський і французький педагог А. Блум наголошували: "Було б злочином для людей, вивчаючи матеріали, не шанувати не тільки імен дослідників, але й їх методів і результатів, яких вони досягли... Біографії людей, корисних для науки і мистецтва, є одним із методів, який ми використовуємо для привернення уваги учнів. Зацікавити дитину – саме в цьому один з найважливіших принципів нашої теорії" [362, с. 139].

Відомий французький математик Фелікс Борель писав:"...Для викладача математики в середній школі було б таким же кричущим безглуздям змовчати про Галілея, Декарта, Ньютона і Лейбніца, як для професора хімії – не згадати про Лавуазье або для історика – обійти мовчанням французьку революцію" [389, с. 81].

Студентів необхідно знайомити з прикладами із життя видатних вчених, які б вони могли використати у своїй педагогічній роботі як такі, що стимулюють навчально-пізнавальну діяльність учнів і надихають їх на творчу роботу. Ось один з них.

Перше своє дослідження видатний український математик Георгій Вороний зробив у 16 років, будучи ще гімназистом. Сталося це так. У 1884 році відомий математик і педагог, тоді ще молодий професор Київського університету Володимир Єрмаков почав видавати в Києві "Журнал елементарної математики", в якому пропонувалась для висвітлення така тема: "Розклад многочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння". Як з'ясувалося, на запропоновану тему редакція отримала лише одну роботу, а саме – з Прилук від Г. Вороного. У 1885 році в журналі була надрукована його перша стаття, де крім розв'язання поставленого завдання, наводилась значна кількість прикладів.

Ознайомлення майбутніх учителів з історією розвитку вітчизняної математики набуває особливої актуальності на сучасному етапі, коли Україна стала незалежною державою і відбувається процес пе-

регляду деяких історичних фактів. Остання лекція будується з урахуванням сучасного підходу у висвітленні питань історії. Зокрема:

- донедавна нашу історію викривляли на користь позиції Сходу, мало писали про античну математику Ольвії, Херсонесу, усього українського узбережжя; замовчувався розвиток і становлення середньовічних університетів у Європі. Ще в XIV столітті існував Краківський університет з математичним факультетом. Там працювало немало і українських професорів, навчалися студенти із 70 українських міст, адже саме туди доходили землі, населені українцями;
- замовчувалися базиліанські школи – школи католиків на території України, в яких математика викладалась на досить високому рівні;
- усіх українських математиків, зокрема М. В. Остроградського, В. Я. Буняковського, Г. Ф. Вороного, вважали раніше російськими;
- замовчувалися репресовані українські радянські математики М. П. Кравчук, М. А. Чайковський та інші.

Майбутній учитель математики має бути добре ознайомлений з життєвим шляхом, науковою творчістю і здобутками українських вчених-математиків.

Серед найважливіших функцій історії науки у фаховій підготовці вчителя потрібно виділити загальнонаукові, загальнокультурні та освітні, а також функції інтеграції, узагальнення, систематизації, конкретизації, гуманізації, гуманітаризації системи знань тощо. Крім того, історія науки безпосередньо впливає на педагогічну культуру вчителя, суттєво розширює його загальний і фаховий кругозір, підвищує рівень інтелекту та ерудицію, формує сучасну систему цінностей і професійну поведінку. Вона має велике значення для формування критичного мислення, творчих здібностей, наукового світогляду, інтересу до наукових знань, до виховання моральних якостей майбутнього вчителя.

Ефективність засвоєння навчальної дисципліни старших курсів значною мірою залежить від потреби і можливості застосовувати отримані знання на практиці і, зокрема, в подальшій роботі вчителя. З цією метою ми пропонуємо студентам включати в кваліфікаційні

роботи історичні аспекти проблеми дослідження. Щоб прищепити студентам звичку послуговуватись знаннями з історії математики в навчальному процесі, пропонуємо кожному студенту індивідуальну розрахунково-графічну роботу, яка полягає в розробці фрагментів уроків з використанням історизмів та розв'язанні історичних задач.

3.1.5. *Ознайомлення студентів з еволюцією засобів навчання та умовами їх використання.* Це питання ми детально розглянули в [46], [49], а тут зупинимось лише на кількох прикладах, які демонструють, що засоби історії математики можуть ефективно використовуватися у процесі навчання математики в школі. До таких засобів пізнання, крім очевидних – портретів відомих математиків, висловлювань про математику і математиків, таблиць з різними нумераціями, слід віднести, наприклад, такі.

Розглядаючи історію розвитку математики в Стародавній Індії, студентам демонструється так званий "індійський круг", за допомогою якого математики Індії визначали площу круга. Для цього вони ділили круг на сектори і складали з них "прямокутник", одна сторона якого дорівнювала половині довжини кола (πr), а інша – довжині радіуса (r), і отримували, що $S = \pi r^2$ (рис. 12.).

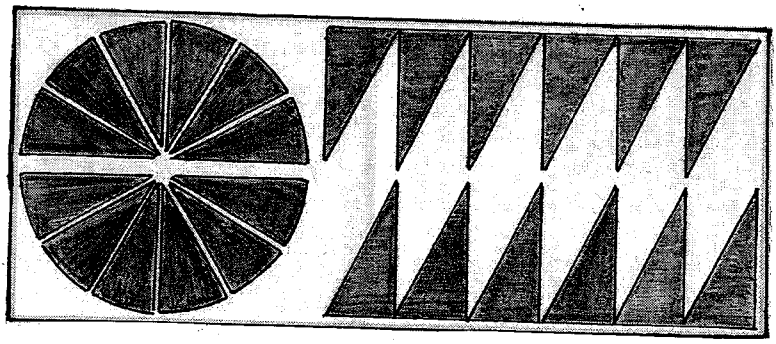


Рис. 12.

Модель індійського круга стане у нагоді вчителю для ефективної організації навчання учнів шостого класу під час вивчення теми "Площа круга".

Аналізуючи діяльність першої Александрійської школи і одного з її представників – Ератосфена, студентам пояснюється спосіб, за допомогою якого Ератосфен визначив довжину земного меридіана, і демонструється навчальний фільм "Тіні Александрії". Цей фільм (4 хв.) доцільно використати на уроці геометрії в 7 класі для того, щоб показати, яке практичне застосування має теорема про дві паралельні прямі, що перетинаються третьою.

3.1.6. *Залучення студентів до самоосвіти та науково-дослідної роботи.* Принципово новий етап у розвитку особистості настає тоді, коли у студента виникає потреба самостійної постановки мети. Це відбувається в процесі самостійної діяльності за умови досить високого рівня самосвідомості. Формування у студентів здібностей до цілепокладання і досягнення поставлених цілей є важливим завданням викладачів вищої школи.

Курс історії математики має великі можливості для залучення студентів до самоосвіти і науково-дослідної роботи. Цьому сприяє особливість навчального матеріалу (доступний, цікавий, різноплановий, має застосування у майбутній професійній діяльності тощо), а також правильна організація навчального процесу (проблемні запитання на лекції, індивідуальні виступи на семінарських заняттях, підготовка фрагментів уроків).

У процесі вивчення історії математики у студентів відбувається взаємодія навчальних цілей і мотивів, під час якої формуються внутрішні мотиви навчальної діяльності, зокрема навчальні і професійні. Важливим фактором інтенсифікації цього процесу стає правильне визначення студентами власних цілей.

Характерним прикладом мотивації вивчення історії математики студентами, які працюють у школі, є необхідність урізноманітнювати уроки і підвищувати інтерес учнів до навчання. Студенти самостійно опрацьовують наукову і популярну літературу, часто звертаються за

консультацією до викладача, обмінюються методичними знахідками з одногрупниками тощо. Змістовнішими стають їх виступи на семінарських заняттях, підвищується активність на лекціях.

Ще одним сильним мотиваційним фактором стає написання курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт. Наприклад, під час написання магістерської роботи на тему "Використання історичних задач на практичних заняттях з елементарної математики" студентка розшукала перші математичні журнали, які друкувалися в Україні, ознайомилася з їх історією, проаналізувала задачі й математичні проблеми, які були актуальними в кінці XIX – на початку XX століття. Під час педагогічної магістерської практики вона проводила заняття на тему "Діофантові рівняння". Детальне вивчення історичних аспектів даної теми сприяло підвищенню якості заняття.

Досвід проведення позааудиторних заходів з математики показує, що використання в них елементів з історії математики стимулює в подальшому самостійність і активність студентів у навчанні. Особливо сприятливими для цього стають різного виду конкурси, естафети, вікторини із такими, наприклад, запитаннями та завданнями:

1. При вході до якої установи був напис: "Хто не знає геометрії сюди та не ввійде"? (Стародавній філософ Платон вважав, що математику повинен знати кожен філософ. Розповідають, що при вході в його академію він зробив цей напис).

2. Чи правильно сучасні цифри називати "арабськими цифрами"? (Сучасні цифри і система числення були винайдені в Індії, а прийшли в Європу від арабів. Правильно було б називати ці цифри "індійськими").

3. З яким числом пов'язана назва відомої картини Рафаеля "Сікстинська мадонна"? (Назва цієї картини пов'язана з досконалим числом шість. На картині шість персонажів, перед Мадонною стоїть папа Сикстит II, що одержав своє прізвище від числа шість, бо на одній руці у нього було шість пальців. Перші досконалі числа 6 і 28 були відкриті в школі Піфагора).

4. На честь якої жінки-математика названо одну із розповсюджених у наш час квіток? (Ім'ям французької жінки-математика Гортензії Лепот (1723–1788) названо квітку гортензія, привезену нею з Індії).

5. Яка математична крива названа ім'ям жінки-математика? (Крива лінія – "локон Аньєзі". Рівняння $y(x^2 + a^2) = a^3$. Назва походить від імені Марія Аньєзі (1718–1799), італійки. Вона займала кафедру математики в Болоньї).

6. В іспанському варіанті роману Сервантеса "Дон-Кіхот" розповідаєть-

ся, як Дон-Кіхот, зкинувши з коня свого супротивника, викликав алгебраїста для надання допомоги переможеному супротивнику. Чи знаєте ви, для чого рицарю в даній ситуації був потрібний алгебраїст? (Термін "алгебра" як мистецтво відновлення у арабів перейшов у медицину. Ним почали називати мистецтво лікаря, який вправляє людині руку або ногу. Тому Дон-Кіхоту потрібен був алгебраїст або хірург).

7. Яка наука, що тісно пов'язана з математикою, одержала свою назву майже за сто років до свого народження? (Французький математик і фізик А. Ампер (1775–1836) намагався класифікувати науки. При цьому він увів ряд наук, яких в його час не існувало, зокрема кібернетику – науку про управління).

8. Який видатний сучасний математик насправді ніколи не існував? Нікола Бурбакі. Це псевдонім колективу французьких математиків).

Після проведеної вікторини в рамках тижня кафедри математики і методики математики в гуртожитку студенти виявили зацікавленість до такого роду запитань і намагалися скласти подібні, але доступні для учнів загальноосвітніх шкіл.

Розглянемо ще кілька конкретних ситуацій, які сприяють прийняттю і дотриманню студентами, поставлених викладачами цілей, а також самостійній постановці мети.

Викладач, аналізуючи діяльність Р. Декарта, прагне розкрити суть перевороту, здійсненого ним в математиці, а також показати інші його здобутки. Розглядаючи роботу "Міркування про метод", студентів бажано ознайомити з методом Декарта, який складався з таких правил:

1. Вважати джерелом тільки те, що з очевидністю пізнається таким. Інакше кажучи наукові дослідження слід проводити без поспіху й упередження про висновки, причому виразність і ясність мають бути на першому плані.

2. Кожну з розглядуваних труднощів ділити на стільки частин, скільки вимагатиметься для кращого вирішення.

3. Дослідження треба завжди починати з найбільш простих і легко пізнавальних предметів і явищ, допускаючи існування порядку навіть серед тих, які не слідують одне за одним.

4. Робити завжди настільки повні переліки та загальні огляди фактів, відкриттів, гіпотез, систем, аби бути впевненим, що нічого не пропущено.

Ці правила викликають великий інтерес у студентів і сприяють створенню задуму чи завдання з приводу написання кваліфікаційної роботи.

Постійне спостереження студентів за професійною діяльністю викладачів дає можливість створювати в уяві власні підходи до викладання того чи іншого матеріалу. Якщо викладач урізноманітнює

форми роботи, використовує сучасні засоби навчання, активізує навчально-пізнавальну діяльність студентів, то тим самим він створює умови для прийняття студентом рішення – позитивного чи негативного про використання таких прийомів у майбутній педагогічній діяльності.

Організація самостійної роботи студентів, пов'язаної з підготовкою фрагментів уроків, що містять історизми, розвиває їх творче мислення і уяву. Така діяльність студентів базується на аналізі навчального та історичного матеріалу, його зіставленні, використанні зразків уроків тощо. Отже, в процесі складання фрагментів уроків у студентів можуть бути задіяні всі процеси свідомості, а тому можна сподіватися на здійснення ними різних форм цілепокладання щодо підготовки до майбутньої професійної діяльності.

Ці та інші приклади підтверджують, що курс історії математики володіє великим і потужним арсеналом для правильного цілепокладання у навчанні і професійній підготовці майбутніх вчителів математики.

3.2. Відбір і структурування змісту навчального матеріалу

3.2.1. Проблема побудови навчального курсу розглядається у психології, педагогіці й методиках навчання окремих дисциплін. Психолого-педагогічні основи побудови навчальних курсів розглядаються в роботі Л. Д. Столяренко "Педагогическая психология" [453, с. 465]. Автор виділяє і аналізує три підходи до побудови навчального курсу:

- навчальний предмет має бути скороченою і спрощеною копією конкретної науки;

- навчальний предмет не наука, у нього інші цілі і завдання, а тому його слід спеціально конструювати;

- наука з усіма своїми досягненнями та історією в навчальному предметі подається у трансформованому вигляді через єдність знання

і діяльності.

Зміст навчальної дисципліни "Історія математики" обумовлюється, з одного боку, предметом і змістом математичної науки, з другого – завданнями, що покладаються на цю дисципліну в контексті загальних цілей навчання і вимог до фахової підготовки майбутнього вчителя математики. Проблема відбору і структурування змісту курсу "Історія математики" полягає в тому, що для навчального предмету потрібно з великого обсягу історичних відомостей, накопичених і систематизованих наукою, вибрати основні, які можуть сприяти формуванню математичної культури та фахової компетентності спеціаліста, а також допоможуть йому в подальшій професійній діяльності.

В **1.2.** ми розглянули структуру і зміст навчальних курсів з історії математики, які мали місце протягом довгого проміжку часу формування цієї навчальної дисципліни в різних країнах. Існували такі прийоми відбору і структурування змісту курсу та форми і методи його вивчення: історико-хронологічний (визначальним для нього є час, коли відбулась та чи інша подія, сформувались поняття, теорії та методи, виникли нові галузі, розширились межі застосувань тощо); предметно-модульний (вивчається історія розвитку окремих галузей математики); історико-географічний (навчальний матеріал структурується відповідно до розвитку математики в деяких народів чи на територіях окремих країн); концептуально-логічний (історія математики вивчається як історія ідей та методів); домінантний (детально розглядається та аналізується якась одна ідея чи метод); персоніфікований (історія математики вивчається через біографії визначних вчених та їх внесок у розвиток науки); комбінований.

3.2.2. Комплексний підхід до навчання історії математики базується на комбінованому способі побудови навчальної дисципліни і є найкращим в умовах невеликої кількості годин, яка відводиться на вивчення цього курсу. В університеті майбутнім учителям бажано засвоїти історію розвитку математики як цілісної науки, а також сформувати правильні уявлення про історію розвитку окремих її галузей, особливо тих, що визначають математику як навчальний предмет. З

цією метою в педагогічних університетах ми пропонуємо вивчати курс "Історія математики" у вигляді навчального комплексу, в якому лекційний курс будується на хронологічному принципі, а практичний – охоплює історію розвитку окремих математичних галузей. На вивчення кожної з тем можна відвести від 2–х до 4–х годин, а деякі питання винести для самостійного опрацювання студентами з подальшим контролем.

Основний зміст навчання складається з семи блоків-модулів, які визначають тематику лекційного курсу, і семи блоків-модулів, які визначають тематику семінарських занять.

Основні поняття: математика, історія математики, періоди розвитку математики, прямі і непрямі джерела історії математики, гіпотези, історичний екскурс, нумерація, система числення, розширення поняття числа, еволюція символіки і термінології, апорії, парадокси, кризи математичних знань, математичні школи, математичні теорії, творці математики.

Основні вміння: працювати з математичними першоджерелами, науковою та навчальною літературою з історії математики; складати історичні екскурси; характеризувати історичні події у часі та просторі; персоніфікувати відомі математичні відкриття; застосовувати отримані знання з історії математики в процесі вивчення і викладання цієї дисципліни.

Специфіка та великий обсяг навчального матеріалу передбачає виділення його інваріантної та варіативної частин. Варіативна частина програми виділена *курсивом*. Вивчення цих питань організовується за рахунок урізноманітнення форм навчання: факультативні курси, самостійна та індивідуальна робота студентів. Крім того, варіативним є обсяг викладу фактичного матеріалу, ілюстративних прикладів, біографічних відомостей, політичного, економічного і загальнокультурного фону епохи та регіону.

Наведемо зміст лекційного і практичного курсів "Історії математики", який доцільно використовувати під час навчання майбутніх учителів математики.

Лекційний курс

І. ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ ЯК НАУКА І НАВЧАЛЬНИЙ ПРЕДМЕТ

Історія математики як наука. Формування поняття предмету математики в історичному розвитку. Рушійні сили розвитку математики. Взаємозв'язок математики з іншими науками і технікою. Основні періоди розвитку математики, особливості її розвитку в окремих регіонах і країнах. Значення історико-математичних знань для учителя математики. Структура курсу.

ІІ. ПЕРІОД ПРАКТИЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

Зародження математики. Формування уявлень про число і геометричні фігури. Основні риси математичних знань народів стародавніх цивілізацій Єгипту і Шумеро-Вавілонії.

ІІІ. СТАНОВЛЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ МАТЕМАТИКИ

Перетворення математики в абстрактну дедуктивну науку. Школа Фалеса. Піфагорійська математика. Відкриття несумірних відрізків (ірраціональні величини). Перша криза методологічних основ математики. Парадокси Зенона. *Історія задач про подвоєння куба, квадратуру круга і трисекцію кута, побудови за допомогою циркуля і лінійки.* Перші математичні теорії. Геометрична алгебра і логістика. Творчість Евкліда. Аксіоматична побудова математики в "Началах" Евкліда. Творчість Архімеда. Диференціальні й інтегральні методи Архімеда. *Перша і друга Александрійські школи.*

ІV. ПЕРІОД ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Математика Стародавньої і Середньовічної Індії. Математика Стародавнього і Середньовічного Китаю. Математика країн Близького і Середнього Сходу. *Розв'язання систем лінійних рівнянь і введення від'ємних чисел.* Виділення алгебри в самостійну науку. Зародження тригонометрії. *Життя і діяльність Ал-Хорезмі, Ал-Біруні, Омара Хайяма, Ал-Каші.* Математика Середньовічної Європи. Математика епохи Відродження і початок Нового часу. Початок загальної теорії алгебраїчних рівнянь. *Творчість Ф. Вієта. Відкриття Н. Тартальї,*

Д. Кардано і Л. Ферро.

V. МАТЕМАТИКА ЗМІННИХ ВЕЛИЧИН

Перша стадія змінних величин як передумова прогресу математичного аналізу. "Геометрія" Р. Декарта. *Результати І. Кеплера, Е. Торрічеллі, П. Ферма, Б. Паскаля, Дж.Валліса.* Створення аналізу нескінченно-малих І. Ньютоном і Г. Лейбніцем. *Творчість родини Бернуллі та Л. Ейлера.* Друга криза методологічних основ математики. Формування комплексу дисциплін класичної вищої математики: нарисна, проективна, афінна, диференціальна геометрія; теорія ймовірностей.

VI. ЗАРОДЖЕННЯ І СТАНОВЛЕННЯ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ

Розвиток математичного аналізу, діяльність Б. Больцано, О. Коші, К. Вейєрштраса. Арифметизація класичного аналізу і створення теорії дійсних чисел (Р. Дедекінд, Г. Кантор). *Початки теорії функції дійсної змінної.* Відкриття неевклідових геометрій і їх значення для загального розвитку математики. *Життя і діяльність М. І. Лобачевського. Узагальнення предмету геометрії Г. Ріманом.* Інтерпретація нових геометричних систем. "Основи геометрії" Д. Гільберта. Проблема аксіоматичної побудови математики. Алгебра XIX ст. Проблема розв'язання в радикалах рівнянь вище 4–го степеня. Теорема Абеля і теорія Галуа. *Теорія груп і її значення для інших галузей математики.* Формування нового погляду на алгебру як на теорію алгебраїчних структур. Математика на рубежі XIX–XX ст.; народження нових дисциплін – функціонального аналізу, топології. *Провідні вчені цього періоду – А. Пуанкаре, Д. Гільберт. Математизація науки в XIX-XX століттях.*

VII. ІСТОРІЯ ВІТЧИЗНЯНОЇ МАТЕМАТИКИ

Математика античної доби. Розвиток математики в Ольвії, Херсонесі та інших грецьких містах на півдні України. Елементи математичних знань у скіфо-сарматських племен і східних слов'ян. *Математика часів Київської Русі.* Математика доби Відродження. Математика XVIII–XIX століття. *Математика в Києво-Могилянській*

академії, українських університетах і школах. Вклад в математику визначних українських вчених. Математика XX ст. Математичні школи в Україні.

Семінарські заняття

1. Історія арифметики: виникнення та розвиток числових уявлень, лічби і поняття числа; коротка історія нумерацій і систем числення; виникнення та основні етапи розвитку дробів; розширення поняття числа; коротка історія розвитку теорії чисел. Арифметична символіка. Історичні задачі.

2. Історія алгебри: зародження алгебраїчних методів у стародавніх цивілізаціях; алгебраїчні знання народів Китаю та Індії; виділення алгебри в самостійний предмет як вчення про рівняння; італійські алгебраїсти епохи Відродження; створення символічної алгебри; подальший розвиток вчення про рівняння; алгебраїчні відкриття XVIII–XIX століття; теорія рівнянь Н. Абеля і Е. Галуа; сучасна алгебра – наука про алгебраїчні структури; алгебраїчна символіка. Історичні задачі.

3. Історія геометрії: зародження геометрії; три визначні задачі давнини; геометрія Александрійської епохи; аналітична геометрія та її розвиток у XVII–XVIII століттях; основні етапи розвитку диференціальної, нарисної та проективної геометрії; історія неевклідової геометрії; геометрична символіка; історичні задачі.

4. Історія математичного аналізу: історія розвитку поняття функції; зародження інтегрального та диференціального числення; створення аналізу нескінченно малих; вдосконалення диференціального та інтегрального числення у XVIII і XIX ст.; історія розвитку диференціальних рівнянь; символіка математичного аналізу; історичні задачі.

5. Історія окремих розділів математики: історія розвитку комбінаторики; виникнення та розвиток теорії ймовірностей; три джерела векторного числення; основні етапи розвитку топології; історія розвитку теорії фракталів; історичні задачі.

6. Історія розвитку математики в Україні: еволюція поняття "віт-

чизняна математика" в Україні; зародження і розвиток перших математичних уявлень у праукраїнців; поширення математичних знань на території України до XIX ст.; розвиток математики в XIX ст.; розвиток математики в XX ст.

7. Використання історизмів у шкільному курсі математики: з історії проблеми; елементи історії у викладанні математики в сучасних умовах; історичні відомості та методика їх використання на уроках математики; історичні задачі в шкільному курсі математики; використання історичних відомостей у позакласній роботі.

Схематично модель курсу "Історія математики" подамо на рис. 13.

Модель курсу "Історія математики"

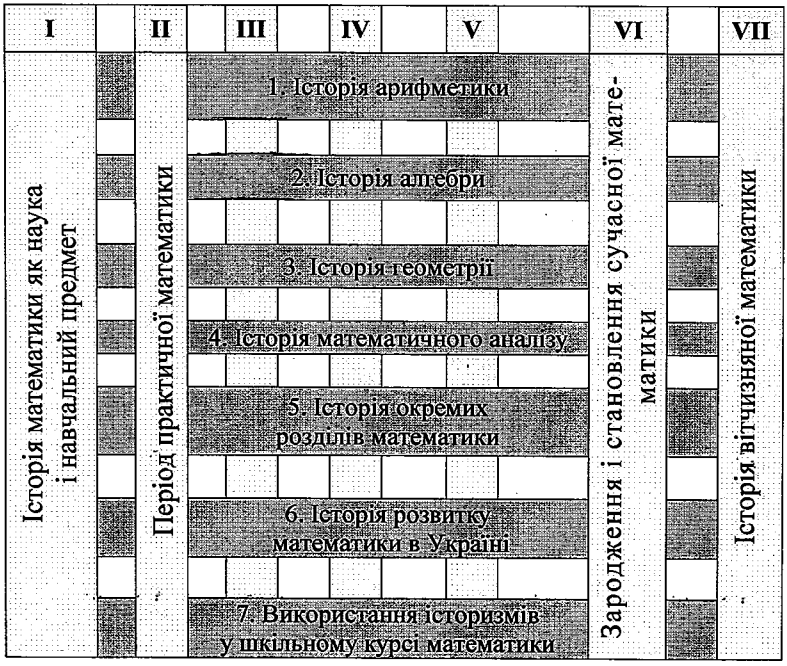


Рис. 13

3.2.3. Процес засвоєння знань з історії математики відбувається на лекціях та семінарських заняттях, під час самостійного опрацювання літератури, написання рефератів, курсових та кваліфікаційних робіт, розв'язування історичних задач тощо.

Ми продемонстрували структурування навчального матеріалу з історії математики в загальних рисах, тобто розглянули глобальну структуру курсу.

За умови дотримання такої структури курсу весь навчальний матеріал умовно поділяється на чотири групи – залежно від того, де і як студенти з ним ознайомлюються: і на лекціях, і на семінарських заняттях; тільки на лекціях; тільки на семінарських заняттях; у процесі самостійної роботи.

До першої групи належать питання методологічного характеру, які служать основою для подальшого засвоєння курсу і майбутньої професійної діяльності студентів (нумерації, розширення поняття числа, виділення алгебри в самостійний предмет як вчення про рівняння, створення аналізу нескінченно-малих І. Ньютоном і Г. Лейбніцем, неевклідові геометрії, розвиток математики в Україні тощо).

Тільки на лекціях пропонується розглядати питання установчого, інтегруючого й узагальнюючого характеру. Це, наприклад, питання, пов'язані з предметом математики і основними етапами її розвитку. Схематично, з визначенням основних положень, напрямів розвитку і складових розглядаються на лекції питання, пов'язані з періодом сучасної математики (математика на рубежі XIX – XX ст.; народження нових математичних дисциплін тощо). Крім того на лекції виноситься матеріал, який є важким для розуміння і сприйняття.

Для прикладу наведемо фрагмент лекції, на якій висвітлюється матеріал про апорії Зенона Елейського.

З відкриттям несумірних відрізків у грецьку математику проникло поняття нескінченності, яке довгий час викликало значні труднощі у розумінні і сприйнятті. В другій половині V ст. до н. е. у філософії і математиці відбулося зіткнення двох концепцій:

- концептуалістської, яка трактувала число, простір, час і матерію як нескінченно подільні;
- атомістської, яка проголошувала існування неподільних елементів.

Зенон Елейський створив спеціальні "апорії" (тупики), які повинні були продемонструвати, що обидва положення приводять до нісенітниці, протиріччя, парадоксів. Парадокси ці збереглися завдяки Аристотелю, який виклав їх у своїй "Метафізиці". Вони відомі як парадокси про Ахіллеса, про стрілу, про дихотомію та стадіон.

Концептуалістську теорію, яка трактувала число, простір, час і матерію як нескінченно подільні, спростовують апорії "Дихотомія" та "Ахіллес і черепаха".

"*Дихотомія*" (з грецької – поділ на два). Рух неможливий, бо тіло, що рухається, перш ніж пройти деякий відрізок має пройти його середину. Якби тіло дійшло до середини, то воно мало б спочатку дійти до середини тієї середини і т. д. – до нескінченності. А тому рух не може і розпочатися.

"*Ахіллес і черепаха*". Ахіллес ніколи не зможе наздогнати черепаху, бо спочатку йому потрібно дістатися того місця, з якого почала рухатися черепаха. За цей час черепаха проповзе ще деяку відстань. Поки Ахіллес подолає цю відстань, вона знову просунеться вперед і т. д. – до нескінченності. Отже, якщо простір нескінченно подільний, то Ахіллес ніколи не зможе наздогнати черепаху

Атомістську теорію, яка проголошувала, що простір і час складаються з неподільних сегментів – "точок" і "моментів", Зенон спростовував парадоксами "Стріла" і "Стадіон".

"*Стріла*". Стріла, що рухається, в будь-який момент часу або знаходиться у спокої, або рухається. Якщо момент часу неподільний, то стріла в цей момент не може рухатися (в іншому випадку цей момент можна було б поділити). Оскільки стріла не може рухатися в кожний момент часу, то вона не може рухатись взагалі, бо час складається з моментів.

"*Стадіон*". Доведемо, що половина часу може дорівнювати подвійному часу. Розглянемо три ряди тіл.

Перша позиція

(A)		0	0	0	0	
(B)		0	0	0	0	
(C)		0	0	0	0	

Друга позиція

(A)		0	0	0	0	
(B)	0	0	0	0		
(C)			0	0	0	0

Ряд (A) нерухомий, ряди (B) і (C) рухаються з рівними швидкостями в протилежних напрямах. У будь-який момент часу, коли тіла кожного з рядів порівняються один з одним, кількість тіл з ряду (C), яких зустріли в ряді (B), буде вдвоє більшою, ніж з ряду (A). Отже, для (B) необхідно вдвоє більше часу, щоб пройти повз (A), ніж пройти повз (C). Але час, який проходить до моменту, коли тіла рядів (B) і (C) порівняються з (A), – один і той же. Отже, подвійний час дорівнює половині часу. (Апорія дістала назву "Стадіон", бо її можна ілюструвати за допомогою бігунів на стадіоні) [76].

Тільки на семінарських заняттях розглядається матеріал, який доступний для студентів з точки зору наявності літератури і розуміння розглядуваних проблем. Наявність детальних розробок семінарських занять у підготовленому нами "Практикумі з історії математики" [56], дає можливість розглядати на семінарських заняттях теми, які не висвітлюються на лекціях. Для прикладу розглянемо окремі фрагменти матеріалу про історію розвитку теорії фракталів, з яким студенти ознайомлюються у процесі підготовки до семінарського заняття "Історія окремих розділів математики".

Термін "фрактал" походить від латинського *fractus* і в перекладі означає "той, що складається з фрагментів", а також дріб, дробовий, дробити. Його запропонував і вперше використав у роботі "Фрактали: форма, випадок, розмірність" (1975 р.) Б. Мандельброт. З поняттям фрактала тісно пов'язані неперервні, але ніде не диференційовані функції; криві і поверхні, які не мають дотичної в жодній точці; множини, що не мають нетривіальної (відмінної від нуля і нескінченності) міри Лебега; сингулярні розподіли тощо.

Фрактали – своєрідні і складні за внутрішньою структурою множини. Їх зображення – гарні геометричні форми з нерівними, можливо, фрагментарними обрисами. Самоподібні фрактали можна поділити на частини так, що кожна з утворених частин, хоча б приблизно, буде зменшеною копією цілого. Метричні характеристики, такі як довжина і площа, не мають для них змісту.

Точного означення фрактала, тобто такого, що охоплює всі структури, які прийнято вважати фрактальними, і водночас не включало б інших структур дотепер не існує, так само, як і аналітичного задання для більшості з них.

Сам Б. Мандельброт означав фрактал різними способами:

- фракталом називається структура, що складається з частин, кожна з яких певним чином подібна цілому;
- фракталом називається множина, у якої розмірність Хаусдорфа строго більша топологічної розмірності.

Аналіз існуючих означень фрактала послідовно висвітлюється у роботах [385], [386], [461]. М. В. Працьовитий сформулював найсучасніше означення фрактала, а також розглянув еволюцію раніш існуючих.

Математичні об'єкти з "фрактальними властивостями" були відомі давно, проте вважалися екзотичними і навіть патологічними. Напевно, першою такою множиною була множина Кантора, що будується шляхом поділу відрізка [0;1] на 3 рівні частини, видалення середнього інтервалу і застосування цієї процедури до відрізків, що залишилися, нескінченну кількість разів. Г. Кантор, досліджуючи цю множину, встановив її самоподібність, а також

той факт, що сума довжин видалених інтервалів дорівнює одиниці (тобто, "довжина" множини, що залишилася, дорівнює нулю). Таким чином, множина Кантора – один з представників фрактальних множин.

Ще одним фрактальним об'єктом є "сніжинка Коха". Ця фігура названа на честь швецького математика Хельге фон Коха, який побудував і досліджував її. Розглянемо, як будується окремий фрагмент сніжинки Коха – крива Коха.

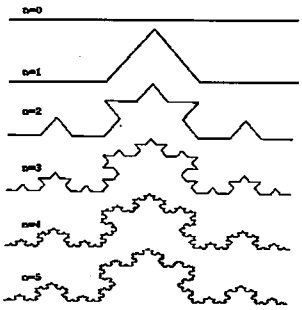


Рис. 14

Побудова кривої починається з відрізка одиничної довжини (рис. 14) – це нульове покоління кривої Коха. Далі кожна ланка (у нульовому поколінні один відрізок) замінюється на *утворюючий елемент*, позначений на рисунку через $n = 1$.

У результаті такої заміни утворюється наступне покоління кривої Коха. У 1–му поколінні – це крива з чотирьох прямолінійних ланок (довжина кожної дорівнює 1/3). Щоб отримати 3–є покоління, виконуються ті самі дії – кожна ланка замінюється на зменшений утворюючий елемент. Отже, для одержання кожного наступного покоління всі ланки попереднього покоління необхідно замінити зменшеним утворюючим елементом. Крива n-го покоління при будь-якому скінченному n називається предфракталом. При n, що прямує до нескінченності, крива Коха стає фрактальным об'єктом.

Якщо аналогічне перетворення застосуємо нескінченну кількість разів до кожної сторони рівностороннього трикутника, то в результаті отримаємо "сніжинку Коха". На рисунку 15 зображено початок процесу побудови "сніжинки Коха" – лінії нескінченної довжини.

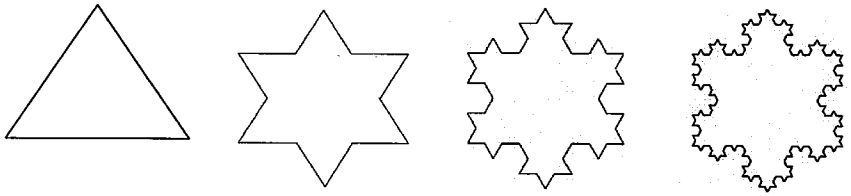


Рис. 15

Цю криву фон Кох, за його словами, одержав "випадково, малюючи щось на папері під час чергового нудного засідання". У 1904 р. у своїй статті "Елементарний геометричний метод для вивчення деяких питань теорії кривих площин" він опублікував дослідження властивостей цієї кривої (ніде не диференційовна, самоподібна, неперервна, але не має жодної дотичної), а також довів можливість параметричного задання. Його сніжинка, властивості якої виявилися настільки дивними і несподіваними, зворушила весь математичний світ. Італійський математик Е. Чезаро, здивований "внутрішньою нескінченністю" і "самоподібністю" сніжинки, писав у 1905 р.: "Якби вона була обдарована життям, то можна було б позбавити її життя, тільки знищивши криву вцілому. В іншому випадку вона б відроджувалася знову і знову з глибини своїх трикутників, як це робить життя у Всесвіті". Сам фон Кох вважав свою криву "патологічною", підтримуючи думку, висловлену А. Пуанкаре, роботи якого і надихнули фон Коха на дослідження.

У 1920 р. відомий польський математик Вацлав Серпинський отримав криву, яка пізніше дістала назву "килим Серпинського". Уявлення про трикутний килим Серпинського дає рис. 16, на якому зображено фігури, отримані після кількох етапів побудови.

Детальніше про побудову і властивості килима Серпинського можна прочитати в роботі [461, с. 7–11].

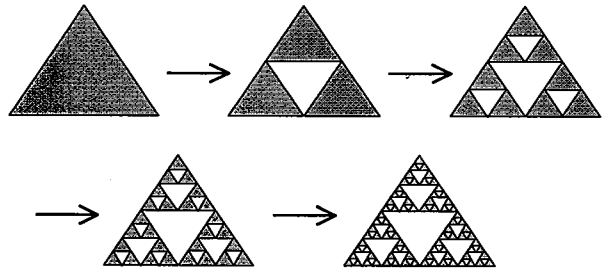


Рис. 16

Одним із тих, хто найближче підійшов до результатів, отриманих Б. Мандельбротом, був французький математик Г. Жуліа. 25–річний юнак видав свій шедевр на 199 сторінках про ітерації раціональних функцій. Ця робота одержала Гран прі Академії наук, а її автор став відомим у всіх мате-

матичних центрах того часу. Дослідження ітерацій функцій комплексної змінної Г. Жуліа проводив разом із французьким математиком П. Фату. У 1917–1919 р. вони отримали основні результати, пов'язані з ітерацією функцій комплексної змінної. Цей факт став вражаючим прикладом математичного дослідження, який на багато десятиліть випередив час (вчені могли лише приблизно уявити, як виглядають досліджувані ними об'єкти).

Теорія фрактальних множин ґрунтується на дослідженнях багатьох математиків. У роботах Б. Мандельброта використані наукові результати інших учених, які працювали в період 1875–1925 років у тій самій галузі (Пуанкаре, Фату, Жуліа, Кантор, Хаусдорф, Безикович та ін.). Але тільки в наш час вдалося об'єднати їхні роботи в єдину систему завдяки фундаментальним комп'ютерним експериментам.

В 1982 р. Б. Мандельброт опублікував роботу "Фрактальна геометрія природи", в якій уперше відмітив "фрактальну природу" нашого світу: "Чому геометрію часто називають холодною і сухою? Одна з причин полягає в її нездатності описати форму хмари, гори, дерева або берега моря. Хмари – це не сфери, гори – не конуси, лінії берега – це не кола, і кора не є гладкою, і блискавка не поширюється по прямій. Природа демонструє нам не просто більш високий ступінь, а зовсім інший рівень складності. Число різноманітних масштабів довжин у структурах завжди нескінченне. Існування цих структур кидає нам виклик у вигляді важкого завдання – вивчення тих форм, які Евклід відкинув як безформенні, тобто завдання стосовно дослідження морфології аморфного". І математики одержали новий світ геометричних об'єктів – світ фрактальної геометрії.

Прикладом фрактальних об'єктів є множини Жуліа (рис. 17) та Мандельброта (рис. 18).

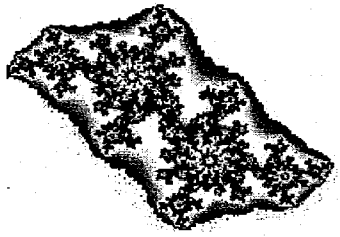


Рис. 17.

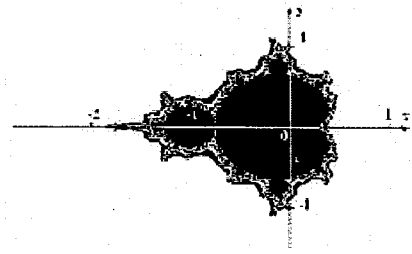


Рис. 18.

Після опублікування Б. Мандельбротом результатів своїх досліджень у

Після опублікування Б. Мандельбротом результатів своїх досліджень у науці почався дійсний "фрактальний бум". З'ясувалося, що фрактали є чудовим апаратом моделювання і дослідження різноманітних природних явищ. Фракталы широко використовуються у математиці, фізиці, біології, геофізичній гідродинаміці, метеорології, генній інженерії, інформатиці тощо. Крім того, фрактали – галузь мистецтва, коли за допомогою найпростіших формул і алгоритмів утворюються картини надзвичайної краси і складності.

В Україні дослідження з теорії фракталів проводяться понад 20 років. Детальніше про період становлення і розвитку теорії фракталів у XX ст. в Україні можна дізнатися з роботи [460].

Тільки в процесі самостійної діяльності студенти вивчають матеріал, який стосується теми обраного реферату, кваліфікаційної чи магістерської роботи. Більша частина біографічного матеріалу творців математики також опрацьовується самостійно.

Так коротко можна охарактеризувати структуру і зміст навчального курсу "Історія математики".

3.3. Організаційно-методичний інструментарій навчання історії математики

Невпинне зростання наукової інформації, динаміка розвитку сучасного суспільства, піднесення соціальної ролі особистості та інтелектуалізації її праці, швидка зміна техніки та технологій потребують від закладів освіти України забезпечення якісно нового рівня навчально-виховного процесу.

Соціокультурна ситуація в державі вимагає, щоб кожний майбутній вчитель отримав освіту, яка з одного боку відповідає запитам сучасного суспільства, а з іншого – потребам, інтересам і можливостям самого спеціаліста. Вчитель тільки тоді виправдовує соціальні сподівання, коли його особистість, загальна і професійна культура розвиваються швидше і досягають вищого рівня по відношенню до основної маси громадян взагалі та підростаючого покоління.

Успіх та ефективність навчально-виховної роботи у вищій школі значною мірою залежить не лише від змісту навчання, а й від прави-

льного вибору викладачем методів, форм і засобів навчання. *Систему методів, форм і засобів навчання, які визначаються його цілями і змістом, а також знаходяться у постійному взаємозв'язку і взаємодії між собою будемо називати організаційно-методичним інструментарієм навчання.*

Проаналізуємо, як кожна із складових організаційно-методичного інструментарію впливає на навчання історії математики в педагогічному університеті.

Метод (від грецького – шлях) – шлях досягнення визначеної мети. Під методом навчання розуміють спосіб спільної діяльності викладача і студентів, спрямований на досягнення завдань навчання.

Методологія цілісного підходу до взаємопов'язаної діяльності викладача і студентів у навчанні передбачає виділення методів навчання у великі групи:

- методи організації і самоорганізації навчально-пізнавальної діяльності;
- методи стимулювання і мотивації учіння;
- методи контролю і самоконтролю у навчанні;
- бінарні методи навчання.

Детальний аналіз класифікацій методів навчання за різними основами подається в роботі С. Д. Смирнова [441, с.168]. В окрему групу автор виділяє активні методи навчання (методи, які реалізують установлення на більшу активність суб'єкта в навчальному процесі) і визначає основні шляхи підвищення активності навчання. Ми погоджуємося з думкою автора про те, що на сучасному етапі організації навчання у вищій школі перевагу слід надавати активним методам навчання.

Наведемо кілька конкретних прикладів, які демонструють використання активних методів навчання на лекціях і семінарських заняттях з історії математики.

Проблемний метод навчання. Для створення проблемних ситуацій на лекціях з історії математики ми пропонуємо, крім інших, використовувати загальний підхід, який полягає в тому, що студентам пропонується визначити місце і значення виділеного фрагменту на-

вчального матеріалу з історії математики в шкільному курсі математики. Такий підхід набуває особливої актуальності в умовах контекстного навчання.

Розглядаючи діяльність Іонійської школи і її засновника Фалеса Мілетського, студентам формулюється низка запитань такого змісту:

- Чому жерці Стародавнього Єгипту дозволили Фалесу Мілетському вивчати математичні тексти попередніх поколінь? (Правильної відповіді на це запитання студенти не дають, хоча це – відомий факт. Викладач повідомляє, що Фалес визначив висоту однієї з єгипетських пірамід).

- Які математичні знання і природні явища використав Фалес для визначення висоти єгипетської піраміди?

- В якому класі і під час вивчення якої теми цей приклад доцільно запропонувати в школі?

Після розв'язання створеної у такий спосіб проблемної ситуації студентам пропонується самостійно розглянути спосіб, яким Фалес визначив відстань від берега до корабля, що знаходився в морі, і віднайти для нього місце в шкільному курсі математики.

На лекції з теми "Математика Александрійської школи" студенти дивляться фільм "Тіні Александрії". В цьому фільмі демонструється прийом, з допомогою якого Ератосфен визначив довжину земного меридіану. Після перегляду фільму студенти мають встановити, які властивості геометричних фігур використав Ератосфен.

Аналізуючи розвиток математики в Китаї, викладач наводить способи, якими китайські математики розв'язували системи лінійних рівнянь і рівняння вищих степенів. Завдання студентів полягає в тому, щоб визначити, хто з відомих європейських математиків перевідкрив ці способи. Для розв'язання цієї проблеми студенти мають згадати матеріал з курсу вищої алгебри і здобутки Крамера, Гаусса і Горнера.

Курс "Історія математики", крім іншого, покликаний поповнювати, інтегрувати, узагальнювати і систематизувати отримані раніше математичні знання, а тому має невичерпні можливості для створення проблемних ситуацій.

Ділова гра. Ділова гра – це навчання в умовах, які імітують реальну професійну діяльність. Це один з інтерактивних методів навчання. Для того, щоб він став справді ефективним, викладачу слід дотримуватися таких вимог:

– обирати конкретний об'єкт ігрового моделювання і мету гри;
– встановлювати і дотримуватися правил гри;

– розподіляти ролі між учасниками гри;
– заохочувати взаємодію учасників, що виконують різні ролі;
– проводити підсумкове обговорення.

Ділова гра, як метод навчання, використовується під час семінарського заняття на тему "Використання історизмів у шкільному курсі математики". На попередньому занятті студенти отримують домашнє завдання підготувати фрагменти уроків на задані чи самостійно обрані теми з використанням історизмів. Семінарське заняття починається з того, що на дошці виписуються теми уроків, фрагменти яких підготували студенти. На вибір студентів (інколи за бажанням викладача) обирається один з перерахованих уроків і аудиторія перетворюється на клас, студенти – на учнів, автор уроку – на вчителя, а викладач – на спостерігача чи гостя уроку.

Заняття проходить за великої активності всіх студентів. Тексти кращих уроків розмножуються і поширюються між студентами. Такі наробки стануть їм у пригоді під час роботи в школі.

Активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів під час навчання історії математики сприяє висвітлення невеликого фрагмента про творчий шлях видатного вченого, історію розвитку математичної ідеї, міжнародні премії для математиків. Розкривши питання частково і вказавши літературу, в якій воно описується повністю, викладач створює умови, за яких у студента виникає бажання прочитати вказаний матеріал. Ми спостерігали це на прикладі ознайомлення студентів з життям Гіпатії, проблемами обґрунтування математики, історією теореми Ферма тощо. Успіх в організації навчально-пізнавальної діяльності студентів у такий спосіб можливий лише за умови вільного доступу до вказаної літератури. З цією метою ми практикуємо робити роздруківки цікавих статей і залишати їх на кафедрі для використання студентами.

Активізує діяльність студентів і розв'язування цікавих старовинних задач, які можуть бути використані в подальшій педагогічній роботі студентів. Зацікавлення викликають у студентів задачі про луночки Гіппократа, арифметичні задачі, що розв'язуються методом хибного

припущення, геометричний спосіб розв'язування рівнянь, визначення Архімедом співвідношень між об'ємами тіл тощо.

Мотивує свідому діяльність студентів з вивчення окремих питань історії математики можливість використати отримані знання на заняттях та екзаменах з методики навчання математики. Наприклад, з курсом методики навчання математики тісно пов'язані теми "Розширення поняття числа", "Історія розвитку поняття функції", "Способи розв'язування рівнянь", "Комбінаторні задачі", які розглядаються в курсі історії математики.

Стимулюють навчальну діяльність студентів фронтальні опитування на початку лекцій, постановка і розв'язання проблемних запитань під час лекції, тестування студентів на початку семінарського заняття. Так на першому семінарському занятті студентам пропонується відповісти на такі запитання:

1. Які нумерації Ви знаєте?
2. Назвіть відомі Вам системи числення.
3. В якій країні з'явився сучасний спосіб зображення чисел?
4. Запишіть число у сучасному вигляді та вкажіть, в якій країні використовувалися подані записи:

а) $,\overline{\sigma\lambda\delta}$; б) CDXLIV;

в) ; г) .

5. Які дроби використовувалися в Стародавньому Єгипті?
6. Які дроби називали астрономічними?
7. Де вперше появилися десяткові дроби?

Не всі з цих запитань висвітлювалися на лекції, а тому, щоб відповісти на них студенти мають добре попрацювати самостійно. Враховуючи модульний підхід до організації навчання, готуватися до лекцій і, особливо, семінарських занять студентам потрібно систематично.

Під формами навчання розуміють способи організації навчальної діяльності. Виділяють такі форми організації навчання: за кількістю студентів (колективні, групові, індивідуальні); за місцем навчання (аудиторна, екскурсія, домашня самостійна робота); за дидактичною

метою (лекція, семінарське заняття, факультатив, гурток, семінар, консультація).

У процесі навчання історії математики слід використовувати весь арсенал форм навчання. Колективна форма навчання представлена на лекції, хоча і вона може урізноманітнюватися шляхом залучення студентів до обговорення цікавих питань, що виникають у процесі лекції. Ми спостерігали високу активність і зацікавленість студентів під час обговорення таких питань:

- Що таке папірус?
- Які числа виникли раніше – дробові чи від'ємні?
- Чому цифри, якими ми користуємося зараз називаються арабськими?
- Чому теорема Фалеса має таку назву?
- Що таке золотий переріз?

У сучасних умовах навчання у вищій школі найбільшої уваги вимагають індивідуальні і групові форми навчання. Вони відповідають індивідуалізації та диференціації навчання. На основі цих форм навчання у студентів розвиваються і формуються такі необхідні якості як самостійність, ініціативність, творчість, упевненість, захоплення, дослідницький стиль діяльності, культура пошуку і праці. Організація навчання через індивідуальні й групові форми сприяє свідомому засвоєнню навчального матеріалу з історії математики. Про це свідчать результати анкетування студентів після вивчення курсу. Анкетування показало, що найкраще студенти запам'ятовують ті факти і положення, які готували самостійно для семінарських занять чи курсових і кваліфікаційних робіт. На другому місці по засвоєнню стоїть матеріал, який обговорювався в аудиторії у процесі розв'язування проблемних ситуацій.

Групові та індивідуальні форми роботи у навчанні історії математики найчастіше використовуються під час підготовки до семінарських занять. Визначені планом семінарського заняття питання готують кілька студентів разом. Завдання кожної групи полягає в тому, щоб правильно визначити обсяг матеріалу, послідовність його викладу, підготувати відповідні засоби, розрахувати час тощо. Після конструктивної

групової роботи студенти переходять до індивідуальної роботи: підбір літератури, складання плану виступу і Т. ін.

Одним із компонентів цілісної методичної системи, яка крім цього включає мету, зміст, методи і форми навчання є засоби навчання. Зміна одного з компонентів цієї системи має суттєвий вплив на решту компонентів, зокрема і на засоби навчання. У той же час удосконалення засобів навчання дає можливість інтенсифікувати навчальний процес і вимагає значних змін у методах і формах навчання.

У сучасній педагогіці [370], [448] поняття "засоби навчання" переважно тлумачаться як об'єкти будь-якої природи, які формують навчальне середовище та використовуються вчителем і учнем, або викладачем і студентом у процесі навчальної діяльності.

Об'єкти, що входять до засобів навчання, можна класифікувати за різними основами: складом об'єктів, суб'єктами діяльності, властивостями, впливом на якість знань, способом відтворення факту, що вивчається та ін.

За складом об'єктів засоби навчання поділяються на матеріальні та ідеальні (останні інколи ще називають інтелектуальними). До матеріальних засобів навчання відносяться підручники і навчальні посібники, таблиці, моделі, обчислювальні прилади, креслярські інструменти, навчальне обладнання тощо. Ідеальні засоби навчання – це ті засвоєні раніше знання та уміння, що використовуються викладачем і студентом для навчання. З них студенти дістають способи міркування, доведення, розв'язування задач тощо.

Ідеальні засоби навчання можуть представлятися у двох формах: вербалізації та матеріалізації. Вербалізація – це виклад засобів міркування, аналізу, доведення, розв'язування та інших видів мислительної діяльності за допомогою мови. Матеріалізація – це подання вказаних засобів у вигляді певних абстракцій: символів, графіків, схем, діаграм тощо. Матеріалізовані засоби створюють позитивний вплив на мотивацію і успішність навчання, на активізацію пізнавальної діяльності студентів і підвищення їх інтересу до вивчення математики.

Матеріальні та ідеальні засоби навчання не протистоять, а доповнюють один одного. Вплив усіх засобів навчання на якість засвоєння

студентами програмного матеріалу багатогранний. Матеріальні засоби пов'язані в основному з утворенням зорового ряду навчання, розвитком інтересу та уваги студентів, активізацією їх навчально-пізнавальної діяльності, можливістю здійснення практичних дій і урізноманітненням способів засвоєння суттєво нових знань. Ідеальні засоби впливають на розуміння навчального матеріалу, логіку міркувань, запам'ятовування, культуру мови, розвиток інтелекту. Між сферами впливу матеріальних та ідеальних засобів навчання немає чітких границь. У кожному конкретному випадку вони по-своєму впливають на засвоєння знань та формування умінь.

Інтенсифікувати процес навчання історії математики допомагають як матеріальні так й ідеальні засоби навчання. З ідеальних засобів навчання історії математики слід відмітити нумерації, символи і терміни, історичні задачі, висловлювання про математику і математиків, цитати з математичних трактатів тощо. Вони можуть подаватися як вербалізовано (виклад лекції викладачем, виступ студента на семінарському занятті, усний контроль) так і матеріалізовано (текст у книгах чи методичних розробках, схеми, діаграми). Наведемо кілька конкретних прикладів.

Маючи ще зі школи уявлення про римську нумерацію, кожен студент може прочитати число XXIV. Ознайомившись з правилом запису чисел за допомогою давньогрецької (іонійської) нумерації студенти без особливих труднощів прочитають числа α, β, γ (1, 2, 3) та ,α і ,β (1000 і 2000). Але щоб записати в іонійській нумерації число 444 їм потрібно звернутися до грецького алфавіту, матеріалізованого у вигляді таблиці.

Історичні задачі та спеціальні способи їх розв'язування дають можливість показати, як розвиток математики впливав на саму постановку задачі, метод її розв'язування та власне розв'язки. Так у Стародавній Греції за відсутності алгебраїчної символіки та уявлення про від'ємні числа подання й розв'язування квадратних рівнянь виконувалось за допомогою геометричних побудов. У такий спосіб знаходилися тільки додатні корені, а рівняння $x^2 + c = bx$ і $x^2 + bx = c$ вважалися різними і, відповідно, мали різні способи розв'язування.

Аналізувати вказані рівняння та їх геометричні способи розв'язання допомагають заздалегідь підготовлені малюнки, що демонструються студентам у вигляді таблиці чи за допомогою проекційного апарату.

Рівняння $x^2 + ax = b^2$ у книзі Евкліда "Начала" подається так: "Площа квадрата з невідомою стороною, складена з площею прямокутника, в якого одна сторона дорівнює a, а друга дорівнює стороні квадрата, рівновелика площі квадрата зі стороною b. Знайдіть сторону першого квадрата".

Для розв'язання цього рівняння будувався квадрат зі стороною $\frac{a}{2}+x$, де x – відрізок довільної довжини (рис. 19). Нехай у цьому квадраті $AM = NC = \frac{a}{2}$, а $MB = BN = x$. Тоді $x^2 + ax = \left(\frac{a}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, а за умовою $x^2 + ax = b$, тому $\left(\frac{a}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Геометричною інтерпритацією останньої рівності може бути співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Щоб визначити невідомий відрізок x, досить побудувати прямокутний трикутник за даними катетами $\frac{a}{2}$ і b. Гіпотенузою цього трикутника буде відрізок $\frac{a}{2} + x$. Зробимо з вершини прямого кута B засічку на гіпотенузі радіуса $\frac{a}{2}$. Тоді відрізок $KA = x$ – шуканий (рис. 20).

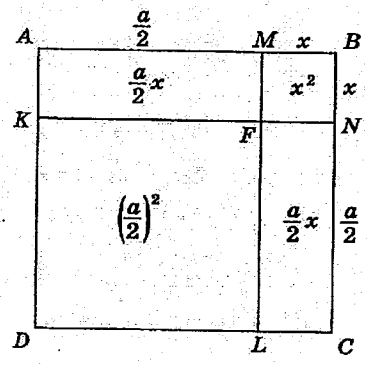


Рис. 19

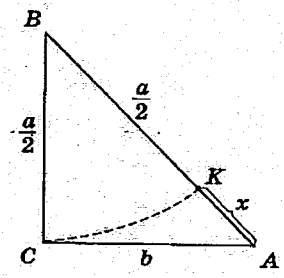


Рис. 20

В афоризмах, цитатах та висловлюваннях про математику і математиків повніше відображається хід історичного розвитку математики, дається оцінка діяльності окремих математиків та наукових шкіл, розкриваються взаємозв'язки між різними галузями математики, демонструється вплив математики на розвиток інших наук, техніки, виробництва тощо. Висловлювання про математику і математиків присутні майже в кожному шкільному підручнику, а тому майбутній вчитель математики має добре знати відомості про їх авторів і вміти донести до учнів зміст та ідейне значення запропонованих цитат.

Наприклад, кожне семінарське заняття в "Практикумі з історії математики" супроводжується цитатами, що стосуються теми заняття. Вивчаючи тему "Історія алгебри" студенти знайомляться з такими висловлюваннями про цю математичну галузь.

Алгебраїчні позначення отримують вирішальне удосконалення у Вієта і Декарта; починаючи від Декарта алгебраїчні записи мало чим відрізняються від сучасних

Н. Бурбакі

Мені доводиться розподіляти свій час між політикою і рівняннями. Проте рівняння, на мою думку, значно важливіші, бо політика існує тільки для даного моменту, а рівняння будуть існувати вічно.

А. Ейнштейн

Обов'язковою умовою усвідомлення майбутніми вчителями окремих фактів з історії математики є їх локалізація у часі та просторі. Вивчаючи історію розвитку математики студенти оволодівають просторовими і часовими уявленнями, вчаться "мислити епохами", і саме тому одним із засобів навчання історії математики має стати хронологія. Хронологія – це послідовність історичних подій у часі, а також сам перелік дат цих подій. Основне

завдання хронології – встановлення часових співвідношень між фактами, що вивчаються, а тому в курсі історії математики вона виступає не лише як засіб, а і як предмет вивчення.

Хронологія як засіб вивчення історії математики має бути представлена у навчальному процесі у вербальному і матеріальному вигляді, бо студенти легше і міцніше засвоюють послідовність історичних подій у часі за допомогою мобілізації їх слухової, зорової та моторної пам'яті.

Роль хронології як кістяка історичних знань особливо виразно проявляється у пізнанні студентами основних періодів у розвитку математики.

Академік А. М. Колмогоров запропонував варіант періодизації, за якою в історії розвитку математики виділяється чотири періоди. Послідовність і продовження цих періодів бажано подати студентам у вигляді схеми, зображеної на рис. 21.

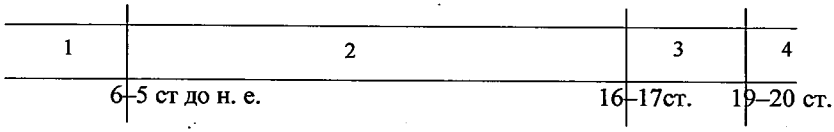


Рис. 21

Свою специфіку використання мають і матеріальні засоби навчання. Традиційним засобом навчання (і не лише математики та історії математики) є таблиці. В навчанні історії математики вони займають особливе місце. За допомогою таблиць студенти мають можливість дізнатися про перші математичні знання стародавніх людей (наскельні орнаменти, геометричні форми прикрас, виконання арифметичних дій на папірусі і глиняних дощечках), ознайомитись із нумераціями різних народів, з'ясувати хронологію настання тієї чи іншої події, побачити різні способи розв'язання однієї задачі різними авторами та ін. За допомогою таблиць можна зафіксувати у пам'яті студентів цікаві факти з розвитку математики, продемонструвати значення математичних знань для розв'язування практичних потреб.

З великим інтересом на лекції сприймається матеріал, що подається за допомогою таблиці "Самоський тунель" (рис. 22), яка виготовлена студентами самостійно за матеріалами книги Б. Л. Ван дер Вардена "Пробуждающаяся наука".

Близько 530 року до нашої ери на острові Самос через вапнякову гору Кастро було побудовано водогін. В 1882 році німецькі археологи знайшли цей тунель: він добре зберігся, був майже прямолінійний, його довжина – 1 км, а ширина і висота – 2 м. Тунель, ймовірно, копали з обох кінців.

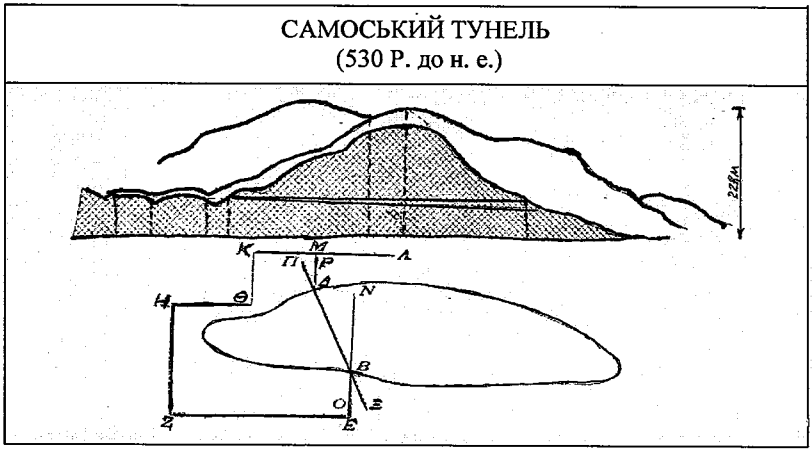


Рис. 22

Приблизно в середині тунелю робітники з обох сторін зустрілися з відхиленням, що не перевищувало 10 м у горизонтальному і 3 м у вертикальному напрямі. Виконання такої будови ґрунтувалось на строгих математичних розрахунках, які описав Герон Александрійський в роботі "Діоптр".

Близько 700 року нашої ери подібний акведук копали в скелях біля Єрусалиму. Тоді робітники контролювали правильність напряму з допомогою вертикальних колодязів і в результаті отримали зигзагоподібний тунель удвічі довший, ніж відстань між його кінцями. [133, с. 143].

Інтенсифікації та активізації навчального процесу сприяють і інші саморобні таблиці: "Орнаменти трипільської культури", "Браслет з Мізинської стоянки", "Нумерації", "Тріади Менехма", "Визначення Архімедом об'єму кулі, циліндра і конуса" тощо. Цікаві за змістом і художнім оформленням є типографські таблиці

А. Г. Конфоровича і Г. М. Андрієвської "Історія розвитку математики", видані видавництвом "Вища школа "у 1980 році. Їх можна використовувати в школі і в університеті.

Не традиційним для математики, але широко застосовним в процесі викладання історії, є карти. На нашу думку карти з історії різних часів мають стати невід'ємним атрибутом лекції з історії математики. З їх допомогою відбувається поєднання слухового і візуального сприйняття матеріалу, концентрується увага студентів не лише на хронологічній послідовності подій, а й на їх територіальних ознаках. Виникнення і взаємозв'язок багатьох подій в історії розвитку математики обумовлюється в певній мірі територіальними і національними особливостями. Так найбільшого розвитку в найдавніші часи математика набула в Єгипті (долина річки Ніл) та Вавилоні (долини річок Тигр і Євфрат). Про це писали грецькі історики, а Геродот ще й підкреслював, що саме розливи річки Ніл сприяли розвитку геометрії, бо з погляду оподаткування потрібно було знати, скільки землі втрачено під водою. Відомості про розвиток математики в Єгипті за 2000 років до нашої ери дійшли до нашого часу завдяки тому, що були записані на спеціально обробленому папірусі (трава, що росте на берегах річки Ніл). Відомості про розвиток математики в Китаї датуються значно пізнішим часом, що пов'язано з національними особливостями: правлячі династії намагалися знищити всі здобутки попередніх династій. Цей матеріал вчитель математики зможе пізніше використати в шкільній практиці: на позакласних заняттях з математики чи під час інтегрованих уроків. Прикладом може послужити інтегрований урок математика-історія в 6 класі на тему "Математика в Стародавньому Єгипті".

Використання карти на лекції з теми "Розвиток математики в Стародавній Греції" дає можливість показати студентам, що майже все чорноморське узбережжя сучасної України заселяли вихідці з Іонії. Міста-держави Ольвію, Херсонес та деякі інші заснували саме вихідці з Мілету – міста, з якого походив Фалес Мілетський. Студенти мають знати, що на півдні України, ще 25 століть тому

існували такі самі школи, як і в Стародавній Греції: школи граматиста, кіфариста, палестри. Сучасний Херсонес чудове підтвердження тому, що рівень математичних знань у народів, що населяли узбережжя Криму був досить високим.

Доцільно використана карта "Арабський халіфат" надасть допомогу студентам у розв'язанні створеної викладачем проблемної ситуації:

– Відомо, що десяткова система числення вперше була запроваджена в Індії. Чому ж цифри 0, 1, 2, 3, ..., 9 називають арабськими?

Створенню і розв'язанню проблемних ситуацій сприяють й інші засоби навчання: моделі, наприклад "індійський круг", портрети видатних математиків, оригінальні друковані видання тощо.

Результати проведеного дослідження дають можливість зробити такі висновки. Засоби навчання у вищій школі, як ідеальні так і матеріальні, виконують багатогранні функції і забезпечують в комплексі з іншими компонентами методичної системи високу якість знань і творчий розвиток студентів, сприяють інтенсифікації та гуманізації навчального процесу, служать майбутнім учителям зразком для наслідування. Курс історії математики потребує поруч з традиційними засобами навчання використовувати специфічні: нумерації, хронологію, історичні задачі, карти, портрети математиків тощо.

3.4. Використання комп'ютерно-орієнтованих систем у навчанні історії математики

Ефективна організація самостійної роботи студентів потребує розробки методичного забезпечення, яке може подаватися через друковані або комп'ютерні джерела. Матеріал з історії математики використовується протягом усього навчання студентів в університеті. Щоб створити сприятливі умови для ознайомлення студентів з біографічними відомостями творців математики та їх портретами, ми підготували навчальні комп'ютерні програми "Творці алгебри",

"Творці геометрії" і "Творці математичного аналізу".

Розглянемо для прикладу структуру навчальної програми "Творці геометрії". На початку роботи перед студентами розкривається вікно з назвою програми. Наступним кроком студенти переходять до перегляду вікон, в яких представлено портрет і біографічні відомості одного з математиків.

На рисунку 23 показано у якому вигляді студенти отримують необхідну інформацію.



Рис. 23

Після проходження курсу навчання студенти мають можливість у режимі самоконтролю оцінити набуті знання. Якщо є необхідність процес навчання можна повторити. Навчальна програма містить інформацію про математиків, діяльність і досягнення яких пов'язані з матеріалом, що вивчається в педагогічному університеті. Це такі математики.

Архімед (бл. 287–212 до н. е.) – давньогрецький математик, фізик і механік.

Бельтрамі (Beltrami) Еудженіо (16.XI 1835–18.II 1900) – італійський математик, професор, член Національної академії в Римі.

Больяй або Бойя *(Bolyai), Фаркаш* (9.II 1775–20.XI 1856) – угорський математик, професор математики, фізики і хімії, а також поет.

Больяй або Бойя *(Bolyai), Янош* (15.XII 1802–27.I 1860) – видатний угор-

ський математик. Син Фаркаша Больяя.

Бріаншон (Brianchon) Шарль Жюль (19.XII 1785–29.IV 1864) – французький математик, професор.

Вейль (Weyl) Герман (9.XI 1885–5.XII 1955) – німецький математик, професор, член Національної АН у Вашингтоні та Американської академії мистецтв і наук.

Гільберт (Hilbert) Давид (25.I 1862–14.II 1943) – німецький математик, професор, почесний член Берлінської АН.

Дедекінд (Dedekind) Юліус Вільгельм Ріхард (6.X 1831–12.II 1916) – німецький математик, член Берлінської, Паризької і Римської АН.

Декарт (Descartes) Рене (31.III 1596–11.II 1650) – французький математик, філософ, фізик, фізіолог.

Дезарг (Desargues) Жірар (2.III 1593–9.X 1662) – французький математик, інженер і архітектор, основоположник проективної і нарисної геометрії.

Ден (13.II 1878 – 27.VI 1952) – німецький математик, професор.

Дюрер Альбрехт (21.V 1471–6.IV 1528) – німецький художник, теоретик мистецтва, математик.

*Евклід (*III ст. до н. е.) – старогрецький математик, автор перших теоретичних трактатів, що дійшли до нас.

Кавальєрі (Cavalieri) Бонавентура (1598–3.XII 1647) – італійський математик, професор.

Каган, Веніамін Федорович (9.III 1869–8.V 1953) – радянський математик професор

Кантор (Cantor) Георг (3.III 1845–6.I 1918) – німецький математик, професор.

Келі (Coylly) Артур (16.VIII 1821–26.I 1895) – англійський математик.

Кеплер (Kepler) Йоганн (27.XII 1571–15.XI 1630) – німецький астроном і математик, який відкрив закони руху планет і був одним з попередників творців аналізу нескінченно малих.

Клейн (Klein) Фелікс (25.IV–22.VII 1925*)* – німецький математик, член-кореспондент Берлінської АН.

Лакруа (Lacroix) Сильвестр Франсуа (28.IV 1765–24.V 1843) – французький математик і педагог, професор, член Паризької АН.

Лежандр (Legendre) Андрієн Марі (18.IX 1752–10.I 1833*)* – французький математик, професор Політехнічної школи, член Паризької АН.

Лобачевський, Микола Іванович (1.VII 1792–24.II 1856*)* – російський математик, професор, творець неевклідової геометрії.

Маскероні (Maskeroni) Лоренцо (14.V 1750–14.VII 1800) – італійський геометр, професор, член Міжнародної метричної комісії в Парижі.

Мебіус (Mobius) Август Фердінанд (17.XI 1790–26.IX 1868) – німецький геометр, професор астрономії в Лейпцігському університеті.

Монж (Monge) Гаспар (1.V 1746–28.VII 1818) – французький геометр і громадський діяч, професор, член Паризької АН.

Мор (Mohr) Георг (1.IV 1640–26.I 1697) – датський геометр.

Папп (III ст до н. е.) – грецький геометр, ймовірно жив і працював в Александрії.

Паскаль (Pascal) Блез (19.VI 1623–19.VIII 1662) – французький математик, фізик, письменник, філософ.

Паш (Pasch) Морід (8.XI 1843–20.IX 1930) – німецький математик, професор, один із перших дослідників аксіоматичних основ геометрії.

Плейфер (Plaifair) Джон (1748–1819) – шотландський математик.

Понселе (Poncelet) Жан Віктор (7.VII 1788–22.XII 1867) – французький інженер і математик, член Паризької АН, член-кореспондент Петербурзької АН.

Пуанкаре (Poincare) Анрі (29.IV 1854–17.VII 1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ, член Паризької і Французької АН та більш як 35 іноземних академій, автор понад 1000 наукових праць з математики, фізики, астрономії і філософії.

Саккері (Saccheri) Джованні Джіроламо (5.IX 1667–25.X 1733) – італійський математик і логік.

Серпінський (Sierpinski) Вацлав (14.III 1882–21.X 1969) – польський математики, доктор філософії, професор, член-кореспондент Краківської АН, член Польської АН та 11 іноземних академій і багатьох наукових товариств.

Смогоржевський Олександр Степанович (6.III 1896–7.V 1969) – український математик, професор, доктор фізико-математичних наук.

Урисон Павло Самуїлович (3.II 1898–17.VIII 1924) – радянський математик, професор.

Френе (Frenet) Жан Фредерік (7.II 1816–12.VI 1900) – французький математик, професор.

Ферма (Fermat) П'єр (VIII 1601–12.I 1665) – французький юрист і математик.

Хаусдорф (Hausdorf) Фелікс (8.XI 1868–26.I 1942) – німецький математик, професор.

Шаль (Shasles) Мішель (15.XI 1793–18.XII 1880) – французький геометр та

історик математики, професор, член багатьох академій і наукових товариств.

Шварц (Schwarz) Карл Герман Амадус (25.I 1843–30.XI 1921*)* – німецький математик, доктор філософії, професор, член Берлинської АН.

Шухов, Володимир Григорович (26.VIII 1853–2.II 1939) – радянський інженер і механік, член АН СССР.

Штейнер (Steiner) Якоб (18.III 1796–1.IV 1863) – швейцарський математик, професор, член Берлінської АН.

Сучасні вимоги до навчання у вищій школі не тільки передбачають інноваційні зміни в цілях, змісті, методах, формах і засобах викладання, але й вимагають удосконалення та урізноманітнення способів діагностики знань студентів. У широкому розумінні термін "діагностика" означає процес пошуку несправностей в системі, який ґрунтується на інтерпретації даних, а тому його традиційно вживають в медицині та техніці. Стосовно процесу навчання діагностика означає виявлення тих знань/умінь, якими студент не оволодів [23, с. 384].

Термін "педагогічна діагностика "запропоновано у 1968 р. німецьким педагогом дослідником К. Інгенкампом. Аналізуючи різні підходи до тлумачення вказаного терміна, він відмічає, що педагогічна діагностика є складовою частиною педагогічної діяльності, спрямованої на дослідження навчального процесу. В ході такого дослідження вивчаються передумови, умови і результати навчального процесу з метою його оптимізації чи обґрунтування значення його результатів для суспільства. В межах педагогічної діагностики здійснюється оцінювальна діяльність, яка в кожному окремому випадку становить вельми диференційовані, всебічні та взаємопов'язані процеси, які зазнають впливів різних інституціональних, особистих і ситуаційних факторів [242, с. 10].

Існують різні методики діагностичних вимірювань рівня знань і умінь, отриманих в процесі вивчення предметів математичного циклу. Всі вони в основному зорієнтовані на проведення різних видів контролю успішності студенті, що забезпечують отримання зворотної інформації та констатацію досягнутого рівня навченості. В той же час детальний аналіз літератури дає підстави стверджувати, що не

розв'язаною залишається проблема діагностики знань з історії математики майбутніх учителів, до цього часу не розроблялося програмне забезпечення для контролю відповідних знань.

Велика насиченість курсу фактичним матеріалом (він має охопити розвиток математики з найдавніших часів і до кінця XX століття включно) викликає труднощі у викладачів при відборі матеріалу для контролю і визначенні способів перевірки засвоєння цих знань студентами.

Протягом семестру оцінюються такі види робіт студентів: усні та письмові відповіді на запитання, пов'язані з історією арифметики, алгебри, геометрії, математичного аналізу, сучасних розділів математики та вітчизняної математики, з допомогою яких визначається готовність до відповідного семінарського заняття; виступи на семінарських заняттях; розв'язування історичних задач; підготовка фрагментів уроків та позакласних заходів з використанням елементів історії математики, а також відвідування лекцій та семінарських занять. Це дає можливість студентам засвоїти значну кількість різнопланових знань з курсу "Історія математики", які вони зможуть використати в майбутній педагогічній діяльності.

Для визначення обсягу знань, якими студенти оволоділи протягом навчання в університеті і які вони можуть застосовувати без використання допоміжної літератури, доцільно перед заліком проводити комп'ютерне тестування. З цією метою нами підготовлено навчально-методичний посібник призначений для організації контролю знань з курсу "Історія математики" студентів математичних спеціальностей педагогічних та класичних університетів. Посібник підготовлено у комп'ютерному варіанті, який містить власне тестову систему і методичні вказівки щодо її використання.

Тестова система складається з трьох розділів:

- творці математики;
- висловлювання про математику і математиків;
- математична мозаїка.

Комп'ютер у системі довільних чисел пропонує кожному студенту 10 запитань з бази кожного розділу, а студент має вибрати прави-

льну відповідь із чотирьох запропонованих. За результатами поданих відповідей комп'ютер оцінює знання студентів з кожного розділу за 5–бальною шкалою, виводить загальну оцінку і повторює запитання, у відповідях на які студент допустив помилки. Інформація про результати тестування може зберігатися в комп'ютері, на дискеті або виводитись для друку.

Використання тестових завдань дозволяє:

- здійснювати контроль засвоєння студентами знань з курсу "Історія математики";

- знайомити майбутніх учителів математики з різними способами контролю знань,

- демонструвати різні види тестових завдань, особливості створення і реалізації;

- надавати студентам зразок впровадження тестової перевірки знань у школі.

Тестова система складається з вікна "Привітання", двох реєстраційних вікон, двох вікон початку тестування і вибору відповідного розділу тестування, вікон тестових завдань і вікна звіту.

Вікно "Привітання" організовує студентів, налаштовує їх на роботу, а також сприяє активізації знань з історії математики. Після натискання на клавішу "Далі" перед студентом відкривається перше вікно реєстрації. Напрям стрілки на ньому вказує клавішу, яку потрібно натиснути, щоб відкрилось вікно для введення прізвища студента і номера його групи

Вікна реєстрації дають можливість зберегти результати тестового контролю з вказівкою на прізвище студента, який тестувався, та номер його групи. Після натискання на клавішу "Ввести" перед студентом відкривається перше вікно вибору теми..Напрям стрілки на ньому вказує клавішу, яку потрібно натиснути, щоб відкрилось вікно для вибору одного з розділів тестування. Студент може починати роботу з будь-якого розділу на власний розсуд, або обрати послідовність, закладену програмою.

Розділ "Творці математики" містить 50 запитань, які стосуються визначних постатей в історії математики. Відомо, що історія науки – це

й історія її творців. Знання наукового і життєвого шляху видатних математиків та їх портретів є необхідним компонентом професійної складової вчителя математики, а тому цей аспект історії математики відіграє особливу роль у підготовці майбутніх учителів.

Робота вчителя спрямована перш за все на виховання (в широкому розумінні) підростаючого покоління. Протягом усього часу навчання в школі дитина, а пізніше підліток, молода людина потребують взірця для наслідування. В інтересах суспільства та й самих молодих людей формувати зразки для наслідування з допомогою справді видатних особистостей. В той же час, саме в шкільному віці історія математики опановується краще через долі конкретних людей. До того ж персоналістичний аспект математики та історії математики сприяє гуманізації та гуманітаризації навчання математики.

Розділ "Творці математики" містить запитання про видатних математиків, серед яких умовно можна виділити кілька груп:

- найвідоміші математики і мислителі давнини (Архімед, К. Гаусс, Р. Декарт, Л. Ейлер, Г. Лейбніц, І. Ньютон, Піфагор, П. Ферма);
- творці окремих розділів математики (Ф. Вієт, О. Коші, Г. Монж, Е. Паскаль, Н. Тарталья, Ж. Фур'є);
- українські математики і ті, які багато років працювали в Україні (В. Буняковський, М. Ващенко-Захарченко, Г. Вороний, М. Кравчук, М. Остроградський)
- математики XX століття (П. Александров, М. Боголюбов, Б. Гнєденко, О. Погорєлов, М. Чеботарьов).

Кожне вікно з розділу "Творці математики" містить портрет вченого, запитання, яке включає підказку, і чотири варіанти відповіді. Після того як студент обере правильну, на його думку, відповідь і натисне потрібну клавішу, відкриється нове вікно з наступним запитанням. Усього студент має відповісти на 10 запитань. Для відповіді на кожне запитання відводиться 1 хвилина.

Для прикладу наведемо відкрите вікно, які містить запитання з цього розділу (рис. 24).

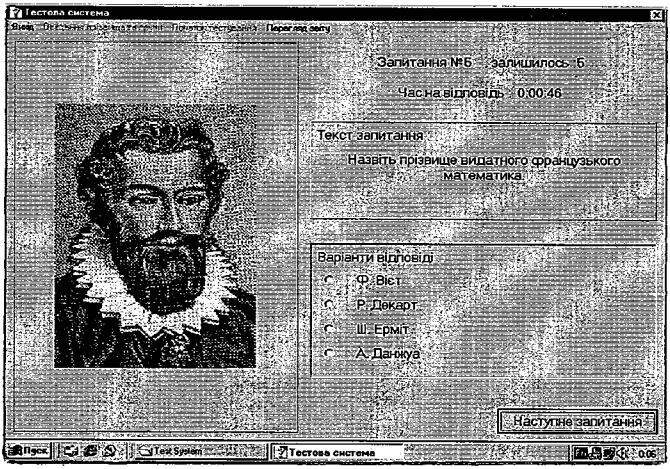


Рис. 24

Розділ "Висловлювання про математику і математиків" складається з 50 запитань, які містять висловлювання трьох видів:

1) висловлювання відомих історичних постатей про предмет математики, про окремі її галузі, про зв'язок математики з іншими науками та практикою, про місце математики в житті людини і суспільства тощо. Студенти мають визначити, кому з поданих для відповіді осіб належить наведене висловлювання;

2) висловлювання відомих історичних постатей про окремі розділи математики (арифметика, алгебра, математичний аналіз, теорія ймовірностей, статистика). Запитання містить прізвище автора висловлювання, а студенти мають визначити, яка галузь математики характеризується в наведеному висловлюванні;

3) висловлювання про відомих історичних постатей. У цитаті подається коротка інформація про одного з видатних математиків чи характеристика його діяльності. Замість прізвища математика, про якого йде мова, в цитаті стоять зірочки (***). Студенти мають визначити чий словесний портрет їм представлено.

Знання висловлювань про математику і математиків допоможе вчителю в здійсненні мотивації навчання математики взагалі, і конк-

ретних тем зокрема, а також в оформлені математичного кабінету, проведені математичних вікторин і вечорів, підготовці учнівських робіт для Малої академії наук тощо.

Кожне вікно з розділу "Висловлювання про математику і математиків" містить цитату, запитання, яке включає підказку, і чотири варіанти відповіді. Як приклад пропонуємо розглянути рисунок 25.

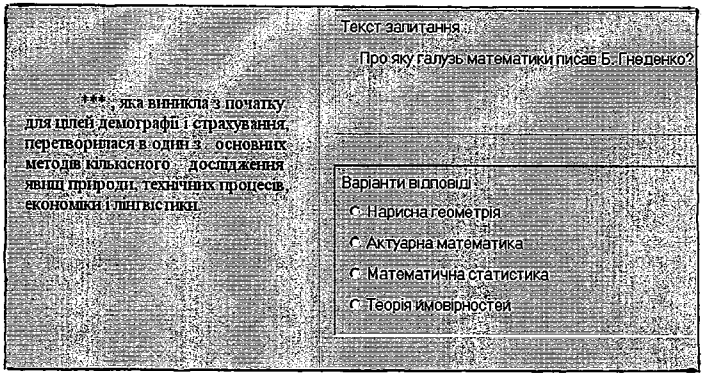


Рис. 25

Розділ "Математична мозаїка" містить 50 запитань, що стосуються різних аспектів історії математики:

- нумерації (римська, слов'яńська, єгипетська) та форма запису окремих чисел;

- визначні задачі давнини та способи їх розв'язування (мезограф, квадратриса);

- здобутки окремих математиків (Архімеда, Аполлонія, Ератосфена) та діяльність математичних шкіл (Піфагора, Платона);

- цікаві пам'ятники математикам (Архімеду, Цейлену)

- стародавні засоби навчання математики (глиняні дощечки, папірус, берестяна кора, пальмове листя, індійський круг);

- формули та теореми, названі на честь їх творців (Ейлера, Муавра, Гульдіна);

- задачі, пов'язані з іменем відомого математика (Архімеда, Гіппократа, Евкліда, Фалеса);

- фігури, назва яких містить ім'я їх конструкторів (Мебіуса, Коха, Серпінського, Пеано).

Знання такого фактичного матеріалу надасть вчителю допомогу в організації позакласної роботи з математики, дасть можливість зацікавити учнів своїм предметом, зробити його доступнішим і зрозумілішим.

Кожне вікно з розділу "Математична мозаїка" містить малюнок, запитання, яке включає підказку, і чотири варіанти відповіді.

Для прикладу наведемо кілька відкритих вікон, які містять запитання з цього розділу (рис. 26, 27).

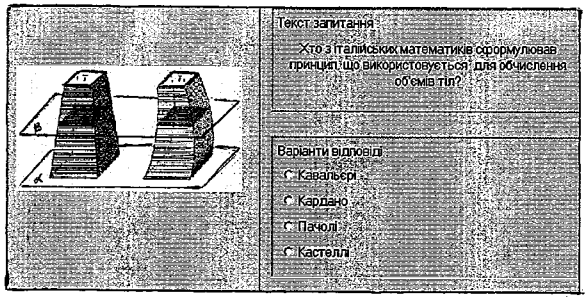


Рис. 26

Знання такого фактичного матеріалу допоможе вчителю в організації позакласної роботи з математики, дасть можливість зацікавити учнів своїм предметом, зробити його доступнішим і зрозумілішим.

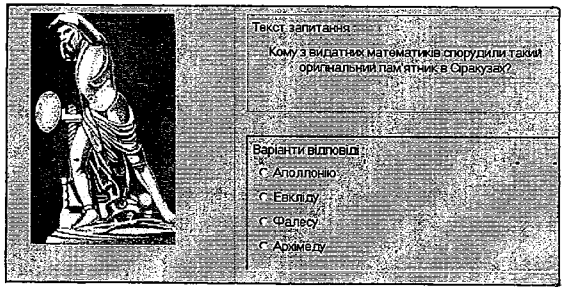


Рис. 27

Тестова система має редактор, за допомогою якого можна змінювати базу даних і параметри роботи системи: збільшувати кількість запитань у кожному розділі, замінювати окремі запитання, встановлювати час для відповіді на кожне запитання, визначати кількість запитань для одного тестування тощо.

Тестова система супроводжується методичними вказівками (в комп'ютерному і книжному форматі [56]), які дають розгорнуту характеристику запропонованій тестовій системі і на конкретних прикладах демонструють її можливості та методику використання. Методичні вказівки містять список літератури, на основі якої складалися запитання. Запропонована література може використовуватись студентами для підготовки до тестування. Передбачається, що вказівками у книжному варіанті будуть користуватися як викладачі так і студенти, а тому вони не містять відповіді на запропоновані запитання.

Використання розробленої тестової системи на практиці продемонструвало можливість здійснення за досить короткий проміжок часу об'єктивного контролю засвоєння знань студентами, підтвердило зручність його здійснення для студентів і викладача, показало зацікавленість студентів новою формою контролю. Запропонована тестова система може використовуватися в навчальному процесі класичних і педагогічних університетів, на курсах підвищення кваліфікації вчителів, в позакласній роботі з математики в середніх закладах освіти. Оболонка програми може бути використана для створення тестових систем з інших навчальних курсів, зокрема історії різних наук, виробничого навчання, образотворчого мистецтва тощо.

Суттєву допомогу для здійснення систематизації і узагальнення знань з історії математики студенти (особливо заочної та дистанційної форм навчання) можуть отримати завдяки навчальній комп'ютерній програмі "Локалізація розвитку математики у часі і просторі". Цю програму розробили Валерій Денисов і Валентина Фурс – студенти фізико-математичного факультету НПУ імені М. П. Драгоманова. В ній міститься матеріал, що стосується різних часових проміжків і територій. Наприклад. На карті, відповідно до місць життєдіяльності, спеціальними позначеннями нанесено імена

відомих математиків. Ці позначення – активні, тобто натиснувши на одну з них, студент може отримати коротку інформацію про обраного вченого, а також побачити його портрет (рис. 28).



Рис. 28

Перспективними є подальші розробки програмного забезпечення для комп'ютерної діагностики знань студентів з історії математики. Вони можуть бути спрямовані на створення тестових систем для тематичного контролю знань в аналогічній програмній оболонці, а також на побудову нової програмної оболонки для тестових завдань на відповідність, на правильну послідовність і тестових завдань відкритого типу.

без глибокого знання вітчизняної історії нема змоги наповнити нашу духовність глибокою національною самосвідомістю – необхідною запорукою її вселюдської культурної значущості та інтернаціонального звучання.

Розглядаючи національну культуру як цілісність, що включає в себе всі елементи духовної і матеріальної культури, відомий український філософ М. В. Попович зазначає: "Чи існують німецька, російська або українська математика? З точки зору змісту, істинності – такого поділу математики немає. Теорема або доведена, або ні – незалежно від місця на земній кулі. Але поняття "українська математика" має сенс. Воно означає ту сферу національної культури, в якій працюють математики. І якщо ця сфера малорозвинута чи нація не має власної математичної культури, свого загону математиків, то це справляє негативний вплив на всю національну культуру" [Попович, Національна культура і культура нації, с. 62].

Історія національної науки є невід'ємною складовою національної культури і певною мірою визначається і залежить від умов функціонування та рівня розвитку відповідного суспільства. Таким чином, історію вітчизняної математики слід розглядати в контексті соціокультурного процесу, що відбувається в Україні та у світовій цивілізації.

Термін "вітчизняна" стосовно математики, фізики та інших галузей науки – давній, поширений і застосовується досить часто. Користувалися ним і в радянські часи, але тоді в нього вкладали інший зміст. Оскільки Вітчизною тоді називали СРСР, то вітчизняним раніше називали все, що було на теренах цієї наддержави або її попередниць – Російської імперії, Київської Русі, скіфських і сарматських племен та навіть раніше. У такому розумінні розвиток вітчизняної математики найповніше висвітлено у чотиритомній "Истории отечественной математики" [250]. Ця фундаментальна праця створена великим авторським колективом, очолюваним відповідальним редактором Й. З. Штокалом і видрукувана у п'яти великих книгах в Києві у видавництві "Наукова думка" протягом 1966–1970 років. У ній ідеться про розвиток вітчизняної математики з давніх-давен до XX століття, до того ж не тільки в Київській Русі, а й в бронзововому (А. Ң. Боголюбов, М. Ю. Брайчевський) та навіть у дописьмовому (М. Ю. Брайчевський) періодах. На XIII Всесвітньому конгресі з історії науки (1971) цю фундаментальну працю відзначено медаллю імені А. Койре.

Оскільки тепер українці мають власну державу Україну, то поняття вітчизняна математика для них істотно змінилось. З одного боку, його обсяг звузився відповідно до тієї території, яку українці називають Вітчизною. З

РОЗДІЛ 4

ВИСВІТЛЕННЯ ІСТОРІЇ ВІТЧИЗНЯНОЇ МАТЕМАТИКИ

4.1. ОСОБЛИВОСТІ ВІДБОРУ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

Історія національної науки є невід'ємною складовою національної культури і певною мірою визначається і залежить від умов функціонування та рівня розвитку відповідного суспільства. Саме тому історію вітчизняної (української) математики слід розглядати в контексті соціокультурного процесу в Україні та у світовій цивілізації загалом.

Інтеграційні процеси, які відбуваються на теренах Європи і світу створюють суттєвий вплив на характер науки і освіти. Становлення інформаційного суспільства, посилення міграційних процесів на ринку праці, об'єднальні процеси в галузі освіти (Болонський процес), розширення міжкультурних обмінів сприяють інтернаціоналізації науки й освіти. Наукові знання розповсюджуються досить швидко і не тільки в межах якоїсь однієї держави. Ні державні, ні територіальні, ні часові кордони не стають їм на заваді. Опублікована в якійсь державі нова математична інформація швидко доходить до вчених інших держав. А нерідко і перевідкривається. У сучасному світі стало прийнятним вважати науку феноменом інтернаціональним. Навіть умовами Філдсовської премії, якою нагороджуються кращі математики, передбачається не вказувати національну приналежність лауреата.

Все це не означає, що відмирає поняття національної культури взагалі і науки, зокрема. Слід пам'ятати слова Луї Пастера про те, що наука не має батьківщини, але не буває вченого без батьківщини, і те значення, яке його праці можуть мати у світі, він повинен відносити до своєї батьківщини. Для ствердження себе у світовій спільноті і виховання підростаючого покоління в дусі патріотизму й національної гідності необхідно вивчати і знати свою власну культурну історію. З цього приводу академік М. Г. Жулинський наголошує, що

другого боку, його варто розширити, доповнивши тими відомостями з історії розвитку математики в Україні, про які російські і радянські історики математики з тих чи інших причин замовчували.

Розглядаючи історію розвитку вітчизняної математики слід враховувати окремі об'єктивні та суб'єктивні фактори. А саме:

- до цього часу остаточно не розв'язано проблему етногенезу українського народу, що спричинює існування різних підходів щодо часових і територіальних меж походження і формування української культури;

- український народ довгий час перебував у розділеному стані, а його землі входили до різних держав;

- кілька століть Україна існувала у складі Російської імперії, а згодом – СРСР, тому все, що створювалося на її теренах і її вченими, іменувалося прикметником "російський "або "радянський";

- в радянські часи замовчувалися математики Західної Європи і репресовані математики.

Кожен із названих факторів створював і створює відповідний вплив на розуміння змісту поняття "вітчизняна математика". Зупинимось детальніше на конкретних проблемах його осмислення і висвітлення, зумовлених вищеназваними факторами.

1. Сучасна карта світу, як і сучасні обриси території України, – результат складного і багатовікового генетичного процесу. Ранні землеробські племена, які жили на території нинішньої України, належали до Трипільської культури (4–3 тис. до н. е.). З 2000 р. до н. е. на зміну Трипільській культурі прийшли кочівники (скотарі) та кіммерійці (кочові вершники), які оселились на Північних берегах Чорного моря. У VII–VI ст. до н. е. почалась активна колонізація північного Причорномор'я греками. Уздовж усього чорноморського узбережжя нинішньої України створювалися грецькі поселення (поліси), серед яких слід назвати Тіру, Ольвію, Херсонес та Пантікапей. Перше значне політичне об'єднання на території теперішньої України створили племена скіфів (VII–III ст. до н. е.). У скіфський період немало праукраїнців інтегрувалися в античну цивілізацію Середземномор'я. Згодом значна частина скіфів була підкорена і асимільована сарматами (кочівники зі Сходу), які панували в степах Північного та Східного Причорномор'я.

Таким чином, найдавніший період у формуванні ПраУкраїни пов'язують з виникненням, розквітом і занепадом її перших державних утворень – кіммерійських, скіфських, сарматських та античних держав Північного Причорномор'я. Всі вони залишили помітний слід в нашій історії,

сприяли культурному збагаченню сусідніх земель, і серед них – слов'янських. Спілкування скіфів і сарматів з греками ольвійськими, херсонеськими і боспорськими привело до запозичення деяких математичних знаків: іонійська нумерація, прийоми обчислень, можливо, десяткова система числення тощо.

Попередня історія України була водночас і фоном, і часткою нашої минувшини, а тому її слід враховувати, при розгляді питань зародження і формування української культури. Аналізуючи розвиток вітчизняної математики, не можна оминати увагою її ранній період, представлений непрямими джерелами – витворами мистецтв, посудом, знаряддями праці, будівельними спорудами, знайденими на території України (Мізинська стоянка, Трипілля, Північне Причорномор'я, Крим).

2. Упродовж багатьох віків українські землі, а відповідно і їх населення, були розділені на частини і розвивалися не однаково. Східна частина українських земель перебувала здебільшого в Російській імперії, а західна – під владами Польщі, Литви, Австро-Угорщини. Аналізуючи цивілізаційний контекст виникнення українського народу, автори монографії "Природознавство в Україні до початку XX ст." стверджують, що консолідація українського народу мала відбуватися в кінці XV – протягом XVI ст. і при цьому зазначають: "Зрозуміло, що територія України, особливо Середнє Подніпров'я з Києвом, у першу чергу привертала увагу московських царів (як згодом і російських імператорів, а пізніше, у XX ст., також більшовицьких лідерів). Але найпотужнішою цивілізаційною системою, на периферії якої відбувався етногенез і розвиток українського народу, був Західно-християнський католицько-протестантський світ, який упродовж XVII ст. трансформувався в Новоєвропейську (невдовзі Новоєвропейсько-Північноатлантичну) цивілізацію Нового часу" [365, с. 49].

Для середньовічної Європи характерним був той факт, що протягом майже тисячі років (V–XV ст.) тут не відбувався розвиток науки взагалі й математики, зокрема. Більш того – аж до Ренесансу спостерігався її суттєвий занепад. Для Східної Європи цей період занепаду тривав значно довше – аж до XVII ст. В Росії епоха Відродження почалась по суті з часів реформ Петра I (XVII ст.). Про допетровську Російську імперію Феофан Прокопович так сказав у надгробному слові Петру I: "Тая предже были мы? Не ведаю, во всем государстве был ли хотя один цирклик, а прочего орудия и имен не слыхано: а есть ли бы где некое явилося арифметическое или геометрическое действие, то тогда волшебством нарицано".

вчених, "привласнених" іншими культурами" [3, с. 3].

Народилися в Україні, отримали освіту і довгий час працювали на її теренах С. Н. Бернштейн, В. Л. Гончаров, Й. Б. Погребиський, І. В. Слешинський, М. Г. Чеботарьов та інші. Їх по праву слід відносити до українських математиків, не принижуючи при цьому соціокультурний і науковий вплив на їхню творчість радянської держави. Той факт, що певний період вони працювали в Москві чи інших містах Росії, не є причиною для їх "забуття" в Україні. Тим паче, що міграція за часів СРСР відбувалася не завжди за бажанням чи згодою вчених. Крім того в столиці створювалися кращі умови для проведення наукових досліджень, морального і матеріального забезпечення вчених.

За часи радянської влади математична школа України поповнилась когортою визначних математиків з інших територій (М. М. Боголюбов, В. М. Глушков, Б. В. Гнєденко, М. М. Крилов, М. О. Лаврентьєв, Я. Б. Лопатинський, Ю. Д. Соколов, П. Ф. Фільчаков, С. М. Черніков та інші).

На сучасному етапі розвитку національної культури і науки залишається дискусійним питання з приводу визнання того чи іншого математика українським. З часом ця проблема знайде однозначне розв'язання. А зараз, коли незалежна Українська держава існує, коли вона визнається всією світовою спільнотою, коли підростає покоління, народжене в незалежній державі, коли завдання формування українського патріотизму виходить на перше місце, ця проблема набуває особливої ваги. І проблема стосується не лише математики, але й науки і культури взагалі. В той же час її розв'язання не може бути поспішним і необдуманим. Детальний аналіз проблеми показує, що існує кілька критеріїв, які можна покласти в основу "національної інвентаризації", а саме: етнічний, історичний, мовний, територіальний, особистого визначення та ін. За умови дотримання лише одного з цих критеріїв можуть виникати певні труднощі, подолати чи розв'язати які далеко непросто, щоб з таким розв'язанням погодилися всі.

На нашу думку, українськими (вітчизняними) вченими можна називати:

а) усіх тих учених, які живуть і працюють у суверенній Україні;

б) тих учених, які хоч і живуть в інших державах, але які самі себе вважають українцями;

в) тих вчених, які народилися або довгий час працювали в Україні і самі себе називали українцями, малоросами, русинами чи якось іще інакше, пов'язуючи свою долю з українською нацією;

г) тих учених, яких ще до виникнення суверенної України офіційно на-

У Західній Європі епоха Відродження почалася раніше. Вже з середини XV ст. на українські території, що перебували під владою Польщі, Литви та Австро-Угорщини, проникають гуманістичні тенденції та наукові ідеї із Західної Європи. У населення пробуджується інтерес до рідної мови, культури, науки та освіти. Сприяла цьому дещо толерантніша політика офіційних властей відповідних територій до української мови, релігії, культури.

Отже, історію розвитку математики в Україні до XIX ст. слід висвітлювати з урахуванням стану і рівня викладання математики в навчальних закладах та кваліфікації їх викладачів. Розкривати її доцільно у два етапи:

1) XV–XVII ст. – формування математичних знань у Західній Україні;

2) XVII–XVIII ст. – формування математичних знань у Західній та Східній Україні.

3. В 1926 році у Парижі відомий російський вчений князь М. Трубецькой зробив визнання: "Та культура, которая со времени Петра живет и развивается в России, является органическим и непосредственным продолжением не московской, а киевской, украинской культуры... Таким образом, украинизация оказывается мостом к европеизации" [3, с. 3]. Але такі визнання не були характерними для істориків, науковців і культурологів попередніх століть. Біографічні словники видатних математиків ще донині рясніють прикметниками "російський" і жодного –"український". Допоки існувала Російська імперія, до складу якої входила Україна, то кожного вченого цієї держави вважали російським вченим. І це цілком природно. Інша справа – В Радянському Союзі. Оскільки тут визнавалась українська нація, говорили про українську культуру, то слід було розрізняти й українську науку та українських вчених. Однак їх зараховували до російських.

Зараз справедливість починає відновлюватися. В науковій і популярній літературі друкуються статті про життєвий і творчий шлях найвідоміших українських математиків. На їх честь проводяться всеукраїнські та міжнародні читання, семінари, конференції і конгреси.

Цілу плеяду визначних вчених у різних галузях науки зростила українська земля. Значне місце серед них займають математики М. Остроградський, В. Буняковський, Г. Вороний та ін. Історичні обставини склалися так, що значну частину свого життя вони перебували далеко за межами рідного краю й інші народи хотіли мати їх у своєму національному пантеоні, заперечуючи при цьому їх український родовід. З цього приводу президент Міжнародної асоціації україністів І. Дзюба цілком справедливо зазначав: "Конче потрібно повернути Україні імена великих діячів, митців та

зивали українськими.

4. Для створення цілісного уявлення про розвиток вітчизняної математики слід враховувати, що певний час через ідеологічні перепони замовчувалася діяльність і творчий внесок окремих вітчизняних математиків та наукових спілок.

Тільки зараз відроджується в історії математики ім'я Миколи Івановича Гулака, який будучи членом Кирило-Мефодіївського братства виступав за відміну кріпацтва і створення незалежної Української держави. Бібліографічний словник за 1973 рік подає про нього статтю майже на цілу сторінку. В ній, крім життєвого шляху Миколи Гулака як громадського діяча і письменника, характеризуються його математичні твори: "Етюди про трансцендентні рівняння" (1852) і "Спроба геометрії чотирьох вимірів" (1877). У подальших виданнях цього довідника – жодної інформації про М. Гулака немає.

В останні роки увага до постаті М. Гулака та його математичних праць відновлюється. Перевидано його роботу "Розмова про простір", що є другою частиною праці "Спроба геометрії чотирьох вимірів". Перша частина останньої роботи – "Синтетична геометрія чотирьох вимірів" – була першою монографією з чотиривимірної евклідової геометрії в Російській імперії.

Вдалося відшукати ще одну роботу М. Гулака, а саме – другу частину праці "Аналитические изыскания". Про зміст цієї роботи і підготовку її до друку повідомила на Першому Українському математичному конгресі (Київ, 2001) О. П. Антонюк. У виступі, зокрема, повідомлялося, що знайдена частина називається "Алгебраические уравнения" і присвячена розв'язанню за допомогою комплексних чисел рівнянь п'ятого і сьомого степенів. О. П. Антонюк також повідомила, що невдовзі побачить світ книга, яка стане найбільш повною публікацією праць М. І. Гулака зі вступною статтею про біографію вченого [19, с. 4].

В кінці XIX століття у Львові для розвитку української наукової думки було створено Наукове товариство ім. Т. Г. Шевченка (НТШ), яке деякий час виконувало роль всеукраїнської академії наук. В 1983 році при ньому була створена математико–природописно–лікарська секція. Дійсні члени НТШ здійснювали велику наукову роботу. Їхні дослідження стосувалися теорії аналітичних функцій, теорії алгебраїчних та диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, теорії множин, математичної логіки, методів розв'язування задач прикладної математики тощо. Науковці НТШ мали тісні зв'язки з вченими зарубіжних країн. У 20–30 роках зміцнюються наукові стосунки з членами Української академії наук, створеної в Києві в 1918 році.

Довгий час діяльність математиків НТШ замовчувалась і їх роботи були більш знаними за межами УРСР. Особливо замовчувалася в радянські часи наукова діяльність М. Кравчука і М. Чайковського, які були репресовані і перебували в таборах Гулагу.

Протягом тривалого часу офіційною історіографією ігнорувалася та замовчувалася справжня дата заснування Української академії наук – 14 листопада 1918 р. Саме тоді гетьман України П. Скоропадський затвердив ухвалений Радою Міністрів "Закон Української держави про заснування Української академії наук", а вже 27 листопада 1918 р. відбулося перше спільне зібрання УАН, на якому головою-президентом Академії обрано В. І. Вернадського, неодмінним секретарем А. Ю. Кримського. "Спотворення дати заснування Академії почалося наприкінці 20–х років, коли в листопаді 1928 р. мали відзначити 10–річний ювілей Академії. Однак святкування не відбулося, не побачив світ і ювілейний збірник. ... Було вигадано нову дату – 12 лютого 1919 р. (встановлення у Києві радянської влади), яка, на думку радянських ідеологів, поклала початок фактичному існуванню Академії" [350, с. 3].

Першими дійсними членами Академії наук були обрані: Д. О. Граве (1920); Г. В. Пфейффер (1920); М. М. Крилов (1922); М. П. Кравчук (1929); О. Ю. Шмідт (1934). За 85 років існування Академії наук в Україні у її складі (за спеціальністю "математика") було 34 дійсних членів і 35 членів-кореспондентів.

Висвітлюючи майбутнім учителям історію розвитку вітчизняної математики, слід звертати увагу на питання, які довгий час несправедливо замовчувалися і приховувалися. Імена математиків, які примножували славу України, мають стати відомими прийдешнім поколінням.

Історія вітчизняної математики – складова частина загальної історії математики. На сучасному етапі функціонування інституту підготовки майбутніх учителів математики відбір навчального матеріалу з історії розвитку вітчизняної математики і його структурування визначаються такими факторами:

- ✓ значення знань з історії вітчизняної математики для вчителя математики;
- ✓ інтеграційна функція курсу історії математики;
- ✓ значний обсяг фактичного матеріалу;
- ✓ замала кількість годин, що відводиться на вивчення історії математики взагалі та історії вітчизняної математики, зокрема.

Співвіднесення вказаних факторів з метою створення курсу історії ма-

Учений. $У_0$ передає свої знання, одержані самостійно і від інших своїх попередників, своїм студентам, аспірантам, докторантам, читачам своїх праць ($У_1$). Їх буває багато, але тільки деякі з них створюють щось нове – нові теорії, нові теореми. Деякі не роблять нових відкриттів, але пишуть добрі підручники, монографії, поліпшують доведення вже відомих теорем, пропонують нові системи понять тощо. В свою чергу, вони також передають свої знання колегам молодшим – $У_2$, ті – ще молодшим і т. д.

У результаті, сума математичних знань з часом збільшується, а заодно змінюється і поліпшується їх структура. В такому процесі розвитку математичної науки відіграють роль не тільки математики-творці, а й викладачі, вчителі, популяризатори. Саме тому для майбутнього вчителя важливо знати не лише історію розвитку вітчизняної математики як науки, але й особливості її творення як навчального предмету для вищих та середніх закладів освіти.

Професійна підготовка майбутнього вчителя математики має включати його історико-методичну підготовку, яка складається з системи знань, що стосуються історії математичної освіти та методики математики. В НПУ імені М. П. Драгоманова студентам п'ятого курсу фізико-математичного факультету протягом кількох років пропонувався розроблений автором спеціальний курс "Історія розвитку вітчизняної математичної освіти". Наведемо перелік тем, які розглядалися на цьому спецкурсі.

1. Вступ. Основні етапи розвитку вітчизняної математичної освіти.
2. Математика в школах, що були на українських територіях в античні часи.
3. Математична освіта в період від Київської Русі до діяльності братських шкіл.
4. М. В. Остроградський і математична освіта.
5. В. Я. Буняковський і математична освіта.
6. Математична освіта в другій половині XIX ст. в Наддніпрянській Україні і Галичині.
7. Математика в школах України в першій половині XX ст.
8. Розвиток передових ідей в українській методиці викладання першої половини XX ст.
9. Реформи математичної освіти в другій половині XX ст.
10. Розвиток передових ідей в українській методиці викладання в період другої половини XX ст.
11. Шкільна математична освіта в суверенній Україні
12. Підсумкове заняття.

Програма з історії математики у розділі "Вітчизняна математика" передбачає ознайомлення студентів з основними етапами розвитку вітчизняної

тематики і організацією навчального процесу в педагогічному університеті засвідчує, що вивчення історії вітчизняної математики не можна обмежувати рамками курсу історії математики. Оптимальним, на нашу думку, є розподіл навчального матеріалу по "вертикалі" і "горизонталі", а також виділення окремих факультативних та спеціальних курсів. Знання з історії розвитку вітчизняної математики студенти отримують також в процесі самостійної роботи: опрацювання відповідної літератури, написання рефератів, розрахункових та курсових робіт.

Дбаючи про ознайомлення майбутніх учителів з історією розвитку вітчизняної математики, доцільно приділити увагу не тільки творцям нових математичних теорій, а й зупинитися на питаннях поширення математичних знань, їх популяризації, збереження та передачі наступним поколінням. Особливе значення у цьому належить системі освіти, навчальним закладам, товариствам, спеціальним періодичним виданням тощо.

Коли б математика тільки творилася, а не передавалася із покоління в покоління, то із смертю творця вона б також переставала існувати. В тому, що вона з плином часу збагачується і поширюється, заслуга не тільки вчених-математиків, а й викладачів, популяризаторів, систематизаторів. Щоб дослідження математиків-творців не зникли разом з ними, інші спеціалісти-дослідники їх опублікують, дохідливо й переконливо пояснюють їх студентам – майбутнім ученим, викладачам, популяризаторам тощо, а ті, в свою чергу, – передають це наступним поколінням. Схематично це має вигляд гілки (рис. 29).

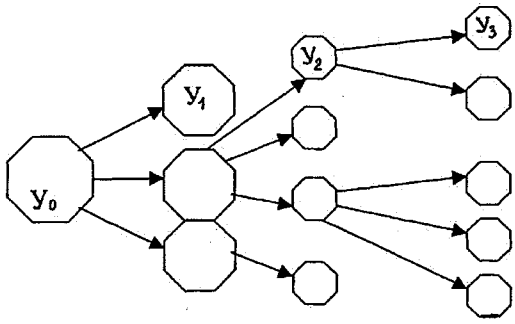


Рис. 29

математики, її творцями, математичними школами і розвитком окремих галузей, а також з навчальними закладами, що існували на території України в різні часи та станом викладання в них математичних дисциплін. Слід відмітити й те, що кожен педагогічний університет має власну історію, окремі глави якої пишуть його структурні підрозділи. Серед викладачів фізико-математичних факультетів немало непересічних особистостей, талановитих науковців – творців математики, іменами яких варто пишатися. Безперечно кожен студент має знати історію власної альма-матер, як й історію свого роду, свого рідного краю. Відсутність таких знань є значною прогалиною в освіті людини. Тому варіативною частиною історії вітчизняної математики має бути розділ, присвячений науковим здобутками вчених-математиків рідного вузу.

Навчальний матеріал з історії вітчизняної математики в систематичному курсі можна структурувати у такий спосіб.

1. Зародження і розвиток перших математичних уявлень у праукраїнців.
2. Поширення математичних знань на території України до XIX ст.
3. Розвиток математики в Україні в XIX ст.
4. Розвиток математики в Україні в XX ст.
5. Вчені математики НПУ імені М. П. Драгоманова та їхній внесок у розвиток математики та методики математики

Змістове наповнення кожної частини подамо у наступних параграфах.

4.2 Зародження і розвиток перших математичних уявлень у праукраїнців

4.2.1. *Передісторія математики.* Це ті часи, коли виникли і почали використовуватися первісною людиною поняття й уміння, які згодом оформились у математичні: число, рахунок, геометрична форма, побудова тощо. Щоб мати уявлення про цей період накопичення математичних знань, слід звернутись до матеріалів археології, порівняльного мовознавства і етнографії. На території України виявлено 25 археологічних культур: від другої половини VI тисячоліття до н. е. – до V століття н. е.

Так, на місці відомої Мізинської стоянки, вік якої 30–25 тис. років, знайдено вироби із кісток, прикрашені геометричними орнаментами, зокрема браслети. Один із них складається із п'яти смуг, прикрашених паралельними штрихами у вигляді ялинки. Вивчення цього орнаменту наводить на

думку, що у його творця існували ідеї: кількості і рахунку (кількість штрихів на смугах однакова), симетрії, вимірювання (відстань між штрихами і їх довжина однакові), кута і нахилу, перші уявлення про геометричну форму (відрізок прямої, точка, квадрат, трикутник).

В період мідно-кам'яного віку – енеоліту (від IV тис. до III тис. рр. до н. е.) на території України склалася яскрава Трипільська культура (назва від с. Трипілля на Київщині). Трипільці головним чином займались землеробством і скотарством, знаряддя праці виготовляли з каменю і міді, кісток і рогів тварин, уміли гарно розписувати орнаментом посуд, із міді виготовляли прикраси і культові предмети. Їх житло мало досить точний прямокутний план, тобто вони уміли вимірювати відрізки і будувати прямий кут.

Орнаменти трипільців відрізняються складною і геометричною точністю, розширенням арсеналу елементів, що мають геометричний зміст. Нерідко з'являються кола і спіралі. Самі спіральні вироби мають правильні геометричні форми. Число набуває містичного значення: дощ символізується з чотирма потоками, що виливаються із хмари у вигляді півкола, чотири деталі на поверхні посудини символізують чотири божества. Особливе значення мало число три (нерідко людина зображається із трьома пальцями замість п'яти). Деякі елементи трипільського орнаменту підтверджують, що автори знали дію ділення: ділення пополам зображень хвилястою лінією, "триярусне" зображення людей з двома парами рук кожне. Знахідки Трипільської культури дають підстави стверджувати, що трипільці виробили деякі обчислювальні системи.

Лінгвістичні дані свідчать, що вже в III тисячолітті до н. е. населення Східної Європи знало рахунок до тисячі (єдність походження чисел, що означають перший десяток, сто і тисячу), була відома дія додавання (слова, що визначають числа другого, третього і т. д. десятків), множення (слова, що означають 20,30,40, ..., 90), ділення на два, три, чотири (слова для позначення половини, треті, четверті). Тобто в цей час існували дії усної математики.

За археологічними матеріалами можна скласти певні уявлення про рівень математичних знань у пізніх скіфів і сарматів. Про геометричні знання скіфів свідчать залишки пам'яток, знайдених при розкопках городища на околиці Сімферополя. Це були залишки міста Неаполіса – столиці Скіфії в III–II ст. до н. е. Там знайдено зерносховище, вирубане в скелі у формі прямокутного паралелепіпеда розміром 11,75м × 5,47м × 0,9 м. Вивчення плану міста показує, що вулиці були прямолінійними, будинки будувались паралельно міській стіні і стінам сусідніх будинків. У I ст. до н. е. – I ст. н. е. скі-

амфор в своїй основі мають форму кола; крім того, після виходу посуду з майстерні на ньому обов'язково позначалися місткість у літрах. Причому окремо позначалася місткість сипучих речовин і окремо – рідких.

Окрім гончарної промисловості в античних центрах Північного Причорномор'я дуже високого рівня розвитку досягла ювелірна галузь виробництва. Форма прикрас нагадує геометричні фігури, крім того, визначався розмір обручок, браслетів індивідуальних для кожного замовника. Все це підтверджує надзвичайно високий рівень розвитку античних міст Північного Причорномор'я і може свідчити про те, що розвиток культури, науки і виробництва того часу в грецьких колоніях не поступався загальнодержавному.

Перші найвідоміші математичні школи Стародавньої Греції виникали на заході Малої Азії, в Іонії, а саме – в містах Мілеті, Самосі, Хіосі. Там народились і працювали перші найвідоміші математики: Фалес Мілетський, Піфагор Самоський, Гіппократ Хіоський, Анаксагор Клаземенський, Евдокс Кнідський та ін. Звідти, з Іонії, почала свій тріумфальний хід математика Стародавньої Греції в Європу і світ. Ольвію і майже всі міста Північного Причорномор'я заснували вихідці з Мілета. Тому тут поширювалась насамперед та математика, яка створювалась у Мілеті.

У Стародавній Греції існували школи трьох рівнів. Найнижчого рівня – школи граматиста чи кифариста. Діти 7–14 років у цих школах, крім іншого, вчилися писати на навощеній дощечці і рахувати. Навчались вони також розв'язувати нескладні арифметичні задачі, ознайомлювались з найпростішими геометричними фігурами. Після закінчення школи граматиста чи кифариста деякі діти продовжували навчання в палестрі. Тут багато уваги приділяли гімнастиці, але й про науку не забували. А до науки тоді відносили насамперед математику. Найвища школа Стародавньої Греції – гімнасія. Учителями тут були найвідоміші математики і філософи, які добре знали і цінували математику.

Гімнасії існували в Ольвії і Херсонесі. В інших містах були палестри. Школи граматиста чи кифариста могли існувати й у великих сільських поселеннях, яких за 5 віків до нашої ери тут налічувалося кілька сотень. Діти перших років навчання опановували нумерацію. В палестрах і гімнасіях розглядали також властивості простих, складених, парних, квадратних, трикутних та інших чисел, арифметичної, геометричної, музичної пропорцій тощо. Та все ж, давньогрецькі вчені більше уваги приділяли геометрії. Зрозуміло, що в VI-V ст. до н. е. учням з геометрії пояснювалось не більше, ніж знав Фалес. У наступних століттях обсяг геометричного матеріалу грецьким школярам давався

фам стають відомі властивості кола. В деяких орнаментах зустрічаються кола, поділені на 3, 4, 6 і 8 рівних частин, концентричні кола, а також кола з вписаними правильними многокутниками. Про ідею симетрії свідчать прикраси із золота і срібла, знайдені у скіфських курганах; щити, чаші, фігурки людей і тварин, нагрудна золота прикраса – пектораль (IV ст. до н. е.).

Враховуючи рівень будівельних прийомів, пропорцій споруд, торгівлі із сусідами, значних розмірів планів міст, можна допустити, що скіфи в II – I ст. до н. е. вміли рахувати до тисячі і використовували чотири арифметичні дії. Пізніше у них з'явилась п'ятіркова система числення, дроби із знаменником п'ять (виявилось, що більшість засічок на кістах тварин кратна 5). Тривале спілкування скіфів і сарматів з ольвійськими, херсонеськими і боспорськими греками привело до запозичень у останніх разом з писемністю і деяких математичних знань.

4.2.2. *Математика в державах Північного Причорномор'я.* Однією з найцікавіших сторінок минулого нашої Батьківщини є історія і культура античних держав Північного Причорномор'я, заснованих греками у VII–V ст. до н. е. За час свого існування протягом майже тисячі років (до IV ст. н. е.) вони досягли значного розвитку у матеріальному виробництві, містобудуванні, культурі та мистецтві. Ці держави знаходились у тісному зв'язку з оточуючим їх іноплемінним світом і зіграли значну роль в історичній долі скіфів, сарматів, фракійців, таврів, синдів: збагатили їх досягненнями античного світу, особливо у сферах ремесла і мистецтва. Досягнення античних держав Північного Причорномор'я не пройшли безслідно для наступних поколінь на нашій території. Риси античної культури простежуються в галузях техніки і мистецтва слов'ян майже до часів Київської Русі.

Близько середини VII ст. до н. е., переселившись на північний берег Чорного моря, греки заснували на нинішньому острові Березань своє поселення. Протягом VI ст. на північному узбережжі виникло ряд міст і багато сільських поселень. Найбільші з них – Ольвія на правому березі Бузького лиману, Тіра (на місці теперішнього Білгород-Дністровського) – на правому березі Дністровського лиману, Феодосія, Пантікапей – теперішня Керч, Фанагорія, а також Херсонес.

Вже у VI ст. до н. е. північно-чорноморські керамісти почали виготовляти художньо розписаний посуд – амфори, блюда, кіліки. Широкого розповсюдження розписна кераміка набуває в елліністичний час: на Боспорі, у Херсонесі та Ольвії. Дивлячись на посуд, переконуєшся, що блюда, частинки

значно більший. Не виключено, що в Ольвії і Херсонесі були вчителі, обізнані з матеріалом, зібраним у перших книгах "Початків" Евкліда.

З середини V ст. до н. е. в школах Греції було запроваджено сім вільних наук. Перша частина цього комплексу – граматика, риторика і діалектика, а друга частина – арифметика, геометрія, астрономія і музика. Тоді астрономію і музику тісно пов'язували з математикою – вони були начебто двома частинами прикладної математики. Щодо арифметики і геометрії, то мались на увазі цілком абстрактні науки.

Спілкування скіфів і сарматів з греками ольвійськими, херсонеськими і боспорськими привело до запозичення деяких математичних знаків: іонійська нумерація, прийоми обчислень тощо. Загалом рабовласницькі держави Кіммерія, Таврикос, Скіфія і Сарматія, грецькі міста-держави Ольвія, Херсонес залишили помітний слід в історії України, сприяли культурному збагаченню сусідніх земель і серед них – слов'янських.

4.2.3. *Математичні знання східних слов'ян (від I ст. до IV ст. н. е.).* Історія східних слов'ян починається на рубежі бронзового і раннього залізного віків. Слов'яни здавна розселилися в Східній Європі і на території сучасної України. Про рівень математичних знань східних слов'ян у I–II ст. н. е. свідчить грошовий обіг, який здійснювався з використанням римської срібної монети. Про рівень астрономічних знань, які, в свою чергу, обумовлюються математичними, свідчить давньослов'янський календар, знайдений на території с. Ромашки на Київщині. Цей календар, який датується IV–V ст. н. е., було нанесено у вигляді орнаменту на стінки великого глечика. Ним охоплювався період з 1 квітня до 6 серпня і відображався своєрідний розклад сільськогосподарського циклу. Основними зафіксованими датами в календарі були: 4 червня (день Ярила), 24 червня (свято Купала), 20 липня (день бога Грому). Дні між цими датами зображалися у вигляді маленьких квадратиків, кількість яких у всіх випадках точно відповідала кількості днів, що відділяла одне свято від наступного.

Походження знань в галузі геометрії носить практичний характер. В народному мистецтві простежуються два стилі: "звіриний" і "геометричний" – створення орнаментів з трикутників, ромбів, квадратів, кругів, паралельних і перпендикулярних ліній. Використовувались знаки-символи: хрести, ромби, квадрати, кола та інші фігури.

Знайомство з народними мірами і засобами вимірювання дає можливість пізнати світ просторових уявлень людей, допомагає вивчити їх геомет-

ричні знання і вміння обчислювати. З розвитком сільськогосподарських робіт вдосконалюються засоби визначення площі прямокутника, трапеції, трикутника. Деякі джерела свідчать, що площа трапеції обчислювалась як добуток півсуми основ на меншу бічну сторону, площа трикутника – як половина добутку сторін, що містять найбільший кут. Поле довільної форми розбивали на частини, площу яких вміли визначати. В сільському господарстві і побуті були предмети різної форми: циліндричної, кубічної, прямокутного паралелепіпеда, конічна поверхня (курені). З часом вдосконалювалися методи обчислення об'ємів таких тіл.

4.3. Поширення математичних знань на території України до XIX століття

4.3.1. *Математика Київської Русі.* Головними джерелами, які дають уявлення про рівень математичних знань у Київській Русі, є писемні твори, що містять деякі математичні відомості, пам'ятки зодчества, ремесла, а також народна творчість.

Найдавнішою пам'яткою математичних знань усієї епохи Київської Русі є математичний твір монаха Кирика Новгородського "Вчення бачити людині всіх років" (1134). Цей твір присвячено арифметико-хронологічним розрахункам. У ньому автор показує, як визначати кількість років, місяців, тижнів, днів і годин, що пройшли від створення світу; кількість високосних років; кількість в році звичайних і місячних місяців, тижнів, днів і годин; кількість годин в одному дні. Для визначення днів, на які припадають християнські свята, Кирик розглядає "вчення про індикту" (рахунок п'ятнадцятиріччями), "сонячний круг" (період у 28 років, після якого новий рік юліанського календаря припадає на той же день тижня), "місячний круг" (період у 19 років, після якого місячні фази припадають на ті ж числа місяця юліанського календаря), "великий круг" – період в 532 роки ($532 = 19 \cdot 28$).

Аналіз цього твору свідчить про те, що його автор володів чотирма діями арифметики, знав дії з дробовими числами, мав уявлення про геометричну прогресію.

В збірнику "Руської Правди" (перший збірник законів за часів Ярослава Мудрого) міститься 47 статей, з яких 36 містять відомості про грошову систему (1 гривня = 20 ногатам = 25 кунам = 50 резанам). В цьому та інших збірниках того часу вміщено задачі про відсотки на позичені гроші, подаються

но 46 см). Різних сажнів існувало близько десяти (від 151 см до 216 см). Верста дорівнювала приблизно 500 сажням. Поприще – інша назва версти. Однак у різні часи і в різних місцях співвідношення між різними значеннями величин були різними, зокрема й такими: 1 верста = 750 сажнів = 2250 ліктів = 4500 п'ядей.

Окремої міри площі не існувало. Налог чи данину брали тоді не з площі поля, а "з сохи", з "рала". Об'єми сипучих тіл виміряли кадями, половиками, убороками, луканами, а рідини – відрами, бочками і т. ін.

Головна грошова одиниця – гривня була і вагою, і грошовою одиницею. В давній Русі були гривні вагою 96 або 48 золотників (1 фунт – 96 золотників).

4.3.2. *Математика на землях Західної України.* Впродовж багатьох віків українські землі, а відповідно і люди, які їх заселяли, були розділені на великі частини. Схід перебував здебільшого в Російській імперії, а Захід – під владами Польщі, Австрії та ін. І розвивались вони не однаково. Вже з середини XV ст. на українські території, що перебували під владою Польщі, Литви та Австро-Угорщини, проникають гуманістичні тенденції та наукові ідеї із Західної Європи. У населення пробуджується інтерес до рідної мови, культури, науки та освіти.

Носіями наукових знань у середні віки ставали насамперед ті українські інтелектуали, які здобули освіту в західноєвропейських університетах. Особливу роль у розвитку освіти в Україні відіграв Краківський університет, в якому українці навчалися з першого року його заснування (1364 р.). Як показують списки, тільки протягом XV–XVI століть тут одержали освіту 800 українців: із Львова – 108, Городка – 19, Кам'янця – 14, Дрогобича – 15, Брод – 5 і т. д. Загалом у ньому навчались юнаки майже з 70 міст України, його професорами були 13 українців. А крім інших традиційних факультетів, у ньому був ще й фізико-математичний факультет.

Навчались українські юнаки і в інших університетах. Зокрема, в Падуанському протягом XIV–XVIII ст. їх налічувалося близько 600. В окремі роки лекції "державного математика" Г. Галілея слухали більше десятка студентів з України. Немало їх одержували освіту в Болонському університеті. Один з них – Мартин із села Журавки, що поблизу Перемишля. Здобувши ступінь магістра в Краківському університеті, він поїхав до Болоньї, здобув там ступінь доктора медицини, а ставши професором, повернувся до Кракова. Є свідчення, що він написав чимало математичних праць. На жаль, про них нічого не знаємо.

сільськогосподарські розрахунки, розглядаються задачі, розв'язання яких зводиться до геометричної прогресії і чисел Фібоначчі.

Ймовірно, саме такі математичні знання мали освічені люди в Київській Русі. (Порівняйте з розвитком математики в стародавніх Єгипті, Вавилоні і Греції). Чи були в Київській Русі школи? Володимир Святославович ще в 988 р. заснував школу "книжного учения". А в 1060 р. Ярослав Мудрий "собра от старост и поповых детей 300 учити книгам". Навіть окремі жінки були грамотні. Наприклад, дочка чернігівського князя "не в Афинеях учися, но афинейские премудрости изучи...философию же и историю и всю грамматикою, числа и кругов обхождение". Отож були в Київській Русі і школи, було й ідивідуальне навчання. Але математики як окремого навчального предмету в них не вивчали. Окремих дітей і юнаків знайомили тільки з нумерацією та найпростішими арифметичними діями.

Деякі відомості про рівень математичних знань у Київській Русі можна одержати вивчаючи її архітектуру і ремесло, а також народне мистецтво. Зодчі Київської Русі знали арифметику і геометрію. Для створення архітектурної форми вони використовували геометричні побудови, найпростіші відношення: 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, а також золотий переріз.

Майстри Київської Русі знали плоскі фігури – квадрат, прямокутник, паралелограм, ромб, круг, а також геометричні тіла – куб, паралелепіпед, піраміда, циліндр, конус, куля, призма з різними основами. Вони використовували поділ кола на 4,5,6,8 і 24 частини.

Як свідчать стародавні пам'ятки історії, давні слов'яни користувались алфавітною нумерацією. Слов'янська кирилівська нумерація будувалась аналогічно грецькій (іонійській) на основі алфавіту (кирилиці) і складалася з 27 головних символів для позначення одиниць, десятків і сотень. Для відмінності символів, що виражають числа від літер над ними, ставили знак ~ "титло". Не використовувалась як цифра друга літера кирилиці Б. Для позначення одиниць вищих розрядів існувала система допоміжних символів, які означали: 10^3 – тисяча, 10^6 – тьма, 10^{12} – легіон, 10^{24} – леодр, 10^{48} – ворон. Джерела XI ст. свідчать про те, що слов'яни на той час вже були обізнані з індійською нумерацією.

В Київській Русі були поширені такі одиниці довжини: п'ядь, чверть, лікоть, сажень, верста, поприще. П'ядь – відстань від кінця великого пальця до вказівного, дорівнювала вона приблизно 19 см. Чверть або велика п'ядь – від кінця великого пальця до мізинця (≈23 см). Ліктем називалась відстань від кінця витягнутого середнього пальця руки до ліктьового згину (приблиз-

Більше відомо про Юрія Дрогобича (Котермарка). Син убогого міщанина з Дрогобича, він 1469 р. поступив до Краківського університету, внісши всього один гріш. Через рік, вивчивши Аристотеля, математику і астрономію, отримав ступінь бакалавра, а через 3 роки – і магістра. В 1478 р. він став професором, а в 1481 р. – ректором Болонського університету. Через два роки після того в Римі вийшла друком його книжка – перша друкована книга українського автора. Повна її назва така: "Прогностична оцінка поточного 1433 року магістра Юрія Дрогобича із Русі, доктора мистецтв, медицини Болонського університету. Надруковано в Римі 1483 року, в п'ятницю 7 лютого, за папи Секста Четвертого, на дванадцятому році його понтифікату". Тепер ця книжка належить до найрідкісніших – у всьому світі збереглося тільки два її примірники. Збереглися і кілька рукописних трактатів Ю. Дрогобича, зокрема про оцінку сонячного затемнення 1478 і місячного в 1479 роках. Зрозуміло, що для їх передбачення довелось виконати багато непростих розрахунків. І це – в середині XV століття.

Одержати університетську освіту у ті часи було дуже вигідно. Людину з такою освітою не мали права закріпачити чи бити різками, така людина могла звертатись до найвищого (королівського) суду і т. ін. Найбільші перешкоди перед бажаючими навчатись в університетах – латинь і православна віра. Адже в усіх університетах навчання велось тільки латинською мовою, і всі наукові книги друкувались тільки латиною. І віра там панувала не православна. Все ж немало хлопців долали ці перешкоди: вивчали латинську мову, на певний час змінювали віру. Наприклад Феофан Прокопович поїхав "наук заради" до Риму, прийняв там унію, а як завершив навчання і повернувся в Україну, знову прийняв православну віру.

Багато українських юнаків протягом XV – XVI ст. навчалися і в деяких інших західноєвропейських університетах – Гейдельберзькому, Празькому, Сорбонському. Це було можливим тільки за умови, що і в Україні існували якісь школи, принаймні початкові. В Галичині окремі школи існували ще до відкриття Краківського університету. Відомо, наприклад, що 1301 р. син галицького князя Данила Лев видав грамоту "Про звільнення школярів від світського суду". Отже, були школярі. Ще й немало, якщо про них спеціальні грамоти видавали. В Галичині і на південно-західних землях України в цей час були і школи вищого рівня. Свідченням цього є те, що аналізуючи один історичний факт, пов'язаний з переписами населення в Галичині і на Білохівській землі, спеціалісти відмічають: "Можна уявити собі, скільки треба було знайти людей, які знають способи обчислення. Це свідчить про по-

ширення математичної грамотності серед місцевого населення".

Школи тоді існували, звичайно, при церквах. Кращі школи в Польщі і Литві організували протестанти. Це насамперед гімназії й академії в Ракові, Дубні, Хмельнику. Навчалися в них і українці. Згодом великого поширення набули єзуїтські школи – колегії. Навчання в них організовувалось досить добре. Звичайно, протестантські і єзуїтські школи не сприяли поширенню православної віри, але математика в них вивчалась на досить високому рівні.

У тодішніх католицьких школах, які діяли в Україні, навчання велось латинською мовою. Тому і підручники з математики друкувались латинською. Детальніше про ці підручники можна прочитати в [56], [489].

Католицьким школам протистояли православні. Одна з них – Острозька школа, заснована в 60–х роках XVI ст. Її називали ще тримовним ліцеєм і Острозькою академією. Крім інших навчальних предметів, у ній учні вивчали логіку і арифметику. Викладачем тут був польський математик Ян Лятос, колишній професор Краківського університету. Острозька школа добре працювала, коли про неї дбав князь К. Острозький – її засновник, активний борець проти унії і католицизму. В 1640 р. вона перестала існувати.

В кінці XVI ст. в Україні було засновано кілька братських шкіл: Львівська (1586), Київська (1589), Рогатинська (1589), Городоцька (1591) та ін. Найавторитетнішою з них вважалась Львівська школа. В її статуті писалось зокрема, про таке: "Сидіти повинен кожен на своєму місці, визначеному за успіхи в навчанні. Хто більше вміє, той сидить вище, якщо навіть він дуже бідний, а хто менше вміє, повинен на неславному місці сидіти... Багатий над бідним в школі нічим не повинєн бути вищим". Ця школа відповідала західноєвропейським школам середнього рівня; у ній вивчали сім вільних наук, а отже – арифметику і геометрію. Сім вільних наук вивчали також у Панівцях на Поділлі, в Киселівці на Волині, в Замості (її називали "генеральною школою Русі"), в Луцькій братській школі та ін.

4.3.3. *Розвиток математики в Україні до XIX ст.* Взагалі, другу половину XVI – першу половину XVII ст. називають Українським Ренесансом. В цей час на території України виникають вищі навчальні заклади (спочатку колегії і академії, а потім університети), засновуються друкарні, високого рівня досягає просвітительська діяльність науковців і митців тощо. "Україна стає значним культурним центром Східної Європи. В цей же час, для порівняння, в Росії була лише одна друкарня – в Москві. Вона постачала тільки церковні книги, нічого іншого московська друкарня не знала. Ще в другій

кладами. В колегіумі здобували знання з філософії, історії, математики, астрономії та інших наук.

Створити уявлення про рівень математичних знань можна, проаналізувавши математичну літературу. Письмові першоджерела математики в Україні в XIV–XVII ст. можна поділити на дві групи. По-перше, загальні джерела з історії культури, які містять деякі відомості з математики. По-друге, математичні рукописи або друковані видання – як вітчизняні, так і зарубіжні, поширені в школах того часу.

Серед першоджерел першої групи привертає увагу рукопис ужгородського "Полуустава". З точки зору математики, інтерес становлять таблиці чисел слов'янської нумерації, календарні індекси, пасхальні таблиці. Таким же першоджерелом можна вважати книгу "Букварь" Івана Федорова, а також книги Юрія Дрогобича. В календарях останнього з достатньою точністю визначено час двох місячних затемнень, фази місяця протягом року, дано вказівки про рух планет на небі. Зміст цих праць Ю. Дрогобича свідчить про його досить високі знання в галузі математики.

Серед першоджерел другої групи відмітимо рукопис, що зберігається в бібліотеці АН України: "Арифметика і математика, латинською мовою читана у Львові, рукопис 1630–х років". Рукопис містить арифметику і геометрію. В арифметичній частині подано дії з цілими і дробовими числами та правила для розв'язування задач. Геометрія являє собою виклад планіметрії за "Началами" Евкліда. Крім того, подано описування усіх інших десяти книг "Начал" Евкліда.

Розвиток математики, як і інших наук, на той час зосереджувався у вищих навчальних закладах. Важливим центром науки і культури у західноукраїнському регіоні був Львівський університет, заснований ще 1661 р. Математика читалась там як окремий предмет. Курс складався із арифметики, геометрії, окремих розділів прикладної математики, які в другій половині XVIII ст. виділились в окремий предмет, що дістав назву "змішана математика".

Розділ арифметики включав знайомство з нумерацією, першими чотирма діями, поняттям про арифметичну і геометричну прогресії, правилом пропорційного ділення, докладним вивченням дій з дробами, правилами добування квадратного і кубічного коренів.

Геометрична частина курсу знайомила з початками геометрії, вивченням "Елементів" Евкліда. Досить докладно вивчалися задачі на побудову. Їм надавалось не менше значення, ніж теоремам. Обсяг математичних знань, які давала Львівська академія, поступово збільшувався. Наприклад, курс почат-

половині XVII ст. в Московії на науку дивилися як на "порождение исконного врага человеческого рода – диявола". В 1640 р. митрополит П. Могила писав цареві Михайлу Федоровичу, що в Москві дуже потрібно завести науку, а коли б цареві було завгодно, то він обіцяв прислати йому вчителів. Але цар не звернув на це ніякої уваги. В 1698 р. Петро I наказує патріарху:"...священники наши грамоте мало умеют и для того в обучение хотя бы послать 10 человек в Киев в школы". І це не дивно, адже в Росії, як пише Костомаров у своїй "Русской истории в живописаннях ее главнейших деятелей", "был недостаток как в ученых людях, так и в книгах. Глубокое невежество тяготило русский ум уже много веков".

Високий освітній рівень українських навчальних закладів, зокрема Київської колегії, сприяв створенню в 1687 році Слов'яно-греко-латинської академії в Москві. Для організації у ній навчання з Києва висилалися не лише викладачі, але й студенти. Так, у період з 1701 по 1762 роки на викладацьку роботу в Москву з Києва виїхало не менше 95 осіб. У Києво-Могилянській академії здобули освіту 21 із 23 ректорів Московської академії та 95 із 125 її професорів.

Після заснування в 1724 році Петербурзької академії наук та створення у 1755 р. Московського університету значна частина української молоді для отримання вищої освіти виїздить у Росію. Для навчання математики там використовувались "Арифметика" Л. Магницького, "Алгебра" Д. Анічкова, "Геометрія" Л. Ейлера.

В XVII–XVIII ст. нагромадження математичних знань в Україні пов'язується з Острозьким культурно-освітнім центром, Києво-Могилянською та Львівською академіями, Харківським колегіумом. Формування науки в повному розумінні цього слова, створення наукових спілок і центрів, проведення наукових досліджень, поява учених-дослідників припадає в Україні на XIX ст. А тому рівень математичних знань в Україні до того часу визначався станом і рівнем викладання математики в навчальних закладах та кваліфікацією їх викладачів.

На початку XVI ст. центр освіти в Україні перемістився до Києва, де в 1615 році відкрилась братська школа й групувалися вчені-просвітителі: Іов Борецький, Єлисей Плетенецький, Тарас Земка, Мелетій Смотрицький, Сасіян Сакович та інші.

Поряд з братською школою на Подолі митрополит Петро Могила в Печерській лаврі заснував гімназію. У 1632 році обидві школи об'єдналися в Київський колегіум, що став врівень з іноземними вищими навчальними за-

ку XVIII ст. був повнішим. Окрім вказаних частин, до нього входили стереометрія, дії з логарифмами та основи тригонометрії. Рівень викладання був приблизно таким самим, як і в Київській академії, щоправда, використовувались кращі посібники Христіана Вольфа "Початки чистої математики" і А. Кестнера "Прикладна геометрія". Першим професором математики Львівського університету можна вважати Франтишека Кодеша, вихованця Празького університету. Він одержав кафедру в 1787 р.

При Львівському університеті діяли також особливі курси для тих студентів богослов'я, які не знали латинської мови. На курсах для уніатів-українців викладали математику і фізику два професори-українці із Закарпаття – Петро Лодій та Іван Заманчик.

Петро Лодій був призначений професором філософії університету в 1787 р., де викладав математику і логіку. В 1801 р. Лодій переїхав до Краківського університету, а згодом – до Петербурга.

Про Івана Заманчика збереглося мало біографічних даних. Відомо лише, що в 1786–1787 р. він був ад'юнктом на кафедрі вищої математики Будапештського університету, а в 1803–1804 р. керував кафедрою експериментальної фізики в Краківському університеті.

В 1805 р. Львівський університет об'єднався з Краківським. У Львові залишився ліцей, майже всі професори були переведені до Кракова.

Перебування українських земель у складі різних іноземних держав, загальноєвропейські ідеї та процеси пізнього ренесансу, доби реформації, часів просвітництва наклали помітний відбиток на розвиток української культури. Своєрідним критерієм рівня духовної культури є стан освіти і науки в суспільстві. У середині XVIII ст. на території семи полків Гетьманщини діяло 866 шкіл. На період Гетьманщини припадає перша спроба запровадити в Україні обов'язкову освіту. Важливу роль у розвитку освіти в Україні відігравали середні навчальні заклади – колегіуми, які були засновані у Чернігові (1700 р.), Харкові (1727 р.) та Переяславі (1738 р.). Перлиною серед колегіумів, осередком освіти і науки була Києво-Могилянська колегія, яка 1701 року грамотою Петра I одержала статус і права академії. У стінах академії було вироблено чітку систему організації навчання, розраховану на 12 років, яка не поступалася за змістом навчальному процесові тодішніх європейських університетів. На початку XVIII ст. в ній навчалося дві тисячі студентів. Тривалий час Києво-Могилянська академія була єдиним вищим навчальним закладом Східної Європи.

З 1711 по 1716 рік ректором Київської академії був **Феофан Прокопо-**

вич.(1681–1736) – один з видатних діячів науки, культури і освіти в Україні на початку XVIII ст. Народився Прокопович у Києві в родині крамаря Церейського. В 17 років він закінчив курс наук в академії. Не задовольнившись одержаними знаннями виїхав навчатись за кордон. Як кращий учень Володимир-Волинського колегіуму був відправлений до Рима в колегіум святого Афанасія. Завдяки своїм здібностям Феофан Прокопович виділявся серед вихованців колегіуму й отримав можливість працювати у Ватиканській бібліотеці, а також брати приватні уроки у начальника колегіуму. В Римі Прокопович докладно вивчив математику. В 1704 році він повернувся до Києва, вступив до Київського братства, постригся в ченці і став професором, а згодом ректором Київської академії. В 1716 році за наказом Петра I переїхав у Петербург, де фактично став на чолі Російської православної церкви. Прокопович був освіченою людиною свого часу (в його власній бібліотеці було до 30 тис. томів різних видань).

Будучи професором, ректором Києво-Могилянської академії він прочитав лекційні курси з риторики, логіки, фізики, математики й естетики. Його лекції з математики, як засвідчують історики математики О. Бородін та А. Бугай, були першим вітчизняним курсом з цієї дисципліни, побудованим на науковій основі. Його курс математики складався з двох розділів – арифметики і геометрії. "Арифметика як перша і основна галузь математики, яка вивчає дискретну кількість, або природу чисел і числові розрахунки, викладена в Київській академії року господнього 1707" складається з трьох книжок. В цих книжках викладено цілі і дробові числа, вчення про пропорції і пропорційність, правила розв'язування арифметичних задач, добування квадратного і кубічного коренів, а також уперше у вітчизняній літературі – теоретичні відомості про арифметичні, геометричні і гармонічні прогресії.

Геометрична частина теж складається з трьох книжок, в яких викладено планіметрію за Евклідом з деякими доповненнями, питання практичної геометрії, дано опис геометричних інструментів, правила вимірювання. Теоретичні відомості з геометрії на той час в Україні в такому обсязі викладалися вперше. В лекціях Феофана Прокоповича є доповнення до Евкліда (розглянуто овал, еліпс, параболу, спіраль). Такою новизною відрізняється і методика подачі матеріалу. Наприклад, важкий для засвоєння розділ про добування квадратних і кубічних коренів ілюстровано кресленнями, що полегшують геометричну трактову обох понять (квадрат, поділений на квадратики; куб, побудований із кубиків).

Датський мандрівник фон Гравен, який відвідав Феофана Прокоповича

поступив до Токайського чотирикласного училища, звідки перейшов до Пештської гімназії. В 1780 – 1782 рр. слухав експериментальну фізику, геометрію, механіку, цивільну архітектуру, оптику і гідравліку в Будапештському університеті. У лютому 1783 р. повернувся до Києва і поступив до останнього класу академії. Ще будучи студентом у 1784 р. почав викладати в ній арифметику. В 1786 р. Фальковський був призначений викладачем вищого класу граматики, в 1787 р. викладав поезію, геометрію, алгебру й архітектуру. Фальковський став головним викладачем математики і споріднених дисциплін в академії. Він досяг того, що математичні класи найбільш відвідувались студентами. З 1795 р. він почав читати курс змішаної математики. В 1803 р. був призначений ректором академії.

І. Фальковський склав і підготував до друку керівництво із змішаної математики, але видати його не встиг. Воно збереглося в рукописі, який ілюстрований самим автором. Окрім енциклопедичності змісту курсові Фальковського властива була ясність і послідовність викладу. При доведенні теорем він послуговується логарифмами. Не застосовуючи відвертого аналізу Фальковський користується теорією границь, хоча слово "границя" не використовує.

Поряд з Київською академією провідним навчальним закладом у другій половині XVIII ст. був Харківський колегіум. Він мав сім класів (відділень) – аналогії (інфіми), граматики, синтаксими, пиїтики, риторики, філософії і богослов'я. Викладання арифметики було введене в курс навчання в класах інфіми і граматики в 30–х роках разом з німецькою і французькою мовами. В 1765 році було введено додаткові класи математики, геометрії, інженерства, артилерії і геодезії. В 1769 р. у філософському класі запроваджено викладання фізики.

У 1790 р. додаткові класи колегіуму були перейменовані в Казенне училище, яке в 1798 р. об'єдналося з Головним народним училищем. На відміну від багатопредметних шкіл XVIII ст., Харківське казенне училище мало практичну спрямованість. Харківський колегіум був попередником Харківського університету, а додаткові класи – Харківського технологічного інституту.

В 1805 році з ініціативи інтелігенції та за підтримки заможних людей було засновано Харківський університет. Його першим викладачем математики став **Тимофій Федорович Осиповський** (1765–1832), відомий російський учений, професор. Викладання математики в університеті ґрунтувалося на його підручнику "Курс математики". Це був досить повний курс сучасної на той період математики, методично вдало викладений, по якому довгий час навчались студенти в університетах України та Росії. Наукові інтереси Т. Ф. Осиповського зо-

за кілька місяців до його смерті, відгукнувся про нашого видатного земляка так: "Ця прекрасна за своїми знаннями людина не має майже нікого рівного, особливо серед російських духовних. Крім історії, богослов'я і філософії, він має глибокі знання з математики і бажання, яке не описати, до цієї науки".

Праця Феофана Прокоповича під заголовком "Арифметика і геометрія, два перші й найбільш плодовиті початки математичних наук, пояснені в Києво-Могилянській академії..." збереглася в двох примірниках латинською мовою. З нею можна ознайомитися в Інституті рукописів Центральної наукової бібліотеки імені В. І. Вернадського НАН України.

Києво-Могилянська академія була центром становлення української науки. В Київській академії після від'їзду Ф. Прокоповича у викладанні математики підтримувався заведений ним порядок. В 1784 р. в академії були відкриті класи чистої і змішаної математики, архітектури, загальної історії і географії. Пізніше – класи вищого красномовства, сільської і домашньої економії, медицини та російський клас. Майже кожен клас мав 2–4 відділення. Так, математичний клас розділявся на класи змішаної математики і два класи чистої математики – нижчої і вищої. В 1799 році було введено інструкцію про порядок навчання в Київській академії, де було визначено предмети в усіх восьми класах. Арифметиці навчали в II–IV класах, математику починали з V класу. За учнями старших класів, VII і VIII, залишалось право вибору предметів. У відповідності з цим було організовано три арифметичних класи: у нижчому вивчали чотири арифметичні дії, в середньому – дії з іменованими числами, прості і десяткові дроби, квадрати і куби чисел, в старшому – арифметичну і геометричну прогресії, пропорції, правила розв'язування задач. Чисту математику вивчали в двох класах: в нижчому – планіметрію, початкові дії, дії з дробами і квадрати чисел; у вищому математичному класі – стереометрію, закінчення алгебри і тригонометрію. Згодом до змінної математики додались початки цивільної і військової архітектури, механіки, оптики, перспективи, сферичної тригонометрії, астрономії, математичної географії, гармоніки і математичної хронології.

Після навчання в західноєвропейських університетах математику в академії викладав талановитий вчений **Іван Фальковський** (1762–1823), який залишив по собі праці з математики, географії, фізики, історії. У підручник Фальковського були включені елементи практичної математики, елементи тригонометрії.

Ірицей (Іван Якимович) Фальковський був прийнятий до Київської академії в 1773 р. В 1777 р., у зв'язку з переведенням його батька до Угорщини,

середжувалися на питаннях механіки, астрономії, оптики.

Сорок років викладав математику у Харківському університеті **Андрій Федорович Павловський** (1788–1857), який зацікавив математикою, відкрив талант видатного українського математика М. В. Остроградського.

У 30–50–х роках математична діяльність у Харківському університеті зводилась до викладання. У 60–80–ті роки ситуація дещо поліпшується. Професор **Данило Михайлович Деларю** (1839–1905) викладає основи теорії Галуа, читає студентам курс вищої алгебри, видає "Курс диференціального числення і теорії алгебраїчних функцій" (1869) і "Курс теорії диференціальних рівнянь" (1880).

Наприкінці XIX – початку XX ст. Харківський університет відігравав велику роль у розвитку математики в Україні. З 1885 по 1902 р. тут працював професор **Олександр Михайлович Ляпунов** (1857–1918) – творець теорії стійкості руху і автор фундаментальних досліджень про фігури рівноваги обертаючої рідини, теорії потенціалу, теорії ймовірностей. У праці "Загальна задача про стійкість руху" (1892) наведено опис нових точних методів досліджень у цій галузі. Праці О.М. Ляпунова набули світового визнання.

Інтенсивну наукову роботу в Харківському університеті певний час (1894–1906) проводив професор **Володимир Андрійович Стєклов** (1864–1926) у галузі теоретичної фізики та диференціальних рівнянь. Він займався розкладом функцій в ряди по наперед заданих ортогональних системах функцій, які пов'язані із застосуванням до розв'язування крайових задач. Досяг важливих результатів в теорії пружності та в гідромеханіці.

4.4. Математика в Україні у XIX столітті

Перша половина XIX ст. – один із найвизначніших і найпродуктивніших в історії розвитку точного природознавства періодів. Важливим моментом у розвитку математики того часу є розширення сфери застосування математичного аналізу до розв'язання нових задач природознавства. Обґрунтування математичного аналізу стало першочерговою проблемою для початку XIX ст.

На початку XIX ст. єдиним слов'янином, який творив із славною когортою західноєвропейських учених основи сучасної математики, фізики і механіки, був **Михайло Васильович Остроградський** (1801–1862) – славетний український математик і механік, видатний учений, організатор наукової

школи прикладної математики і механіки, талановитий педагог і прогресивний реформатор математичної освіти.

Народився Михайло Васильович в селі Пашенне (тепер Пашенівка) Кобеляцького повіту на Полтавщині, тут пройшли його дитячі і шкільні роки. Походив він з відомого українського козацько-старшинського роду, чим завжди дуже пишався. М. В. Остроградський був справжнім патріотом. Любив свій рідний край, свій народ, українську культуру. Розмовляв дома українською мовою, а коли говорив російською чи французькою, то з досить помітним українським акцентом. М. Остроградський був знайомий з багатьма представниками передової української інтелігенції того часу: І. Котляревським, Т. Шевченком, С. Гулаком-Артемовським, М. Лисенком, М. Максимовичем, А. Мокрицьким та ін. Улюбленим його письменником був Т. Г. Шевченко, значну частину творів якого М. Остроградський знав напам'ять. З великою повагою й любов'ю ставився до Михайла Васильовича і великий Кобзар. У своєму щоденнику Т. Г. Шевченко так писав про їхню зустріч: "Великий математик прийняв мене з розкритими обіймами, як земляка і як сім'янина, що кудись надовго відлучився. Спасибі йому".

Життєвий шлях видатного математика був цікавим, але тернистим. Його математичні нахили проявилися вже в дитячі роки: речі, що його оточували, він намагався вивчати насамперед з їх математичних характеристик – у колодязі вимірював глибину, в іграшок, грядок і будівель – визначав розміри, для чого завжди носив із собою мотузку з прив'язаним камінцем.

В 1809 році Михайла віддають до пансіону при Полтавській гімназії, що мав назву "Будинок для виховання бідних дворян". Гімназичне життя зовсім не подобалося малому Остроградському і він покинув навчання, мріючи стати військовим. Його двометровий зріст, фізична сила і гучний голос були неабиякими достоїнствами в майбутній кар'єрі військового. Але за порадою дядька – П.А. Устимовича, він починає готуватися до вступу в Харківський університет. І вже восени 1816 року Михайло Остроградський стає вільним слухачем, а згодом і повноправним студентом відділення фізичних та математичних наук Харківського університету.

Його вчителями з вищої математики були професор Андрій Федорович Павловський та ректор університету Тимофій Федорович Осиповський. Помітивши математичні здібності М. Остроградського, А. Павловський та Т.Осиповський змогли розбудити в нього спочатку інтерес, а потім і палку любов до науки. Вже в 1818 році Михайло Остроградський блискуче складає екзамени за трирічний курс університету і одержує атестат. Щоб отримати

великого математика, М. Є. Жуковський говорив: "У творах М. Остроградського нас приваблює загальність аналізу, головна думка, така ж широка, як і простір його рідних полів".

Близько третини праць М. Остроградського – це дослідження з механіки. Йому належать фундаментальні курси небесної і аналітичної механіки, дослідження з теорії канонічних рівнянь механіки, загальний метод визначення швидкостей точок якої завгодно системи при ударі об непружний зв'язок тощо. В балістиці він вивів диференціальне рівняння руху ексцентричного снаряда в повітрі, вивчав вплив пострілу на лафет гармати, траєкторію тіла в середовищі з опором. В математичній фізиці отримав значні результати в розв'язанні питання про поширення теплоти в твердих тілах і рідинах. Надзвичайно чудовим методом вивів рівняння поширення теплоти в рідинах.

У галузі математичного аналізу М. Остроградському належить низка мемуарів, присвячених розв'язанню окремих, дуже різноманітних питань. Так, виведена ним формула перетворення інтеграла за об'ємом в інтеграл за поверхнею стала класичною і має надзвичайно велике значення в науці і техніці. Скориставшись саме цією формулою, англійський вчений Д. Максвел створив математичну теорію електрики. У 1834 році М. Остроградський розв'язав задачу про знаходження екстремуму кратного інтеграла, а згодом – задачу про відокремлення алгебраїчної частини інтеграла від раціонального дробу. В 1836 році одночасно з К. Якобі та Е. Каталаном розробив метод заміни змінних у кратних інтегралах, а в 1838 році розкрив властивості інтегрування лінійних диференціальних рівнянь методом варіації довільних параметрів тощо. Роботи М. Остроградського з математичного аналізу ввійшли в сучасну математику як її невід'ємна складова частина і стали необхідним знаряддям у нових наукових дослідженнях.

Якщо в механіці, математичній фізиці і математичному аналізі М. Остроградський отримав результати принципового значення, то його вклад в алгебру, теорію чисел і теорію ймовірностей носить дещо інший характер. Серед робіт цієї тематики потрібно відзначити його "Лекції алгебраїчного і трансцендентного аналізу", які стали найважливішим посібником для студентів вищих шкіл та відіграли суттєву роль у розвитку алгебраїчних знань і алгебраїчних інтересів математиків.

Практичну спрямованість носять майже всі його роботи з теорії ймовірностей. Перша робота (1834) присвячена обчисленню ймовірностей помилок судових трибуналів. Найбільша робота "Про одне питання теорії ймовірностей" (1846) була викликана потребою полегшити перевірку товарів, які поставлялися армії, і поклала початок статистичним методам бракування. В

вчений ступінь кандидата наук, М. Остроградський тричі успішно складав екзамени, але через вільнодумство його позбавили навіть документів про закінчення університету.

Молодий Остроградський не втрачає надії стати математиком і з цією метою в 1822 році вирушає до Парижа. Там він відвідує лекції відомих математиків: П. Лапласа, О. Коші, С. Пуассона, А. Лежандра, А. Ампера, Ж. Фур'є та ін., з якими невдовзі зав'язує тісні наукові стосунки. За рекомендацією О. Коші викладає математику та очолює математичну кафедру в коледжі Генріха IV. В листопаді 1826 року М. Остроградський подає до Паризької академії наук свою першу самостійну роботу "Мемуар про поширення хвиль у циліндричному басейні". Вона одержала високу оцінку спеціалістів і була надрукована в працях Академії в 1832 році.

В 1828 році М. В. Остроградський повертається в Росію. Саме в Петербурзі проходить вся його наукова, педагогічна і адміністраторська робота. Його авторитет як ученого серед діячів науки був високим і незаперечним. 17 грудня 1828 року Петербурзька академія наук обрала Михайла Васильовича ад'юнктом прикладної математики, 11 серпня 1830 року йому присвоєно звання екстраординарного академіка, а через рік обрано ординарним академіком по відділу прикладної математики. Одночасно з науково-дослідницькою роботою в Академії наук М. Остроградський працює викладачем у Морському кадетському корпусі, в Інституті інженерів шляхів сполучення, Головному інженерному училищі, Головному артилерійському училищі, Головному педагогічному інституті.

Наукова праця "Курс небесної механіки", схвалена Паризькою академією наук, принесла Михайлу Остроградському всесвітнє визнання і славу першого вченого-математика. Видатні заслуги М. В. Остроградського визнані усім науковим світом. Його обрали академіком Російської, Туринської, Римської, Американської академій, членом-кореспондентом Паризької академії наук та ін.

За свою майже 40–річну наукову діяльність Михайло Васильович Остроградський написав близько 50 наукових творів, присвячених найрізноманітнішим розділам математики і механіки: диференціальному й інтегральному численню, вищій алгебрі, геометрії, теорії ймовірностей, теорії чисел, аналітичній механіці, математичній фізиці, балістиці тощо.

Наукові роботи М. Остроградського відзначаються надзвичайною простотою, доступністю і прямотою викладення, хоча водночас вони досить узагальнені, глибокі, строго обґрунтовані. Характеризуючи науковий доробок

статті "Про страхування" (1847) дається означення математичного сподівання, яке ілюструється прикладами лотерей і розрахунками страхових платежів. Коротенька стаття, написана в тому ж році, "Гра в кості" присвячена роз'ясненню того, що всі лотереї та азартні ігри – невигідні публіці, а приносять значний прибуток їх улаштувальникам.

Михайло Остроградський увійшов в історію не тільки як першокласний математик, але і як великий лектор та новатор-педагог. Детальніше про цей аспект діяльності великого академіка можна прочитати в роботах [361], [362], [498], [499], [500].

13 серпня 1861 року М. Остроградський захворів, а 1 січня 1862 р. помер. Поховано великого математика в рідному селі Пашенне. На могилі стоїть гранітний обеліск з барельєфом ученого, у Полтавському педагогічному інституті відкрито перший в Україні музей Михайла Васильовича Остроградського, а в Хорішківській школі Козельщинського району обладнано кімнату-музей. В Полтаві, на будинку, в якому провів останні дні свого життя академік, встановлено меморіальну дошку, а біля педагогічного університету йому споруджено пам'ятник. До ювілейних дат проводились наукові конференції, семінари, педагогічні читання.

На честь видатного українського математика М. В. Остроградського у зв'язку з 200 – річчям від дня його народження Національна академія наук України, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова та Українське математичне товариство організували Український математичний конгрес, робота якого проходила в Києві з 21 до 23 серпня 2001 року .

Поряд з Михайлом Остроградським видатний вклад у розвиток математики в XIX столітті вніс ще один наш земляк – академік **Віктор Якович Буняковський** (1804–1889), який народився в місті Барі нинішньої Вінницької області. Виховувався і отримав початкову освіту в Москві в сім'ї графа А. П. Тормосова, бо рано помер батько. У 19 років виїхав за кордон для завершення освіти. Вчився в Німеччині, Швейцарії, Франції. Повернувшись 1826 року з Європи починає викладацьку діяльність у Петербурзі – в Першому кадетському корпусі інженерів шляхів сполучення, а з 1846 року – в Петербурзькому університеті. Читав Віктор Буняковський курси аналітичної механіки, диференційованого і інтегрального числень, теорії імовірності, диференціальних рівнянь, варіаційного обчислення і теорії кінечних різностей. За свідченням сучасників, лекції Буняковського відзначалися особливою чіткістю: "Найважчі з першого погляду сухі істини математичного ана-

лізу вкладалися в такі захоплюючі форми, подавалися такою прекрасною мовою, з такою дивовижною ясністю, що приковували до себе навіть тих слухачів, котрі не володіли особливою зосередженістю".

Віктор Буняковський у 1846 році видав монографію "Основи математичної теорії імовірностей", яка відіграла надзвичайно важливу роль у розвитку математики в Росії. Він також, до речі, розробляв прикладні проблеми цієї науки. Зокрема, написав ряд праць з демографії Росії, військової статистики тощо.

Великою популярністю у спеціалістів користується праця Віктора Буняковського "О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам или интегралам в конечных разностях" (1859). Виведена в цьому епохальному досліджені нерівність Буняковського, вона як така увійшла в науку і відіграє надзвичайно важливу роль у різних питаннях математичного аналізу. Він задумав і частково здійснив видання "Лексика чистої і прикладної математики", в якому пояснював усі математичні, а також багато фізичних і астрономічних термінів.

Крім того, треба зазначити, що наш земляк Віктор Буняковський багато зусиль доклав для розвитку Російської академії наук, обираючись з 1864 року протягом чверті століття її віце-президентом. 1875 року, коли відзначалося 50–річчя наукової діяльності Віктора Буняковського, було відчеканено спеціальну медаль і встановлено премію Російської академії наук його імені за кращі роботи з математики.

У XIX столітті Україна дала світові ще одного видатного математика – **Георгія Феодосійовича Вороного** (1868–1908), який народився в селі Журавка на Чернігівщині, в садибі свого батька Феодосія Вороного, відомого педагога та громадського діяча. В цьому мальовничому куточку України проводив Георгій Феодосійович свої літні відпустки, тут його і поховано.

Георгій до п'ятого класу навчався в Бердянській гімназії, а в 1885 році закінчив гімназію в Прилуках. В архівах збереглась характеристика Вороного-гімназиста, в якій, зокрема, відмічається: "При чудових здібностях має, незважаючи на свій молодий вік, досить розвинутий розум і надто серйозну любов до навчання, з усіх предметів гімназичного курсу здобув знання дуже добрі, а в математиці, до якої має особливу прихильність і покликання, здобув знання визначні з низки учнівських успіхів в математиці".

Про неабиякі математичні здібності г. Вороного і його серйозне захоплення математикою свідчить і той факт, що перше своє дослідження він зробив у 16 років, будучи ще гімназистом. Сталося це так. У 1884 році видатний

тельно, как я не свалился окончательно с ног".

У 1889 році Георгій Вороний блискуче складає випускні екзамени, захищає дипломну роботу про числа Бернуллі і його залишають при університеті для підготовки магістерських екзаменів. Цього ж року він одружився зі своєю коханою дівчиною – землячкою Ольгою Крицькою, яка на все життя стала йому вірним другом і добрим помічником. Нарешті настала пора, коли основну частину свого часу він зміг присвятити науковим дослідженням.

У 1894 році Георгій Вороний захистив магістерську дисертацію – "Про цілі алгебраїчні числа, що залежать від коренів незвідного рівняння третього степеня", а вже через два роки, в 1896–му році, він представив докторську дисертацію – "Про одне узагальнення алгорифму неперервних дробів" і блискуче захистив її 6 квітня 1897 року. За результати, здобуті в обох дисертаціях, його було відзначено премією імені академіка Буняковського Петербурзької академії наук. Ім'я Г. Вороного стає відомим у наукових колах. Його творча і педагогічна діяльність високо оцінюється вітчизняними та зарубіжними математиками. Так, у 1898 р. він стає членом Московського математичного товариства, а у 1907 р. Російська академія наук обирає Г. Вороного своїм членом-кореспондентом фізико-математичного відділення.

Георгій Феодосійович Вороний постійно прагнув встановити наукове спілкування з іншими творчими математиками. Про це свідчать листування з В. А. Стєкловим, а також активна участь у з'їздах природодослідників і лікарів (Київ, 1898р.; Петербург, 1901р.) та міжнародного математичного в Гейдельбурзі (1904 р.).

Наукова робота Г. Вороного тісно пов'язана з його педагогічною діяльністю, яка розпочалася в 1889 році в Петергофській прогімназії, де він займав посаду штатного викладача до 1892 року. У 1894 році, після захисту магістерської дисертації, Г. Вороного призначено професором Варшавського університету при кафедрі чистої математики. Там він працював з невеликими перервами до останніх своїх днів.

У Варшавському університеті Г. Вороний читав кілька дисциплін: аналітичну та нарисну геометрії, теорію чисел і теорію ймовірностей. Лекції він готував дуже ретельно, намагаючись ознайомити студентів з новими досягненнями та методами. Про це, зокрема, свідчить його літографований підручник з аналітичної геометрії. Для цього підручника характерні строгість і чіткість викладу матеріалу, кожне його нове поняття ілюструється, кожен новий метод пояснюється на прикладах. В книзі виводяться і широко застосовуються формули сферичної тригонометрії, використовуються вектори і операції над ни-

математик і педагог, тоді ще молодий професор Київського університету Володимир Петрович Єрмаков почав видавати в Києві "Журнал елементарної математики", в якому була запропонована для дослідження така тема: "Розклад многогочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння". Як з'ясувалося, на вказану тему редакція одержала лише одну роботу, а саме від Г. Вороного, і в 1885 році в журналі була надрукована його перша стаття, в якій крім розв'язання поставленої задачі наводилась значна кількість прикладів.

З 1885–го по 1889 рік Георгій Вороний навчався на математичному відділенні Петербурзького університету, що був на той час одним з найавторитетніших математичних закладів. З перших місяців навчання в університеті він систематично і настирливо працює. Читає багато спеціальної та додаткової літератури (і не лише з математики), відвідує і опрацьовує кожну лекцію, вивчає французьку, німецьку та англійську мови.

Записи в особистому щоденнику Г. Вороного свідчать про безмірну відданість обраній справі. В одному місці він згадує про те, що колов вночі шпилькою пальці, аби не заснути в час визначений ним самим для навчання. В іншому місці (31 березня 1887 року) він пише: "Я вот уже второй день сижу над вычислением солнечного затмения 7–го августа. Вчера работал 10 часов, сегодня часов 7. Работа значительно двинулась вперед, но я чувствую себя страшно утомленным, тем более, что целых два дня не выходил на свежий воздух. Цифры, цифры и т. д. Я вчера так ими набил себе голову, что они меня мучили всю ночь, так что даже я принужден был встать и облить себе голову водой. Точно так же и сегодня придется прибегнуть к этому средству".

В той же час це були роки злиденного життя в студентському гуртожитку. Матеріальна допомога від батька була настільки мала, що Г. Вороний мусив підробляти приватними уроками, щоб хоч якось існувати. Ось як він згадує про це під новий 1890 рік у своєму щоденнику: "Все, о чем я не смел даже мечтать, исполнилось: я выдержал экзамены с круглой пятеркой, меня оставили при университете со стипендией; словом, мое будущее уже значительно определилось. Но все это в последний момент, раньше же я только терпел. Терпел на уроке от ученика, который изводил меня своей ленью, а затем приходил домой, падал изнеможенный на кровать и думал, когда же конец! Но нет, надо вставать и зубрить, зубрить без конца!.. Если прибавить, что в это время я был болен инфлюэнцой, был сам без гроша денег, не имел в виду ничего, кроме ужасного урока, жил в сырой, холодной комнате, о которой вспоминаю, как о кошмаре, то право удивительно, как я не свалился окончательно с ног".

ми, що для підручника минулого століття було нововведенням.

У 1898 році Г. Вороний починає працювати за сумісництвом у Варшавському політехнічному інституті, де протягом кількох років був деканом механічного факультету. В роки революції (1905–1907) університет і політехнічний інститут були закриті, а групу професорів цих навчальних закладів направили до Новочеркаська, бо там тільки-но відкрився Донський політехнічний інститут. В цьому інституті Г. Вороний виконував обов'язки декана механічного факультету. В 1908 році заняття у Варшавському університеті поновилися, і до початку навчального року Г. Вороний повертається до Варшави, де береться за підготовку і читання математичного аналізу. Підготовка цього курсу стала останньою справою Г. Ф. Вороного на педагогічній ниві. Складений ним підручник з диференціального та інтегрального числення надруковано за редакцією І. Р. Брайцева у "Варшавських університетських відомостях" за 1909–1911 роки.

Останні роки життя Г. Вороний серйозно хворів, його мучила жовчнокам'яна хвороба. Він казав Брайцеву: "Врачи мне запрещают заниматься. Я и сам заметил, что сильное умственное напряжение всегда вызывает отклик в моей болезни. Но они не знают, что значит для меня не заниматься математикой. Только одной моей жене известно, что математика для меня жизнь, все". В останні дні життя, уже в ліжку, він не полишає своїх наукових пошуків і пише роботу "Про останню теорему Ферма".

7 (20) листопада 1908 року математична наука зазнала великої втрати. На 41 році життя у тяжких муках Георгій Феодосійович Вороний помер. Короткий некролог в газеті "Правительственный вестник" сповіщав, що "помер... Георгій Феодосійович Вороний, людина колосальних математичних обдарувань і вельми значна величина не лише серед вітчизняних, але й іноземних учених-математиків... Глибокі математичні знання поєднувалися в особі покійного з визначним лекторським талантом".

Наукова спадщина Г. Вороного складається з шести великих мемуарів, трьох статей з теорії чисел, семи повідомлень на з'їздах і конгресах та неопублікованих архівних матеріалів. Усі ці праці зібрані і прокоментовані відомими математиками в тритомному виданні. Останній том закінчується нарисом життя і наукової діяльності Г. Ф. Вороного, складеним І. З. Штокалом та Й. Б. Погребиським.

Основні праці Г. Вороного стосуються теорії чисел, де він одержав видатні результати в усіх основних її напрямах.

В аналітичній теорії чисел Г. Вороний розробив нові методи досліджен-

ня асимптотичних властивостей арифметичних функцій. Саме з його робіт починається сучасна аналітична теорія функцій, успішно продовжена І. М. Виноградовим, Г. Харді, Дж. Літлвудом та іншими.

В алгебраїчній теорії чисел Г. Вороний завершив дослідження, які велись математиками впродовж усього XIX ст., а саме – розробив повну теорію алгебраїчних полів третього степеня і запропонував алгоритм, що служить узагальненням неперервних дробів для кубічних ірраціональностей.

Поряд з Г. Мінковським Г. Вороний є творцем геометричної теорії чисел. Цій проблемі присвячено мемуари – "Про деякі властивості додатних досконалих квадратичних форм" (1907р.) та "Дослідження про примітивні паралелоедри" (1908–1909 р.), надруковані у відомому математичному журналі Крелля. В першій роботі Г Вороний створив геометрію додатно визначених квадратичних форм і дав алгоритмічний розв'язок задачі про мінімум досконалої квадратичної форми.

Друга робота стала продовженням досліджень відомого кристалографа Є. С. Федорова і мала прямий зв'язок з питаннями кристалографії. В ній Г. Вороний розглядає заповнення n-вимірного евклідового простору однаковими паралельно розміщеними опуклими многогранниками – паралелоедрами. Серед них виділено клас примітивних паралелоедрів, у яких в кожній вершині сходиться найменша кількість цих просторових тіл, тобто $n + 1$. Г. Вороний знайшов алгоритм, який дає змогу для кожного n побудувати всі примітивні паралелоедри.

Ці роботи – справжня гордість української математики. Б. Делоне дав їм таку оцінку: "Мемуар Вороного про паралелоедри – одне із найглибших досліджень у галузі геометрії чисел в усій світовій літературі, а своєрідність методів чисто геометричної першої частини накладає на мемуар відбиток геніальності".

Результати досліджень Г. Вороного та методи їх одержання привертають увагу вчених усього світу. Потреба розчленування простору на окремі клітини виникає в сучасних дослідженнях у найрізноманітніших галузях знань: астрономії, астрофізиці, радіаційній фізиці, фізичній хімії, мікробіології, офтальмології тощо. Добре відомі поняття "сфери Діріхле" в математиці, "многокутника Тіссена" в географії, "клітини Мейєрінга" в металургії, "S–мозаїки" в екології.

Тепер термінологію уніфіковано – загальновизнаними у світовій науці стали терміни: "клітина Вороного", "мозаїка Вороного", "розбиття Вороного". Вони виявилися найбільш довершеними.

(А. А. Дяченко), про кривизну поверхонь (А. А..Дяченко). У 1852 р. опубліковано дослідження М. А. Дяченка "Про вплив інтегрального і диференціального числення на успіхи геометрії в механіці".

У наступні десятиліття поліпшується стан навчальної, наукової роботи, з'являються оригінальні дослідження та друковані праці. Запроваджуються , нові лекційні курси (теорія чисел, неевклідова геометрія). Найвідчутніші досягнення цього періоду зробили:

Павло Емілійович Ромер (1835–1899), вихованець Київського університету, який вивчав питання наближеного обчислення коренів алгебраїчних рівнянь. Під час стажування за кордоном він зацікавився роботами У. Гамільтона з теорії кватерніонів, що стає темою його математичних інтересів. У 1867 р. захищає докторську дисертацію на тему "Основні початки методу кватерніонів", яка ознайомила російськомовну математичну громадськість з цією перспективною тематикою.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912), вихованець Київського університету, читав різноманітні курси. Його наукові інтереси зосереджені у працях "Про визначені інтеграли", "Символічне числення і застосування його до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь" (магістерська дисертація, 1862), "Ріманова теорія функцій кількох змінних" (докторська дисертація, 1866). Він підготував і видав 12 навчальних посібників з різних математичних предметів, зокрема з історії математики, якими послуговувалося кілька поколінь студентів.

Василь Петрович Єрмаков (1845–1922), випускник Київського університету. Його наукові інтереси зосереджені в теорії диференціальних рівнянь і в математичній фізиці. Першим його науковим дебютом був виступ на III з'їзді російських природодослідників і лікарів (Київ, 1871), де він зробив доповідь про нову ознаку збіжності рядів. Це було оригінальне дослідження, яке швидко стало відомим широкій математичній громадськості і високо нею оцінене. Велику роль у поширенні математичних знань відіграв заснований в Києві професором В. П. Єрмаковим журнал "Элементарная математика" (1884–1886). Пізніше, в 1886–1917 р., цей журнал видавався в Одесі під назвою "Вестник опытной физики и элементарной математики".

У 1865 р. на базі Рішельєвського ліцею був відкритий Новоросійський (Одеський) університет. Одразу після відкриття в ньому розгорнулась активна науково-методична робота. Провідними викладачами у перший період існування університету були професори Є. Ф. Сабінін, С. П. Ярошенко, В. В. Преображенський, І. В. Слешинський. Наукові інтереси їх були різни-

У 1975 році діаграми Вороного введено в теоретичну комп'ютерну науку і з того часу їх стали використовувати у конструкціях, пов'язаних з геометричними алгоритмами. Деякі фахівці навіть вважають, що саме з цього моменту започатковано комп'ютерну геометрію. Діаграми Вороного використовуються також у комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, конструюванні роботів, розпізнанні образів, побудові географічних інформаційних систем. Цьому математичному об'єкту присвячено багато статей. У 1992 році в Англії видано монографію A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara "Просторові мозаїки: Поняття та застосування діаграм Вороного" (354 с.).

Використанню сучасними дослідниками методу Г. Вороного був присвячений цикл лекцій "Клітини Вороного та їх роль у сучасній математиці та природознавстві", які в березні 1998 року прочитала професор M. Senechal (Smith College, USA), відомий фахівець з питань геометрії чисел.

Друга половина XIX ст. ознаменувалася значним пожвавленням у всіх галузях наукової творчості. Це особливо стосувалося таких точних наук, як хімія, фізика, геологія, ботаніка, біологія, а також математика. Світове визнання здобув доробок математиків, які працювали в Україні. Основними осередками, які продукували і популяризували наукові знання були Харківський, Київський та Новоросійський (нині Одеський) університети.

З 1899–го по 1902 р. професором кафедри чистої математики Харківського університету працював **Дмитро Олександрович Граве** (1863–1939), який у 1902 р. перейшов до Київського університету, а на кафедру чистої математики було обрано професора Дмитра Матвійовича Синцова (1867–1946). В ряді творів він розвинув і узагальнив теорію коннексів в її зв'язку з інтегруванням диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку.

У 1834 р. відкрито Київський університет. Навчальні курси читались на тогочасному науковому рівні, орієнтувались на досягнення найкращих вітчизняних і зарубіжних авторів – М. Остроградського, Ж. Лагранжа, Ж. Фур'є, О. Коші. Були прочитані такі курси: аналітична геометрія (професори С. С. Чижевський, О. Н. Тихомадрицький), диференціальне й інтегральне числення, інтегрування диференціальних рівнянь і варіаційне числення (С. С. Вижевський, Н. А. Дяченко), теорія означених інтегралів, числення скінченних різниць і лишків, теорія алгебраїчних рівнянь (М. А. Дяченко), теорія рядів і теорія чисел (О. Н. Тихомадрицький), прикладна математика та нарисна геометрія (І. І. Рахманінов). Проводились окремі дослідження, які потім захищались, як дисертації: розв'язування двочленних рівнянь (О. Н. Тихомадрицький), про особливі розв'язки диференціальних рівнянь

ми. Дослідження найбільших і найменших значень визначених кратних інтегралів, варіаційне числення (Є. Сабінін), методи знаходження особливих розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних першого порядку, теорія визначників, проективна геометрія (С. П. Ярошенко), інтегрування рівнянь з частинними похідними вищих порядків, застосування в механіці (В. В. Преображенський), теорія еліптичних функцій, умови збіжності нескінченних неперервних дробів, особливо в комплексній галузі (І. В. Слешинський). Велика увага приділялась підготовці науково-методичних кадрів для університетів. Тематика навчальних дисциплін для студентів охоплювала головні розділи класичної та сучасної на той час математики.

У наступний період кінця XIX – початку XX ст. оновлюється викладацький склад університету, тематики його наукових досліджень, нових форм роботи набирає математичне відділення товариства природодослідників. Провідним математиком університету стає І. В. Слешинський і його численні учні: І. Ю. Тимченко (1863–1939), В. А. Ціммерман (1866–1939), Є. Л. Буницький (1874–1952), В. Ф. Каган (1866–1953), С. Й. Шатуновський (1859–1929).

В 70–80–х роках з метою концентрації інтелектуального потенціалу, координації досліджень було створено низку наукових товариств – Харківське, Київське, Одеське товариства дослідників природи; Харківське математичне, Київське фізико-математичне товариства.

У 1876 р. при Одеському товаристві природодослідників було утворене математичне відділення, яке фактично виконувало функції Одеського фізико-математичного товариства. На його засіданнях обговорювались повідомлення оригінального і оглядового характеру із математики, механіки, фізики, астрономії. З 1878 р. видається друкований орган відділення під назвою "Записки математичного відділення Новоросійського товариства природодослідників", що значно активізувало діяльність членів відділення, наукову та методичну роботу університету.

На хвилі національного відродження у Львові в 1873 р. виникає Товариство імені Т. Г. Шевченка. Задумане як осередок розвитку української мови і літератури, товариство поступово перебрало на себе роль лідера у формуванні української науки, перетворилося на першу новітню українську академію наук. Переломним для товариства був 1892 р., коли воно за новим статутом перетворилося в Наукове товариство Т. Шевченка (НТШ). Відтоді, крім гуманітарних наук, набувають розвитку в рамках НТШ більш ніж двадцять наукових комісій і такі дисципліни, як математика, фізика, хімія, біологія,

право, економіка основним науковим органом товариства стали "Записки НТШ". Було започатковано ще ряд періодичних видань – перших за нашу історію українських журналів у галузі історії, філософії, права, демографії, математико-природничих наук.

Політична ситуація на західних землях України, національне гноблення позначалися на рівні розвитку науки у Львівському університеті. Математичні пошуки перебували на рівні методичних удосконалень при викладанні, реферуванні робіт. Лише окремі епізоди вносили певне пожвавлення, але ненадовго. З 1908 по 1919 р. у цьому вузі працював відомий польський математик, учень Г.Ф. Вороного, спеціаліст з теорії чисел **Вацлав Серпінський** (1882–1969). Він читав курси з теорії множин, теорії функцій дійсної змінної, аналітичної теорії чисел, позитивно впливав на математичне виховання студентської молоді, проводив наукові семінари із студентами, вносив пожвавлення в наукову роботу в університеті.

Помітний внесок в науку Львівського університету робить **Гуго Діонісі Штейнгауз** (1887–1972), який працював тут у період 1917–1945 р. Його наукові інтереси зосереджувалися в теорії рядів (степеневих, ортогональних, Фур'є), теорії ймовірностей, топології, він мав ряд популярних праць з математики, деякі з яких перекладені російською мовою.

У наступні періоди розвиток математики в Україні набуває дедалі більшого розмаху й обсягу. Починаючи з середини XIX ст. українські математики приділяють неабияку увагу питанням історії математики: читають відповідні курси студентам, готують посібники та монографії, проводять історико-математичні дослідження, публікують наукові статті.

4.5. Математика в Україні у XX столітті

У 1907 р. з ініціативи М. Грушевського розпочало свою діяльність Українське наукове товариство у Києві, навколо якого об'єдналися вчені суспільствознавці і природознавці багатьох міст України, Петербурга, Москви. Київські науковці видавали "Записки Українського наукового товариства в Києві" (з 1908 по 1918 рр.), "Збірники природничо-технічної секції" (1910–1918), "Збірники медичної секції" (1910–1922). Поряд із науковими дослідженнями товариство випустило чимало популярних видань.

У Львові продовжувало діяти Наукове товариство імені Т. Г. Шевченка (НТШ), яке довгі роки виконувало почесну роль Всеукраїнської академії на-

(М. Крилов).

13 лютого 1934 року на основі кафедр прикладної математики, чистої математики, математичної статистики при фізико-математичному відділенні Всеукраїнської академії наук створено Інститут математики АН УРСР, який до 1939 р. очолював академік АН УРСР і почесний член АН СРСР Д. Граве. Він започаткував відому математичну школу в Радянському Союзі, яка виховала видатних алгебраїстів Б. Делоне, М. Чеботарьова, О. Шмідта та ін.

У 1939–1941 рр. Інститут очолив академік М. А. Лаврентьєв. Його роботи пов'язані з теорією функцій комплексної змінної і її застосуванням до розв'язування задач газової динаміки, аеро- та гідро динаміки. У доробку академіка – варіаційно-геометричне спрямування в теорії функцій комплексної змінної, теорія квазіконформних відображень та її застосування до ріманових поверхонь та теорії хвиль.

На початку 40 рр. XX ст. у галузі алгебри і теорії чисел плідно працювали Д. А. Граве, М. Г. Крейн, М. П. Кравчук; у загальній теорії диференціальних рівнянь – Г. В. Пфейффер, М. П. Кравчук, Ю. Д. Соколов, М. Х. Орлов, Г. І. Дринфельд; з теорії ймовірностей і математичної статистики – М. П. Кравчук, з теорії функцій – Е. Я. Ремез, геометрії – Б. Я. Букреєв, прикладної математики – Д. А. Граве, І. Я. Штаєрман. Питання функціонального аналізу досліджували такі відомі вчені, як С. Банах, В. Орлич, Ю. Шаудер.

Стефан Банах (1892–1945) один із засновників сучасного математичного аналізу і львівської математичної школи. Лінійні простори, які він вивчав (простори Банаха), мають велике значення для сучасної математики. Деякі роботи С. Банаха стосуються теорії звичайних диференціальних рівнянь (банахове середнє), теорії функції комплексної змінної.

На думку спеціалістів, С. Банаха належить віднести до найвидатніших математиків XX століття, які виховалися і працювали на українській землі. Уродженець Кракова, він усе своє свідоме життя пов'язав зі Львовом. Тут він закінчив у 1914 року політехнічний інститут, тут захистив докторську дисертацію, став професором. Спочатку працював в альма-матер, а згодом – у Львівському університеті. Світову славу С. Банах здобув як один із засновників сучасного функціонального аналізу, що становить нині основу математики. Одержані ним лінійні простори і досі не втратили своєї актуальності. Як відомо, багато результатів наукових досліджень С. Банаха стали класичними і входять до усіх підручників і монографій з функціонального аналізу. Його головна праця з цієї проблеми – "Теорія лінійних операцій" вийшла 1931 року польською, 1933 р. – французькою, а 1948 р. – українською мовою

ук. В 1892 році воно чітко структурувалося. Були створені три секції, що працювали до кінця існування товариства: історико-філософська, філологічна та математично-природописно-лікарська.

Математично-природописно-лікарську секцію було утворено на загальних зборах НТШ 11 травня 1893 року, директором якої обрали природознавця Івана Верхрадського. До складу секції входило 54 особи, серед них троє математиків – Петро Огоновський, Володимир Левицький і Клим Глібовицький. У 1897 р. організовано "Збірник математично-природописно-лікарської секції". За весь період існування математично-природописно-лікарської секції (1889–1939 рр.) до неї входили такі відомі українські математики: В. Левицький, П. Огоновський, К. Глібовицький, М. Чайковський, В. Стасюк, Н. Садовський, Д. Граве, В. Варичак, М. Петрович, М. Кравчук, М. Зарицький, М. Крилов, М. Куренський

Математики – дійсні члени НТШ здійснили велику наукову роботу. Починаючи з 1897 по 1939 рік, вони опублікували значну кількість наукових статей, досліджень, що були вміщені в 32–х томах збірника математично-природописно-лікарської секції. Роботи присвячені різним напрямам розвитку математики: теорії аналітичних функцій, теорії диференціальних та алгебраїчних рівнянь, методам розв'язування різних задач прикладної математики та фізики, теорії ймовірностей, теорії множин з алгебри та математичної логіки.

До досліджень в галузі математики залучалися науковці, які не були дійсними членами НТШ. Галицькі вчені мали тісний зв'язок у галузі розвитку математики з ученими зарубіжних країн. У першу чергу з тими, хто представляв свої країни в НТШ. Науковий зв'язок підтримувався з німецькими математиками через Давида Гільберта та Альберта Ейнштейна. Велику наукову підтримку і тісні дружні наукові стосунки галицькі математики мали з вихідцями з України. Зокрема, із Сербською академією наук – через Михайла Петровича, з хорватськими математиками – через Володимира Варичака. Математики – дійсні члени НТШ не обмежувалися публікацією тільки статей. Було опубліковано й монографії, зокрема таких дійсних членів НТШ як В. Левицький, М. Чайковський, М. Зарицький, П. Огоновський, академік М. Кравчук.

У 1918 р. створюється Українська академія наук, у складі якої було і фізико-математичне відділення. Згодом тут починають працювати кафедри прикладної математики (керівник Д. Граве), чистої математики (Г. Пфейфер), математичної статистики (М. Кравчук) і математичної фізики

під назвою "Курс функціонального аналізу".

Львівська математична школа, заснована С. Банахом, одержала в той час, поряд з Паризькою і Гетінгенською, світове визнання. Тут виховалася ціла плеяда відомих математиків, які після Другої світової війни не залишилися в Радянському Союзі, а виїхали за кордон. С. Банах до кінця свого життя працював у Львові, очолюючи, як і до війни, фізико-математичний факультет Львівського університету. Одна з вулиць Львова сьогодні носить ім'я Степана Банаха. Польське математичне товариство встановило премію його імені.

Засновником Київської математичної школи нелінійної механіки та математичної фізики став М. Крилов. На початку 30–х років М. Крилов та його учень М. Боголюбов започаткували новий напрям математичної фізики – нелінійну механіку, розробили метод символічного розв'язування задач математичної фізики на основі операційного числення та ін.

У 30–40х рр. XX ст. М. М. Боголюбов досліджував створення методів асимптотичного інтегрування нелінійних рівнянь, що описують коливальні процеси, та їх математичного обґрунтування. Результатом цих досліджень стала розробка фундаментальних проблем теорії нелінійних коливань – методів усереднення, одночастотних, інтегральних многовидів, математичне обґрунтування асимптотичних методів. У монографії М. Крилова і М. Боголюбова "Вступ до нелінійної механіки" (1937) дано систематичне викладення асимптотичних методів. У теорії диференціальних рівнянь широкого вжитку набув відомий метод усереднення Крилова-Боголюбова.

Праці академіка М. Боголюбова охоплюють широкий спектр проблем сучасної математики, механіки, фізики. Він займався варіаційним численням, наближеними методами, диференціальними рівняннями, рівняннями математичної фізики, асимптотичними методами нелінійної механіки, теорією стійкості, теорією динамічних систем.

Він обирався іноземним членом багатьох академій наук. За видатні заслуги в розвитку математики, механіки та теоретичної фізики академік Микола Боголюбов двічі удостоювався звання Героя Соціалістичної Праці (1969, 1979), лауреата Ленінської (1958) та трьох Державних премій СРСР (1947, 1953, 1984).

Наприкінці 40–х рр. XX ст. математичні досліджень охоплювали таку тематику: нелінійні задачі математичної фізики, якісна теорія диференціальних рівнянь, розробка методів апроксимації функцій.

У 1948–1955 рр. Інститут математики очолював академік А. Ішлінський,

а у 1955–1958 рр. – академік АН УРСР Б.В. Гнєденко.

Основні напрями досліджень А. Ю. Ішлінського – теорія гнучкості і пластичності, теорія тертя, теорія коливань, загальна механіка, приладобудування. У його доробку – фундаментальні результати в теорії гіроскопів, теорії гнучкості інерціальних систем навігації.

Б. В. Гнєденко займався дослідженнями з теорії ймовірностей, математичної статистики, математичного аналізу, історії математики. Він завершив загальну теорію сумування незалежних випадкових величин. У 50–х рр. XX ст. він приділяв багато уваги локальним граничним теоремам і непараметричним задачам статистики.

1949–1958 рр. відзначені фундаментальними результатами з подальшого розвитку асимптотичних методів нелінійної механіки – теорії нестаціонарних коливальних процесів, одночастотний метод і метод інтегральних многовидів (Ю. О. Митропольський, К. В. Задирака); асимптотичних і операційних методів в теорії лінійних рівнянь з коефіцієнтами, що повільно змінюються (І. З. Штокало, І. М. Рапопорт, С. Ф. Фещенко); математичних методів сучасної квантової теорії поля і елементарних частинок (О. С. Парасюк); функціонального аналізу і його застосувань – геометрія банахових просторів, спектральна теорія диференціальних операторів, проблема моментів, теорія розкладу за власними векторами, теорія лінійних просторів і просторів з індиферентною метрикою (М. Г. Крейн, Ю. М. Бережанський, Г. Є. Шилов); аналітичної теорії диференціальних рівнянь і її застосувань до задач небесної механіки (Ю. С. Соколов); теорії квазіконформних відображень та їх застосування до задач фільтрації (П. Ф. Фільчаков). Е. Я. Ремез розвинув ідеї П. Л. Чебешева з теорії наближень.

У лабораторії моделювання вищої нервової діяльності з ініціативи і під керівництвом Б. В. Гнєденка і М. М. Амосова було створено діагностичну машину для розпізнавання пороку серця.

В. М. Глушков побудував теорію нільпотентних топологічних груп з широкою програмою використання ідей і методів абстрактної теорії груп. У своїй докторській дисертації він розв'язав так звану п'яту проблему Гільберта, яку вважали однією з найскладніших у сучасній алгебрі. Надалі вчений присвятив себе кібернетиці, створивши теорію цифрових автоматів, дискретних перетворювачів, макроконвейєрних обчислень, які ввійшли в основу загальної теорії машин і систем. Під керівництвом В. Глушкова було укладено першу в світі "Енциклопедію кібернетики".

На цьому етапі велика увага приділялась дослідженням в галузі обчис-

процесів, побудову точних і наближених розв'язків різних класів нелінійних диференціальних, диференціально-функціональних рівнянь і рівнянь у частинних похідних. Створюються основи якісної теорії звичайних нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, яка базується на дослідженнях теорії динамічних систем. Дослідження в цьому напрямку стають математичною основою для синергетики – науки про самоорганізацію складних систем.

У галузі функціонального аналізу зусилля вчених були зосереджені на важливих для математичної фізики напрямах, пов'язаних зі спектральною теорією операторів і теорією узагальнених функцій. В галузі теорії груп та лінійної алгебри на цей час було вивчено і описано важливі види неабелевих періодичних груп.

У 1988 році Інститут математики очолив академік А. М. Самойленко – провідний український вчений у галузі теорії диференціальних рівнянь. Інститут математики на сучасному етапі складається з 17 відділів: диференціальних рівнянь і теорії коливань (завідувач А. М. Самойленко); випадкових процесів (М. І. Портенко); функціонального аналізу (Ю. М. Березанський); диференціальних рівнянь з частинними похідними (М. Л. Горбачук); динаміки й стійкості багатовимірних систем (І. А. Луковський); аналітичної механіки (В. М. Кошляков); математичної фізики (Ю. Г. Кондратьєв); нелінійного аналізу (І. В. Скрипник); динамічних систем (О. М. Шарковський); теорії функцій (О. І. Степанець); теорії наближень (М. П. Корнійчук); математичних методів у статистичній механіці (Д. Я. Петрина); обчислювальної математики (В. Л. Макаров); топології (В. В. Шарко); комплексного аналізу (П. М. Тамразов); алгебри (А. В. Ройтер); прикладних досліджень (А. Г. Нікітін).

За 85 років існування Академії наук в Україні у її складі (за спеціальністю математика) було 34 дійсних членів і 35 членів-кореспондентів [350]. Персональний склад НАН України (математичні науки) за 1918 –2003 р. є таким.

Дійсні члени (академіки): Ю. М. Березанський, С. Н. Бернштейн, М. М. Боголюбов, В. М. Глушков, Б. В. Гнєденко, Д. О. Граве, Ю. Л. Далецький, І. І. Данилюк, Ю. М. Єрмольєв, І. М. Коваленко, М. П. Корнєйчук, В. С. Королюк, М. П. Кравчук, М. М. Крилов, М. О. Лаврентьєв, Я. Б. Лопатинський, І. О. Луковський, І. І. Ляшко, В. О. Марченко, Ю. О. Митропольський, О. С. Парасюк, Л. А. Пастур, О. В. Погорєлов, Г. В. Пфейффер, В. Л. Рвачов, В. Н. Редько, А. М. Самойленко, І. В. Сергієнко, Д. М. Синцов, А. В. Скороход, І. В. Скрипник, В. А. Стєклов, О. Ю. Шмідт, Й. З. Штокало.

лювальної математики і створенню обчислювальних машин. У 1956 р. в лабораторії обчислювальної математики і техніки Інституту математики АН УРСР почалися роботи щодо створення універсальної обчислювальної машини "Київ". Успішний розвиток цієї лабораторії привів до створення спочатку Обчислювального центру АН (1958), пізніше, в 1962 р. , Інституту кібернетики АН, який очолив В. М. Глушков.

З 1958 р. директором Інституту математики став академік Ю. Митропольський – видатний український вчений у галузі теорії коливань і теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Основний напрям дослідження ученого – теорія коливань і нелінійна механіка, розробка методів Крилова-Боголюбова, а також якісна теорія диференціальних рівнянь. Його праці є фундаментальним внеском у розвиток математичних методів нелінійної механіки, теорії нелінійних коливань і математичної фізики. Зокрема, він створив алгоритм побудови асимптотичних розвинень нелінійних диференціальних рівнянь, які описують нестаціонарні коливальні процеси, розробив метод дослідження одночастотних процесів в коливальних системах з багатьма ступенями вільності, дослідив системи нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси в гіроскопічних і сильно нелінійних системах тощо.

На 1959–1979 рр. можна виділити такі результати математичних досліджень. В теорії нелінійних диференціальних рівнянь і нелінійних коливань встановлено загальні закономірності побудови асимптотичних методів нелінійної механіки, розвинута математична теорія багаточастотних коливань. Асимптотичні методи поширені на широкий клас рівнянь у частинних похідних, на рівняння з аргументом, що відхиляється. На основі теоретико-групового підходу розроблено метод асимптотичного розщеплення диференціальних систем. Отримано низку результатів в якісній теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. Основними галузями досліджень з алгебри стали теорія груп і лінійна алгебра.

У 80–х роках XX ст. пріоритетними для фундаментальних досліджень стають такі напрямки: асимптотичні і якісні методи в теорії нелінійних диференціальних рівнянь (зокрема, рівнянь у частинних похідних і теорії нелінійних коливань), аналітичні методи теорії випадкових процесів, функціональний аналіз, теорія наближення функцій, динаміка і стійкість спеціальних багатовимірних систем.

До значних результатів слід віднести: розробку строгої аксіоматики асимптотичних методів, нові фундаментальні теореми щодо обґрунтування асимптотичних методів дослідження багаточастотних коливних і хвильових

Й. З. Штокало.

Члени-кореспонденти: Н. І. Ахієзер, О. А. Борисенко, Й. І. Гіхман, М. Л. Горбачук, В. К. Дзядик, В. Г. Дрінфельд, В. Є. Дяченко, О. М. Ковальов, М. Г. Крейн, В. Л. Макаров, В. С. Мельник, В. П. Моторний, М. Х. Орлов, Й. В. Островський, М. О. Перестюк, Д. Я. Петрина, Г. М. Положій, М. І. Портенко, Б. Й. Пташник, Є. Я. Ремез, О. Я. Савченко, Ю. І. Самойленко, Ю. С. Самойленко, Ю. Д. Соколов, О. І. Степанець, А. О. Стогній, Ю. Г. Стоян, Г. Д. Суворов, П. Ф. Фільчаков, В. І. Фущич, С. М. Черніков, А. О. Чикрій, О. М. Шарковський, І. Я. Штаєрман, М. Й. Ядренко.

Опрацюванням нової філософії освіти, методології і теорії її змісту, а також процесу навчання в різних типах навчальних закладів опікується Академія педагогічних наук України. Як вища галузева державна наукова установа Академія педагогічних наук України була створена в 1992 році. Загальна чисельність членів АПН України становить 128 чол., з них 47 дійсних членів, 81 член-кореспондент і 12 іноземних члени. Дійсними членами академії та її член-кореспондентами є відомі математики-педагоги: М. І. Шкіль, М. І. Жалдак, М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, А. Ф. Верлань.

Потужними осередками розвитку математичної науки і освіти в Україні є також класичні, технічні, педагогічні та інші університети. В їх стінах під керівництвом провідних математиків через аспірантуру і докторантуру відбувається підготовка і формування науковців-математиків.

РОЗДІЛ 5

ВЧЕНІ-МАТЕМАТИКИ НПУ ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА ТА ЇХ ВНЕСОК У РОЗВИТОК МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

5.1. ЕВОЛЮЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ КАФЕДР УНІВЕРСИТЕТУ

Провідна роль у підготовці фахівців з математики відводиться вищим навчальним закладам. Значне місце у цьому процесі відіграє НПУ імені М. П. Драгоманова. У його стінах працювали і виховувалися фахівці з математики і методики математики світового рівня.

У перших роках існування цього навчального закладу, колишнього Київського вищого інституту народної освіти імені М. П. Драгоманова (КІНО) математичних кафедр не існувало. Тепер це здається незрозумілим: вищий навчальний заклад без кафедр. Але треба врахувати тодішні умови, в яких він починав роботу.

Протягом трьох років, що передували створенню КІНО, відбулися: тривала світова війна, Лютнева революція, розвал Російської імперії, громадянська війна, Жовтнева революція, червоний терор, голод, безробіття, тиф. Влада в багатьох регіонах України мінялась до десятка разів. Боротьба між монархістами, анархістами, націоналістами, соціалістами, білими, червоними, зеленими, різними озброєними загонами і сотнями ватаг бандитів. В результаті в Україні виявились сотні тисяч а може й мільйони сиріт, бездомних дітей. Для них потрібно було створювати не стільки школи, скільки дитячі комуни, колонії.

З початку 1920 року в Україні починається реорганізація вищих навчальних закладів, яка передбачала, зокрема, підготовку педагогів у відповідності з вимогами нової радянської освіти. Ре-

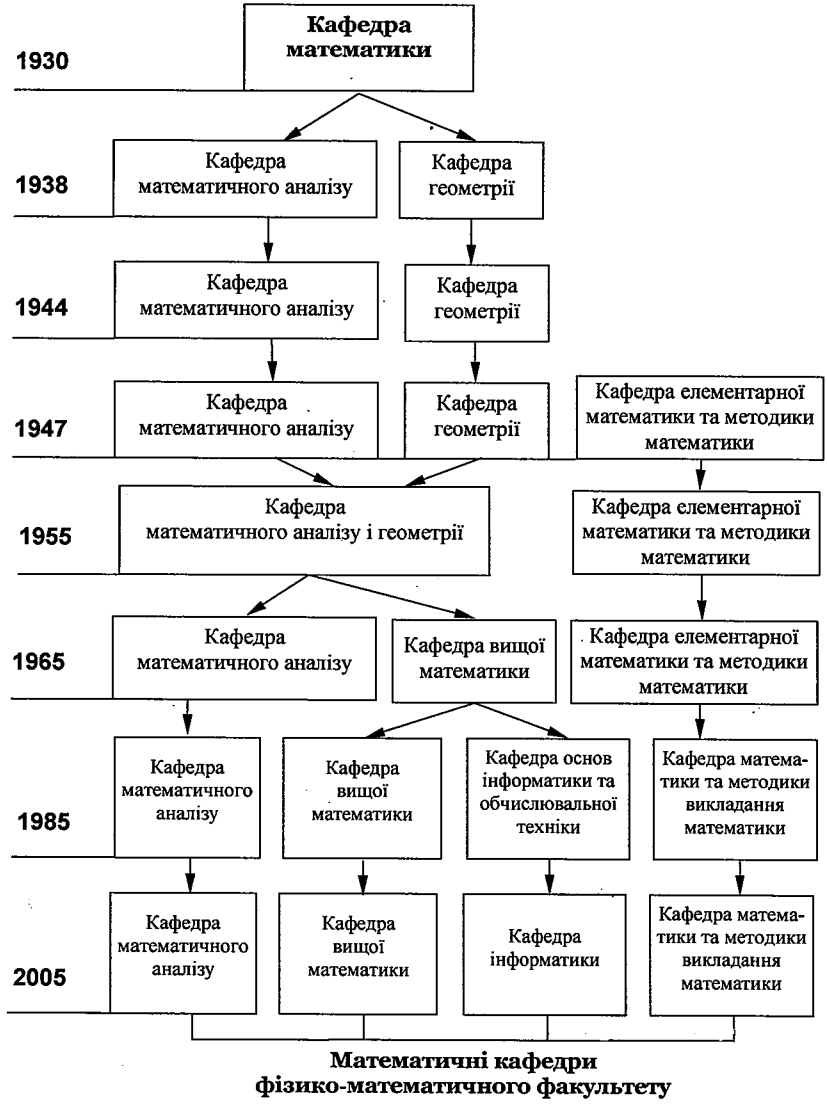


Схема 5. Еволюція математичних кафедр

форма освіти визначалася завданнями будівництва єдиної трудової школи (від початкової до вищої) і вимагала будувати навчальний процес у вищій школі на основі впровадження принципів професіоналізації і технізації. Молода влада не мала наміру повертатися до творення шкіл та інших навчальних закладів, які існували за старого режиму. Пропонувалося створювати нові школи – без колишніх навчальних дисциплін. В перші роки існування радянських шкіл школярі не вивчали математики, фізики та інших навчальних предметів, а опрацьовували спочатку комплекси, а потім проекти. В школах не було математики як окремого навчального предмета, а в інституті не існувало математичних кафедр. Але відомі математики і математики-методисти працювали.

КІНО створено в 1920 р. Першим ректором інституту був М. І. Лобода – представник старих кадрів, який ратував за творення інституту на зразок дореволюційних університетів. Проректором новоствореного інституту і одним із найактивніших організаторів був К. Ф. Лебединцев. Він відстоював ідею педагогізації, як того вимагали нові часи. К. Ф. Лебединцев читав у КІНО лекції з вищої математики і методики математики, був також деканом двох факультетів: соціального виховання і професійної освіти.

Лекції з математики в цей час читали також відомі вчені О. М. Астряб, Б. Я. Букреєв, Д. О. Граве, М. П. Кравчук, М. М. Крилов. Продовжуючи кращі університетські традиції, ці вчені закладали основи підготовки не тільки вчительських кадрів, а й спеціалістів у галузі математики. Вони також проводили активну наукову роботу з математики.

В 1930 році відбувається чергова реорганізація КІНО, під час якої створюється перша кафедра математики. З цього часу наукова і навчальна діяльність з математики в інституті (а тепер університеті) проводилась і проводиться через математичні кафедри. Процес розбудови математичних кафедр можна прослідкувати за допомогою схеми 5.

Математичні кафедри ведуть свою історію від кафедри математики, створеної у 1930 році. Її очолювали М. П. Кравчук (1930–1937) і Є. Я. Ремез (1937–1938).

Організатором і першим завідуючим першої кафедри математики в інституті був видатний український математик, один з творців української математичної термінології, академік **Михайло Пилипович КРАВЧУК.**

Народився Михайло Пилипович 12 жовтня 1892 року в селі Човниці поблизу Луцька в родині землеміра. Початкову освіту здобув удома, середню – в Луцькій гімназії, а вищу – на математичному відділенні фізико-математичного факультету університету Св. Володимира.

Після закінчення в 1914 році університету М. П. Кравчука залишають при університеті для підготовки до наукової і викладацької діяльності. Майже рік він удосконалював свої знання в Москві. В 1917 р. успішно склав магістерський екзамен, прочитав випробувальні лекції і отримав звання приват-доцента Київського університету. Відтоді починається його педагогічна праця. Він читає лекції з різних математичних дисциплін у Київських вищих і середніх навчальних закладах: університеті, архітектурному, політехнічному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах, інституті народного господарства, електротехнічній школі тощо. В 1930 р. М. П. Кравчук організував і очолив кафедру математики у Київському інституті соціального виховання (з 1933–педагогічному), якою керував до кінця 1937 р. Багато уваги Михайло Пилипович приділяв також і середній школі. Він мав власний педагогічний досвід шкільного вчителя, готував і рецензував підручники, методичні статті з питань шкільної освіти, був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.). Після утворення у 1933–1934 р. Інституту математики ВУАН він до осені 1937 р. очолював відділ математичної статистики.

М. П. Кравчук був палким патріотом, мав активну громадянську позицію. Великий внесок зробив у розвиток української математичної термінології. Д. О. Граве називав його піонером викладання математики українською мовою у вищих школах Києва. Яскравим виявом глибокого патріотизму була відмова М. П. Кравчука від запрошення Асоціації американських математиків продовжити наукову діяльність у США.

Напружену організаційну і педагогічну діяльність він суміщав з багатогранною науковою творчістю. В 1924 р. захистив докторську дисертацію на тему "Про квадратичні форми та лінійні перетворення", в якій глибоко дослідив теорії комутативних матриць і квадратичних форм, узагальнив і спро-

стив основні задачі з теорії квадратичних і білінійних форм, а також розв'язав низку нових задач з теорії лінійних перетворень.

У1925 р. М. П. Кравчук отримує звання професора, його обирають дійсним членом НТШ, а в 1929 р. – дійсним членом ВУАН. Він був також членом багатьох зарубіжних математичних товариств. Михайло Пилипович був надзвичайно ерудованою, всебічно освіченою людиною, вільно володів кількома іноземними мовами – французькою, німецькою, італійською, польською та іншими.

Вражає широта наукових інтересів вченого. Він здійснював дослідження і одержував вагомі результати з алгебри, математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії лінійних перетворень, теорії ортогональних многочленів, теорії функцій, теорії ймовірностей та математичної статистики, наближених обчислень. Роботи М. П. Кравчука з теорії наближеного розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь сприяли активному застосуванню варіаційних методів до наближеного розв'язування різних задач прикладної математики й фізики. В теорії ймовірностей він одержав фундаментальні результати, пов'язані з біноміальним розподілом, та ввів многочлени цього розподілу. Серед друкованих праць видатного математика є роботи з філософських питань математики, статті про роль математики в розвитку економіки, біології. Непересічними є його дослідження з історії математики, зокрема, такі роботи, як „Вплив Ейлера на дальший розвиток математики", „Математика та математики в Київському державному університеті".

23 серпня 1937 р. академіка М. П. Кравчука арештовано. Його звинуватили в українському буржуазному націоналізмі та шпигунстві і винесли жорстокий вирок: тюремне ув'язнення строком на 20 років. 9 березня 1942 р. М. П. Кравчук помирає в концтаборі на Колимі.

В 1956 р. видатного вченого реабілітовано, але тільки у 1992 р. його ім'я і наукові здобутки зайняли заслужене почесне місце у скарбниці українського народу. Після довгих років забуття наукова спільнота України та світу широко відзначила 100–річчя від дня народження М. П. Кравчука. Його ім'я було занесено до Міжнародного календаря ЮНЕСКО видатних діячів науки і культури. На його честь в Національному технічному університеті України "КПІ" щорічно відбуваються Міжнародні наукові конференції, участь у яких беруть вчені з різних міст України та багатьох зарубіжних країн. Завдяки фінансовому сприянню УВАН у США у 2002 р. видано "Вибрані математичні праці" М. П. Кравчука. Ця величезна книга (майже 800 велико-

ния дифференциальных уравнений с оценкой точных границ допущенных погрешностей".

Педагогічна діяльність Є. Я. Ремеза була достатньо різноманітною. Він працював у гірничому технікумі ім. Артема (в якості доцента кафедри математики), штатним професором і завідуючим кафедрою вищої математики у Київському гірничому інституті (1928, 1930, 1930–1935). Деякий час Є. Я. Ремез двічі працював у Київському університеті (1928–1930, 1935–1938).

В 1930–1933 р. працював у Київському інституті соціального виховання, в 1933–1935 в Київському педагогічному інституті. З 1935 р. працював старшим науковим співробітником Інституту математики АН УРСР, одночасно в 1937–1955 р. – завідувачем кафедри Київського педагогічного інституту.

З моменту організації в системі Академії наук в 1934 р. Інституту математики, Є. Я. Ремез був запрошений до складу його наукових співробітників і продовжував працювати там до 1975 р. У 1936 році Є. Я. Ремезу без захисту дисертації присуджено ступінь доктора фізико-математичних наук, а в 1938 р. ВАК затвердила його в званні професора. У 1939 році його обрали член-кореспондентом АН УРСР.

За час своєї більш ніж 45–річної наукової діяльності Є. Я. Ремез написав 3 монографії, біля 70 наукових статей, 2 підручника, біля 20 статей науково-методичного характеру і 11 історико-математичних досліджень, присвячених науковому спадку М. В. Остроградського.

Є. Я. Ремез приділяв багато уваги також вихованню наукових кадрів. Під його керівництвом підготовлено та захищено більш ніж 15 дисертацій (Б. І. Коренблюм, Є. Є. Вікторовський, С. С. Калиновська, Т. Г. Езрохи, В. Т. Гаврилюк, В. Д. Коромисличенко та ін.).

Помер Є. Я. Ремез 31 серпня 1975 р.

В 1938/39 навчальному році кафедру математики було поділено на дві кафедри – математичного аналізу і геометрії. Першу кафедру, як і раніше, очолював Є. Я. Ремез. Керівництво другою кафедрою доручили професору О. С. Смогоржевському.

Олександр Степанович СМОГОРЖЕВСЬКИЙ народився 6 березня 1896 р. в с. Лісові Берлинці на Вінниччині. У 1916 р. закінчив із золотою медаллю Немирівську гімназію і вступив на фізико-математичний факультет Одеського університету. У 1918–1930 р. працював учителем математики у школах різних сіл Вінницької області. В 1929 р. екстерном закінчив Київський інститут народної освіти. О. С. Смогоржевський двічі вступав і був зара-

форматних сторінок) містить докторську дисертацію, монографію "Застосування способу моментів до розв'язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь", 39 наукових статей та інші публікації вченого. Шану пам'яті і слави визначному українському математику XX сторіччя віддали Київські політехніки, відкривши 20 травня 2003 р. на території НТУУ "КПІ" пам'ятник академіку.

Наукова спадщина М. П. Кравчука (понад 180 друкованих праць) набула всесвітнього визнання і широкого використання. На сторінках наукових видань дотепер зустрічаємо усталені терміни: многочлени Кравчука, моменти Кравчука, осцилятори Кравчука.

Американський винахідник першого електронного комп'ютера Джон Атанасов у 1937–1940 роках використовував у роботі над своїм винаходом роботи М. П. Кравчука. Він переклав англійською двотомну монографію українського математика і звертався до нього листом: "Ваша серія публікацій з наближеного розв'язування диференціальних рівнянь виявилася дуже корисною у моїй роботі. Я хотів би отримати копії будь-яких публікацій, що Ви маєте...". Про це свідчать матеріали з архівів Смітсонівського Музею американської історії у Вашингтоні та університету штату Айова в Еймсі, які віднайшов і опрацював І. Качановський (США) і про які він повідомив на IX конференції, присвяченій пам'яті академіка М. П. Кравчука у 2002р.

З вересня 1937 р. кафедру математики очолив член-кореспондент АН УРСР, професор **Євген Якович РЕМЕЗ.**

Народився Євген Якович 17 лютого 1896 р. в м. Мстиславлі Могилівської області. В 1916 році з золотою медаллю закінчив Мстиславльську гімназію. З 1916 по 1919 рік навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету спочатку у Харківському, а потім у Київському університеті. З грудня 1920–го по 1923 рік працював викладачем математики школи другого ступеню (с. Шамово, Мстиславльського повіту, Могилівської губернії). Після закінчення в 1924 р. Київського університету, який на ту пору було перетворено в Київський Інститут Народної Освіти (КІНО), Є. Я. Ремез працював протягом трьох років (1925–1928 р.) викладачем математики в 3–й механічній профшколі м. Києва. З 1925 р. читав лекції з математичного аналізу, інтегрування диференціальних рівнянь та диференціальної геометрії в КІНО. Паралельно з цим був аспірантом при ВУАН і по закінченню аспірантури в 1929 р. успішно захистив дисертацію на ступінь наукового співробітника на тему „Некоторые методы численного интегрирова-

хований на навчання до університету (Одеського (1916) і Київського (1925)), але спочатку військова служба, а пізніше важке матеріальне становище не дозволили йому навчатися більше, ніж півроку. Працюючи вчителем у сільській школі, він за півтора року – з грудня 1927 р. і до червня 1929 р. включно, склав екстерном іспити за весь курс фізико-математичного факультету, всього понад 40 іспитів.

З 1930 р. О. С. Смогоржевський працював у Київському політехнічному інституті та інших навчальних закладах Києва. У 1934–37 рр. був науковим співробітником Інституту математики. З 1938 р. завідував кафедрою геометрії Київського педагогічного інституту, де читав аналітичну геометрію, проективну геометрію та основи геометрії, керував аспірантами. Кілька років викладав основи геометрії у Київському університеті.

У 1938 р. О. С. Смогоржевському було присвоєно звання професора, а у 1945 р. він захистив дисертацію на тему „Функции Грина линейных дифференциальных и квазидифференциальных систем в одномерной области" і здобув учений ступінь доктора фізико-математичних наук.

Велику увагу О. С. Смогоржевський приділяв створенню навчальних та методичних посібників для студентів. Ним написано самобутній, один із кращих підручник для університетів та педагогічних інститутів „Основи геометрії" (1947 р.).

Олександр Степанович завжди цікавився питаннями шкільної математичної освіти, мав численні методичні публікації. Він працював у відділі методики математики Українського науково-дослідного інституту педагогіки і був співавтором класичної праці з методики математики, широко відомої не лише в Україні, а й за її межами: „Методики розв'язування задач на побудову в середній школі" (1940 р.).

У творчому доробку О. С. Смогоржевського є історико-математичні дослідження. Він – автор огляду робіт вітчизняних математиків в області елементарної геометрії, статей про розвиток геометричних ідей Лобачевського, біографічних нарисів про М.І. Лобачевського, Б.Я. Букреєва, О. М. Астряба.

О. С. Смогоржевському належить понад 80 друкованих праць. Деякі з них перекладені на чеську, англійську, болгарську, японську та інші мови.

Під керівництвом О. С. Смогоржевського було виконано 16 кандидатських дисертацій з конструктивної геометрії, топології, методики викладання геометрії.

Помер О. С. Смогоржевський 7 травня 1969 р., залишивши по собі великий науковий та методичний спадок.

З 1955–1965 р. функціонувала об'єднана кафедра математичного аналізу й геометрії (завідуючі – І. М. Рапопорт, С. Ф. Фещенко, М. О. Давидов).

Ілля Маркович РАПОПОРТ народився 26 липня 1913 р. в Петербурзі в родині юриста. В 1914 р. переїхав з мамою до Києва. В 1928 р., після закінчення семирічки, вступив у Київський будівельний технікум, де навчався до 1931 року. В 1931–1934 роках працював старшим техніком в Українському державному інституті проектування доріг і мостів. У 1934 р. вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету, який закінчив з відзнакою у 1938 р.

Ще в 1937 р., будучи студентом, Ілля Рапопорт опублікував 4 наукові роботи загальним обсягом 4 друковані аркуші. В Студентських наукових працях Київського університету побачили світ його статті: "Зведення інтерполяційного полінома Ньютона до виду, зручного для обчислень" і "Про геометричне дослідження Ейлерового випадку руху твердого тіла", а в Журналі ІМ АН УРСР ще дві: "Про згини криволінійних стрижнів" і "Обернена задача варіаційного числення".

В 1938–1939 р. Ілля Маркович навчався в аспірантурі в Інституті математики АН УРСР, закінчив її достроково і, захистивши дисертацію, отримав учений ступінь кандидата фіз.-мат. наук. В 1939–1941 роках працював на посаді в. о. доцента Київського державного університету і одночасно перебував у докторантурі в ІМ АН УРСР.

1941–1946–служба в армії (1941–1942–в частинах Південно-Західного та Воронежського фронтів, а з 1943 в Науково-дослідній лабораторії артилерійського приладобудування в Москві). В 1943 р. нагороджений орденом "Красной звезды", а в 1945 медаллю "За участие в ВОВ".

У 1947 р. на Вченій Раді Артилерійської Академії ім. Ф. Дзержинського захистив докторську дисертацію і в1949 р. отримав науковий ступінь доктора технічних наук.

Після демобілізації у 1947 р. повернувся в Київ і почав працювати в ІМ АН УРСР старшим науковим співробітником. В 1952 р. отримав вчене звання старшого наукового співробітника за спеціальністю "Диференціальні рівняння". З 1954 р. за сумісництвом працював у КДПІ ім. О. М. Горького: старшим викладачем кафедри методики математики, завідуючим кафедрою математичного аналізу і геометрії, професором тієї ж кафедри.

У 1958 р. перейшов на постійну роботу в Москву, залишивши за собою в КДПІ ім. О. М. Горького керівництво аспірантами.

С. Ф. Фещенко був керівником і безпосереднім виконавцем значного числа прикладних пошукових досліджень на потреби військово-оборонного комплексу країни. Очолюваний ним відділ в Інституті математики займався розробкою математичних моделей з динаміки рухомих тіл ракетно-космічного призначення. Результати наукової діяльності відділу були викладені в двох монографіях Степана Федоровича, написаних у співавторстві з учнями та колегами: „Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях" (І. О. Луковський, В. А. Троценко, С. Ф. Фещенко; 1968 р.); „Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях" (С. Ф. Фещенко, І. О. Луковський, Б. І. Рабінович, Л. В. Докучаєв; 1969 р.).

Під науковим керівництвом С. Ф. Фещенка було захищено 21 кандидатську дисертацію, у тому числі 12 – аспірантами Київського педінституту. Чотири його вихованці стали докторами наук. Список опублікованих наукових праць С. Ф. Фещенка налічує 91 назву, серед них 5 монографій.

Помер Степан Федорович 24 жовтня 1981 р.

У 1960 році завідувачем кафедри математичного аналізу і геометрії був призначений доктор фізико-математичних наук М. О. Давидов.

Народився **Микола Олексійович ДАВИДОВ** 11 травня 1917 року в селі Лазарево Ржевського району Тверської (нині Калінінської) губернії Росії в родині робітника і селянки. До 1933 р. закінчив початкову школу і ФЗС. В 1933–1936 роках навчався в Ржевському педагогічному технікумі, а в 1936–1940 на фізико-математичному факультеті Калінінського державного педагогічного інституту імені М.М. Калініна. Закінчивши з відзнакою інститут, він залишається там асистентом на кафедрі математичного аналізу. З вересня 1940 року Микола Олексійович – аспірант кафедри математичного аналізу Калінінського державного педагогічного інституту імені М. М. Калініна. Навчання в аспірантурі перервала війна, під час якої він перебував на службі у діючій армії.

Після демобілізації з армії М. О. Давидов продовжив до 1949 р. навчання в аспірантурі. В 1949 р. захистив дисертацію і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук, а в 1951 р. звання доцента кафедри математичного аналізу.

З 1948 по 1960 рік Микола Олексійович працював на кафедрі математичного аналізу Калінінського державного педагогічного інституту імені М. М. Калініна на посадах: асистента, старшого викладача, доцента,

В 1957–1959 роках кафедру математичного аналізу і геометрії очолював С. Ф. Фещенко.

Степан Федорович ФЕЩЕНКО народився 13 березня 1903 р. у місті Чорнобилі під Києвом у багатодітній сім'ї селянина-рибалки. Початкову освіту отримав у церковно-приходській школі. Потім закінчив єдину трудову школу другого ступеня. Після трьох років роботи сільським вчителем у 20–річному віці вступив до Київського інституту народної освіти, де навчався спочатку на робфаці, а пізніше – на фізико-математичному відділенні факультету професвіти. По закінченні у 1929 р. інституту працював викладачем фізики та математики педтехнікуму в Корсуні. Наступного року вступив до аспірантури КІНО за фахом "математична фізика", а в 1934 р. – до аспірантури підвищеного типу при щойно створеному Інституті математики АН УРСР, де під керівництвом академіка Д. О. Граве займався теорією диференціальних рівнянь та спеціальними функціями.

З Інститутом математики та Київським педагогічним інститутом, головним чином, пов'язана вся подальша наукова і педагогічна діяльність С. Ф. Фещенка. В Інституті математики він займав посаду молодшого (з 1935 р.) і старшого (з 1941 р.) наукового співробітника. В 1959–1964 р. завідував лабораторією, а в 1965–1976 – відділом в Інституті математики.

В педагогічному інституті він працював з 1931 р. і до кінця свого життя, пройшовши шлях від асистента до професора і завідуючого кафедрою. Понад 50 років він викладав майбутнім учителям загальні математичні курси, методи математичної фізики, теоретичну механіку, теорію функцій комплексної змінної.

В 1942 р. , перебуваючи в евакуації у складі Академії наук УРСР у Башкирії, Степан Федорович захистив кандидатську дисертацію, а в 1945 р. отримав звання доцента. В 1951 р. захистив докторську дисертацію і в 1955 р. отримав звання професора.

В кінці 30–х років Степан Федорович почав працювати над проблемами небесної механіки. Результатом цієї роботи стала кандидатська дисертація. Це дослідження С. Ф. Фещенка було високо оцінене членом-кореспондентом АН УРСР М. М. Боголюбовим, після чого започаткувалося їх плідне співробітництво. Під впливом М. М. Боголюбова Степан Федорович захопився новою для нього тематикою – застосуванням асимптотичних методів в теорії інтегрування диференціальних рівнянь із змінними та повільно змінними коефіцієнтами. Дослідження з цієї проблематики склали основу його докторської дисертації.

в.о. професора, завідуючого кафедрою. З 1952 по 1956 рік за сумісництвом він працює начальником кафедри вищої математики Військової академії тилу і постачання Радянської Армії. В 1959 р. успішно захищає докторську дисертацію і Вчена рада Московського державного університету одностайно присуджує йому найвищий вчений ступінь – доктора фізико-математичних наук. В 1960 р. він отримує наукове звання професора.

В 1960 р. М. О. Давидов поступає (за конкурсом) на роботу в КДПІ імені О. М. Горького. Тут він працював в 1960–1965 р. завідуючим кафедрою математичного аналізу і геометрії. В 1965 р. кафедра математичного аналізу виділилася в окрему структурну одиницю і М. О. Давидов очолював її до 1989 р.

Професор М. О. Давидов багато років керував Республіканським семінаром з теорії підсумовування розбіжних рядів і підготовкою наукових кадрів в аспірантурі. Успішно захистили кандидатські дисертації його учні – Г. О. Михалін і М. М. Білоцький. Результатом його наукової і науково-методичної діяльності стали понад 80 друкованих праць. Серед них підручники і задачники, якими викладачі і студенти вищих закладів освіти користуються до цього часу: "Курс математичного аналізу" (у трьох частинах) і "Сборник задач по математическому анализу" (у співавторстві).

Помер М. О. Давидов 4 серпня 1998 р.

З 1989 р. кафедру математичного аналізу очолює дійсний член АПН України та АН Вищої школи України, іноземний член Російської академії освіти, доктор фізико-математичних наук, професор М. І. Шкіль.

Народився **Микола Іванович ШКІЛЬ** у 1932 р. в селі Бурбино Семенівського району на Полтавщині. В1951 р. закінчив Худоліївську середню школу. З 1951 навчався на фізико-математичному факультеті Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького, який закінчив з відзнакою у 1955 р. В цьому ж році почав працювати вчителем математики Розкішанської середньої школи. В 1955–1958 р. навчався в аспірантурі при кафедрі математичного аналізу КДПІ імені О.М.Горького.

У 1959 році М. І. Шкіль захистив кандидатську дисертацію на тему: "До питання про асимптотичне зображення розв'язків систем диференціальних рівнянь, які містять параметр" і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. У1962 р. йому присвоєно вчене звання доцента.

У 1968 році захистив докторську дисертацію на тему: "Про деякі асимптотичні методи в теорії лінійних диференціальних рівнянь з повільно змін-

ними коефіцієнтами". В 1969 р. йому присвоєно науковий ступінь доктора фізико-математичних наук, а в 1970 р. – вчене звання професора.

З 1958 р. Микола Іванович працює асистентом, старшим викладачем, доцентом, професором і завідуючим кафедр вищої математики, алгебри і геометрії та математичного аналізу, деканом загальнонаукового і фізико-математичного факультету.

У 1971–1973 р. професор М. І. Шкіль займав посаду проректора з наукової роботи. А починаючи з 1973 р. впродовж 30–ти років очолював педагогічний інститут, який з 11 липня 1997 р. став Національним педагогічним університетом імені М. П. Драгоманова.

У 1982 році професор М. І. Шкіль обраний членом-кореспондентом, а у 1990–му – дійсним членом АПН СРСР. З 1991 року він – дійсний член АПН України, член Російської академії освіти, дійсний член АН ВШ України, Почесний академік Міжнародної кадрової академії, а також почесний доктор і професор багатьох провідних ВНЗ України. В 1999 році Миколу Івановича Шкіля було визнано Людиною року (США, Американський біографічний інститут).

Наукові дослідження М.І. Шкіля присвячені розробці асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем. Результати наукових досліджень представлені у більш ніж 350 наукових працях, зокрема в 10 монографіях, 22 підручниках та посібниках. Монографію "Асимптотичні методи в теорії лінійних диференціальних рівнянь", написану М. І. Шкілем у співавторстві з С. Ф. Фещенком і Л. Д. Ніколенко, в 1967 році було видано англійською мовою в США (Asymptotic methods in the theory of linear differential equations. – New-York, 1967. – 267 p.).

За цикл робіт "Розвиток аналітичних і асимптотичних методів розв'язання диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь і їх застосування до задач математичної та теоретичної фізики" в 1990 році його відзначено премією НАН України імені академіка М. М. Крилова. У 2004 році за цикл праць "Асимптотична теорія лінійних сингулярних диференціальних рівнянь" М. І. Шкілю була присуджена премія НАН України імені М. В. Остроградського.

За комплект підручників "Вища математика" (у трьох книгах) і "Математичний аналіз" (у двох частинах) М. І. Шкілю Указом Президента України в 1996 році присуджено Державну премію в галузі науки і техніки. Премію АПН України отримав підручник "Алгебра і початки аналізу" для 10 класу шкіл і класів з поглибленим вивченням математики.

саду завідуючого кафедрою основ інформатики і обчислювальної техніки.

В 1990 р. захистив у Науково-дослідному інституті змісту і методів навчання АПН СРСР (м. Москва) докторську дисертацію на тему: "Система подготовки учителя к использованию информационной технологии в учебном процессе" і отримав науковий ступінь доктора педагогічних наук.

В 1991 р. отримав звання професора. З 1992 р. – член-кореспондент АПН України, з 1995 р. – дійсний член (академік) АПН України.

Під його керівництвом підготовлено і захищено більше 20 кандидатських і дві докторські дисертації. Він керівник наукової школи "Проблеми інформатизації навчального процесу в школі та вищому педагогічному закладі".

Досліджує проблеми комп'ютерно-орієнтованих систем навчання природничих дисциплін в середніх і вищих педагогічних навчальних закладах. Читає лекції з обчислювальної математики, теорії ймовірностей, інформатики.

М. І. Жалдак автор біля 200 наукових праць, з яких понад 50 книг і брошур. Серед них навчальні посібники для педагогічних вищих навчальних закладів ("Чисельні методи математики", "Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології", "Інформатика") і посібники для вчителів ("Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою", "Комп'ютер на уроках математики", "Комп'ютер на уроках геометрії", "Математика з комп'ютером", "Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою"), підготовлені у співавторстві з членами кафедри основ інформатики.

М. І. Жалдак разом з учнями Ю. В. Горошком, О. В. Вітюком і Є. Ф. Вінниченком створив програмно-методичний комплекс Gran у складі чотирьох посібників та компакт-диску з програмами (GRAN 1, GRAN-2D, GRAN-3D), який досить широко використовується в школах і педагогічних університетах України.

У лютому 1986 р. кафедру вищої математики очолив кандидат фізико-математичних наук, доцент С. С. Левіщенко.

Народився **Сергій Сергійович ЛЕВІЩЕНКО** 5 вересня 1944 року в селі Зубарі Фастівського району на Київщині. Закінчив школу із золотою медаллю і почав працювати рядовим будівельником на Кожанському цукровому комбінаті. Потім було навчання у Київському державному педагогічному інституті імені О. М. Горького, куди він вступив на фізико-математичний факультет. Навчався з великою наснагою, на „відмінно", за що йому було призначено Ленінську стипендію. Після закінчення інституту поїхав працювати в Миронівську

Протягом багатьох років Микола Іванович успішно поєднує наукову роботу з педагогічною, з вихованням наукової зміни. Читає лекційні курси "Математичний аналіз" та "Диференціальні рівняння" для студентів фізико-математичного факультету, керує написанням курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт, науковими дослідженнями аспірантів і докторантів. Він керівник наукової школи "Проблеми наближених методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь". Серед його учнів більше 30 кандидатів і 4 доктори наук.

Микола Іванович Шкіль нагороджений: Дипломом "Кращий освітянин" за 2001 рік, медаллю "200 років від дня народження М. В. Остроградського". Указом Президента йому присвоєно почесне звання "Заслужений діяч науки і техніки".

Кафедру математики у 1965–1968 роках очолював доктор фізико-математичних наук, професор С. Ф. Фещенко, а в 1968–1980 роках – доктор фізико-математичних наук, професор М. І. Шкіль. В 1972–1974 р. вона називалася кафедрою алгебри і геометрії. В 1980 р. кафедру математики очолив М. І. Жалдак.

Народився **Мирослав Іванович ЖАЛДАК** 15 серпня 1937 р. в с. Лазірки Оржицького району Полтавської області.

В 1959 році закінчив механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка. В 1960–1962 р. працював асистентом кафедри вищої математики КВІРТУ м. Київ.

М. І. Жалдак з 1962 р. розпочав науково-викладацьку діяльність у Київському державному педагогічному інституті імені О. М. Горького (нині Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова): аспірант, молодший науковий співробітник науково-дослідної електронно-обчислювальної лабораторії, асистент, старший викладач, доцент, завідуючий кафедрою, професор. В 1965 р. захистив кандидатську дисертацію на тему "О задачах линейного и квадратичного программирования с непрерывно заданными ограничениями" і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук, а в 1970 – вчене звання доцента.

М. І. Жалдак з 1980 по 1985 р. – завідував кафедрою вищої математики. В 1985 році в зв'язку з організацією кафедри основ інформатики та обчислювальної техніки перейшов на посаду доцента цієї кафедри і був призначений заступником завідуючого кафедрою. В 1989 був обраний за конкурсом на по-

середню школу. В 1969 р. вступив до аспірантури при КДПІ ім. О. М. Горького за спеціальністю „Алгебра і теорія чисел". Керував його науковою роботою видатний вчений С. М. Черніков.

З 1972 року Сергій Сергійович – асистент, старший викладач, доцент, кафедри алгебри і геометрії, заступник декана фізико-математичного факультету КДПІ ім. О. М. Горького.

У грудні 1973 с. С. Левіщенко захистив кандидатську дисертацію на тему: "Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса" і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. У квітні 1979 йому присвоїли звання доцента.

У лютому 1986 року С. С. Левіщенка призначили завідувачем кафедри вищої математики, яку він очолював до останніх днів свого життя.

У 1994 році Сергій Сергійович захистив докторську дисертацію на тему: "Группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп" і отримав науковий ступінь доктора фізико-математичних наук. Того ж року йому було присвоєно звання професора.

З 1994 року він запровадив при кафедрі роботу наукового семінару: "Групові структури та гіперкомплексний аналіз на них", яким і керував до 1996 року. С. С. Левіщенко підготував двох кандидатів наук (С. Драганюк, Н. Ю. Верпатова). Був автором понад 70 наукових праць, серед яких підручники і посібники для студентів, якими будуть користуватися ще довгі роки.

С. С. Левіщенко був членом Координаційної ради Української математичної спілки і вченим секретарем Київської математичної спілки.

Помер С. С. Левіщенко в жовтні 1996 р.

З 1 липня 1997 року кафедрою вищої математики завідує М. В. Працьовитий.

Народився **Микола Вікторович ПРАЦЬОВИТИЙ** 1 січня 1960 р. в селі Бахтин Мурованокуриловецького району Вінницької області.

В 1975 р. з відзнакою закінчив Долинянську восьмирічну школу. В 1975–1979 р. навчався у Немирівському педагогічному училищі, закінчив його з відзнакою і отримав кваліфікацію вчителя початкових класів. У 1979 вступив на фізико-математичний факультет КДПІ імені О. М. Горького, який закінчив з відзнакою у 1983 р.

В 1983–1986 р. навчався в аспірантурі Інституту математики НАН України у відділі теорії ймовірностей і математичної статистики. В 1987 р. захистив кандидатську дисертацію зі спеціальності 01.01.05 – теорія ймовірностей

та математична статистика на тему "Сингулярні розподіли з фрактальними носіями канторівського і салемовського типів" і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук. В 1992 р. йому присвоєно вчене звання доцента кафедри вищої математики.

М. І. Працьовитий з 1992 по 1996 р. – докторант Інституту математики НАН України. В 1999 р. захистив докторську дисертацію зі спеціальності 01.01.05–теорія ймовірностей та математична статистика на тему: "Дослідження фрактальних об'єктів аналізу і теорії ймовірностей" і отримав науковий ступінь доктора фізико-математичних наук. В 2003 р. йому присвоєно вчене звання професора кафедри вищої математики. В 2004 р. його обрано академіком АН ВШ України.

З кінця 1986 р. М. В. Працьовитий працює в НПУ імені М. П. Драгоманова: асистентом, доцентом, професором і завідувачем кафедри вищої математики. Читає такі навчальні курси: "Аналітична геометрія", "Диференціальна геометрія і топологія", "Вибрані питання алгебри та геометрії", "Основи геометрії", "Основні структури сучасної математики" (для студентів фізико-математичного факультету) і "Вища математика" (для студентів педагогічно-індустріального факультету); керує написанням курсових, кваліфікаційних та магістерських робіт, а також педагогічною практикою магістрів. Працює над вдосконаленням діючих програм з аналітичної геометрії, диференціальної геометрії, розробив програми з цих дисциплін для заочного відділення спеціальності "Математика". Один з авторів нової концепції і програми державного екзамену з вищої математики для студентів математичних спеціальностей.

Наукові інтереси М. В. Працьовитого лежать в області фрактального аналізу та фрактальної геометрії, метричної та ймовірнісної теорії чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, теорії неперервних ніде не диференційовних функцій, теорії динамічних систем тощо. Він автор понад 150 наукових праць, з яких 2 монографії, більше 100 наукових праць і 50 праць навчально-методичного характеру. Очолює роботу наукового семінару "Фрактальний аналіз та його застосування", який функціонує на кафедрі вищої математики з 1997 року. Під його керівництвом підготовлено і захищено 5 кандидатських дисертації (Г. М. Торбін, О. В. Школьний, О. Л. Лещинський, Я. В. Гончаренко, Л. А. Вотякова).

У 1947 році на фізико-математичному факультеті інституту створено кафедру елементарної математики і методики викладання математики. Пер-

Багатогранною була і громадська діяльність О. М. Астряба як громадянина і як педагога-вченого. Він був депутатом трудящих, головою математичної підсекції науково-методичної ради Міністерства освіти УРСР, членом експертної комісії з математики та теоретичної механіки Головного управління вищих і середніх спеціальних навчальних закладів міністерства культури УРСР, членом редакційної колегії журналу "Радянська школа". За плідну працю О. М. Астряба нагороджено орденом Леніна (1953), присвоєно звання Заслуженого діяча науки УРСР (1944).

Помер О. М. Астряб 18 листопада 1962 р. , залишивши по собі велику наукову і педагогічну спадщину – понад сто статей, підручників, навчальних посібників.

З 1953 по 1971 рік кафедру очолював професор І. Є. Шиманський

Іван Євгенович ШИМАНСЬКИЙ народився 20 січня 1896 р. в селі Кердани на Київщині. У 1915 р. вступив на фізико-математичний факультет Київського університету, але наступного року був призваний в армію. Закінчив університет у 1922 р. Працював сільським учителем, викладав математику у Київському гідромеліоративному та сільськогосподарському інститутах.

У 1938–1941 р. працював доцентом кафедри математики Київського педагогічного інституту. Під час Великої Вітчизняної війни деякий час перебував у лавах Червоної Армії, а потім працював у різних навчальних закладах. У 1944 р. повернувся до Київського педагогічного інституту, де з 1953 по 1971 р. завідував кафедрою елементарної математики і методики математики. У 1947 р. захистив дисертацію на ступінь кандидата педагогічних наук. Звання професора присвоєно у 1964 р.

І. Є. Шиманському належить понад 40 науково-методичних праць. Найважливіші з них стосуються методики викладання математики в школі, зокрема введення поняття дійсного числа за методом суміжних наближень, що його розробив Є. Я. Ремез. У 1960 р. вийшов у світ підручник І. Є. Шиманського „Математичний аналіз", який широко використовується у педагогічних інститутах України.

І. Є. Шиманський був чудовим лектором, читав студентам лекції з математичного аналізу. А основне – він підібрав добрий колектив методистів-математиків і раціонально розставив всіх на потрібних місцях, так що керована ним кафедра стала фактично однією з найкращих кафедр методики математики у всьому СРСР.

Насамперед стараннями професора Шиманського у 1964 р. було органі-

шим її завідуючим став професор О. М. Астряб.

Олександр Матвійович АСТРЯБ народився 4 вересня 1879 р. у м. Лубни Полтавської губернії, в сім'ї учителя. У 1899 р. після закінчення Лубенської гімназії він поступив на фізико-математичне відділення природничо-історичного факультету Київського університету, який закінчив у 1904 р. з дипломом I ступеня.

У 1904–1905 навчальному році О. М. Астряб працював викладачем математики і фізики у Глухівській гімназії. З 1905 р. викладав математику і фізику у київському комерційному училищі М. М. Володкевича, математику і методику математики на вищих жіночих курсах, у народному університеті, на Київських і Лубенських вищих педагогічних курсах.

У 1907 р. він здійснив поїздку до Франції для вивчення стану і особливостей викладання математики у французьких школах. У цьому ж році його обрали дійсним членом Київського фізико-математичного товариства, яке приділяло велику увагу питанням викладання математики в школі. В 1910–1916 р. він працював у комісії Київського навчального округу по складанню проекту програми з математики і фізики для гімназій. В 1912 р. О. М. Астряб брав участь в роботі I Всеросійського з'їзду учителів математики.

У 1922–1925 р. О. М. Астряб читав лекції з математики і фізики на робітничих факультетах Київського політехнічного і Київського сільськогосподарського інститутів, працював на робітничому факультеті при Київському інституті народного господарства і в трудовій школі. З 1925 р. працював доцентом, пізніше професором Київського інституту народної освіти, з 1930 р. – у Київському інституті соціального виховання і Київського фізико-хімико-математичному інституті. У 1936 р. О. М. Астряб очолив відділ методики математики Українського науково-дослідного інституту педагогіки.

У 1941–1942 р. Олександр Матвійович працював професором Астраханського педагогічного інституту, а потім професором Українського об'єднаного університету (створеного в період війни на базі Київського і Харківського університетів), який знаходився в м. Кзил-Орда (Казахстан). Одночасно викладав математику в Кзил-Ординському педагогічному інституті.

Після визволення Києва від фашистських загарбників учений продовжив роботу в Українському науково-дослідному інституті педагогіки і в Київському педагогічному інституті.

Близько двадцяти аспірантів, учителів і робітників педвузів захистили написані під його керівництвом кандидатські дисертації. Сотні вчителів є його учнями.

Насамперед стараннями професора Шиманського у 1964 р. було організовано друкування щорічника, республіканського науково-методичного збірника статей "Методика викладання математики". Відповідальним редактором перших його випусків був Іван Євгенович. В цей же період при кафедрі починає діяти Республіканський науково-методичний семінар, активними учасниками якого були викладачі, науковці, вчителі та аспіранти.

Під керівництвом І. Є. Шиманського захистили кандидатські дисертації з методики викладання математики 16 осіб.

Нагороджений орденами Трудового Червоного Прапора, "Знак пошани" та кількома медалями.

Помер І. Є. Шиманський 7 березня 1982 року.

У 1971–1983 роках кафедрою математики і методики математики керував Г. П. Бевз.

Народився **Григорій Петрович БЕВЗ** 7 лютого 1926 року в селі Війтівка (тепер Родниківка) біля Умані. В 1941 році закінчив семирічку в Кривому Розі, а в 1947 – 10-й клас Уманської СШ № 2 (з срібною медаллю). На мехмат КДУ імені Т. Г. Шевченка його не прийняли, хоча в той час медалістів зараховували на навчання без вступних іспитів і конкурсів. Підвела біографія – не комсомолець, жив на окупованій території, батько репресований, дід розкуркулений. В 1950 році закінчив Уманський учительський інститут, а в 1952 р. – Криворізький педагогічний інститут (з відзнакою). З 1950 року працював учителем математики і фізики в селах Христинівського району.

В 1954 р. Григорій Петрович поступив до аспірантури Київського педагогічного інституту на спеціальність методика викладання математики, науковий керівник Д. М. Маєргойз. Після закінчення аспірантури у 1957 році його направили на роботу старшим викладачем у Криворізький педагогічний інститут. Успішно захистивши в 1961 р. дисертацію на тему "Доведення в шкільному курсі алгебри", отримав науковий ступінь кандидата педагогічних наук і почав працювати на кафедрі математики і методики математики в Київському педагогічному інституті імені О. М. Горького (1962–1971 р. – доцент, 1972–1983 р. – завідувач кафедри, 1983–1993 р. – доцент).

У цей період кафедра стала опорною для всіх кафедр методики математики УРСР, при ній організовано факультет підвищення кваліфікацій методистів-математиків з багатьох республік, а також – оцінювання наукових робіт з методики математики студентів усього СРСР.

Г. П. Бевз – автор понад 200 наукових праць, з яких біля півсотні – під-

ручники і навчальні посібники. Насамперед це "Методика викладання математики", за якою навчалися протягом чверті століття всі майбутні учителі математики України. А ще – підручники для всіх 5–11 класів загальноосвітніх шкіл.

Під його керівництвом продовжував видаватись збірник наукових праць "Методика викладання математики". Водночас велася інтенсивна науково-дослідна робота з основних питань методики математики. Він підготував 20 кандидатів педагогічних наук для України та країн близького і далекого зарубіжжя.

З 1983 по 1992 рік кафедру очолювала професор З. І. Слєпкань, яка працює й нині на посаді професора кафедри.

Народилася **Зінаїда Іванівна СЛЄПКАНЬ** 16 квітня 1931 року в селищі Печенжиця Тотемського району Вологодської області, куди в 1930 р. були вислані із Запорізької області її дід і батьки. В 1939–1949 р. навчалася в школі м. Тотьма. В 1953 р. з відзнакою закінчила фізико-математичний факультет Мелітопольського педагогічного інституту. В 1953–1959 р. працювала асистентом, старшим викладачем кафедри математики Мелітопольського пединституту, а також учителем математики в СШ № 4 м. Мелітополя.

В 1959–1962 р. – аспірантка кафедри математики і методики математики. В рік закінчення аспірантури вона успішно захищає кандидатську дисертацію на тему "Культура тригонометричних обчислень у восьмирічній і середній школах".

В 1962–1965 р. З. І. Слєпкань – старший викладач загальнонаукового факультету Мелітопольського пединституту. З 1965 р. доцент, завідувач кафедри, професор кафедри математики та методики викладання математики НПУ імені М. П. Драгоманова. Крім цього вона одночасно працювала деканом підготовчого відділення педуніверситету імені О. М. Горького (1974–1978), проректором з навчально-методичної роботи (1989–1996).

У 1987 р. в Москві при АПН СССР вона захистила докторську дисертацію на тему "Методическая система реализации развивающей функции обучения математике в средней школе" (у формі наукової доповіді, за сукупністю публікацій). З. І. Слєпкань – перший серед членів кафедри доктор педагогічних наук. Слід відмітити також, що вона – перша жінка в СРСР, яка захистила докторську дисертацію з методики математики.

Протягом багатьох років З. І. Слєпкань успішно поєднує наукову роботу з педагогічною. Читає лекційні курси "Методика навчання математики" та

методичного семінару "Актуальні проблеми методики математики". Керує науковою роботою аспірантів. Під його керівництвом захистили кандидатські дисертації 9 осіб.

В .О. Швець має почесні звання: "Відмінник народної освіти УРСР" і "Відмінник освіти України".

5.2. Розвиток вищої математики вченими університету

Вчені НПУ імені М. П. Драгоманова зробили значний внесок у розвиток різних галузей математики. Крім математичного аналізу, це – алгебра, геометрія, теорія ймовірностей, фрактальний аналіз.

Визначні дослідження в галузі алгебри, математичного аналізу, теорії функцій, інтегрування диференціальних рівнянь та теорії імовірностей зробив **Михайло Пилипович КРАВЧУК.**

Наукові дослідження М. П. Кравчука з алгебри і теорії чисел стосуються питань лінійної алгебри, теорії білінійних форм, теорії квадратичних форм та лінійних перетворень, властивостей коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, розподілів нулів і полюсів аналітичних функцій, одиниць кубічного поля тощо.

Досліджуючи теорію матриць, М. П. Кравчук побудував комутативну кореневу групу, яка містить $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ лінійно незалежних матриць, і довів, що не існує комутативної кореневої групи n-го порядку з більшим числом лінійно-незалежних матриць. Він повністю розв'язав задачу знаходження всіх повних комутативних множин матриць n-го порядку, матриці яких задовольняють рівняння другого степеня.

Розглядаючи структуру перестановочних груп матриць, він показав, що питання про групи перестановочних матриць n-го порядку M_n може бути зведено до випадку, коли у характеристичному рівнянні кожної з матриць всі корені рівні, тобто до випадку елементарної групи перестановочних матриць n-го порядку (P_n).

М. П. Кравчук показав, що кожна група P_n має ядро Q_n, яке задовольняє рівняння $P_n\, Q_n = 0$, і довів, що $P_n = LR_nL^{-1}$, де L – відповідно вибрана матриця другого порядку, а R_n має вигляд

"Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі" для студентів фізико-математичного факультету, керує написанням курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт, а також педагогічною практикою магістрів. Є співавтором "Галузевих стандартів вищої освіти. Математика".

Вона автор понад 200 наукових і методичних праць. Під її керівництвом підготовлено і захищено понад 30 кандидатських і 5 докторських дисертацій.

Зінаїда Іванівна – заслужений працівник народної освіти України. Нагороджена медаллю А. С. Макаренка, відзнакою "Відмінник освіти України", їй присвоєно почесне звання заслуженого працівника народної освіти України.

З 1989 р. кафедрою завідує професор В. О. Швець.

Народився **Василь Олександрович ШВЕЦЬ** 20 січня 1948 року в селі Рогізна Сквирського району Київської області в сім'ї колгоспників.

У 1966 році після закінчення школи поступив на фізико-математичний факультет Чернігівського державного педагогічного інституту ім. Т. Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у 1970 р.

Після служби в армії працював на посаді асистента кафедри вищої математики Чернігівського педінституту (1971–1973) і одночасно проходив стажування в Інституті математики АН України. В 1973–1985 р. В. О. Швець працював учителем математики в с. Немішаєве Київської області.

З 1985 р. Василь Олександрович працює асистентом, старшим викладачем, доцентом, професором, заступником декана, завідувачем кафедри математики і методики викладання математики фізико-математичного факультету НПУ імені М. П. Драгоманова.

У 1989 р. В. О. Швець захистив кандидатську дисертацію на тему: "Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы" і отримав науковий ступінь кандидата педагогічних наук. У 1990 р. йому присвоєно вчене звання доцента кафедри математики і методики викладання математики, а в 2004 р. – вчене звання професора.

В .О. Швець читає такі навчальні курси: "Методика навчання математики", "Елементарна математика", "Педагогічні технології" для студентів фізико-математичного факультету, керує написанням курсових, кваліфікаційних і магістерських робіт, а також педагогічною практикою. Є співавтором "Галузевих стандартів вищої освіти. Математика". У його науковому доробку понад 100 публікацій.

В. О. Швець відродив при кафедрі діяльність Всеукраїнського науково-

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} & & & & & 0 & 0 \\ r_{11} & r_{12} & . & . & . & r_{1k} & \\ r_{21} & r_{22} & . & . & . & r_{2k} & \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ r_{l1} & r_{l2} & . & . & . & r_{lk} & \end{array}\right| ,$$

де $k > 0$, $l > 0$, $k + l \leq n$, причому кількість лінійно незалежних матриць R_n дорівнює kl. М. П. Кравчук вивів також, що кількість лінійно незалежних матриць P_n буде $N = n + (k - 1)(l - 1)$, а максимум числа лінійно незалежних матриць M_n дорівнює n. Все це дало змогу перейти до побудови матриць M_n.

Узагальнення і спрощення основних задач з теорії квадратичних і білінійних форм М. П. Кравчук розглянув у докторській дисертації "О квадратичных формах и линейных преобразованиях". У цій роботі він провів глибокі дослідження комутативних матриць, а також розв'язав низку складних задач з теорії лінійних перетворень.

Значне місце в дослідженнях М. П. Кравчука відводилося визначенню кількості дійсних коренів у алгебраїчних і трансцендентних рівняннях. За допомогою неперервних дробів він узагальнив теорему Штурма про кількість дійсних коренів алгебраїчного рівняння на даному інтервалі. В монографії "Алгебраїчні студії над аналітичними функціями" (1929) він поширив на трансцендентні функції деякі результати з дослідження теореми Штурма про кількість коренів алгебраїчного рівняння.

Дослідження М. П. Кравчука в теорії функцій дійсної змінної стосувалися умов неперервності функцій, старших похідних, формул інтерполяції і перетворень. Він, зокрема, довів кілька формул узагальненої інтерполяції, а також встановив умови існування старших похідних для функцій однієї і кількох змінних.

В теорії найменших квадратів М. П. Кравчук увів поняття середнього арифметичного і розглядав його як єдине і основне у побудові цієї теорії. Він також обґрунтував спосіб найменших квадратів незалежно від понять і теорем теорії ймовірностей. Постановка лінійної задачі способу найменших квадратів була в нього більш загальною, а тому класичне обґрунтування способу найменших квадратів випливало з його способу як частковий граничний випадок.

Найважливіші результати в творчому доробку М. П. Кравчука стосуються теорії диференціальних й інтегральних рівнянь, особливо наближених методів їх розв'язування. В його роботах подальше розвинення знайшов обґрунтований М. М. Криловим спосіб найменших квадратів для наближеного

інтегрування лінійних диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь. Над цими питаннями М. П. Кравчук працював у напрямах зменшення похибки наближених розв'язків і доведення збіжності похідних від цих наближень при відповідних граничних умовах і відповідному виборі функцій, з яких складається наближений розв'язок.

Більшість робіт М. П. Кравчука з теорії наближеного інтегрування присвячені розвитку і застосуванню способу моментів до наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь метафізики, диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь. Основні результати досліджень, проведених з вищеназваних проблем, викладені в двотомній монографії "Застосування способу моментів до розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь" (1932–1936). В інших працях розглядаються застосування способу моментів до інтегральних рівнянь, диференціальних рівнянь вищих порядків, диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами.

Проблему моментів та їх застосування до розв'язування лінійних диференціальних і інтегральних рівнянь М. П. Кравчук розглянув у статті "Про одну алгебраїчну задачу в проблемі моментів". Тут він виклав такі два результати:

1) якщо відповідні кристофелеві числа від першого до n-го порядку двох невід'ємних функцій $p(x)$ та $q(x)$ рівні, то

$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, x^k\, dx = |a| \int_{-\infty}^{\infty} q(ax+b)\, x^k\, dx$ ($k = 1, 2, \ldots, 2n-1$), де a і b – відповідним чином вибрані числа;

2) якщо всі відповідні кристофелеві числа функцій $p(x)$ та $q(x)$ попарно рівні, то існують такі a і b, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = |a| \int_{-\infty}^{\infty} q(ax+b)\, dx.$$

М. П. Кравчук також написав статті, присвячені інтерполяції, розподілу абсцис механічних квадратур гаусового типу, деяким перетворенням кратних інтегралів, ортогональним многочленам, пов'язаним з різними ймовірносними схемами тощо.

Заслуговують на особливу увагу дослідження М. Л. Кравчука з питань наближених методів інтегрування диференціальних рівнянь, які висвітлені в його працях "Про спосіб М. Крилова в теорії наближеного інтегрування диференціальних рівнянь", "Про спосіб найменших квадратів та спосіб моментів в теорії наближеного інтегрування диференціальних рівнянь", "Про існу-

конструктивні задачі геометрії Лобачевського, але й розвинув у цій галузі новий напрямок – розв'язування конструктивних задач за допомогою обмежених засобів.

У цих роботах О. С. Смогоржевський вперше розглянув розв'язання багатьох конструктивних задач гіперболічної геометрії. Зокрема, це задачі, що стосуються:

- побудови правильного 17–кутника;
- квадратури серпиків;
- побудови центра ваги периметра трикутника;
- побудов, які виконуються однією лише лінійкою за умови, що в площині побудови накреслено деякі допоміжні фігури.

О. С. Смогоржевський розв'язав низку теоретичних питань, які стосувалися конструктивної сили та еквівалентності різних комплектів креслярських інструментів, доведення неможливості деяких побудов на гіперболічній площині за допомогою циркуля і лінійки, розробки системи побудов, аналогічних побудовам Маскероні. Значний інтерес становлять його дослідження, присвячені побудовам в гіперболічній площині з використанням тільки однієї лінійки, за умови, що в площині побудови задано деяку фігуру. Ці побудови аналогічні побудовам Штейнера в евклідовій площині.

О. С. Смогоржевський довів, що конструктивні площинні задачі другого степеня геометрії Лобачевського розв'язуються циркулем, орициркулем, гіперциркулем без застосування лінійки, а також подав нове доведення теореми про нерозв'язність лінійкою і циркулем конструктивних задач гіперболічної геометрії, які не є задачами першого чи другого степеня. Ці доведення дозволили значно розширити коло питань, пов'язаних з геометричними побудовами в просторі Лобачевського. Саме він вперше застосував метод інверсії до розв'язування конструктивних задач геометрії Лобачевського, а також побудував двовимірну метричну геометрію, в якій за фундаментальну криву прийняв кубічну параболу.

В дослідженнях О. С. Смогоржевського майже повністю перебудована теорія геометричних побудов у гіперболічному просторі, причому вчений не лише охопив ряд нових питань і застосував нові методи, а й досягнув значного спрощення як стосовно деяких теоретичних положень, так і стосовно розв'язання конструктивних задач. Можна вважати класичною за своєю простотою, наприклад, одну з п'яти знайдених О. С. Смогоржевським побудов трикутника за трьома кутами, яка значно простіша інших відомих розв'язань цієї складної задачі гіперболічної геометрії. Те ж саме можна сказати й про

вання та наближене визначення розв'язань деяких лінійних рівнянь в частинних похідних".

Для звичайних диференціальних рівнянь М. П. Кравчук встановив збіжність наближень до розв'язків для шуканих функцій та їх похідних, крім похідної найвищого порядку, що входить в рівняння (для окремого випадку основних функцій виведена швидкість збіжності з оцінкою модуля відповідної різниці). У монографії "Дослідження над наближеним рішенням диференціальних й інтегральних рівнянь" М. П. Кравчук виклав застосування загальної ідеї методу моментів до розв'язування граничних задач. Він встановив також умови збіжності при застосуванні методу моментів до розв'язування граничних задач для рівнянь еліптичного типу.

Роботи М. П. Кравчука з теорії наближеного розв'язування диференціальних й інтегральних рівнянь сприяли і сприяють активному впровадженню варіаційних методів до наближеного розв'язування різноманітних задач прикладної математики і фізики.

В галузі теорії імовірностей та математичної статистики М. П. Кравчук отримав значні результати, які стосуються теорії кореляції, застосування теорії моментів в математичній статистиці, нормального закону розподілу при двох змінних ознаках тощо. Ввівши многочлени біноміального розподілу ("многочлени Кравчука"), він довів нову інтерполяційну формулу і встановив скінченний розклад для деяких функцій, зокрема для розподілу ймовірностей у схемі неповернутих куль. М. П. Кравчук також довів деякі теореми Стірлінга, поставив проблему моментів у апроксимаційному стилі, довів нерівності для оцінок середніх похибок основних величин теорії кореляції без спеціальних обмежень на характер розподілу досліджуваних величин.

В області конструктивної геометрії найбільш плідно працював **Олександр Степанович СМОГОРЖЕВСЬКИЙ.** Великий внесок він зробив у розвиток теорії геометричних побудов на евклідовій і гіперболічній площині. Ця теорія зацікавила його в кінці 30–х років, а в 1939 р. вже виходить з друку його монографія "Елементи геометрії трикутника", яка вирізнялася новизною і оригінальністю викладу.

Десятки статей О. С. Смогоржевський опублікував з питань геометричних побудов на гіперболічній площині. Дослідження в цьому напрямку були узагальнені та підсумовані у монографіях "Теорія геометричних побудов у просторі Лобачевського" (1949 р.) і "Геометричні побудови у площині Лобачевського" (1951 р.). Він не тільки вперше розв'язав деякі досить складні

ряд інших конструктивних задач геометрії Лобачевського, для яких знайдені О. С. Смогоржевським розв'язання характеризуються кращими "коефіцієнтами простоти", ніж отримані раніше іншими авторами.

Висвітлюючи окремі питання геометрії Лобачевського, О. С. Смогоржевський по новому виклав деякі властивості інтерпретацій гіперболічної площини. Щоб продуктивно застосувати диференціальну геометрію на гіперболічній площині, він увів нову символіку, яка нагадує символіку векторного числення.

О. С. Смогоржевський займався питаннями історії геометрії. Був активним популяризатором науки, особливо геометрії Лобачевського. Досліджував проекції Лобачевського на евклідовій площині – так звані інтерпретації Бельтрамі і Пуанкаре. В довіднику з теорії плоских кривих 3–го порядку (у співавторстві з О. С. Столовою) подав систематизовані зведення великого за обсягом фактичного матеріалу – від Ньютона (1704) до сучасності (1950).

Інтереси О. С. Смогоржевського поширювалися також і на інші розділи математики: математичний аналіз, зокрема теорія диференціальних рівнянь та ортогональних поліномів, математична фізика тощо. Він також виконував дослідження прикладного характеру, пов'язаних з технікою. Вони стосувалися розв'язування диференціально-геометричних задач про розрахунок деталей машин.

Перші роботи О. С. Смогоржевського стосувалися теорії ортогональних і унітарних перетворень: "Про ортогональні перетворення" (1927 р.), "Про унітарні та ортогональні перетворення" (1931 р.) та ін. В першій з них розглянуто параметричне представлення ортогональних лінійних перетворень, а в другій подано розклад унітарних та ортогональних перетворень довільного степеня на унітарні та ортогональні перетворення другого степеня. Окремі його дослідження стосувалися побудови ортогональних та нормальних в розумінні підсумовності поліномів. Кілька робіт він присвятив побудові систем ортонормальних поліномів, пов'язаних з деякими ймовірносними схемами. Ці дослідження узагальнювали результати, отримані академіком М. Ф. Кравчуком.

Кілька його праць присвячено теорії диференціальних рівнянь та математичному аналізу. Він побудував функції та тензори Гріна звичайних лінійних диференціальних систем при різних типах умов, одержав функції Гріна для лінійних квазідиференціальних систем. Дослідження з теорії одновимірних функцій Гріна (звичайних і узагальнених) О. С. Смогоржевський узагальнив у докторській дисертації "Функції Гріна лінійних диференціальних і

квазідиференціальних систем у одновимірній області" (1945), в якій створив новий метод побудови узагальнених функцій і тензорів Гріна та вивчив їх властивості.

О. С. Смогоржевський детально дослідив лінійні диференціальні системи з граничними умовами значно більш загального типу, ніж ті, що розглядали його попередники. Узагальнюючи поняття симетричних та кососиметричних функцій Гріна, він увів поняття ермітової функції Гріна, встановив необхідні та достатні умови того, щоб функції та тензори Гріна заданого диференціального рівняння були ермітовими.

Як зазначав М. М. Боголюбов, одним із найважливіших результатів докторської дисертації О. С. Смогоржевського стало введення поняття тензора Гріна в розробці нового методу побудови узагальнених функцій і тензорів Гріна. Це питання розглянуто при білокальних, полілокальних та інтегральних умовах. В роботі застосовувався метод моментів для наближеного обчислення функцій Гріна, розглядалася побудова функцій і тензорів Гріна деяких комбінованих систем. Умови, накладені на розв'язки диференціальних рівнянь, виражалися через інтеграл Стільт'єса.

О. С. Смогоржевський узагальнив отримані результати на випадок лінійних квазідиференціальних систем і довів, що неперервні в деякому інтервалі інтеграли лінійного однорідного квазідиференціального рівняння можна диференціювати в цьому інтервалі, або кожен з них являє собою добуток множника, що диференціюється, на спільній для всіх розв'язків даного рівняння не диференціюйовний множник.

О. С. Смогоржевськии показав, що ортогональна матриця n-го порядку може бути представлена у вигляді добутку $\frac{n(n-1)}{2}$ простіших ортогональних матриць, та розглянув деякі властивості унітарних матриць, елементами яких є квадратні матриці, розміщені в даній матриці так само, як розміщені у визначнику-циркулянті його елементи.

Провідним вченим в галузі алгебри був член-кореспондент АН УРСР, професор кафедри вищої математики КДПІ імені О. М. Горького **Сергій Миколайович ЧЕРНІКОВ.**

Народився Сергій Миколайович 11 травня 1912 року в м. Сергієві Посаді (тепер м. Загорськ) Московської області. Помер 23 січня 1987 року.

Після закінчення середньої школи він декілька років працював вчителем математики в школі і одночасно навчався на заочному відділенні фізико-технічного факультету Саратовського педагогічного інституту.

В цілому тематику досліджень С. М. Чернікова можна охарактеризувати як вивчення груп із заданими властивостями підгруп або систем підгруп. Він отримав багато фундаментальних результатів , які згодом стали класичними, а тому його по праву можна вважати основоположником сучасної теорії груп. С. М. Черніков увів у теорію груп низку дуже важливих понять: локальна розв'язність, локальна нільпотентність, шарова скінченність, локальна ступінчастість, висунув і реалізував нові плідні ідеї, а також розробив оригінальні підходи до досліджень у цій галузі. С. М. Черніков сформулював багато актуальних проблем в теорії груп, під впливом яких ця галузь математики розвивається вітчизняними та зарубіжними алгебраїстами. Окремі важливі проблеми, які були поставлені С. М. Черніковим ще в середині минулого століття, залишаються не розв'язаними до цього часу.

В ранніх роботах С. М. Чернікова було поставлена глибока теорія локально розв'язних і локально нільпотентних груп з умовою мінімальності для підгруп. Результати цих робіт визначили новий напрямок в теорії груп, пов'язаний з вивченням різних класів нескінченних груп з заданими властивостями скінченності.

В серії робіт С. М. Чернікова було встановлено важливу роль груп, які є скінченним розширенням абелевих груп з властивостями мінімальності для підгруп. Групи такого виду були названі ним екстремальними. Але в математичній літературі (як в нашій, так і в зарубіжній) за ними закріпилась інша назва – групи Чернікова.

Важливими віхами в розвитку теорії груп є оглядові статті С. М. Чернікова „Условия конечности в общей теории групп" (УМН, 1959 рік) і А. Г. Куроша, С. М. Чернікова „Разрешимые и нильпотентные группы" (УМН, 1947 рік). В першій з них підводилися результати розвитку досліджень, які стосувалися груп з властивостями скінченності, за 1939–1959 рр.

Великий цикл робіт, виконаних С. М. Черніковим в 60–80х роках, присвячувався вивченню груп із заданими властивостями систем підгруп. Головна мета цих досліджень – виділити і конструктивно описати всі типи груп, в яких деяка система підгруп має задані властивості. Отримані С. М. Черніковим результати і запропоновані ідеї привели до оформлення перспективного напрямку досліджень, а також послужили базою для багатьох робіт вітчизняних і зарубіжних авторів.

Велику популярність С. М. Чернікову принесла монографія „Группы с заданными свойствами системы подгрупп" (Наука, 1980 р.). В ній зібрані найважливіші результати досліджень, пов'язаних з властивостями скінчен-

Одразу після закінчення в 1933 році педагогічного інституту С. М. Черніков працював учителем математики, спочатку в Жовтневому сільгосптехнікумі, а потім у школі ФЗН № 17 міста Саратова. В 1933 році Сергій Миколайович переїхав у Свердловськ (тепер Єкатеринбург), де працював на кафедрі математики Уральського індустріального (пізніше політехнічного) інституту. В 1934–1946 роках він послідовно – асистент, доцент, професор кафедрі математики цього інституту.

В 1938 році Сергій Миколайович успішно захистив кандидатську дисертацію, присвячену теорії груп, і надалі продовжив активно займатися проблемами у цій галузі. Спілкування з відомими вченими, такими як А. Г. Курош і О. Ю. Шмідт, стимулювали його подальший інтерес до цієї області математики і активні наукові пошуки. Результатом цієї роботи була докторська дисертація з теорії груп, яку він успішно захистив у 1940 році. В 1941 році Сергію Миколайовичу було присвоєно звання професора. З 1939 по 1946 роки він – завідуючий кафедрою математики Уральського політехнічного інституту, з 1945 року по 1955 рік – завідуючий кафедрою математичного аналізу Уральського університету, в 1947–1950 роках декан фізично-математичного факультету Уральського університету.

На запрошення керівництва Пермського Державного університету Сергій Миколайович переїхав до міста Перм, де з 1951 по 1961 роки очолював кафедру алгебри і геометрії Пермського Державного університету. В 1962 році, в зв'язку з відкриттям Уральського відділення АН СРСР, Сергій Миколайович був запрошений на посаду завідуючого відділом алгебри і геометрії Свердловського відділення Математичного інституту імені В. А. Стеклова АН СРСР.

В 1965 р. С. М. Черніков переїхав на постійне проживання у місто Київ. З цього часу і до останніх днів життя (1987 р.) він займав посаду завідуючого відділом алгебри інституту математики АН України, а також працював професором кафедри вищої математики в Київському педагогічному інституті ім. М. Горького. З 1967 року Сергій Миколайович Черніков – член-кореспондент АН України.

С. М. Черніков – торець відомої алгебраїчної школи, з якої вийшли близько п'ятидесяти кандидатів та докторів фізико-математичних наук. Серед них – академік В.М.Глушков, член-кореспондент М. І. Каргаполов, член-кореспондент АН Росії І. І .Єрьомін, доктори фізико-математичних наук В. С. Чарін, В. П. Шунков, Ю. М. Горчанов, Д. І. Зайцев, С. С. Левіщенко. Більшість з учнів С. М. Чернікова – українські вчені.

ності й іншими обмеженнями для підгруп, які проводилися автором протягом 40 років,

С. М. Черніков – один з піонерів лінійного програмування і творець алгебраїчної теорії лінійних нерівностей. Займаючись розв'язуванням актуальних задач прикладного характеру в роки війни у 1942–1944 роках він встановив так званий принцип граничних розв'язків, на основі якого в подальшому побудував всебічно розвинуту теорію лінійних нерівностей.

В 1960–1965 рр. С. М. Черніков запропонував метод згортки систем лінійних нерівностей, який став важливим математичним інструментом прикладних досліджень. Цей метод дозволив, зокрема, досліджувати суперечливі системи лінійних нерівностей та розробляти методи оптимізації для задач з суперечливими системами обмежень, конструктивно описувати всю множину оптимальних розв'язків у задачах лінійного програмування.

С. М. Черніков виділив і дослідив важливий клас нескінченних систем лінійних нерівностей – послідовно замкнені системи – і побудував для них теорію двоїстості. Цей клас систем ліг в основу теоретичного і чисельного аналізу нелінійних задач оптимізації через редукцію останніх задач напівскінченного та нескінченного лінійного програмування. Побудована С. М. Черніковим алгебраїчна теорія лінійних нерівностей викладена у його широко відомій монографії „Линейные неравенства" (М.: Наука, 1968 р. – 488 с.; переклад на німецьку мову – 1971 р.), яка відіграла значну роль в подальшому розвитку цієї теорії і її практичному застосуванні.

В 1973 році за цикл робіт з теорії лінійних нерівностей С. М. Черніков був відзначений премією ім. Н. М. Крилова АН України.

Визначним спеціалістом в галузі теорії груп був доктор фізико-математичних наук, професор **Сергій Сергійович ЛЕВІЩЕНКО**.

Основна частина досліджень С. С. Левіщенка присвячена опису груп з обмеженнями для підгруп. Скінченні групи з нільпотентними підгрупами непримарного індексу були предметом дослідження його кандидатської дисертації. В докторській дисертації він дослідив групи з деякими системами дисперсивних підгруп.

Перші наукові результати С. С. Левіщенка стосувалися дослідження скінченних груп з обмеженнями для підгруп певного індексу. Він розглядав підгрупи примарного та непримарного індексу, а обмеженнями були: циклічність, абелевість, нільпотентність їх підгруп.

Досліджуючи скінченні ненільпотентна групи, у яких всі власні підгрупи непримарного індексу нільпотентні (S*), він зокрема встановив, що вони

вичерпуються групами наступних типів:

1) G – недисперсивна група pq^{β}, $\beta \geq 3$;

2) $G = P \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $b^q \in Z(G)$, $Q \not\trianglelefteq G$;

3) $G = P \leftthreetimes Q$, Q – нециклічна група, $Q = \langle b \rangle Q_1$,

$\langle b \rangle \cap Q_1 = \langle b^q \rangle$ $P \leftthreetimes \langle b \rangle$ – група Шмідта, $C_Q(P) = Q_1$;

4) $G = P \leftthreetimes Q$, $Q = \langle b \rangle Q_1$, $|b| = q^{\beta_1}$, $2 \leq \beta_1 \leq \beta$, $2 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $C_Q(P) = Q_1$,

$P \leftthreetimes \left\langle b^{q^{\beta_2 - 1}} \right\rangle$ – група Шмідта;

5) $G = P \times (Q \leftthreetimes R)$, $Q \leftthreetimes R$- група Шмідта; $\langle b \rangle \cap Q_1 = \left\langle b^{q^{\beta_2}} \right\rangle$

6) $G = (P \times Q) \leftthreetimes R$; $P \leftthreetimes R$, $Q \leftthreetimes R$ – групи Шмідта;

7) $G = P \leftthreetimes (Q \times R)$, $P \leftthreetimes Q$, $P \leftthreetimes R$ – групи Шмідта.

Для скінченних непримарних неабелевих груп, у яких всі підгрупи непримарного індексу абелеві (M^* – групи) він встановив 8 типів груп, якими M^* – групи вичерпуються.

Деякі типи цих груп були опубліковані в співавторсві з його науковим керівником С. С. Черніковим [Конструктивное описание конечних не десперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевых// Укр. мат. журн. – 1992–44, № 6. – С. 818–822].

Продовжуючи ці дослідження С. С. Левіщенко розглядав S^{**} – групи – скінченні ненільпотентні групи, у яких всі ненільпотентні підгрупи непримарного індексу є групами Шмідта. Він, зокрема, встановив, що біпримарна група G тоді і тільки тоді є дисперсивною S^{**} – групою, коли вона розкладається в напівпрямий добуток $G = P \leftthreetimes Q$ своєї силовської p – підгрупи P і силовської q – підгрупи Q, які задовольняються одну із 12 сформульованих ним умов.

С. С. Левіщенко встановив також типи груп, якими вичерпуються мінімальні недисперсивні M^{**} – групи (скінченна непримарна неабелева група називається M^{**} – групою, якщо всі її неабелеві підгрупи непримарного індексу є групами Міллера-Морено). Він показав, що мінімальні недисперсивні M^{**} – групи вичерпуються групами 6 типів.

Суттєві результати С. С. Левіщенко отримав у дослідженнях, пов'язаних з обмеженнями на підгрупи певної максимальності. Основою цих досліджень стали результати опису скінченних мінімальних недисперсивних груп (розв'язних і нерозв'язних). Крім іншого він встановив, що скінченні розв'язні мінімальні недисперсивні групи G у яких G' не містить жодної си-

лися поняття нормальності підгрупи та його узагальнень. Наприклад, вивчалися групи, в яких:

- нормальні всі нескінченні неабелеві підгрупи;
- майже нормальні всі нескінченні підгрупи

Багато досліджень С. С. Левіщенко присвятив знаходженню нових властивостей груп, що задовольняють певні умови. Серед таких умов є ті, що забезпечують розщіплюваність, шмідтовість, нільпотентність, дедекіндовість, локальну метациклічність груп тощо.

Значна частина результатів досліджень С. С. Левіщенка опублікована в монографії, написаній у співавторстві з М. Ф. Кузенним [Конечные группы с системами дисперсивных подгрупп. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 230 с.] , яка на великий жаль, побачила світ після його смерті.

За сумісництвом на кафедрі вищої математики працював член-кореспондент Національної академії наук України, професор, лауреат Державної премії України, фахівець з теорії ймовірностей **Михайло Йосипович ЯДРЕНКО**.

М. Й. Ядренко народився 16 квітня 1932 року в селі Дрімайлівка Ніжинського району Чернігівської області в селянській родині. Помер 28 вересня 2004 року.

У 1950 р. з золотою медаллю закінчив середню школу № 4 міста Ніжина і без вступних іспитів був прийнятий до Київського університету імені Тараса Шевченка. В 1955 році закінчив механіко-математичний факультет цього університету, а в 1958 – аспірантуру.

Під час перебування в аспірантурі Київського університету (1955–1958) він розпочав вивчати нові на той час класи випадкових функцій – однорідні та ізотропні випадкові поля. Ці дослідження знайшли відображення в його кандидатській дисертації "Некоторые вопросы теории случайных полей" (1961).

Після закінчення аспірантури М. Й. Ядренко почав працювати на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Київського університету імені Тараса Шевченка, а вже у 1966 році його призначили завідувачем кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики, яку він очолював 33 роки.

Помер 28 вересня 2004 року.

М. Й. Ядренко автор більш ніж 250 наукових робіт, опублікував 24 підручники та навчальні посібники з різних розділів математики. Серед них

ловської підгрупи з G (елементарні мінімальні недисперсивні групи), вичерпуються групами вигляду $G = \prod_{i \in Z_n} S_i$, $n \geq 2$, де $S_i = S_i \leftthreetimes \langle b_{i-1} \rangle$ – нормальна в G підгрупа Шмідта, $A_i \langle b_i \rangle = P_i$ – силовська p_i-підгрупа групи G ,$[S_i, S_j] = 1$, p_i, p_j – різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in Z_n$.

За допомогою цих результатів одержано опис скінченних груп, у яких максимальні та 2–максимальні підгрупи φ–дисперсивні чи дисперсивні за Ope.

Значні результати С. С. Левіщенко одержав при обмеженні надрозв'язності для максимальних та 2–максимальних підгруп. Він довів, що скінченні мінімальні ненадрозв'язні групи вичерпуються такими групами:

1) $G = P \leftthreetimes Q$ – група Шмідта, $|P| \geq p^2$;

2) $G = P \leftthreetimes Q - P$ – силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу, Q – циклічна група, $\Phi(P) \leftthreetimes Q$ і $P \leftthreetimes \Phi(Q)$ – надрозв'язні групи, $[P, \Phi(Q)] = P$;

3) $G = P \leftthreetimes Q - P$ – силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу, $\Phi(Q) > C_Q(P) \lhd G$; $Q / C_Q(P)$ – або неабелева група порядку q^3 експоненти q, або примарна група Міллера-Морено, яка містить циклічну максимальну підгрупу, $P \equiv 1 \pmod q$, $\Phi(P) \leftthreetimes Q$ і $P \leftthreetimes Q_1$–надрозв'язні групи, де Q_1–довільна максимальна підгрупа з Q, $[P, Q] = P$;

4) $G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes R) - P$ – силовська p-підгрупа групи G шмідтовського типу, Q і R – циклічні групи, $[P, Q] = P$, $[Q, R] = Q$, $\Phi(P) < \Phi(R)$, $[P, R] \leq P$, $\Phi(P) \times \Phi(Q) \leq Z(P \leftthreetimes Q)$, $\Phi(R) = Z(Q \leftthreetimes R)$, $P \leftthreetimes R$ – надрозв'язна група, $P \equiv 1 \pmod q$.

С. С. Левіщенко разом з М.Ф. Кузенним розв'язав відому проблему Л. О. Шеметкова про опис скінченних груп у яких 2–максимальні підгрупи надрозв'язні. В їх роботі "Конечные группы со сверхразрешимыми 2–максимальными подгруппами" (1986) виділено 34 типи груп такого роду.

Вивчення скінченних груп з 2–максимальними метациклічними підгрупами започатковано у спільній роботі з М. Ф. Кузенним і М. М. Семком "Конструктивний опис будови скінченних примарних груп з метациклічними 2–максимальними підгрупами" (1995).

Опис скінченних груп з певними властивостями та обмеженнями не вичерпував коло інтересів С. С. Левіщенка. Він мав низку робіт, присвячених також і нескінченним групам. Серед обмежень для цих груп використовува-

слід відмітити один з найкращих підручників „Теория вероятностей и математическая статистика" (Київ: Вища шк., 1988), який був написаний у співавторстві з Й. І. Гіхманом та А. В. Скороходом, а також унікальний збірник задач з теорії ймовірностей, створений разом з А. В. Скороходом, А. Я. Дороговцевим та Д. С. Сільвестровим, який перевиданий англійською мовою у США (1997 р.).

Михайло Йосипович заснував відому наукову школу з випадкових полів та процесів і був незмінним її керівником. Серед його учнів 45 кандидатів фізико-математичних наук, десять з яких захистили докторські дисертації. Це чл.-кор. НАН України В. В. Анісімов, професори В. Л. Гірко, Ю. В. Козаченко, М. М. Леоненко, М. П. Моклячук, Ю. Д. Попов, Д. С. Сільвестров, О. І. Клесов, провідні наукові співробітники Н. М. Зінченко, А. Б. Качинський.

Він був активним популяризатором математики, віддавав багато сил і енергії для розвитку шкільної та університетської математичної освіти, організації математичних олімпіад, виданню математичної літератури. У1969 році М. Й. Ядренко заснував видання періодичного науково-популярного збірника „У світі математики", який з 1995 року перетворився в унікальний науково-популярний, методичний та історичний журнал з математики під такою ж назвою, розрахований на широке коло шанувальників математики – від школяра до професіонала-математика.

Як науковець М. Й. Ядренко знаний у світі своїми роботами з теорії випадкових полів та їх статистичного аналізу. В 1977 році він захистив докторську дисертацію на тему "Исследование по спектральной теории однородных и изотопных случайных полей". Настільною книгою для спеціалістів з випадкових полів стала його монографія „Спектральная теория случайных полей" (Київ: Виша шк., 1980), яку 1983 р. перевидали англійською мовою в США. Йому належить побудова спектральної теорії однорідних та ізотропних полів у евклідовому і гільбертовому просторах, а також у просторі Лобачевського. Ці результати були використані ним і його учнями для розв'язання важливих задач лінійного прогнозування і фільтрації випадкових полів. Він заклав основу нового напрямку в теорії випадкових полів – теорію марковських випадкових полів. У подальшому теорія марковських випадкових полів отримала свій розвиток у роботах, пов'язаних із задачами статистичної фізики і квантової теорії поля.

М. Й. Ядренко отримав низку визначних результатів щодо аналітичних властивостей вибіркових функцій випадкових полів. Зокрема, ним було

знайдено умови неперервності, аналітичності та квазіаналітичності випадкових полів. Крім цього він дослідив багато важливих питань статистики випадкових полів. Так, він отримав умови абсолютної неперервності та сингулярності мір, які відповідають гаусівським випадковим полям, розробив ефективні методи розв'язання статистичних задач для випадкових полів: задач екстраполяції, фільтрації, інтерполяції, оцінки коефіцієнтів регресії.

М. Й. Ядренко провів ряд важливих досліджень у галузі прикладної теорії ймовірностей (оптимальні методи профілактики і контролю якості продукції, статистичне моделювання шумів у напівпровідниках, статистичний аналіз датчиків випадкових чисел, статистичні задачі теорії надійності, статистичні моделі розподілів з випадковою інтенсивністю).

За цикл робіт з теорії випадкових полів М. Й. Ядренку було присуджено премію НАН України імені академіка М. М. Крилова.

Майже 40 років працював на математичних кафедрах **Микола Якович ЛЯЩЕНКО.**

Народився Микола Якович 25 листопада 1921 року в селі Острійки Узинського району Київської області. З 1929 по 1936 рр. навчався в Острійській семирічці, а з 1936 по 1939 – в Білоцерківській педагогічній школі. Після закінчення педшколи працював в Олейниково-Слобідській семирічній школі Узинського району Київської області.

З грудня 1939 по листопад 1945 р. служба в армії. Брав участь у Великій вітчизняній війні і нагороджений орденами: Червоної зірки (1944), Вітчизняної війни 2–го ступеня (1985), „За мужність" (1999) і медалями.

В грудні 1945 р. М. Я. Лященко поступив на фізико-математичний факультет КДПІ ім. О. М. Горького. Після закінчення в 1949 р. інституту, осінню того ж року поступив в аспірантуру Інституту математики АН УРСР на кафедру математичної фізики. В аспірантурі навчався лише два роки, оскільки в грудні 1951 року постановою Ради Міністрів СРСР його відкликали з аспірантури і направили на роботу в Лабораторію вимірювальних приладів АН СРСР (перейменовану пізніше в Інститут атомної енергії АН СРСР). В Інституті атомної енергії М. Я. Лященко пропрацював майже 11 років (1951–1962 рр.) на посадах: молодшого наукового співробітника, наукового співробітника, старшого наукового співробітника, керівника групи програмування.

В 1953 р. Рада Лабораторії вимірювальних приладів АН СРСР присвоїла М. Я. Лященку вчене звання молодшого наукового співробітник, а в 1960 р.

"Вычислительная математика" (1983, 191. – А. С. Козин), "Програмування на ЕКОМ" (1987, 128 с. – І. Ф. Следзінський); для вчителів – "Похідна та її застосування" (1985, 153 с.); науково-популярні книги – "Алмир (первые шаги в программировании)" (1979, 96 с. – А. С. Козин), "Перші кроки в програмуванні" (1993, 103 с. – І. Ф. Слєдзінський).

З червня 2000 р. М. Я. Лященко на пенсії.

Значні результати в розвитку сучасних галузей математики отримав **Микола Вікторович ПРАЦЬОВИТИЙ.** Його дослідження стосуються фрактального аналізу, фрактальної геометрії, метричної та ймовірнісної теорії чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, теорії неперервних ніде не диференційовних функцій, теорії динамічних систем тощо.

У перших дослідженнях М. В. Працьовитий досліджував самоподібні та фрактальні множини, випадкові величини з фрактальними носіями, функції розподілу та їх властивості, фрактальні, самоподібні та сингулярні розподіли. Основні результати його кандидатської дисертації ("Сингулярні розподіли з фрактальними носіями канторівського і салемівського типів") та подальших розвідок були систематизовані та узагальнені в монографії "Фрактальные множества, функции, распределения" (1992), підготовленій у співавторстві з А. Ф. Турбіним.

В цій монографії викладено розроблений М. В. Працьовитим математичний апарат, який дозволяє з єдиних теоретичних позицій вивчати фрактальні множини, функції, розподіли, а також встановлювати фрактальності різних об'єктів.

В монографії "Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів" (1998) М. В. Працьовитий розглянув класи розподілів ймовірностей зі складною (фрактальною) локальною будовою, заданих систематичними та ланцюговими дробами, знакоперемінними рядами Остроградського, поліосновними Q – представленнями тощо. Ці дослідження переважно стосуються чистих розподілів ймовірностей, в першу чергу сингулярних.

В докторській дисертації на тему "Дослідження фрактальних об'єктів аналізу і теорії ймовірностей" М. В. Працьовитий створив спеціальний метод вивчення фрактальних властивостей сингулярних розподілів і недиференційовних функцій (фрактальний аналіз), що базується на поліосновному Q – представленні чисел яке узагальнює систематичні s-адичні розклади. За допомогою цього методу він дослідив розподіли випадкових величин, скінченні та нескінченні згортки сингулярних розподілів, ніде не диференційовні функції,

рішенням Президіума АН СРСР його затверджено в науковому званні старшого наукового співробітника за спеціальністю "математика. В 1956 р. М. Я. Лященко захистив кандидатську дисертацію на тему: "Некоторые вопросы устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений" і Вчена Рада Математичного інституту імені В. А. Стєклова АН СРСР присвоїла йому вчений ступінь кандидата фізико-математичних наук.

З листопада 1962 р. по червень 2000р. М. Я. Лященко працював в НПУ імені М. П. Драгоманова на посаді доцента кафедри математичного аналізу і геометрії, кафедри вищої математики (1964–1972), кафедри математичного аналізу (з 1984р. на посаді професора). За цей час він читав лекції та проводив практичні, лабораторні і семінарські заняття для студентів стаціонару і заочникам з таких курсів як машини і програмування, обчислювальна математика, елементи теорії алгоритмів, диференціальні рівняння, математичний аналіз, програмування в алгоритмічних мовах алгол і фортран. Керував написанням курсових і дипломних робіт. Особливу увагу приділяв питанням розвитку алгоритмічної культури логічного мислення студентів, зв'язку між університетським і шкільним курсом математики.

В 1964 р. йому присвоєно вчене звання доцента, а в 1984 – професора кафедри математичного аналізу.

Наукові інтереси М. Я. Лященка зосереджено на питаннях наближеного розв'язання задачі Коші для диференціальних рівнянь другого порядку, нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра (з кратними вузлами), а також побудові квадратурних і кубатурних формул високого порядку точності для окремих класів функцій з інтегрованою особливістю.

Під його керівництвом чотири аспіранти написали і успішно захистили кандидатські дисертації з цієї тематики.

Великої уваги надавав питанням вивченню програмування і обчислювальної математики у вищих і середніх навчальних закладах, створив відповідні програми для них (разом з пояснювальними записками і вказівками). Науковий і методичний доробок М. Я. Лященка – 135 друкованих праць. Особисто і в співавторстві з іншими надруковано 13 посібників. Основні з них: для студентів – "Математичні машини і програмування з практикумом" (1971, 280 с.), "Математичний аналіз у задачах і прикладах" (Ч.І. – 2002, 462 с.; Ч. 2. – 2003, 470с. – Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, Г. О. Михалін, М. І. Шкіль), підручник "Чисельні методи" (1996, 288 с. – М. С. Голованъ); для учнів 9–10 класів – "Програмування" (1973, 199 с.), "Основы программирования" (1979, 176 с.; 2–изд.перераб. и доп., 1986, 176с. – А. С. Козин),

породжені перетворювачами Q–символів зображення аргументу тощо.

М. В. Працьовитий встановив структури розподілів, визначивши вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент. Дослідив топологічні, метричні, самоподібні, фрактальні властивості спектра і "носія" розподілів, аналітичним апаратом задання яких є різні способи подання чисел. Щоб виділити простіші за будовою і для вивчення класи сингулярних розподілів, він побудував їх нові класифікації. В основу першої класифікації було покладено тополого-метричні властивості спектра, другої – "різницю" спектра і носія.

Зупинимося детальніше на деяких результатах.

М. В. Працьовитий дав нове узагальнююче означення фрактала, на основі якого побудував класифікацію сингулярних розподілів.

Фракталом називається кожна континуальна обмежена множина, яка має тривіальну (рівну нулю або нескінченності) H_{α}^{ε} – міру Хаусдорфа, порядок α якої рівний топологічній розмірності множини E.

Сингулярна функція розподілу $F(x)$ зі спектром (множиною точок росту) S_F називається функцією розподілу

1) канторівського типу (C – типу), якщо міра Лебега $\lambda(S_F) = 0$;

2) салемівського типу (S – типу), якщо $S_F = \bigcup_i [a_i ; b_i]$;

3) квазіканторівського типу (K – типу), якщо S_F – ніде не щільна множина і $\lambda(S_F) > 0$.

М. В. Працьовитий довів, що кожну сингулярну функцію розподілу $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = \gamma_1 F^S(x) + \gamma_2 F^C(x) + \gamma_3 F^K(x),$$

де $F^S(x)$, $F^C(x)$, $F^K(x)$ – функції C–типу, S–типу, K–типу відповідно, $\gamma_i \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Такий вигляд функції $F(x)$ він назвав її структурою.

М. В. Працьовитий вивчив структуру розподілу випадкової величини:

- яка задається s адичним дробом;
- з незалежними Q-символами поліосновного Q-представлення;
- з незалежними Q_∞-символами;
- представленої елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами.

Для випадкової величини ξ з незалежними Q_∞-символами він отримав такі результати.

- Випадкова величина ξ має:

– чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0; \qquad (1)$$

– чисто абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли має місце (1) і виконуються умови

$$\begin{cases} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i:p_{ik}>0} q_i \right] > 0, & (2) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} q_i \ln \frac{p_{ik}}{q_i} < \infty, & (3) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} q_i \ln^2 \frac{p_{ik}}{q_i} < \infty; & (4) \end{cases}$$

– чисто сингулярний розподіл тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток (1) розбігається до нуля і порушується одна з умов (2) – (4).

• Сингулярний розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом:

1. *C*–типу тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток $\lambda\,(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k$ розбігається;

2. *S*–типу тоді і тільки тоді, коли матриця $\|p_{sk}\|$ має скінченну кількість стовпців, які містять нулі;

3. *K*–типу тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток $\lambda\,(S_\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k$ збігається, а матриця $\|p_{sk}\|$ містить нескінченну кількість стовпців, які містять нулі.

На сучасному етапі М. В. Працьовитий проводить фундаментальні дослідження фракталів в теорії чисел, теорії функцій, теорії ймовірностей. Інтенсивно розробляє проблему створення аксіоматичної теорії фрактальної геометрії. Разом з Г. М. Торбіним він довів, що множина перетворень простору, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, утворює групу відносно операції "композиція перетворень", яка містить, зокрема, групу афінних перетворень. Це дало можливість сформулювати означення фрактальної геометрії (фрактальна геометрія – наука, яка вивчає інваріанти перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність) і розглядати класичну евклідову геометрію як частину фрактальної геометрії.

I – зона "відносно найбільших" абсолютних значень відхилення $\Delta x = f(x) - p_n(x)$;

II – зона "відносно малих" $/\Delta x/$;

III – зона "помірно малих" $/\Delta x/$.

Поправка $w(x) = \alpha\, q_{n-m}(x)\,(x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\ldots\ldots\,(x-\xi_m)$ до полінома $p_n(x)$ будується з таким розрахунком, щоб було забезпечено істотне зниження $/\Delta x/$ в точках зони I за умови деякого зниження і в точках зони III, причому в зоні II допускається можливе, але не дуже значне збільшення $/\Delta x/$ для деяких точок. (Це досягається за рахунок вибору множника α і точок ξ_i).

У другому алгоритмі (алгоритмі "повишаючої дії" або методі послідовних чебишевських інтерполяцій) в якості поправки до полінома $p_n(x)$ беруть поліноми чебишевського наближення степеня $\le n$ функції $\Delta x = f(x) - p_n(x)$ на множині $n+2$ точок $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$. Якщо точки $\{x_к\}$ є точками максимуму функції $f(x) - p_n(x)$, то раціональна апроксимація заданої функції побудована, якщо ні, то виконують ітерації алгоритму. Для цього будують систему точок $\{x^j{}_к\}$ так, щоб виконувалися умови $sign(\Delta x_k) = -sign(\Delta x_{k+1})$, $max(/\Delta x_k/) \le h$.

Кожний із розглянутих алгоритмів дозволяє побудувати шуканий многочлен найкращого наближення з будь-яким степенем точності. Але, за словами самого автора цих алгоритмів, другий алгоритм в більшості випадків значно швидше приводить до мети, забезпечуючи високу точність результату з самою малою кількістю кроків. Разом з тим, другий алгоритм допускає в більшій мірі стандартизацію обчислень, що дозволяє його широке застосування. Зокрема, в роботі Ю.Г. Лотюка [Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання обчислювальної математики в педагогічному університеті. Дис. ... к. п. н. 13.00.02–теорія і методика навчання інформатики. – Рівне, 2004. – 227 с] пропонується студентам лабораторна робота: Реалізувати алгоритм Є. Я. Ремеза побудови раціонального полінома апроксимації модальної функції $y(x) = e^x$ на сегменті [-1; 1].

В процесі розробки методів найкращого поліноміального наближення Є. Я. Ремез довів також теорему про метрично обмежені поліноми, яка знайшла застосування в різних галузях математичного аналізу. Він вперше знайшов адекватні аналоги фундаментальних теорем Чебишова–Маркова, Валле–Пуссена для загальних задач чебишовського наближення.

Основні результати своїх досліджень з теорії та практики чебишовських наближень Є. Я. Ремез виклав у надрукованій у 1957 році великій монографії "Общие вычислительные методы чебышевского приближения ". Тут він запропонував метод послідовних зважених квадратичних наближень для по-

5.3 Розвиток вченими університету теорії математичного аналізу та диференціальних рівнянь

Проблеми математичного аналізу (у широкому розумінні) в університеті розробляли: Є. Я. Ремез, І. М. Рапопорт, С. Ф. Фещенко, М. О. Давидов, М. І. Шкіль та їх учні.

Визначні результати в галузі теорії функцій дійсної змінної містяться в працях **Є. Я. Ремеза**. В 1929 р. він захистив дисертацію на ступінь наукового співробітника на тему „Некоторые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений с оценкой точных границ допущенных погрешностей", в якій виклав основи методу двостороннього чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Починаючи з 1933–1934 р. Є. Я. Ремез займається ефективними методами конструктивної теорії функцій, не полишаючи питань наближеного аналізу. Він працює над створенням загальних чисельних методів ефективної побудови чебишовських наближень та різними питанням, які тісно пов'язані з цієї проблемою. В 1940 р. він опублікував дослідження "Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах C_p та про оцінки остаткових членів формул наближеного аналізу", яке стало широким розвитком одного часткового результату Пеано (1913). Ця робота в подальшому стали основою для багатьох застосувань теоретичного і практичного характеру, а її результати неодноразово узагальнювалися вченими різних країн.

Найбільші наукові результати Є. Я. Ремеза стосуються питань чебишевського наближення функцій. Уже в першому циклі досліджень, викладених у монографії "Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближеного представлення функцій" він досить широко розглянув ці питання і запропонував загальні алгоритми для чисельної побудови чебишовських наближень (точних або з довільним степенем точності). Створивши ефективні алгоритми для побудови полінома найкращого наближення для заданої неперервної функції, Є. Я. Ремез довів, що вони збігаються зі швидкістю геометричної прогресії. З часом з'ясувалося, що алгоритми, призначені для задач чебишовської апроксимації за допомогою раціональних поліномів, або подібних до них узагальнених поліномів, поступово виявляли свою ефективність і в багатьох інших випадках.

Суть першого алгоритму (алгоритму "понижаючої дії" або методу вузлів) полягає в тому, що, маючи вже деяке поліноміальне наближення $p_n(x)$, розбиваємо деяким чином відрізок [а; в] на три точкових множини:

будови найкращих узагальнено-поліноміальних наближень за нормою функціональних просторів L^m, а також дослідив граничні співвідношення (при $m \to \infty$) між середніми степеневими та чебишовськими наближеннями. Друга частина цієї монографії була присвячена систематичній розробці кількох нових ефективних методів: зважених інтерполяційно-квадратичних наближень, превалюючих відхилень та ін. Ці методи були об'єднані спільною назвою "сіткові методи чебишовського наближення".

Крім питань ефективної чебишовської узагальнено-поліноміальної апроксимації в дійсній області, Є. Я. Ремез в деяких працях поширив свої результати на задачі в комплексній області. У подальших дослідженнях він розпочав вивчення питань щодо поширення його ітеративних методів на чебишовські задачі з параметрами, що входять нелінійно. Суттєві результати він отримав у розробці чисельного метода двостороннього наближення для розв'язань диференціальних рівнянь при умовах типу Коші. Є. Я. Ремез розробив також новий загальний функціонально-аналітичний метод побудови та оцінки залишкових членів формул наближеного аналізу.

Заслуговує на детальне висвітлення розроблена Є. Я. Ремезом теорія ірраціонального числа. Ще 1924 р. він запропонував в якості основи для елементарної і в той же час логічно бездоганної побудови теорії ірраціональних чисел концепцію *системи сумісних наближень з довільно малою амплітудою*. Строга теорія ірраціональних чисел на базі цього поняття подана автором у [Ремез Є. Я. Система сумісних наближень і основи теорії ірраціональних чисел. Наукові записки Київського державного педагогічного інституту, Т.II, 1939 (Фізико-математичний збірник)].

Розглянемо в загальних рисах обґрунтування теорії дійсного числа на базі наближених обчислень. Спочатку автор вводить такі допоміжні означення:

- Пару раціональних додатних чисел a, A, де $a \leq A$, будемо називати *наближенням* для всякого числа x, що задовольняє двосторонню нерівність $a \leq x \leq A$. Для позначення наближення будемо користуватися символом $\langle a; A \rangle$.

- Числа a і A будемо називати відповідно *нижньою* та *верхньою межею наближення*, різницю $A-a$ *амплітудою* наближення.

- Сукупність наближень (яких може бути нескінченна або скінченна кількість), які належать до одного і того ж числа, будемо називати *системою наближень*.

- Наближення, для яких нижня межа будь-якого з них не перевищує верхню межу другого, будемо називати *сумісними*.

- Якщо в складі даної системи сумісних наближень можна для довільного $\varepsilon > 0$ знайти наближення з амплітудою меншою від ε, то таку систему будемо називати *системою сумісних наближень з довільно малою амплітудою.*

- Всяка система сумісних раціональних наближень з довільно малою амплітудою називається *визначальною системою наближень.*

Далі вводиться основне означення: *Якщо будь-яким способом задано систему сумісних раціональних наближень з довільно малою амплітудою, то цим самим визначено якесь число, що відповідає цій системі.* Розширену таким чином область чисел автор називає *областю дійсних чисел.*

На базі цього означення запроваджуються дальші умови, які встановлюють сенс співвідношень $=, <, >$, а також зміст арифметичних дій в застосуванні до ірраціональних чисел і встановлюються властивості цих співвідношень або дій, аналогічні до тих, які мають місце в області раціональних чисел. Наприклад:

- порівняння дійсних чисел проводиться так. Нехай x, y – дійсні числа, $\langle a; A\rangle$, $\langle b; B\rangle$ – їх визначальні системи наближень. Числа x і y вважаються *рівними*, якщо кожне з наближень $\langle a; A\rangle$ числа x сумісне з кожним наближенням $\langle b; B\rangle$ числа y. Якщо ж між наближеннями двох систем є несумісні, то числа x і y вважаються нерівними, причому те з двох чисел x або y *більше,* для якого хоч одне з наближень буде вищим від одного з наближень другого числа.

- *сумою* двох дійсних x та y називатимемо таке число z, наближення якого $\langle c; C\rangle$ одержується з наближень $\langle a; A\rangle$ і $\langle b; B\rangle$ чисел x та y за правилами: $c = a + b$, $C = A + B$.

Даний Є. Я. Ремезом виклад арифметичної теорії дійсних чисел, в якому ірраціональне число фактично означалося знов-таки з допомогою певної системи чисел раціональних, об'єднаних в пари чисел a, A, за своїм характером і загальним планом зорієнтований на можливо повніше урахування моментів зв'язку з практикою наближених обчислень та вимірювань і на максимальне наближення до кола ідей елементарної математики, де системи наближень також використовуються, але без чіткого з'ясування логічної суті справи.

Далі Я. Є. Ремез розширює початкову концепцію системи сумісних наближень, вводячи поняття *неозначеної системи наближень* і її *результуючого наближення* таким чином:

- Нехай $\langle a; A\rangle$ – нескінченна система сумісних наближень, $\lambda = \sup a$, $\Lambda = \inf A$. Тоді $\langle \lambda; \Lambda \rangle$ називається *результуючим* наближенням розглядуваної системи.

- Якщо $\lambda = \Lambda$, то система сумісних наближень називається означеною;

- "Условия непрерывности интеграла типа Кноппа в замкнутой области".

В перших роботах з підсумовування розбіжних рядів розглядалися методи підсумовування Абеля–Пуассона, Бореля, Чезаро тощо. Вже перша його публікація ("Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов" // Матем. сборник. – 1956. – Т. 38 (80). – № 4. – С. 509–524) вразила багатьох видатних математиків несподіваністю і глибиною фактів та витонченістю їх доведень.

М. О. Давидов запропонував метод одержання тауберових теорем, який виявився простим і дієвим. Він помітив що всі тауберові умови, знайдені такими видатними математиками як Харді, Літтлвуд, Шмідт, Ландау та багато ін., по суті зводяться для деяких методів підсумовування до однієї умови: *кожна часткова границя S послідовності (S_n) повинна бути* (c)-*точкою цієї послідовності,* тобто $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, m_k = m_k(\varepsilon) \uparrow + \infty, \quad n_k = n_k(\varepsilon) \uparrow + \infty$:

$$\varliminf_{k \to \infty} \frac{n_k}{m_k} > 1 \; i \left| S_n - S \right| < \varepsilon \text{, коли } m_k \le n \le n_k \; \forall \, k \in N .$$

Вперше ідею (c) – точки М. О. Давидов виклав у роботі "О (c)-точках последовательности, суммируемой методом Пуассона–Абеля" // Матем. сборник. – 1957. – Т. 43 (85). – С. 67–74. А пізніше розвивав її у багатьох своїх роботах, а також у працях, підготовлених разом зі своїми учнями.

Виявилося, що підсилення умови $\varliminf_{k \to \infty} \frac{n_k}{m_k} > 1$ до $\lim_{k \to \infty} \frac{n_k}{m_k} = \infty$ приводить до твердження про співпадання ядер послідовності та її середніх.

У статті "Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа-Белинфанте" (1966), М. О. Давидов сформулював такі твердження:

Теорема. Нехай (S_n) – довільна послідовність, а (α_n) і (p_n) – довільні фіксовані послідовності, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, $R_n = (P_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n} p_k S_k$, $t_n = \alpha_n S_n + (1 - \alpha_n) R_n \; \forall \, n \in N_0$.

Тоді якщо:

I) $p_0 > 0, p_n \ge 0 \; \forall \, n \in N$, $0 < \alpha \le \alpha_n \le \beta < +\infty \quad \forall n > n_0$, або

II) $p_n > 0, \alpha_n \in C \quad \forall \, n \in N_0, \varliminf_{n \to \infty} \operatorname{Re} \alpha_n > 0$ і $\alpha_n = O(1) \; (n \to \infty)$,

то $\lim_{n \to \infty} t_n = S \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = S$.

Цей результат постійно знаходився в полі зору науковців. У 1978 р. його доповнив В. І. Мельник, а в 2002 р. його було узагальнено в роботах С. Я. Деканова і Г. О. Михаліна.

Питанню узагальнення теореми Кноппа про включення ядер і знаходженню умов співпадання ядер послідовності та її середніх присвячено такі

якщо $\lambda \neq \Lambda$, то система наближень є неозначена. Числа λ, Λ – межі неозначеності системи, амплітуда $\Lambda - \lambda$ результуючого наближення – міра неозначеності даної системи.

Розширена таким чином концепція системи сумісних наближень з довільно малою амплітудою виявилася надзвичайно корисним знаряддям у трактуванні фундаментальних питань математичного аналізу. На цій основі Є. Я. Ремез побудував курс математичного аналізу для педагогічних вищих навчальних закладів ([Ремез Є. Я. Курс математичного аналізу. Лекції для студ.-заоч. фіз.-мат. фак. пед. інст. Київ–Львів: Рад. шк., 15–а респ. друк. у Львові, 1948. – 47 с], [Ремез Є. Я.Вступ до математичного аналізу. Учб. пос. для фіз.-мат. фак. пед. інст. УРСР. Київ, Рад. шк., 1952. – 228 с]).

До вказаного кола питань Є. Я. Ремез зумів притягти своїх учнів, які розробляли окремі ідей свого вчителя (див. с. 360).

Значний інтерес представляють дослідження Є. Я. Ремеза присвячені розробці рукописної спадщини М. В. Остроградського, що зберігається у Державній публічній бібліотеці УРСР (у м. Києві). Ця праця вимагала не тільки часу та сумління, але, головне, широкої ерудиції і тонкого математичного чуття. Результатом довгострокової праці над архівними матеріалами (часом записаними М. В. Остроградським на шматках паперу), були цінні історико-математичні дослідження (Попереднє повідомлення про рукописи М. В. Остроградського, Вісник АН УРСР, № 8, 1951, С. 52–63 (разом з Б. В. Гнеденко); (О математических рукописях академика М. В. Остроградского. Историко-математические исследования, 4, ГТТИ, М.-Л., 1951, Сс. 9–98.), (О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел, Успехи математических наук, 6, № 5, 1951, С. 33–42.).

Проблемі підсумовування розбіжних рядів були присвячені основні наукові здобутки **М. О. Давидова**. З цієї проблематики ним опубліковано понад 50 робіт.

Перші дослідження Микола Олексійович починав в області граничних властивостей аналітичних функцій. Вже в 1950 р. у книжці І. І. Привалова "Граничные свойства аналитических функций" надруковано 4 його статті:

- "Интегральное представление функций, аналитических в единичном круге";
- "Пример функции, принадлежащей ко всем классам H_δ $(\delta < 1)$ с тейлоровскими коэффициентами, всюду плотными в комплексной плоскости";
- "Обобщение примера Лузина и Привалова";

роботи М. О. Давидова:

-"О ядре в смысле Кноппа суммы степенного ряда" (1974);

-"О включении ядер последовательностей, задаваемых с помощью регулярных матриц" (1979);

-"Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке её ядра регулярной положительной матрицей" (1984).

М. О. Давидов одержав також цікаві результати у дослідженні ефективності та неефективності різних методів підсумовування. Багато його робіт стосуються узагальнення теорем про порівняння сили методів підсумовування. Ці питання відіграють важливу роль у теорії підсумовування.

Про значення результатів, отриманих М. О. Давидовим у розв'язанні проблеми підсумовування розбіжних рядів , свідчить той факт, що основні його результати публікували найавторитетніші журнали: "Математические заметки" і "Український математичний журнал".

Значний внесок у розвиток математичного аналізу та його застосувань зробив **І. М. Рапопорт**. Його наукові здобутки стосувалися теорії лінійних диференціальних рівнянь, а саме асимптотичних методів інтегрування лінійних диференціальних рівнянь. В 1950–1951 роках він розробив методи дослідження асимптотичних властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь, які виклав у монографії "О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений" (1954).

І. М. Рапопорт дослідив асимптотичні властивості розв'язків систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \geq t_o. \tag{1}$$

Для цього він, використовуючи асимптотичні методи, розробив алгоритм перетворення заданої системи диференціальних рівнянь до спеціального (L – діагонального) виду

$$\frac{dy}{dt} = [W(t) + C(t)]y, \tag{2}$$

де елементи матриці $C(t)$ – сумовні функції в інтервалі $[t_o, \infty]$, а елементи діагональної матриці $W(t)$ – функції, інтегровні на кожному інтервалі $[t_o, t_1]$ і жодна з різниць $\mathrm{Re}\, w_i(t) - \mathrm{Re}\, w_j(t)$ ($w_i(t)$ – елементи матриці $W(t)$) не змінює знак при великих t.

І. М. Рапопорт також встановив загальний вид розв'язків таких L – діагональних систем диференціальних рівнянь.

Ці методи дозволили І. М. Рапопорту систематизувати і в деяких випадках

суттєво узагальнити окремі розрізнені прийоми і результати отримані раніше різними авторами у розв'язанні цієї проблеми. Так за допомогою запропонованих І. М. Рапопортом лінійних підстановок можна звести до L – діагонального вигляду диференціальні рівняння, які неодноразово досліджувалися А. Вінтнером, Е. Тітчмаршем, Г. Шпетом, Л. Чезарі.

Розроблений метод (з невеликими змінами) І. М. Рапопорт переніс на дослідження асимптотичної поведінки розв'язків лінійних різницевих рівнянь. Він установив також асимптотичні формули для розв'язків самоспряжених диференціальних рівнянь довільного парного порядку, частинними випадками яких стали не тільки класичні асимптотичні формули математичної фізики, але й формули Е. Тітчмарша.

Значні результати отримав І. М. Рапопорт в дослідженні асимптотичної поведінки власних значень і власних функцій регулярної самоспряженої крайової задачі. Зокрема, він узагальнив результати, отримані Б. М. Левітаном для диференціального рівняння другого порядку, на випадок самоспряженого диференціального рівняння довільного парного порядку, а також розглянув сингулярну самоспряжену крайову задачу для випадку напівнескінченного інтервалу.

Окреме місце в дослідженнях І. М. Рапопорта відводиться питанню про стійкість розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. В монографії ця проблема досліджується стосовно: систем диференціальних рівнянь, які зводяться до L – діагонального виду, диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, а також диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких $a_{ij}(t)$ задовольняють умову $a_{ij}(t+T) - a_{ij}(t) \in L(0,\infty)$, більш загальну, ніж періодичність. Для диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами він встановив асимптотичні формули, які безпосередньо описують розподіл зон стійкості і зон нестійкості розв'язків диференціальних рівнянь, а для диференціальних рівнянь коефіцієнти яких $a_{ij}(t)$ задовольняють умову більш загальну, ніж періодичність $(a_{ij}(t+T) - a_{ij}(t) \in L(0,\infty))$, вказав критерій стійкості.

І. М. Рапопорт створив досить загальний метод, який дозволив встановити асимптотику для розв'язань диференціальних рівнянь вищих порядків з необмежено зростаючими коефіцієнтами, а також дослідити асимптотичне поводження нестійких розв'язків диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких прямують до нуля, і т. д. На основі цих асимптотичних формул було проведено дослідження спектральних властивостей самоспряжених диференціальних операторів вищих порядків.

ми коефіцієнтами у випадках внутрішнього і зовнішнього резонансів. Він також довів асимптотичність за параметром ε побудованого розв'язку і отримав оцінку для похибки наближення.

С. Ф. Фещенко побудував метод асимптотичного представлення інтегралів неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами для випадку, коли одна з власних частот системи при деяких значеннях може збігатися з частотою збурюючої періодичної сили. Він математично обгрунтував побудований метод і встановив оцінку похибки m-го наближення одержаних представлень. Досліджуючи рівняння руху механічної системи, при наявності певного малого збурення, з'ясувалося, що рівняння нульового та першого наближення припускають просту механічну інтерпретацію. Тому поряд з аналітичним викладом С. Ф. Фещенко розробив також правила, за якими можна одержувати рівняння цих наближень без попереднього складання точних рівнянь.

В 1955 році С. Ф. Фещенко отримав важливі результати, які стосувалися асимптотичного розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь виду $\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x,\ \tau\in[0;L]$ (4)

де x – n-мірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – дійсна квадратна матриця порядку n, яка допускає представлення $A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(\tau)$.

Для цих систем С. Ф. Фещенко показав, що при виконанні певних умов їх можна асимптотично розщепити на підсистеми нижчого порядку. Зокрема, він довів такі теореми.

Теорема 1. Припустимо, що корені характеристичного рівняння

$$\det\left|\left|A^{(0)}(\tau)-\lambda E\right|\right| = 0 \qquad (5)$$

(E – одинична матриця) можна розбити на дві групи $\lambda_1(\tau),\ldots,\ \lambda_r(\tau)$ та $\lambda_{r+1}(\tau),\ldots,\lambda_n(\tau)$ так, що жоден з коренів першої групи при всіх $\tau\in[0,L]$ не дорівнює кореням другої групи. Тоді, якщо $A(\tau,\varepsilon)$ на сегменті $[0,L]$ має похідну по τ всіх порядків, то система диференціальних рівнянь (4) має формальний розв'язок виду $x = U_1(\tau,\varepsilon)\xi_1 + U_2(\tau,\varepsilon)\xi_2$, де $U_1(\tau,\varepsilon),\ U_2(\tau,\varepsilon)$ – прямокутні матриці з розмірами відповідно $(n\times r)$, $(n\times n\text{-}r)$, а ξ_1 – r-вимірний вектор, ξ_2 - n-r-вимірний вектор, визначені системами диференціальних рівнянь

$$\frac{d\xi_1}{dt} = W_1(\tau,\varepsilon)\xi_1,\ \frac{d\xi_2}{dt} = W_2(\tau,\varepsilon)\xi_2$$

порядку відповідно r та n-r.

Теорема 2. Якщо $A(\tau,\varepsilon)$ задовольняють умовам теореми 1і власні числа

Частина праць І. М. Рапопорта стосується теорії лінійних та нелінійних інтегральних рівнянь. Він, зокрема, побудував теорію нелінійного інтегрального рівняння, пов'язаного з оберненою задачею теорії потенціала. В галузі лінійних інтегральних рівнянь він розробив метод розв'язання рівнянь – типу згортки, заснований на зведенні їх до граничних задач теорії аналітичних функцій.

Результати наукових досліджень І. М. Рапопорта мали суттєвий вплив на розвиток асимптотичних методів інтегрування лінійних диференціальних рівнянь, а пізніше використовувалися і узагальнювалися для дослідження інших класів диференціальних рівнянь.

Визнаним спеціалістом в галузі диференціальних рівнянь і їх застосувань був **Степан Федорович Фещенко.**

Найбільш вагомі математичні результати С. Ф. Фещенко отримав з проблеми застосування асимптотичних методів у теорії інтегрування диференціальних рівнянь із змінними та повільно змінними коефіцієнтами.

Перші результати С. Ф. Фещенко отримав ще в 1948–1949 роках. В роботі "Питання теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільно змінними коефіцієнтами" він розглядав рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\rho(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + q(\tau,\varepsilon)y = \varepsilon f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad (3)$$

де $\rho(\tau,\varepsilon), q(\tau,\varepsilon), f(\tau,\varepsilon)$ – функції, які повільно змінюються і допускають розвинення за степенями малого параметра ε. Особливо важливим у теоретичному плані, а також для розв'язування задач математичної фізики виявився розглянутий С. Ф. Фещенком випадок, коли функція $\upsilon(\tau) = \frac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt}$ при деяких τ з області його зміни співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння, складеного для рівняння (3). Цей випадок він назвав "резонансним".

С. Ф. Фещенко також сформулював і довів теореми, які дозволяють будувати асимптотичні розв'язки рівняння (3) у "нерезонансному випадку", коли функція $\upsilon(\tau)$ при будь-яких τ з його області зміни не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння.

Отримані С. Ф. Фещенком результати у цьому напрямку стали основою докторської дисертації "К теории асимптотических представлений интегралов системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами" (1951). В цій роботі С. Ф. Фещенко запропонував метод асимптотичного зображення розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із повільно змінни-

матриць

$$\Delta_1(\tau)=\frac{1}{2}[W_1(\tau)+W_1^*(\tau)],\ i=1,2,$$

де $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$ – діагональні клітини матриці $T^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)T(\tau)$ ($T(\tau)$ – матриця перетворення, $T^{-1}(\tau)$ – обернена до $T(\tau)$), $W_1^*(\tau)$, $W_2^*(\tau)$ – матриці, спряжені згідно до матриць $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$, не додатні, тоді для будь-якого $L > 0$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ можна вказати таку постійну $c > 0$, не залежну від ε, якщо тільки $x|_{t=0} = x_m|_{t=0}$ (x_m – m- наближення), тоді $|x - x_m| \le \varepsilon^m c$.

За допомогою теорем 1 і 2 можна асимптотично знизити порядок системи. В разі, якщо корені рівняння (5) різні на сегменті [0, L], то ці теореми дають асимптотичний розв'язок системи (4). Якщо корені характеристичного рівняння системи на сегменті [0, L] прості, то як наслідок із теорем С. Ф. Фещенка випливають теореми Біркгофа і Тамаркіна про асимптотичне зображення розв'язків таких систем.

В наступний період своєї наукової діяльності С. Ф. Фещенко разом з учнями узагальнив отримані результати на більш складні випадки резонансів, розповсюдив їх на нові класи рівнянь: рівняння із запізненням, рівняння в частинних похідних, інтегро-диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами.

Досліджуючи рівняння з частинними похідними, коефіцієнти яких є повільно змінні функції, С. Ф. Фещенко побудував асимптотичний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon\alpha(\tau,\varepsilon,x)\,u+\varepsilon\alpha(\tau,\varepsilon,x)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}. \qquad (6)$$

у поєднанні з визначеними початковими і однорідними граничними умовами.

Розв'язок такого рівняння визначається у вигляді ряду $u=\sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$, що приводить до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами. В роботі "Про асимптотичний розв'язок одного класу рівнянь в частинних похідних із змінними граничними умовами", підготовленій разом з академіком Г. М. Савіним, він вказав метод побудови асимптотичного розв'язку рівнянь типу (6) із змінними граничними умовами, хоча питання про існування і єдиність розв'язків такого типу задач в роботі не розглядалися.

С. Ф. Фещенко дослідив також питання про асимптотичне розв'язання диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами гіперболічного типу з

нульовими та змінними крайовими умовами. Розроблені ним методи знайшли практичну реалізацію і були успішно застосовані до знаходження зусиль у шахтних підйомних канатах.

У 1966 р. була опублікована у співавторстві з М. І. Шкілем та Л. Д. Ніколенко монографія „Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений", яка в 1967 р. була перевидана у США англійською мовою. В монографії викладено асимптотичні методи інтегрування лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких є функціями "повільного часу" $\tau = \varepsilon t$, де ε – малий додатний параметр. Область застосувань методу С. Ф. Фещенка досить широка, оскільки до лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є функції "повільного часу", можна звести рівняння з малими параметрами при старших похідних і ряд інших рівнянь.

Заснована Степаном Федоровичем наукова школа з теорії диференціальних рівнянь із повільно змінними коефіцієнтами розвивається і понині.

Великий внесок у подальший розвиток асимптотичних методів інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем зробив **Микола Іванович Шкіль.** У 1959 році він захистив кандидатську дисертацію на тему: "До питання про асимптотичне зображення розв'язків систем диференціальних рівнянь, які містять параметр", а в 1968 докторську – "Про деякі асимптотичні методи в теорії лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами".

М. І. Шкіль, розглядаючи асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем, вперше всебічно дослідив досить складні випадки внутрішніх і зовнішніх резонансів, які доволі часто зустрічаються в теорії і практиці. Він отримав ефективні результати, які стосуються розробки алгоритмів побудови наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з параметрами та їх математичного обґрунтування. Ним доведено, що наближені розв'язки є асимптотичним розвиненням точних розв'язків розглядуваних систем.

Розроблені М. І. Шкілем методи дозволяють будувати асимптотичні розв'язки:

- систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами;
- систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами;
- систем диференціальних рівнянь з сумовими коефіцієнтами;
- диференціальних рівнянь з малим параметром при частинних похідних;
- диференціальних рівнянь із загаюванням;
- рівнянь нейтрального типу;
- рівнянь з ізольованими особливостями;

М. І. Шкіль досліджував також випадки, коли $C_{k1}(\tau) \equiv 0$. Якщо при цьому $C_{k-1,1}(\tau) + C_{k2}(\tau) \neq 0$, то система (4) має формальний розв'язок виду (8), в якому $u(\tau, \mu)$, $\lambda(\tau, \mu)$ подаються формальними рядами за степенями параметра $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k-1}}$, а один формальний розв'язок розвивається за цілими степенями параметра ε.

Наведемо загальний результат, отриманий М. І. Шкілем для системи $\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x$, де ε – малий параметр, $\tau = \varepsilon t$, x – n-вимірний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ – дійсна квадратна матриця порядку n, яка допускає розвинення за степенями параметра ε:

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_k(\tau),$$

у випадку кратних коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0(\tau) - \lambda E) = 0.$$

Нехай виконуються умови:

1) матриця $A(\tau, \varepsilon)$ на відрізку $[0, L]$ має похідні по τ усіх порядків;

2) характеристичне рівняння має один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ постійної кратності n;

3) кореню $\lambda_0(\tau)$ відповідає $r >> 1$ елементарних дільників виду $(\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_1}, ..., (\lambda - \lambda_0(\tau))^{k_r}$;

4) виконується одне із співвідношень:

а) $k_1 = k_2 = ... = k_r = k$.

б) $k_1 > k_2 > ... > k_r$.

Тоді для випадку а) справедлива така теорема.

Теорема 4. Якщо виконуються умови 1) – 4), то для того щоб вектор

$$x = u(\tau, \mu) \exp\left(\int_0^t \lambda(\tau, \mu) dt\right),$$

де n-вимірний вектор $u(\tau, \mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau, \mu)$ представлені формальними рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \quad \lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=o}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau) \qquad (9)$$

в яких $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k}}$, був формальним вектор-розв'язком системи, необхідно і достатньо, щоб функція $(\lambda_1(\tau))^k$ для будь-якого $\tau \in [0, L]$ була коренем рівняння

- інтегродиференціальних рівнянь.

В роботах М. І. Шкіля вперше одержано результати, коли в характеристичному рівнянні з'являються кратні корені з кратними елементарними дільниками. Цей випадок досить часто зустрічається під час дослідження теоретичних питань і розв'язування задач практичного змісту. Наприклад, з кратними коренями доводиться мати справу при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля, розв'язуванні диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, в задачах оптимального керування тощо. В той же час розв'язування систем диференціальних рівнянь за таких умов є надзвичайно складним, оскільки така система, в загальному випадку, немає розв'язків, які допускають розвинення за цілими степенями параметра ε. Такі розв'язки, як довів М. І. Шкіль, представляються формальними рядами за різними дробовими степенями цього параметру, до того ж показники степеня залежать не тільки від кратності кореня характеристичного рівняння, але і від кратності відповідних їм елементарних дільників та певних співвідношень між коефіцієнтами розглядуваної системи.

М. І. Шкіль отримав принципово нові результати з асимптотичного представлення розв'язків систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, характеристичні рівняння яких містять кратні корені з кратними елементарними дільниками. Він, зокрема, (за умови, що характеристичне рівняння (5) має щонайменше один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ сталої кратності k, $2 \le k < n$, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності) довів такі теореми.

Теорема 3. Якщо $A(\tau, \varepsilon)$ має на відрізку [0, L] похідні по τ всіх порядків і матриця

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)[\frac{dT(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)T(\tau)], \qquad (7)$$

де $T(\tau)$ – матриця, яка зводить $A_0(\tau)$ до жорданової форми, а $T^{-1}(\tau)$ – матриця обернена до $T(\tau)$, така, що при будь-якому $\tau \in [0, L]$ її елемент $C_{k1}(\tau) \neq 0$, то система диференціальних рівнянь (4) має формальний розв'язок виду

$$x = u(\tau, \mu)\exp(\int_0^t \lambda(\tau, \mu)dt), \qquad (8)$$

де n–вимірний вектор $u(\tau, \mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau, \mu)$ зображуються формальними рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{S=0}^{\infty} \mu^S u_S(\tau), \quad \lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{S=1}^{\infty} \mu^S \lambda_S(\tau), \text{ в яких } \mu = \varepsilon^{\frac{1}{k}}.$$

$$\det \begin{vmatrix} \rho+c_{k1}(\tau), & c_{k\,k+1}(\tau), & \ldots, & c_{k\,l_{r-1}+1}(\tau) \\ c_{2k1}(\tau), & \rho+c_{2k1\,k+1}(\tau), & \ldots, & c_{2kl_{r-1}+1}(\tau) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}(\tau), & c_{n\,k+1}(\tau), & \ldots, & \rho+c_{n\,l_{r-1}+1}(\tau) \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

де $c_{k1}(\tau)$, ..., $c_{nl_{r-1}+1}(\tau)$, $l_{r-1} = (r-1)k$ елементи матриці (7).

Доведення достатньої умови даної теореми одночасно дає і метод побудови коефіцієнтів формальних рядів (9). Якщо рівняння (10) має r простих відмінних від нуля коренів, то за теоремою 4 можна знайти n формальних розв'язків системи. Аналогічна теорема справедлива і для випадку б).

М. І. Шкіль досліджував також диференціальні рівняння з частинними похідними та їх системи. В роботі "Асимптотичний розв'язок деяких класів систем лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, що мають параметр" розглядався випадок простих коренів характеристичного рівняння, а в роботі "Об асимптотическом решении систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными" досліджувався випадок кратних коренів.

В роботі "Приведение систем линейных дифференциальных уравнений к обобщенному L – диагональному виду" М. І. Шкіль розв'язав складну проблему отримання підстановок, які приводять широкий клас систем до L – діагонального виду (2) за умови кратних коренів, що мають кратні елементарні дільники. Він запропонував спосіб, який дозволяє зводити вихідну систему диференціальних рівнянь до системи виду (2), де замість діагональної матриці $W(t)$ розташовані Жорданові клітини.

Значне місце в сучасних дослідженнях М. І. Шкіля відводиться розв'язанню актуальної проблеми, що стосується асимптотичного розв'язування лінійних диференціальних рівнянь та їх систем при наявності точок повороту, а також за умови виродження. Результатом роботи над цими проблемами стала низка робіт, підготовлених у співпраці з учнями і опублікованих у провідних наукових виданнях. М. І. Шкілю та його учням вдалося за допомогою введення "збуреного" характеристичного рівняння отримати формальні розв'язки для окремих типів систем диференціальних рівнянь і довести, що ці розв'язки в околі точок повороту є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків розглядуваних систем.

5.4 Розвиток методики математики вченими університету

Вчені Київського НПУ імені М. Драгоманова зробили також вагомий внесок у розвиток вітчизняної шкільної математики та методики її викладання. Поряд з математиками-дослідниками на кафедрах університету працювали також математики методисти.

Одним із найактивніших організаторів і керівників Київського інституту народної освіти був К. Ф. Лебединцев.

Костянтин Феофанович Лебединцев народився 13 (25) жовтня 1878 року в місті Радомі у родині відомого історика, засновника і першого редактора журналу "Киевская старина". В 1896 р., після закінчення Другої Київської гімназії, він вступив на фізико-математичний факультет Київського університету, який закінчив у 1900 році з дипломом 1 ступеня.

З 1 вересня 1900 року К. Ф. Лебединцев почав свою педагогічну роботу як позаштатний викладач математики в Другій Київській гімназії, а в 1902 р. перейшов на посаду викладача математики в перше Київське комерційне училище. З 1902 р. К. Ф. Лебединцев – член Київського фізико-математичного товариства. А коли його звинуватили в "распространении преступніх воззваний" в 1909 р. покинув Україну і працював у Москві та Петербурзі.

Через 10 років він повертається знову в Київ і бере активну участь у творенні нової школи. Він склав першу програму з математики і перший навчальний план для семирічної трудової школи. Був головою спілки працівників школи і культурно-освітніх закладів. У 1921 р. став проректором КІНО, читав лекції з вищої математики і методики математики, був також деканом двох факультетів: соціального виховання і професійної освіти. У 1923 р. йому присвоєно звання професора.

Внесок К. Ф. Лебединцева в розвиток методики математики багатогранний і вагомий. Він опублікував багато науково-методичних статей, навчальних посібників і підручників. 1914 р. методичні роботи Лебединцева були видані окремою книгою "Метод навчання математиці в старій і новій школі". Серед іншого в ній заслуговують на увагу думки автора стосовно мети викладання математики в школі. Він писав: "Я полагаю, что роль математики, как общеобразовательного предмета, основывается на том значении, которое имела и имеет эта наука в

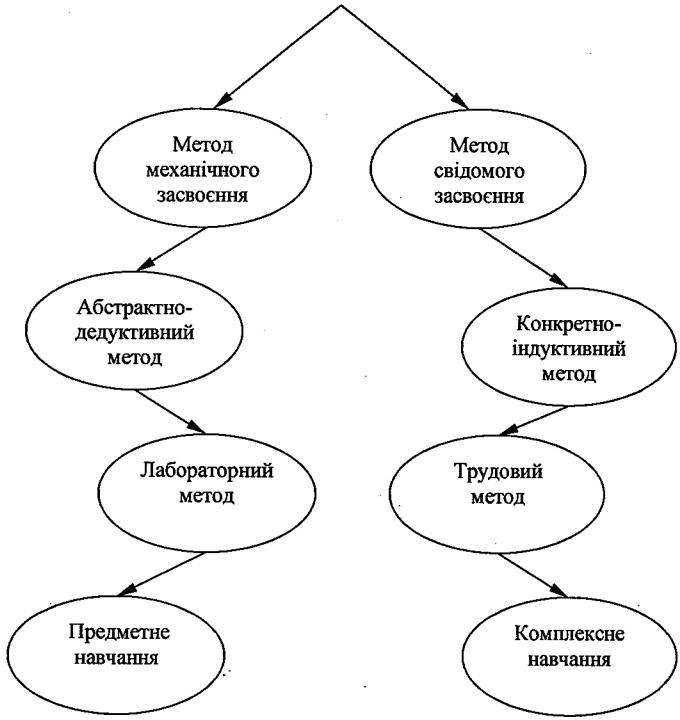


Рис. 30.

Посібник Лебединцева вигідно відрізняється від існуючих посібників з алгебри і початків аналізу доступністю викладення, вдалим поєднанням строгості з ітнуїцією і наочністю, вмілою реалізацією міжпредметних і внутрішніх предметних зв'язків. Матеріал викладається конкретно-індуктивним методом, просто і ясно. Складні для сприйняття поняття формуються на конкретних прикладах, а потім проводяться необхідні узагальнення. Основні поняття і методи математичного аналізу систематично і послідовно пов'язуються з алгеброю, геометрією, фізикою і практикою.

Наукові і методичні праці професора К. Ф. Лебединцева стали основою для розвитку методики математики на початку XX століття і ще довгий час будуть цікаві та корисні вчителям і науковцям.

том значении, которое имела и имеет эта наука в культурной жизни человечества... Она должна предстать перед учащимися и как орудие миропознания, и как научная система".

У 1918–1919 р. літературно-видавничий відділ Наркомпроса видав новий підручник К. Ф. Лебединцева "Керівництво алгебри" в двох частинах, в якому функції вперше ввійшли до курсу алгебри як органічна складова. Цей підручник був схвалений педагогічною спільнотою, витримав 12 видань а академік О. Ю. Шмідт назвав його "лучшим современным учебником алгебры".

До наших днів залишилися актуальними погляди К. Ф. Лебединцева стосовно методики математики як науки. У 1925 році в Києві була видана його книга "Вступ до сучасної методики математики". У передмові до неї автор наголошує: "В настоящее время методика математики не может быть собранием рецептов и догматических указаний, как следует вести себя учителю при проработке того или иного пункта программы, а должна быть научно-обоснованной системой положений, которые бы ясно указывали педагогу основную линию его работы и ориентировали бы его в способах достижения намеченной цели, но вместе с тем предоставляли бы ему достаточно свободы для практического творчества в рамках его школы".

Велику увагу в цій книзі К. Ф. Лебединцев приділив характеристиці методів навчання математики, подавши їх систематизацію у вигляді схеми, зображеної на малюнку.

Він вперше ввів і теоретично обгрунтував конкретно-індуктивний метод навчання математики, показав його переваги і місце у загальній схемі розвитку методів навчання математики, навів конкретні приклади його використання у процесі навчання. Запропоновані К. Ф. Лебединцевим назви і трактовки методів навчання математики і тепер вважаються загальноприйнятими.

К. Ф. Лебединцеву не вдалося закінчити задуману працю "Основы современной методики математики", він встиг написати лише три розділи, в тому числі розділ "Основные положения методики учения о функциях и элементов анализа в школах второй ступени".

Останньою працею Лебединцева стала книга "Преподавание алгебры и начал анализа", в якій він здійснив свій давній задум: конкретно-індуктивним методом викласти систематичний курс алгебри і початків аналізу. Вона була написана в 1923–1925 роках, але на той час не встигла побачити світ через передчасну смерть її автора. До друку в 1984 році її підготувала дочка вченого – О. К. Лебединцева, за участі З. І. Слєпкань.

В першій половині XX ст. основи методики викладання початкового і систематичного курсів арифметики, геометрії і тригонометрії разом з колективом математиків-методистів заклав професор О. М. Астряб.

Олександр Матвійович Астряб значну частину наукової діяльності присвятив створенню підручників і посібників для школи. Його праці"Наглядная геометрия" (1909) та "Задачник по наглядной геометрии" (1916) перекладені різними мовами і витримали багато видань. Вони містили планіметричний і стереометричний матеріал, включаючи теми на обчислення об'ємів многогранників та тіл обертання.

У 20–х роках О. М. Астряб багато працював над створенням підручників для молодшого (I–IV) і старшого (V–VII) концентрів трудової семирічної школи. Його "Наочна геометрія. Перший ступінь" (1922 р.), "Задачник до наочної геометрії" (1923 р.) і "Курс опытной геометрии. В четырех частях" (1923 р.) були побудовані за індуктивно-лабораторним принципом з широким використанням принципу фузіонізму.

У 1923–1929 р. авторським колективом за безпосередньої участі О. М. Астряба, а також ним самим видано книжки, які потім перевидавалися кілька разів: "Арифметичний задачник для першого року навчання", "До світла", "До праці", "Задачник для другого року навчання", "Геометрія на дослідах", "Геометрія для трудшкіл" та інші. У цих підручниках і посібниках привертають увагу широке унаочнення, зв'язок теорії з життям, доступний, цікавий і жвавий виклад матеріалу (задачі–оповідання, віршований виклад, математичні ігри), уміння активізувати учнів, спонукати їх самостійно виконувати завдання, досліджувати, робити відповідні висновки.

Принципове значення для піднесення математичної освіти, забезпечення систематичності й міцності знань учнів з математики мала стаття О. М. Астряба "Методика арифметичної задачі в сучасній трудшколі" (1929), в якій автор виступав проти "панування фабули задачі над математичною суттю". Критикуючи типізацію задач за фабулою, він зупинявся на питанні, які типи задач, згрупованих за ознакою відповідних математичних дій, бажано розв'язувати в школі. До таких типів він відносив: а) задачі на різницеве порівняння двох чисел; б) задачі на кратне порівняння двох чисел; в) задачі на проценти.

Кілька видань витримала колективна праця "Методика розв'язування задач на побудову", у якій О. М. Астряб виступив редактором і автором розділу "Загальні методичні зауваження до розв'язування задач на побудову в середній школі". Корисними для вчителів математики будуть і сьогодні міркуван-

ня автора з приводу користі від розв'язування задач на побудову.

"Розв'язування геометричних задач на побудову дає учням велику користь, особливо при політехнічному навчанні.

По-перше, щоб розв'язувати задачі на побудову, учень повинен ґрунтовно вивчити певну геометричну фігуру, положення її елементів у просторі, взаємозв'язок між ними тощо. Усе це впливає на розвиток просторових уявлень, виховує свідоме ставлення до просторової форми, яке так потрібне кожній людині в усіх галузях практичної діяльності.

По-друге, під час розв'язування задач на побудову учень повинен робити вступний аналіз умови задачі за рисунком, доводити правдивість певного процесу побудови, досліджувати можливість різних її випадків. Усе це вимагає від учня використання певних логічних тверджень та міркувань. Отже, розв'язування задач на побудову позитивно впливає на розвиток загального математичного мислення.

По-третє, розв'язуючи задачі на побудову, учень повинен широко застосовувати найрізноманітніші зв'язки між даними і шуканими елементами фігури, пригадувати велику кількість різноманітних теорем з різних розділів курсу геометрії, вміти з великого запасу відомих йому теорем вибрати саме ту, яка потрібна для розв'язання даної задачі. Отже, розв'язуючи такі задачі, треба щоразу відновляти в пам'яті вивчені теореми. Разом з цим учень набуває дуже корисних при політехнічному навчанні навичок щодо застосування загальних теоретичних тверджень до окремих конкретних випадків, дістає можливість пов'язувати теорію з практикою.

Нарешті, треба звернути увагу ще й на таке дуже важливе значення задач на побудову. Коли ми в систематичному курсі геометрії починаємо вперше вживати поняття про ту або іншу нову геометричну форму, то ми повинні дати не тільки означення цієї фігури, а й довести учням можливість її існування, тобто можливість побудови її простішим знаряддям (наприклад, циркулем і лінійкою). Таку вимогу, наприклад, підкреслює Евклід в своїх "Началах". Отже, ознайомлюючи учнів з поняттям, що таке трикутник, треба показати можливість побудувати його при певних умовах; даючи поняття про паралелограм, слід показати на окремих задачах можливість побудови і цієї фігури; даючи поняття про правильні многокутники, треба навчити учнів будувати ці многокутники, знаючи, скажімо, радіус кола і число сторін многокутника.

Отже, задачі на побудову повинні становити органічну частину всього теоретичного курсу елементарної геометрії в середній школі".

рії з практикою.

Багато уваги приділяв О. М. Астряб загальній методиці математики: розвитку самостійності і активності учнів, питанням міжпредметних зв'язків, організації позакласної роботи, елементам історизму у викладанні. Великого значення надавав Олександр Матвійович вихованню в учнів звички до користування підручником: "Треба прагнути до того, щоб учні в підручнику бачили знаряддя, яке допомагає засвоїти матеріал, опрацьований у класі під керівництвом учителя".

Погляди з питань історії математичної освіти і розвитку методико-математичної думки в Україні О. М. Астряб виклав у статтях: "З історії викладання математики в радянській школі" (1947 р.), "З історії розвитку методики викладання математики в школах України" (1957 р.), "Викладання математики в Росії і на Україні в XVII–XVIII ст." (1954 р.).

Майже двадцять років роботу математиків-методистів очолював **Іван Євгенович Шиманський**. Його науково-методичні праці переважно стосувалися викладання математичних дисциплін у педагогічних інститутах, методики викладання теорії дійсного числа, а також наближених обчислень.

У 1938 р. виходить його перша методична стаття, яка мала назву "Вивчення довжини кола і площ криволінійних поверхонь незалежно від поняття границі".

У 1955 р. виходить його стаття "До питання педагогізації викладання математичних дисциплін в педагогічних інститутах", в якій розглядається педагогізація викладання математичного аналізу. На початку роботи автор формулює основну мету вивчення курсу: дати студентам – майбутнім викладачам математики і фізики в середній школі – знання і навики основних ідей і прийомів диференціального і інтегрального числень на сучасному науковому та методологічному рівні, особливо звертаючи увагу на ті з них, що найближче відносяться до питань елементарної математики середньої школи. Розкриває зміст поняття "педагогізація курсу" і вказує шляхи її реалізації в навчальному процесі. "Педагогізація курсу математичного аналізу полягає в ув'язці його викладання з профілем майбутнього спеціаліста, яка повинна здійснюватись так:

1) всі питання програми, що мають безпосереднє відношення до курсу математики середньої школи, подаються в такий спосіб, щоб студент – майбутній учитель – міг використати цей матеріал (хоча б і не в повній мірі) в своїй педагогічній роботі (наприклад, ірраціональні числа, елементарні функції, границя по-

Говорячи про завдання політехнічного навчання на уроках і позакласних заняттях з математики, учений передбачав такі шляхи їх здійснення: підвищення обчислювальної культури учнів і озброєння їх відповідними практичними навичками; проведення вимірювальних робіт на місцевості та інших вимірювальних робіт і прищеплення навичок користування вимірювальними приладами; використання на уроках математики виробничого матеріалу і розв'язування задач, які розкривають ті або інші процеси виробництва або будову найбільш поширених сучасних машин і інструментів; технічне моделювання у зв'язку з виготовленням наочних посібників. Цій проблемі О. М. Астряб присвятив статтю "Особливості викладання математики в середній школі при політехнічному навчанні", надруковану в 1954 р. у збірнику статей за його редакцією.

Розглядаючи проблему ознайомлення учнів з історією математики він робить такий висновок: "При політехнічному навчанні на ознайомлення учнів з історією розвитку математики треба робити ще більший наголос, треба виховувати ще більший інтерес в учнів до тих чи інших відомостей з історії математики взагалі і зокрема до ролі наших вітчизняних математиків в розвитку математики як науки. При цьому вчитель математики не повинен обмежуватися ознайомленням учнів тільки з датами з життя нашого вченого або тільки переліком певних фактів з історії математики. Викладачеві треба щоразу особливий наголос робити на таких особливостях всієї діяльності наших вітчизняних вчених-математиків:

– по-перше, на прагнення їх поєднувати теорію з практичними застосуваннями (Чебишев, Остроградський, радянські вчені);

– по-друге, на шуканнях нових прогресивних шляхів для розв'язання певної наукової проблеми і наполегливій упертій боротьбі із застарілими консервативними поглядами (Лобачевський, Марков, Ляпунов);

– по-третє, на прагненні наших вчених математичним знанням озброювати широкі кола людей, математичну культуру робити досягненням для всього людства (Остроградський, Чебишов, Лобачевський, Ковалевська, наші радянські вчені-математики)".

Характерною особливістю багатьох робіт О. М. Астряба є історичний підхід до теми, критичний аналіз літератури, врахування психологічних особливостей учнів певного віку, переконливість, обґрунтованість і конкретність методичних пропозицій. Він неодноразово наголошував на тому, що вдосконалення викладання математики має відбуватися у двох напрямках – підвищення ідейно-теоретичного рівня викладання та органічний зв'язок тео-

слідовності та ін.). При викладанні тих питань програми, які мають посереднє відношення до курсу математики середньої школи, звертається увага студентів на те, що в темі подається наукове обґрунтування питання, яке в середній школі викладається спрощено (наприклад, доведення існування границі монотонної обмеженої змінної та ін.);

2) треба ознайомлювати студентів з тими застосуваннями теоретичних питань курсу математичного аналізу, які стосуються до політехнізації середньої школи (наприклад, застосування повного диференціалу функції до наближених обчислень, розв'язання задач, взятих з техніки, та ін.);

3) нарешті потрібно вказувати студентам на той матеріал, який доцільно розглянути на шкільному математичному гуртку".

Після висвітлення загальних положень, автор подає конкретні пропозиції стосовно педагогізації викладання окремих тем курсу математичного аналізу (Множина дійсних чисел. Границя функції і неперервність. Елементарні функції. Похідні. Властивості диференціювальних функцій. Диференціали функцій. Означений інтеграл. Застосування інтегрального числення до геометрії. Похідні і диференціали функцій декількох змінних. Подвійні інтеграли. Потрійні інтеграли. Числові ряди. Функціональні ряди. Ряд Тейлора. Тригонометричні ряди.).

Розглядаючи тему "Множина дійсних чисел", І. Є. Шиманський рекомендує подавати означення дійсного числа так, як це пропонує професор Є. Я. Ремез – за допомогою системи сумісних двосторонніх раціональних наближень (a, а) з довільно малою амплітудою. Цю ідею він розвинув у статтях: "Про викладання теорії дійсних чисел на фізико-математичних факультетах педагогічних інститутів" (1955) і "Методика викладання ірраціональних чисел у середній школі" (1964).

В останній статті І. Є. Шиманський проаналізував методичні труднощі у вивченні ірраціональних чисел у школі й дійшов висновку, що ці труднощі пов'язані з трактуванням нескінченного. Більшість теорій ірраціональних, а значить і дійсних чисел, опираються на концепцію *актуальної нескінченності*, тобто такої, яка задана вже вся цілком, у готовому вигляді. В основі теорії ірраціональних чисел за Дедекіндом лежить поняття про перерізи в нескінченній множині раціональних чисел. Ірраціональне число тут означається як граничне число такого виду перерізу, при якому в нижньому класі перерізу немає найбільшого, а у верхньому – немає найменшого числа. Для введення арифметичних дій над ірраціональними числами розглядають десяткові наближення

ірраціонального числа і показують, що *нескінченний* десятковий дріб можна розглядати як представлення дійсного числа.

У теорії Вейєрштрасса представлення ірраціонального числа у вигляді неперіодичного *нескінченного* дробу служить відправною точкою для побудови теорії ірраціональних чисел.

Побудова Кантора теорії дійсних чисел тісно пов'язана з поняттям границі. Г. Кантор розглядав таке мінімальне розширення поля раціональних чисел, всяка фундаментальна послідовність якого є збіжною. Саме розширення називають полем дійсних чисел, а його елементи – дійсними числами.

Розглядають також аксіоматичне означення дійсних чисел, яке починається так: "Полем дійсних чисел називається непуста множина ...". Далі йде перерахування властивостей цієї множини (11 аксіом). І в цьому випадку множина вважається вже заданою, готовою.

У наведених теоріях дійсних чисел для введення арифметичних дій над ірраціональними числами так чи інакше розглядають зображення ірраціональних чисел у вигляді неперіодичного нескінченного десяткового дробу. Самі означення суми, різниці, добутку, частки даються через поняття точних граней множини.

Зрозуміло, що систематичний виклад хоча б однієї із розглянутих теорій дійсних чисел для учнів середньої школи є досить складним і "...повинен спиратися на поняття і прийоми мислення, зв'язані з концепцією завершеної в собі нескінченної множини, тобто з актуальною нескінченністю".

І. Є. Шиманський, слідом за стародавніми греками, пропонував розглядати нескінченність "лише в її потенціальній формі, тобто як зняття меж із скінченного". Автор стверджує, що "цілком можливо оперувати об'єктами, що відповідають певному добре означеному загальному поняттю, нескінченному за своїм об'ємом, без того, щоб навіть існувала неодмінно відповідна множина (завершена сукупність) усіх об'єктів, які відповідають цьому поняттю..." І. Є. Шиманський позначає це як потенціальну нескінченність в антично-елементарному стилі і вказує, що такій концепції найбільше відповідає теорія ірраціональних чисел, яка виходить з поняття системи сумісних наближень з довільно малою амплітудою – *визначальної системи наближень.*

Визначальна система наближень являє собою в кожному окремому випадку якийсь *клас* наближень, породжуваних певним правилом. Учневі при цьому немає потреби уявляти, що таких наближень є нескінченне число, і не треба об'єднувати сумісні наближення розглядуваної системи наближень в

Проблемами методики математики понад 50 років займається **Григорій Петрович Бевз**. Спочатку це були переважно питання методики викладання алгебри, які він досліджував у зв'язку з роботою над кандидатською дисертацією "Доведення в шкільному курсі алгебри" (1961). Уже тут Г. П. Бевз вніс кілька раціональних пропозицій щодо поліпшення формулювань і доведень теорем у шкільному курсі алгебри, виявив немало грубих помилок у тодішніх підручниках і навчальних посібниках і показав, як їх можна виправити. В результаті сучасна шкільна математика позбулася багатьох недоречностей, які раніше траплялися в ній досить часто. В різні часи таким уточненням автор присвятив кілька окремих статей: про числа, про вирази, про величини, про вектори, про тотожні перетворення тощо. Зважаючи на таку вимогливість до наукової коректності автора редакція УРЕ давала йому на рецензії багато математичних статей інших авторів і надрукувала кілька його статей, зокрема: *Дріб, Дійсні числа, Ірраціональні числа, Комплексні числа, Ланцюгові дроби* тощо.

У посібнику для студентів "Методика викладання математики. Загальні питання" (1968) Г. П. Бевз запропонував новий зміст курсу методики математики і висвітлив найактуальніші проблеми методики викладання математики в тодішніх школах. Згодом матеріал цього посібника він доповнив аналізом важливіших питань викладання конкретних шкільних тем (числових множин, виразів, рівнянь, функцій, похідної, інтеграла, планіметрії та стереометрії) і опублікував у посібнику "Методика викладання математики" (1968, 19972, 1977, 1989), за яким навчалися методики майбутні вчителі математики України впродовж кількох десятиліть. Докладніше важливіші проблеми методики викладання алгебри висвітлив у книжці для вчителів "Методика викладання алгебри" (1971).

Г. П. Бевз, працюючи над проблемою "Задачі в шкільному курсі математики", дав нове трактування математичної задачі, уточнив поняття *задача, вправа* і співвідношення між ними. Крім традиційного поділу задач на 3 види (на обчислення, побудову і доведення), вичленив *задачі на дослідження* і розробив методику їх розв'язування в школі. Розмежував поняття *розв'язок, розв'язання, розв'язування, рішення*, відтоді така термінологія утвердилася в Україні. Окремі питання методики розв'язування задач в школі вирішено в книгах: "Методика викладання математики. Математичні задачі і їх розв'язування" (1967), "Методика розв'язування алгебраїчних задач" (1975), "Методика викладання математики. Практикум" (1981), "Методика розв'язування стереометричних задач" (1988) і в багатьох статтях.

єдине ціле.

Автор підкреслює, що "у середній школі учень повинен виразно уявляти тільки те, що він має справу з дійсним числом щоразу, коли утворюється система суміжних наближень з довільною амплітудою". Він пропонує не давати означення суми, різниці, добутку, частки ірраціональних чисел, а лише вказувати межі, в яких буде знаходитися шуканий результат. У статті він наводить загальний і конкретний приклади.

Задача знаходження суми $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n \ldots + 0, \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \ldots \beta_n \ldots$ розв'язується безпосередньо визначенням системи наближень для шуканої суми у вигляді

$(0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n + 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n; 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha'_n + 0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta'_n)$,

де $\alpha'_n = \alpha_n + 1$; $\beta'_n = \beta_n + 1$ (n – довільне натуральне число).

У випадку суми $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, якщо для кожного з доданків маємо наближення з k десятковими знаками, то дістанемо наближення з амплітудою $2 \cdot 10^{-k}$, з якого через округлення можна дістати також більш звичайне наближення з амплітудою $10^{-(k-1)}$. Наприклад, при $k = 2$ дістанемо:

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16$, або $3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,2$.

Важливою перевагою викладання ірраціональних чисел у середній школі таким способом є те, що тут немає потреби доводити існування єдиного числа, яке є сумою або добутком кількох дійсних чисел. Для викладання такої теорії ірраціональних чисел необхідно ознайомити учнів з наближеними обчисленнями методом меж.

І. Є. Шиманський підтримував прогресивні тенденції в розвитку математичної освіти і сприяв їх упровадженню в навчальний процес. Він активно пропагує програмоване навчання, готує відповідний посібник і презентує його у статті "Про програмований посібник з алгебри" (1967).

В середині 60–х років міжнародний рух за модернізацію шкільного курсу математики спричинив необхідність його оновлення і в СРСР. Для методичних кафедр педагогічних інститутів актуальною стала проблема по удосконаленню навчальних програм. І. Є. Шиманський виступив зі статтею "Шляхи модернізації програм з математики для середньої школи" (1969), в якій підкреслював, що основними напрямами перебудови викладання математики в середній школі є ті, що наближають шкільну математику до сучасної математичної науки.

Значне місце у дослідженнях Г. П. Бевза відводиться проблемі методів навчання. У 1978–1988 р. він читав для методистів-математиків СРСР цикли лекцій, присвячені розв'язанню цієї проблеми, а в 2003 р. видав брошуру "Методи навчання математики". В ній і в кількох статтях він проаналізував усі відомі трактування цього поняття, різні класифікації методів навчання та їх оцінки і прийшов до висновку: "Щоб реально допомогти учителям у вирішенні проблеми методів навчання, слід не добудовувати-перебудовувати старезну будівлю теорії методів навчання, а побудувати нову, взявши за основу не абстрактні твердження, а природний процес навчання в реальній сучасній школі". Важливіші методи навчання математики він звів у стрункy систему, згрупувавши їх за такими рубриками: методи активізації уваги учнів, методи викладу нового матеріалу, методи закріплення знань та умінь, методи навчання розв'язування задач. Він увів нові терміни *проскриптивний* та *інскриптивний* методи навчання математики, які відповідають давньогрецьким і давньоіндійським традиціям, а також звернув увагу на те, що *методи розв'язування задач* і *методи навчання розв'язування задач* – істотно різні.

Кілька статей, опублікованих у Москві і Києві, Г. П. Бевз присвятив проблемам методичної підготовки учителів математики. У статті "Чергові завдання методистів-математиків" (1976) він виокремив три групи важливіших завдань: 1) створення і удосконалення методичних посібників для вчителів-практиків, які б допомагали їм краще навчати і виховувати учнів; 2) поліпшення методичної підготовки студентів – майбутніх учителів математики; 3) опрацювання наукових основ самої методики математики.

Стосовно останньої групи завдань, крім іншого, автор зазначав: "Якщо ми відстоюємо тезу про те, що методика математики є наука, то повинні і ставитись до неї як до науки і вдосконалювати її як науку. Для цього насамперед треба виділити її основні поняття, означити або описати їх, уточнити терміни, сформулювати найважливіші положення цієї науки, мотивувати їх і т.д.... Уточнити систему понять і термінів методики математики, поставити її на міцний науковий фундамент – нелегке але дуже важливе завдання. Треба також по можливості чіткіше і повніше сформулювати найважливіші принципи навчання математиці і здобути з них корисні практичні наслідки". В статті також запропоновано кілька великих тем для колективних опрацювань і 12 вужчих – для дисертаційних досліджень.

Особливого значення у процесі навчання математики Г. П. Бевз надає вихованню учнів. Цій проблемі, крім інших публікацій, він присвятив окрему брошуру "Виховання учнів математикою" (2005). У її передмові зауважу-

ється: "Хоч автор, відповідно до професії, займається здебільшого питаннями навчання математики, все ж вважає, що для суспільства в багатьох відношеннях виховання важливіше від навчання". У брошурі окремо розглянуто проблеми виховання: культури мовлення, культури мислення, патріотизму, наукового світогляду, культури поведінки, винахідливості, естетичних смаків тощо.

Кілька статей і виступів Г. П. Бевз присвятив українській математичній термінології: "Омоніми і синоніми в математиці", "Ще раз про термінологію" (2003), "Про походження деяких математичних термінів" (2002). Останню статтю з незначними змінами передрукував і журнал "Українська мова та література". Раніше методисти вважали недопустимим вживати в математиці омоніми, це формулювалося навіть у вигляді визначального принципу: "Кожний термін (символ) слід вживати не більше одного разу в ролі означуваного" (А. А. Столяр). Г. П. Бевз показав, що такі побажання далекі від практики. Наприклад, квадратом називають і другий степінь числа, і вид прямокутника (і замкнену ламану, і частину площини, обмеженої нею). Омонімами є також *поле, кільце, група, алгебра* і сотні інших. Чи ж потрібно їх замінювати новими словами? "Омонімів у математичній мові є немало. Коли б їх не було, то математична термінологія мала б термінів у кілька разів більше, ніж тепер містить. Вивчати математику з такою великою кількістю термінів було б надто важко. Тому не треба намагатися викинути омоніми з математичної мови, замість цього слід грамотно використовувати їх" (МШ, 03, 1, С. 38).

Чи не найбільший реальний внесок у розвиток математичної освіти в Україні Г. П. Бевз зробив, створивши підручники математики для всіх 5–11 класів загальноосвітніх шкіл, у яких реально втілено більшість із того нового, що автор запропонував у своїх методичних дослідженнях. Його "Алгебра, 7–9" перекладена російською, польською, румунською, угорською мовами, надрукована шрифтом Брайля. У цьому підручнику в курс алгебри 9 класу вперше введено новий розділ "Елементи прикладної математики", який, крім інших, містить параграфи "Математичне моделювання", "Перші відомості про статистику", "Відсоткові розрахунки" тощо.

Підручник "Геометрия, 7–11" (створений у співавторстві з В. Г. Бевз і Н. Г. Владіміровою) зайняв друге місце на Всесоюзному конкурсі підручників з математики для середньої загальноосвітньої школи в 1988 р., затверджений як підручник для шкіл Російської Федерації і 3 рази (1992, 1994, 1996) передруковувався у Москві. В Україні доопрацьовані підручники ви-

1.Раціональний вибір мети уроку, його змісту і структури.

2.Застосування методів і прийомів роботи, що активізують пізнавальну діяльність учнів, розвивають їх творчі здібності й інтерес до математики.

3.Вміле поєднання колективних, групових та індивідуальних форм навчання.

4.Використання різних форм самостійної роботи учнів.

5.Удосконалення системи вправ.

6.Раціональне використання наочних посібників та технічних засобів навчання.

7.Удосконалення форм контролю успішності учнів.

8.Поєднання теорії з практичною діяльністю учнів.

9.Вдосконалення міжпредметних зв'язків.

10. Підвищення інтересу учнів до математики.

11. Посилення органічного зв'язку навчання та виховання на уроках математики.

Підвищенню ефективності навчання математики та рівня математичної підготовки учнів сприяють факультативні курси. З. І. Слєпкань розробила зміст факультативних курсів "Елементи комбінаторики" і "Початки теорії ймовірностей", які були надруковані в книзі "Посібник для факультативних занять у 10 класі" (1970).

Усі дослідження З. І. Слєпкань пронизує інтерес до проблем навчання алгебри і початків аналізу в загальноосвітній школі і професійно-технічних училищах. Розв'язанню цієї проблеми присвячено спеціальні статті, підручники і навчально-методичні посібники, підготовлені одноосібно і у співавторстві. Серед них слід відмітити "Системи рівнянь другого степеня" (1964), "Алгебра і елементарні функції" (1968), "Методика викладання алгебри і початків аналізу". З. І. Слєпкань сприяла виданню посібника для вчителів К. Ф. Лебединцева "Преподавание алгебры и начал анализа" (1984).

Новий етап у розв'язанні проблеми навчання алгебри і початків аналізу – створення разом з М. І. Шкілем і О. С. Дубинчук підручників для загальноосвітніх навчальних закладів українською і російською мовами: "Алгебра і початки аналізу, 10–11" (1995, 1998, 2001), "Алгебра і початки аналізу, 10" (2002, 2003), "Алгебра і початки аналізу, 11" (2003, 2004), а також навчального посібника для учнів середніх ПТУ: "Алгебра і початки аналізу" (1992, 2000). Комплект підручників для вивчення алгебра і початків аналізу доповнює підготовлений під керівництвом З. І. Слєпкань "Збірник задач з алгебри і початків аналізу" (2003).

ходять у двох книгах "Геометрія, 7–9" (2001, 2004) і "Геометрія, 10–11" (2002, 2004). Друге місце на Всеукраїнському конкурсі навчальних підручників для загальноосвітніх навчальних закладів у 2004 р. посів підручник Г. П. Бевза, В. Г. Бевз "Математика, 5".

Г. П. Бевз створив також підручники для профільних шкіл. В пробному підручнику з математики для 10–11 класів гуманітарного профілю представлено немало оригінальних тем, цікавих для гуманітаріїв. Зокрема, такі: "Омоніми і синоніми", "Багатовимірні простори", "Комбінації геометричних фігур", "Статистична ймовірність і випадкові величини" тощо. Для класів поглибленого вивчення математики він створив "Геометрію, 10–11". Для учнів таких класів, як і для всіх любителів геометрії, Г. П. Бевз надрукував окремі книжечки "Геометрія тетраедра", "Геометрія чотирикутника", "Геометрія кіл", "Геометрія трикутника".

Провідним вченим з методики математики є доктор педагогічних наук, професор **Зінаїда Іванівна Слєпкань**. Її внесок у розвиток цієї науки великий і багатогранний. Вона отримала значні здобутки, які стосуються питань загальної і спеціальних методик, розвитку методики математики середньої і вищої школи.

Перші дослідження З. І. Слєпкань стосувалися культури математичних обчислень і стали основою кандидатської дисертації "Культура тригонометричних обчислень у восьмирічній і середній школах" (1962). Нового і більш сучасного рівня ці дослідження досягли під час швидкого розвитку ЕОМ і широкого застосування калькуляторів у навчанні математики. У цей час З. І. Слєпкань видає книгу "Обчислення на мікрокалькуляторах" (1985), яка ознайомлювала учнів і вчителів з принципом роботи мікрокалькуляторів і правилами виконання з їх допомогою арифметичних дій, обчислення значень функцій, розв'язування квадратних рівнянь і систем лінійних рівнянь.

Велике теоретичне і практичне значення для вчителів практиків і студентів – майбутніх учителів математики мали роботи З. І. Слєпкань присвячені ефективності уроків математики. У роботі "Шляхи підвищення ефективності уроків з математики" // "Урок математики в школі" (1977) вона дала тлумачення ефективного уроку: "Ефективним, на нашу думку, слід вважати такий урок з математики, побудова і проведення якого максимально сприяє досягненню поставлених перед уроком цілей. Ефективно проведений урок дає можливість вчителю досягти оптимальних результатів навчання". В цій же роботі визначалися основні шляхи підвищення ефективності уроків:

Крім навчальних посібників з алгебри і початків аналізу для учнів середніх ПТУ, З. І. Слєпкань розробляла методику навчання математики для таких закладів. Разом з О. С. Дубинчук вона підготувала дві книги:

"Преподавание математики в средних ПТУ. 1–й год обучения" (1985) і "Преподавание математики в средних ПТУ. 2–й год обучения" (1988). Ще одну книгу "Методичні особливості навчання геометрії в середньому ПТУ" (1992) вона написала у співавторстві з О. С. Дубинчук і С. Н. Філіповою.

Велику роль для розвитку методичної думки в Україні відіграла книга З. І. Слєпкань "Психолого-педагогічні основи навчання математики" (1983). У цьому посібнику, який має монографічний характер, зроблено аналіз психологічних закономірностей окремих навчальних процесів: засвоєння математичних понять, розв'язування задач, доведення теорем. На основі психологічних теорій навчання і дидактичних систем розглянуто шляхи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення шкільного курсу математики і можливості управління цією діяльністю.

У розділі "Психолого-педагогические основы обучения учащихся доказательствам" З. І. Слєпкань розкриває розуміння загальної дидактичної задачі навчання доведенням і звертає увагу на необхідність використовувати у процесі навчання математики готові доведення, що пропонуються вчителем або є у підручнику. "Готові доведення повинні виступати як моделі, на яких учні навчаються загальних і специфічних дій і прийомів розумової діяльності, що лежать в основі вміння доводити, застосовувати різні методи доведення, самостійно шукати доведення за аналогією з вивченим. Крім того, при частково-пошуковому вивченні готових доведень (евристична бесіда) вчитель розкриває учням шляхи відкриття способу доведення, вчить їх обґрунтовувати, міркувати, самостійно шукати окремі елементи доведення.

Проблему навчання доведенням доцільно розчленувати на кілька послідовних дидактичних завдань, що розв'язуються:

1) вивчення готових доведень, уміння відтворити їх:

2) самостійна побудова доведення за аналогією з вивченим;

3) пошук і побудова доведення вказаним учителем методом або способом;

4) самостійний пошук і виклад учнями доведень математичних тверджень" [437, с. 83].

Підсумком більш ніж тридцятилітньої роботи З. І. Слєпкань у галузі методики навчання математики стала докторська дисертація на тему: "Методическая система реализации развивающей функции обучения математики в средней школе" (1987), в якій розроблено науково-обгрунтовану теоретичну

концепцію і методичну систему цілеспрямованої реалізації розвивальної функції навчання математики.

Результати своїх наукових досліджень у галузі методики математики та багаторічний досвід викладання цієї дисципліни у вищих навчальних закладах З. І. Слєпкань узагальнила в підручнику для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів "Методика навчання математики" (2000 р.). Підручник складається з двох частин: загальної методики і методики навчання окремих предметів. В ньому розглядаються різні можливі підходи до вивчення навчального матеріалу з основних змістових ліній шкільного курсу, контролю успішності учнів, організації позакласної роботи з математики. Методика навчання окремих предметів шкільного курсу розкривається відповідно до ступенів навчання – основна і старша школа, і з урахуванням передового педагогічного досвіду вчителів України і зарубіжних країн. Особливістю підручника є використання досягнень психолого-педагогічної науки і шкільної практики у навчанні математики учнів різних вікових груп.

У зв'язку з реформуванням системи вищої освіти і підготовкою магістрів З. І. Слєпкань підготувала і видала навчальний посібник "Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі" (2000, 2005). Матеріали цієї книги допоможуть майбутнім магістрам ознайомитися з метою, завданнями, структурою та напрямами реформування вищої освіти. Окремі розділи посібника присвячені висвітленню методологічних, психологічних і педагогічних основ навчального процесу у вищій школі. Особлива увага в роботі приділяється питанням педагогічного контролю, науково-дослідницької роботи, післядипломної освіти. Автор врахувала зміни, що відбуваються у діяльності вищих навчальних закладів і розглянула передумови приєднання системи вищої освіти України до Болонського процесу.

Значне місце в науковій діяльності З. І. Слєпкань відводиться розробці стандартів і програм з математики для вищої і середньої школи.

Сучасні дослідження З. І. Слєпкань окреслюють питання розвивального навчання математики, особистісно-орієнтованого навчання у середніх та вищих закладах освіти, розвитку творчого мислення учнів і студентів тощо. Цим проблемам присвячені окремі статті у журналах та наукових збірниках, виступи на конференціях та семінарах, а також посібник "Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики" (2004).

За сумісництвом на кафедрі математики та методики викладання мате-

У докторській дисертації "Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи" М. І. Бурда розробив концепцію геометричної освіти, визначив наукові принципи відбору змісту навчального матеріалу в курсах геометрії і рівні програмних вимог до формування умінь. Визначивши зміст і операційний склад геометричних умінь, які характеризують сучасну геометричну підготовку учнів, він побудував і науково обґрунтував методичну систему формування вмінь учнів у процесі вивчення геометрії в основній школі.

М. І. Бурда розробив методичну концепцію диференційованого навчання математики. Він наголошує, що зміст математики має бути розрахований на здійснення основних видів диференціації: 1) за змістом навчального матеріалу (програми і підручники відрізняються обсягом матеріалу, його змістом і упорядкованістю); 2) за рівнями програмних вимог до математичної підготовки учнів. Реалізація цього положення знаходить відображення у розробленій ним *двовимірній моделі диференціації навчання* (табл. 5).

Таблиця 5

Двовимірна модель диференціації навчання

Курси / Рівні	А	В	С	Д
1. Середній	$А_1$	$В_1$	$С_1$	$Д_1$
2. Достатній	$А_2$	$В_2$	$С_2$	$Д_2$
3. Високий	$А_3$	$В_3$	$С_3$	$Д_3$

Основні поняття цієї моделі – курс математики і рівень вимог. Шкільна математична освіта реалізується шляхом вивчення таких курсів математики:

1. *Курс А* (загальноосвітній). Вивчають учні 1–9–х класів загальноосвітніх навчальних закладів. Курс завершальний і забезпечує базову математичну підготовку учнів.

2. *Курс В* (прикладний) адресований учням 10–12–х класів, що обрали для себе ті галузі діяльності, в яких математика відіграє роль апарату, спеціфічного засобу для вивчення і аналізу закономірностей навколишнього світу. Курс вивчається на фізичних, технічних, хіміко-біологічних, екологічних, агробіологічних й інших профілях та у школах природничого спрямування. Цей курс вивчається і у школах, де немає профілів.

3. *Курс С* (загальнокультурний), призначений для учнів 10–12–х класів, математика для яких – лише елемент загальної культури. Це ті, хто навчається

матики працює **Михайло Іванович Бурда** – член-кореспондент АПН України, доктор педагогічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, заступник директора Інституту педагогіки АПН України.

Народився Михайло Іванович 2 січня 1949 року в с. Красний Колядин Талалаївського району Чернігівської області.

У 1969 р. закінчив фізико математичний факультет Ніжинського державного педагогічного інституту імені М. В. Гоголя і розпочав педагогічну діяльність. З 1969 по 1975 рр. працював учителем математики в середніх школах № 58 і № 117 м. Києва.

У 1975 р. розпочав наукову діяльність у Науково-дослідному інституті педагогіки: молодший науковий співробітник, старший науковий співробітник, завідуючий лабораторією математичної і фізичної освіти.

У 1981 р. захистив кандидатську дисертацію на тему "Формування в учнів 4–8 класів умінь доводити геометричні твердження" і отримав науковий ступінь кандидата педагогічних наук.

В 1990 р. захистив докторську дисертацію на тему: "Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи" і отримав науковий ступінь доктора педагогічних наук.

З 1996 р. – заступник директора Інституту педагогіки АПН України. З 1999 р. – член-кореспондент АПН України.

Під його керівництвом підготовлено і захищено 9 кандидатських дисертацій. Він входить до складу редколегій чотирьох фахових журналів. Опублікував понад 167 наукових праць з проблем методики навчання математики, змісту загальної середньої освіти. Серед них підручники (Геометрія 7–8", "Математика 10–11") і методичні посібники ("Розв'язування задач на побудову", "Вивчення геометрії в основній школі").

Наукові інтереси стосуються геометрії та методики її навчання, а також проблеми відбору змісту шкільної математики. В кандидатській дисертації: "Формування в учнів 4–8 класів умінь доводити геометричні твердження". М. І. Бурда розглянув уміння учнів доводити геометричні твердження як певні розумові дії трьох видів: орієнтовні, виконавчі, контрольно-коректуючі та виділив компоненти, що складають зміст кожного із вказаних видів розумових дій. Він побудував модель формування інтелектуальних умінь учнів доводити твердження, в якій реалізовані основні психолого-дидактичні і методичні закономірності розглянутої проблеми, розроблено прийоми роботи учителя і відповідну систему вправ для цілеспрямованого формування в учнів 4–8 класів умінь доводити геометричні твердження.

на гуманітарних профілях (мовно-літературний, суспільно-історичний, художньо-естетичний тощо) та у школах гуманітарного спрямування.

4. *Курс Д* (поглиблений) для учнів 8 – 12–х класів, які планують пов'язати свою майбутню професію з математикою (математичні, фізико-математичні профілі, окремі ліцеї, коледжі, спеціалізовані фізико-математичні школи, школи і класи з поглибленим вивченням математики).

Курси математики – рівнево диференційовані, тобто орієнтовані на три рівні вимог до математичної підготовки: середній, достатній, високий. Рівень вимог для кожного курсу математики включає переліки опорних уявлень, знань, умінь, навичок і способів математичної діяльності. Останні відображають розвиток особистісних якостей учня.

Сучасні дослідження М. І. Бурди присвячені проблемі відбору змісту шкільної математики і його відображення в підручниках. Розв'язання цієї проблеми, яка набула особливого значення у зв'язку з новими соціальними замовленнями на цілі і завдання шкільної освіти, М. І. Бурда проводить у кілька етапів. Спочатку розробляється концепція шкільного курсу математики, яка покликана забезпечити цілісність змісту, а також визначаються основи і принципи відбору змісту. На цій основі створюються Державні стандарти і Програма з математики.

Підсумовуючи результати дослідження вказаної проблеми, М. І. Бурда у статті "Зміст шкільної математики як предмет методичного дослідження" (2005) визначає такі *принципи відбору змісту*: соціальної ефективності (математичні знання мають бути достатніми для продовження освіти або кваліфікованої праці); пріоритету розвивальної функції навчання (зміст навчального матеріалу має забезпечувати не екстенсивне, а інтенсивне навчання і самонавчання учнів, засвоєння не лише готових знань, а й способів цього засвоєння, способів міркувань, які застосовуються в математиці); диференційованої реалізованості (зміст математики розрахований на здійснення основних видів диференціації – за змістом навчального матеріалу, за рівнями програмних вимог до математичної підготовки учнів); науковості і прикладної реалізованості (поєднання неперервної і дискретної математики, розкриття гносеологічного її значення); модульний принцип (курс математики включає дві частини – інваріантну і варіативну. Остання містить логічно завершені порції матеріалу, які доповнюють інваріантну); фузіонізму (інтеграція змісту досягається введенням узагальнюючих понять сучасної математики; посилення зв'язків між алгеброю і геометрією, планіметрією і стереометрією); концентризму (математична підготовка школярів досягається концен-

тричним розвитком таких груп знань: 1) числа і дії над ними, величини, метрична система мір; 2) вирази, рівняння, нерівності, елементи логіки; 3) функції, дослідження функцій методами математичного аналізу; 4) геометричні фігури та їх властивості, геометричні величини, перетворення фігур; 5) координати і вектори; 6) комбінаторика; 7) елементи статистики і теорії ймовірностей; 8) математика і зовнішній світ (моделювання, аналіз даних, специфіка математики як науки, математика в системі наук, історія виникнення і розвитку математичних теорій).

Наступним кроком у розв'язанні проблеми відбору змісту шкільної математики є його відображення у підручниках. М. І. Бурда не тільки працює над створенням підручників нового покоління, але й досліджує загальні питання підручникотворення. Він вважає, що істотною ознакою особистісно-орієнтованого навчання має стати гуманістична орієнтація змісту підручників з математики. Розглядаючи різні фактори, які суттєво впливають на відбір змісту і гуманізацію навчання, М. І. Бурда зауважує: "Гуманістичне спрямування змісту забезпечує також *персоніфікований виклад матеріалу*, тобто подання, де це можливо, математичних фактів з погляду їх історичного становлення і розвитку. Зміст має відображати досвід творчої діяльності, нагромаджений людством у галузі математичної освіти, відповідні ціннісні орієнтації (фрагменти історії математики, математичних теорій і методів, долі вчених, які зробили визначні відкриття і ін.)".

5.5 НАУКОВІ ЗДОБУТКИ ВЧЕНИХ КАФЕДРИ ІНФОРМАТИКИ

У 2005 р. кафедра основ інформатики та обчислювальної техніки Національного педагогічного університет імені М. П. Драгоманова перейменована в кафедру інформатики. На цій кафедрі працюють висококваліфіковані фахівці: доктор педагогічних наук, дійсний член АПН України, проф. М. І. Жалдак, доктор педагогічних наук, професор Н. В. Морзе; кандидат фізико-математичних наук, професор Ю.С. Рамський; кандидат фізико-математичних наук, доцент В.В. Лапінський; кандидат фізико-математичних наук, доцент Н.М. Кузьміна, кандидат педагогічних наук, доцент Т.В. Підгорна; кандидат педагогічних наук В.М. Дем'яненко та інші.

Кафедра основ інформатики та обчислювальної техніки сьогодні – це важливий осередок інформатизації навчального процесу як в університеті, так і в усій системі середньої загальної та вищої педагогічної освіти України.

GRAN-3D) призначений для використання під час вивчення математики і фізики в школі, а також в педагогічному університеті в процесі вивчення предметів математичного циклу. Використання програми GRAN 1 дає можливість досить швидко будувати різноманітні замкнені і незамкнені ламані лінії, обчислювати їх довжини, площі і периметри многокутників, об'єми і площі поверхонь тіл обертання, розв'язувати планіметричні задачі на побудову, здійснювати перетворення ламаних (паралельні перенесення, повороти, деформації), будувати графіки кількох функцій, порівнювати їх між собою, знаходити найбільші і найменші значення функції на заданому відрізку, розв'язувати рівняння і нерівності з одним і двома невідомими та системи таких рівнянь і нерівностей, обчислювати визначені інтеграли, визначати площі між двома кривими, об'єми тіл обертання навколо осі *Ox* чи *Oy*, обчислювати статистичні ймовірності тих чи інших випадкових подій, здійснювати статистичне опрацювання експериментальних даних з побудовою відповідних графічних зображень, будувати поліноми (до 7–го степеня) найкращого наближення таблично заданої функції за методом найменших квадратів тощо.

Жалдак Мирослав Іванович – дійсний член (академік) АПН України, доктор педагогічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, завідуючий кафедрою інформатики НПУ імені М. П. Драгоманова. Фахівець у галузі обчислювальної математики, методики навчання інформатики та математики в загальноосвітній школі й вищих педагогічних навчальних закладах. Досліджує проблеми формування інформаційної культури майбутнього вчителя, змісту навчання інформатики в школі, створення й використання комп'ютерно-орієнтованих дидактичних засобів у навчанні математики.

Роботи М. І. Жалдака та учнів його наукової школи лягли в основу сучасної методичної системи навчання інформатики для середніх загальноосвітніх і вищих педагогічних закладів освіти. М. І. Жалдак започаткував розробку сучасних комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики і частково фізики, які орієнтовані на гармонійне педагогічно доцільне і виправдане поєднання надбань традиційних методичних систем навчання і сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Під керівництвом М. І. Жалдака підготовлено і захищено 2 докторські дисертації (Н. В. Морзе, 2003 р. і Г. О. Михалін, 2004 р.) і понад 20 кандидатських: Н. В. Морзе (1987, м. Київ), Ю. В. Триус (1987, м. Черкаси), А. В. Пеньков (1992, м. Чернігів), В. В. Дровозюк (1992, м. Київ), Ю. В. Го-

З 1987 року при кафедрі діє Всеукраїнський науково-методичний семінар з проблем інформатизації навчального процесу – науковий керівник М. І. Жалдак, вчений секретар Ю. С. Рамський. За результатами роботи семінару щорічно видається збірник наукових праць „Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання", в якому розглядаються питання застосування засобів нових інформаційних технологій навчання у практичній діяльності середніх та вищих навчальних закладів; аналізуються окремі програмні засоби навчального призначення, обговорюються проблеми становлення комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математики, фізики, інформатики та інших предметів у закладах освіти.

З 1986 до 1991 року члени кафедри керували республіканською цільовою комплексною науково-дослідною програмою "Комп'ютер в школі і педагогічному навчальному закладі" (голова координаційної ради – М. І. Шкіль, заступник голови і керівник одного з напрямів – М. І. Жалдак, вчений секретар і керівник одного з напрямів – Ю. С. Рамський). Проводилася велика робота з актуальних проблем використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій в процесі навчання.

Професори кафедри М. І. Жалдак і Ю. С. Рамський є співавторами змісту і програм курсів "Чисельні методи", "Основи інформатики", "Інформатика", "Математична логіка і теорія алгоритмів", "Обчислювальна практика" для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів (1992 р.), а також співавторами концепції інформатизації освіти в Україні (1994 р.), концепції змісту наскрізної освіти з інформатики і обчислювальної техніки для всіх ланок освіти (1993 р.), проекту Державного стандарту загальної середньої освіти в Україні з інформатики (1997 р.), Держаного стандарту загальної середньої освіти в Україні з інформатики (2003 р.), типової програми кандидатського іспиту із спеціальності 13.00.02 "Теорія і методика навчання інформатики" (1999 р.), Галузевих стандартів вищої освіти напряму підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти. Математика і фізика (2002 р.).

Розроблені на кафедрі засоби навчання, зокрема й педагогічні програмні засоби, широко використовуються в педагогічних навчальних закладах, середніх школах, СПТУ, середніх спеціальних навчальних закладах і дають високий педагогічний ефект. Зокрема Програмно-методичний комплекс GRAN /Жалдак М. І, Горошко Ю. В., Вітюк О. В. – сертифікований в Укр-Сепро і постачається Міністерством освіти і науки в школи разом з комп'ютерними класами. Комплекс програм GRAN (GRAN 1, GRAN-2D,

Ю. В. Горошко (1992, м. Чернігів), М. С. Головань (1997, м. Суми), Є. М. Смірнова (1996, м. Херсон), Ю. О. Жук (1995, м. Київ), А. В. Фіньков (1995, м. Ізмаїл), Т. І. Чепрасова (1998, м. Луцьк), Т. В. Зайцева (2001, м. Херсон), Т. Л. Архіпова (2002, м. Херсон), О. В. Вітюк (2001, м. Житомир), І. В. Лупан (2002, м. Кіровоград), О. А. Смалько (2003, м. Кам'янець-Подільський), В. М. Дем'яненко (2003, м. Київ), В. Ю. Габрусєв (2004, м. Тернопіль), Ю. В. Красюк (2004, м. Київ), Ю. Г. Лотюк (2004, м. Рівне).

З 1985 року М. І. Жалдак беззмінний керівник Всеукраїнського науково-методичного семінару з проблем інформатизації навчального процесу в школі та вищих навчальних закладах, відповідальний редактор щорічного фахового збірника наукових праць "Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання", член редколегій науково-методичних журналів "Математика в школі", "Комп'ютер у школі та сім'ї".

Опублікував біля 200 робіт, серед яких понад 50 книг і брошур. Основні з них:

1. Елементи програмування. Посібник для вчителів. – Київ: Радянська школа, 1976. – 208 с. (у співавторстві з Ю. С. Рамським).

2. Чисельні методи математики. – К.: Вища школа, 1984. – 206 с. (у співавторстві з Ю. С. Рамським).

3. Основы информатики и вычислительной техники. Учеб. пособ. для средних спец. учеб. завед. – К.: Вища школа, 1986. – 200 с. (у співавторстві з Н. В. Морзе).

4. Изучение языков программирования в школе. – К.: Радянська школа, 1988. – 272 с. (у співавторстві з М. І. Шкілем, Н. В. Морзе, Ю. С. Рамським).

5. Начинаем диалог с ЭВМ: Учеб. нагляд. пособ. – К.: Вища школа, 1989. – 32 с. (у співавторстві з Н. В. Морзе).

6. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів (у співавторстві з О. О. Гокунем, О. Ю. Комісаровою, Н. В. Морзе, М. Л. Смульсон /Колективна монографія за ред. Ю. І. Машбиця.) – К.: МО України, Інститут змісту і методів навчання, Інститут психології АПН України, 1997. – 262 с.

7. Інформатика. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. – К.: Вища школа, 1991. – 320 с. (у співавторстві з Ю. С. Рамським).

8. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. Навчальний посібник для студентів фізико-

математичних факультетів педагогічних інститутів. – К.: Вища школа, 1995. – 352 с. (у співавторстві з Н. М. Кузьміною та С. Ю. Берлінською).

9. Комп'ютер на уроках математики. Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

10. Інформатика-7. Навчальний посібник для учнів 7–го класу загальноосвітньої школи. – К.: ДіаСофт, 2000 – 208 с. (у співавторстві з Н. В. Морзе).

11. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. Посібник для вчителів. – К.: Шкільний світ, 2002. – 120 с. (у співавторстві з Г. О. Михаліним).

12. Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою. – К.: МАУП, 2003. – 304 с. (у співавторстві з А. В. Грохольською, О. Б. Жильцовим).

13. Програмний комплекс „GRAN" Версія 1.0. Міністерство освіти і науки України. Державний департамент інтелектуальної власності. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 7937 (у співавторстві з Ю. В. Горошком, О. В. Вітюком).

14. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. – К.: РНЦУ ДІНІТ, 2004. – 250 с. (у співавторстві з Ю. В. Горошком, Є. Ф. Вінниченком).

15. Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник для вчителів. – К.: РНЦУ ДІНІТ, 2004. – 172 с. (у співавторстві з О. В. Вітюком).

16. Теорія і методи оптимізації. Посібник для студентів математичних спеціальностей. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с. (у співавторстві з Ю. В. Триус).

17. Комп'ютер на уроках фізики. Посібник для вчителів. – Костопіль: РВП "Роса", 2005. – 228 с. (у співавторстві з Ю. К. Набочук, І. Л. Семещук).

Морзе Наталія Вікторівна народилася 26 червня 1956 року в м. Бровари Київської області.

В 1977 році закінчила фізико-математичний факультет Київського державного педагогічного інституту імені О. М. Горького. Після закінчення інституту працювала в м. Києві: вчителькою математики сш № 190 (1977–1979); завідувачкою навчальною частиною МТТУ № 17 (1979–1981); зав. Кабінетом математики Центрального інституту удосконалення вчителів (1981–1983).

З 1983 р. розпочала науково-педагогічну діяльність в КДПІ імені О. М. Горького: асистент, викладач кафедри математики і методики навчання математики (1983–1988 рр.); асистент, доцент кафедри основ інформатики

средних спец. учеб. завед. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с. Друге видання (у співавторстві з М. І. Жалдаком).

2. Изучение языков программирования в школе: Пособие для учителей. – К.: Рад. школа, 1988. – 272 с. (у співавторстві із М. І. Шкілем, М. І. Жалдаком, Ю. С. Рамським).

3. Начинаем диалог с ЭВМ: Учеб. нагляд. пособ. – К.: Вища школа, 1989. – 32 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком).

4. Основи нових інформаційних технологій навчання: Посібник для вчителів (у співавторстві з О. О. Гокунем, М. І. Жалдаком, О. Ю. Комісаровою, М. Л. Смульсон /Колективна монографія за ред. Ю. І. Машбиця.) – К.: МО України, Інститут змісту і методів навчання, Інститут психології АПН України, 1997. – 262 с.

5. Інформатика – 7: Експериментальний навчальний посібник для учнів 7 класу загальноосвітньої школи. – К.: ДіаСофт, 2000. – 207 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком).

6. Методика навчання інформатики. Ч. 1. Загальна методика навчання інформатики. – К.: Навчальна книга, 2003. – 254 с.

7. Методика навчання інформатики. Ч. 2. Методика навчання інформаційних технологій. – К.: Навчальна книга, 2003. – 288 с.

8. Методика навчання інформатики. Ч. 3. Методика навчання основних послуг глобальної мережі Інтернет. – К.: Навчальна книга, 2003. – 196 с.

9. Методика навчання інформатики. Ч. 4. Методика навчання основ алгоритмізації і програмування. – К.: Навчальна книга, 2003. – 250 с.

10. Інформатика. Державна підсумкова атестація. 11 клас. (у співавторстві з О. І. Мостіпан) – Кам'янець–Подільський: Абетка-Нова, 2003. – 104 с.

Рамський Юрій Савіянович народився 29 травня 1942 року в с. Шпиколоси, Кременецького району, Тернопільської області.

У 1963 році закінчив фізико-математичний факультет Кременецького державного педагогічного інституту, а в 1966 – аспірантуру в Київському державному педагогічному інституті ім. О. М. Горького за спеціальністю "обчислювальна математика".

З 1966 р. працює в КДПІ імены О. М. Горького: асистент кафедри вищої математики (1966–1969); старший викладач кафедри вищої математики (1969–1970); доцент кафедри вищої математики (1970–1985); доцент кафедри основ інформатики і обчислювальної техніки (1985–1992); професор кафедри основ інформатики і обчислювальної техніки (з 1992).

та обчислювальної техніки (1988–1989 р.); заступник декана фізико-математичного факультету (1989–1991 р.); доцент кафедри основ інформатики та обчислювальної техніки (1991–2002 р.); професор кафедри основ інформатики та обчислювальної техніки (з 2002 р.).

У 1987 р. Н. В. Морзе захистила кандидатську дисертацію на тему: "Методика изучения основных понятий информатики и вычислительной техники в средних профессионально-технических училищах" і отримала науковий ступінь кандидата педагогічних наук. У 1990 р. їй присвоєно вчене звання доцента, а в 2002 р. – професора.

У 2004 р. Н. В. Морзе захистила докторську дисертацію на тему: "Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах" і отримала науковий ступінь доктора фізико-математичних наук.

Н. В. Морзе бере участь у розробці змісту і методики навчання інформатики в середніх навчальних закладах освіти і педагогічних університетах України, співавтор концепції інформатизації освіти, державних освітніх стандартів з інформатики. Викладає на фізико-математичному факультеті навчальні курси „Інформатика", „Методика навчання інформатики", „Використання обчислювальної техніки в навчальному процесі", спецкурси з методики навчання інформатики та використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. Розробила разом зі співавторами авторські програми цих курсів, у яких значна увага приділена питанням організації навчання майбутніх вчителів інформатики.

Впродовж 1999 – 2002 р. як експерт від фонду Відродження займається впровадженням у навчальний процес телекомунікаційних проектів, проводить методичні семінари (очні та з використанням дистанційних форм) з навчання вчителів основ телекомунікаційних проектів, член організаційного комітету Програми Розвитку ООН та Міжнародного Фонду Відродження в рамках програми "Україна – Інформаційно-комунікаційні технології задля розвитку".

Під її керівництвом захищено 4 кандидатські дисертації: О. Б. Жильцов (1994, м. Київ), Т. В. Підгорна (2002, м. Київ), В. Б. Івасик (2001, м. Київ), П. С. Ухань (2001, м. Київ), ще 5 аспірантів та здобувачів виконують дисертаційні дослідження.

Н. В. Морзе опублікувала понад 127 робіт, серед яких біля 45 книг і брошур, зокрема:

1. Основы информатики и вычислительной техники. Учеб. пособ. для

У 1968 р. Ю. С. Рамський захистив кандидатську дисертацію на тему: "О некоторых вопросах приближенного вычисления интегралов" і отримав науковий ступінь кандидата фізико-математичних наук.

У 1972 р. йому присвоєно вчене звання доцента кафедри математики, а в 1993 р. – професора кафедри інформатики і обчислювальної техніки.

Ю.С. Рамський читає лекційні курси з основ інформатики і обчислювальної техніки, чисельних методів, математичної логіки і теорії алгоритмів, спеціальних курсів. Керує підготовкою аспірантів і здобувачів. Він підготував 10 кандидатів наук: Н. О. Клочко (1991 р., м. Вінниця), М. І. Легенький (1993 р., м. Київ), Н. В. Кульчицька (керівники З. І. Слєпкань, Ю. С. Рамський) (1994 р., м. Івано-Франківськ), Н. Р. Балик (1995 р. м. Тернопіль), Г. Ю. Цибко (1998 р., м. Чернігів), І. С. Іваськів (2000 р., м. Тернопіль), О. М. Спірін (2001 р., м. Житомир), І. М. Лукаш (2003 р., м. Чернігів), О. П. Зеленяк (2004 р., м. Олександрія), О. В. Клочко (2004 р., м. Вінниця).

У 1986–1995 р. Ю. С. Рамський – підготував і провів по республіканському телебаченню ("Шкільний екран". Головна редакція науково-популярних та навчальних передач) для учнів і вчителів середніх навчальних закладів 125 телепередач (30 хв. кожна) з основ інформатики та обчислювальної техніки.

Опублікував 153 роботи (чисельний аналіз; теорія і методика навчання інформатики; комп'ютерно-орієнтовані системи навчання в школі та вищому педагогічному навчальному закладі), серед яких 30 книг і брошур, зокрема:

1. Обчислювальна математика. Спецкурс для факультативних занять у 9–10 класах. – К.: Радянська школа, 1973. – 174 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком і Б. С. Ковбасенком).
2. Елементи програмування. Посібник для вчителів. – Київ: Радянська школа, 1976. – 208 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком).
3. Чисельні методи математики. Посібник для вчителів. – К.: Радянська школа, 1984. – 206 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком).
4. Изучение языков программирования в школе. – К.: Радянська школа, 1988. – 272 с. (у співавторстві з М. І. Шкілем, М. І. Жалдаком, Н. В. Морзе).
5. Техніка обчислень і алгоритмізація: Навч. посібник для студентів. – К.: Вища школа, 1990. – 199 с. (у співавторстві з І. Ф. Слєдзінським, А. М. Ломаковичем, Р. І. Зароським).
6. Інформатика. Навчальний посібник для студентів фізико-

математичних факультетів педагогічних інститутів. – К.: Вища школа, 1991. – 320 с. (у співавторстві з М. І. Жалдаком).

7. Turbo Pascal: алгоритми і програми. Чисельні методи в фізиці та математиці. Навчальний посібник для студентів. – К.: Вища школа, 1992. – 247 с. (у співавторстві з А. Б. Бартківим, Я. Т. Гринчишиним, А. М. Ломаковичем).

8. Методичні основи вивчення експертних систем у школі (монографія). – К.: Логос, 1997. – 114 с. (у співавторстві з Н. Р. Балик).

9. Логічні основи інформатики: Навчальний посібник для студентів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 286 с.

10. Вивчення Web- програмування в школі: Посібник для вчителів. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 208 с. (співавтори І. С. Іваськів, О. Ю. Ніколаєнко).

11. Проектування та опрацювання баз даних: Посібник для вчителів та студентів. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 123 с.

12. Основи програмування. Посібник для студентів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 141 с. (у співавторстві з Г. Ю. Цибко).

13. Вивчення інформаційно-пошукових систем мережі Інтернет. Пошук–МЕТА: Посібник для вчителів. Навчально-програмний комплекс. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004 (у співавторстві з О. В. Резіною).

математики і формування наукового світогляду студентів.

Історія науки створює безпосередній вплив на педагогічну культуру вчителя, суттєво розширюючи його загальний і фаховий кругозір, підвищуючи рівень інтелекту та ерудицію, формуючи сучасну систему цінностей і професійну поведінку. Вона має велике значення для формування критичного мислення, творчих здібностей, наукового світогляду, інтересу до наукових знань та виховання моральних якостей майбутнього вчителя. Крім того, вона озброює студентів раціональними прийомами використання отриманих знань в майбутній діяльності: на уроках, у позакласній роботі, у навчально-виховному процесі взагалі.

Монографія вносить вагомий вклад у вирішення теоретичних і практичних завдань, які стоять перед сучасною вищою школою і спрямовані на підготовку конкурентоспроможних випускників з якісною педагогічною освітою. Її результати можуть бути використані в процесі підготовки вчителів інших предметних галузей з урахуванням особливостей історії відповідної науки.

Враховуючи актуальність питань використання історії науки у фаховій підготовці майбутніх учителів, перспективними можуть стати проблеми щодо створення і впровадження:

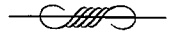
– методичного забезпечення навчання історії математики;

– інтегрованого курсу "Елементарна математика та її історія";

– спеціального курсу "Історія творення і розвитку в Україні методики навчання математики";

– серії комп'ютерно-орієнтованих програм "Локалізація історико-математичних подій у часі і просторі" (навчального і діагностичного характеру);

– дистанційного курсу "Історія математики".



ВИСНОВКИ

Історія математики вивчає і відтворює процеси розвитку математики розглядаючи її в просторі, в часі та в особах. Необхідність і можливість такого відтворення виникає тільки в умовах досягнення певного рівня свідомості людини, розвитку суспільства і самої математики. У XIX столітті історія математики стала повноправним і професійним розділом математики. Особливістю історії математики як галузі математичних знань є її соціальний та історичний характер.

Історія математики, як і історії інших наук, виконує важливі функцій у підготовці майбутніх спеціалістів відповідної наукової галузі, а тому на її основі будується навчальна дисципліна – історія математики. Історію математики як науку потрібно відрізняти від курсу історії математики, що є навчальним предметом. Для навчального предмета потрібно з великого обсягу історичних відомостей, накопичених і систематизованих наукою, вибрати основні, які можуть сприяти формуванню математичної культури та фахової компетентності спеціаліста, а також допоможуть йому в подальшій професійній діяльності.

Серед важливіших функцій історії математики у фаховій підготовці вчителя потрібно виділити загальнонаукові, загальнокультурні та освітні, а також функції інтеграції, узагальнення, систематизації, конкретизації, гуманізації, гуманітаризації та фундаменталізації системи знань.

Курс історії математики, вивчаючи становлення самої математики, краще, ніж будь-яка інша математична дисципліна, сприяє формуванню у студентів цілісного погляду на математику, на єдність її ідей, методів і понять. У процесі вивчення історії математики є можливість розглянути проблеми, які не знайшли місця в інших дисциплінах, але відіграють велике значення для з'ясування суті самої математики. Тут розглядаються питання, пов'язані з вивченням засобами математики навколишнього світу, створенням адекватних математичних моделей для характеристики різного роду явищ і процесів, а тому цей курс є дієвим засобом демонстрації прикладних аспектів

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамова Г. С.* Возрастная психология: Учебное пособие: Для студ. вузов. – 4-е изд., стереотип. – М.: Академия, 1999. – 663 с.
2. *Абрамова Н. Т.* Принцип целостности и синтез знания // Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – С. 275–293.
3. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці. Зб. нарисів / Упоряд. і передм. О. К. Романчука. – Львівська істор-просвіт. Організ. "Меморіал", 1992. – 544 с.
4. *Акулов Г. В., Яценко С. Є., Швець В. О.* Програма з елементарної математики // Програми з методики навчання математики, елементарної математики та історії математики. – К.: НПУ ім. М.Драгоманова, 2001. – С. 20–25.
5. *Акчурин И. А.* Единство научного знания. – М.: Наука, 1974. – 207 с.
6. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2 / Завало С. С., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. – К.: Вища школа, 1986. – 264 с.
7. *Александров Т. Н., Полежаева Л. А.* Вопросы моделирования и деятельности личности специалиста // Среднее спец. обр. – 1982. – № 1. – С. 8–30.
8. *Александрова Н. В.* Математические термины. – М.: Высшая школа, 1978. – 190 с.
9. *Александрова Н. В.* Формирование основных понятий векторного исчисления // Историко-математические исследования, Вып. XXVI. – М.: Наука, 1982. – С. 205–235.
10. *Александрова Н. В.* Избранные главы из истории математики. – М.: Изд-во МАИ, 1991. – 39 с.
11. *Алексєєнко Т. А., Мишковська Т. Д., Сушанко В. В.* Про комплексний підхід до організації модульно-розвиваючого навчання // Система неперервної освіти: здобутки, пошуки, проблеми. – Чернівці, 1996. – С. 17–18.
12. *Алексюк А. М.* Загальні методи навчання в школі. – К.: Радянська школа, 1973. – 264 с.
13. *Алексюк А. М.* Педагогіка вищої освіти України: Історія. Теорія. – К.: Либідь, 1993. – 560 с.
14. *Амельянчик Э. В., Трегуб В. В., Церетели В. А.* Усвоение и запоминание материала студентами разных возрастных групп // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С. 19–20.
15. *Амосов Н. М.* Моделирование информации и программ в сложных системах // Вопросы философии. – 1963. – № 12. – С. 23–25.
16. *Андронов И. К.* Программа курса истории элементарной математики // УЗ МО-

ПИ. – 1956. – Т. 39. – Вып. 3. – С. 135–140.

17. *Анисимов А. В.* Компьютерная лингвистика для всех: Мифы. Алгоритмы. Язык. – К.: Наук, думка, 1991. – 208 с.

18. *Анисимов Н. С., Турсунов А.* Современные тенденции интеграции наук // Вопр. философии. – 1981. – № 3. – С. 57–67.

19. *Антонюк О. П.* Невідомий рукопис М. І. Гулака // Методи викладання та історія математики. Тези доповідей УМК 2001. – К.: ІМ НАН України, 2001. – 40 с.

20. *Архангельский А. В.* О сущности математики и фундаментальных математических структурах // История и методология естественных наук. Математика, механика: Сборник. – М., 1986. – Вып. XXXII. – С. 14–29.

21. *Архангельский С. И.* Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы. – М.: Высшая школа, 1980. – 268 с.

22. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2–х ч. – М.: Просвещение, 1987. – Ч. 2. – 352 с.

23. *Атанов Г. А., Пустынникова И. Н.* Обучение и искусственный интеллект, или Основы современной дидактики высшей школы. – Донецк: Изд-во ДОУ, 2002. – 504 с.

24. *Атутов П. Р., Скаткин М. Н., Турбовский Я. С.* Методологические проблемы развития педагогической науки. – М.: Педагогика, 1985. – 240 с.

25. *Ахлибинский Б. А.* Категориальный аспект понятия интеграции // Диалектика как основа интеграции научного знания / Под ред. А. А. Королева. – Л., 1989. – С. 50–66.

26. *Ахундов М. Д., Борисов В. И., Тюхтин В. С.* Интегративные науки и системные исследования // Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – С .224–229.

27. *Балл Г.А.* Психолого-педагогічні засади гуманізації освіти // Освіта і управління. – 1997. – № 2. – С. 21–36.

28. *Баран О. І.* Математичні мініатюри. – Х.: Видав. гр. "Основа", 2003. – 96 с.

29. *Барбина Е. С., Семиченко В. А.* Идеи интеграции, системности и целостности в теории и практике высшей школы. – К.: ИППО АПН Украины, 1996. – 420 с.

30. *Башмакова И. Г., Майстров Е. И.* О первом курсе истории математики в Московском университете // История и методология естественных наук. – 1982. – Вып. XXIX. – С. 9–18.

31. *Башмакова И. Г.* Основные этапы развития алгебры // История и методология естественных наук. – 1986. – Вып. XXXII. – С. 39–49.

32. *Башмакова И. Г., Сорокина Л. А.* История математики / Метод. указ. для студентов-заочников VI курса мех.-мат. фак. МГУ. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1964. – 28 с.

кладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін: Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції "Рішельєвські читання", 23–27 вересня 1999 р., місто Одеса. – Одеса: Астропринт, 1999. – С. 32–33.

48. *Бевз В. Г.* Жіночі імена в пантеоні славетних математиків // Математика. – 1999. – № 8 (20). – С. 6–7.

49. *Бевз В. Г.* Засоби навчання історії математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 20. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2003. – С. 80–93.

50. *Бевз В. Г.* Історія на уроках математики // ПостМетодика. – 1997. – № 1. – С. 33–35.

51. *Бевз В. Г.* Комп'ютер як засіб діагностики знань з історії математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – С. 148–156.

52. *Бевз В. Г.* М. В. Остроградський – математик, механік, педагог // Математика в школі, 2001. – № 4. – С. 66–69.

53. *Бевз В. Г.* М. В. Остроградський – популяризатор математичної науки // М. В. Остроградський – видатний математик, механік і педагог: Матеріали міжвузівської науково- практичної конференції. – Чернігів.: ЧДПУ, 2001. – С. 23–27.

54. *Бевз В. Г.* Математик першої величини // Математика. – 1998. – № 4. – С. 7–8.

55. *Бевз В. Г.* Особливості семінарських занять з історії математики // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції "Проблеми вищої педагогічної освіти в світлі рішень І Всеукраїнського з'їзду працівників освіти і виступу Президента України Л. Д. Кучми". – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. – Ч. І. – С. 61–63.

56. *Бевз В. Г.* Практикум навчання з історії математики: навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

57. *Бевз В. Г.* Пропедевтичне ознайомлення студентів педагогічних університетів з історією математики // Тези Міжнародної конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь". – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. – С. 64.

58. *Бевз В. Г.* Професійна спрямованість курсу "Історія математики" в педагогічному вузі // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2000. – Вип. 14. – С. 81–91.

59. *Бевз В. Г.* Процеси інтеграції та диференціації в науці // Наука і сучасність. Зб. наук. праць НПУ імені М. П. Драгоманова. – К.: Логос, 2003. – Т. XXXIX. – С. 3–14.

60. *Бевз В. Г.* Тестові завдання для контролю знань з курсу з "Історія математики":

33. *Бевз В. Г.* Інтеграція і диференціація в освіті // Наука і сучасність. Зб. наук. праць НПУ імені М. П. Драгоманова. – К.: Логос, 2003. – Т. XLI. – С. 40–51.

34. *Бевз В. Г.* Формування професійно-педагогічних умінь студентів у процесі навчання історії математики // Наукові записки: Зб. Наук. ст. НПУ ім. М. Драгоманова / Укл. П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко, В. Д. Сиротюк. – К.: НПУ, 2003. – Вип. LIII (53). – С. 22–33.

35. *Бевз В. Г.* Вектори в роботах В. П. Єрмакова // Наукові записки: Збірник наукових статей НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К.: НПУ, 2002. Вип. L (50). – С. 7–14.

36. *Бевз В. Г.* З історії розвитку математичної освіти в Україні. Новини з виставки // Математика. – 1998. – № 8. – С. 1–2.

37. Бевз В. Г. Елементи історії математики в школі // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнародної наукової конференції. Частина 4. – Чернівці: Рута, 1998. – С. 123–125.

38. *Бевз В. Г.* Міжпредметні зв'язки як необхідний елемент предметної системи навчання // Математика в школі. – 2003. – № 6. – С. 11–15.

39. *Бевз В. Г.* Професійна спрямованість курсу "Історія математики" в педагогічному вузі // Евристичні методи у навчанні математики: Тези доповідей міжнародної науково-методичної конференції (3–5 жовтня 2000 р.). – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2000. – С. 56–57.

40. *Бевз В. Г.* Що таке математика? // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 18. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – С. 3–10.

41. *Бевз В. Г.* Аль-Біруні – видатний вчений середньовіччя // Математика в школі. – 2003. – № 8. – обкл.

42. *Бевз В. Г.* Алгебра. Збірник задач для 9 класу. – Харків.: Ранок, 2001. – 112 с.

43. *Бевз В. Г.* Використання історичног матеріалу у навчанні елементарної математики майбутніх учителів // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2004. – Вип. 22. – С. 62–68.

44. *Бевз В. Г.* Відображення історії науки у шкільних підручниках з математики // Проблеми сучасного підручника: Збірник наук. праць / Редкол. – К.: Педагогічна думка, 2003. – Вип. 4. – С. 110–115.

45. *Бевз В. Г.* Історія математик в курсі математичного аналізу педагогічного університету // Наукові записки: зб. нак. ст. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – Вип. 57. – С. 9–18.

46. *Бевз В. Г.* Еволюція засобів навчання // Педагогіка математики і природознавства. IV Всеукраїнські читання, присвячені пам'яті М. В. Остроградського, 4–5 жовтня 2000 р. Збірник статей. – Полтава: ПОІПОПП, 2000. – С. 64–66.

47. *Бевз В. Г.* Елементи історизму як засіб гуманізації і гуманітаризації освіти // Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих середніх навчальних за-

Навч.-метод. посібник 2–х частинах. Ч.ІІ. Методичні вказівки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2003. – 16 с.

61. *Бевз В. Г.* Три джерела векторного числення // Наука і сучасність. Збірник наукових праць Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. – К.: Логос, 2002. – Т. XXXIV. – С. 14–24.

62. *Бевз В. Г.* Учням про Фалеса Мілетського // Наукові записки : Збірник наукових статей НПУ ім. М. П. Драгоманова. – К.: НПУ, 2001. – Вип. XLIV (44). – С. 23–26.

63. *Бевз В. Г.* Фалес Мілетський і теорема Фалеса // Математика. – 2001. – № 25–26 (133–134). – С. 23–24.

64. *Бевз В. Г.* Французький мислитель Паскаль // Математика в школі. – 2003. – № 5. – обкл.

65. *Бевз В. Г., Мерзляк А., Слєпкань З. І.* Математика 5–11 класи // Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: "Шкільний світ", 2001. – С. 3–62.

66. *Бевз В. Г., Музиченко С. В.* Алгебра. Збірник задач. 8 клас. – Харків: Веста Видавництво "Ранок", 2002. – 144 с.

67. *Бевз В. Г., Сазонова О. П.* Програма з історії математики // Програми з методики навчання математики, елементарної математики та історії математики. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. – С. 26–34.

68. *Бевз В. Г., Сверчевська І. А.* Геометричні тіла у визначних геометричних задачах // Математика в школі. – 2002. – № 5. – С. 6–9; № 6. – С. 10–14.

69. *Бевз В. Г., Бевз Г. П.*. Алгебра. 8 клас: Методичний посібник для вчителів. – Харків: Веста Видавництво"Ранок", 2003. – 368 с.

70. *Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.* Геометрія. Підруч. для 7–9 кл. загальноосвіт. закладів. – К.: Вежа, 2001. – 272 с.

71. *Бевз Г. П.* та ін. Геометрія: Підруч. для учнів 10–11 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах. – К.: Освіта, 2000. – 239 с.

72. *Бевз Г. П.* та ін. Геометрія: Підруч. Для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2002. – 272 с.

73. *Бевз Г. П., Бевз В. Г.* Алгебра у VII класі: Методичний посібник для вчителя. – К.: Український Центр духовної культури, 2000. – 136 с.

74. *Бевз Г. П.*. Геометрія 8кл. – Харків: Видав. гр."Основа", 2004: – 112 с.

75. *Беленький Г. И.* О сущности и видах межпредметных связей // Некоторые теоретические и практические аспекты межпредметных связей. – М., 1982. – С. 3–33.

76. *Белл Э. Т.* Творцы математики: Предшественники соврем. математики. Пособие для учителей. Пер. с англ. В. Н. Тростникова, С. Н. Киро, Н. С. Киро / Под ред. и с доп. С. Н. Киро. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

77. *Белобородова С. В.* Профессионально-педагогическая направленность историко-

математической подготовки учителей математики в педвузах. Дис. … канд. пед. наук., 13.00.02. – М., 1999. – 246 с.

78. *Берлянт А. М.* Образ пространства: карта и информация. – М.: Мысль, 1986. – 240 с.

79. *Бермант М. А., Семенов Л. К., Сулицкий В. Н.* Математические модели и планирование образования. – М.: Наука, 1972. – 112 с.

80. *Бернал Дж.* Науки и истории общества. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – С. 17–22.

81. *Берулава М. Н.* Интеграция естественнонаучных и профессионально-технических дисциплин // Сов. педагогика. – 1987. – № 8. – С. 81–86.

82. *Берулава М. Н.* Интеграция общего и профессионального образования // Сов. педагогика. – 1990. – № 9. – С. 57.

83. *Берулава М. Н.* Общедидактические подходы к гуманизации образования // Педагогика. – 1994. – № 5. – С. 21–25.

84. *Берулава М. Н.* Проблема дидактической интеграции естественнонаучных и профессионально-технических дисциплин в профтехучилищах // Новые исслед. в лед. в науках. – 1988. – № 1. – С. 52–54.

85. *Берулава М. Н.* Состояние и перспективы гуманизации образования // Педагогика. – 1996. – № 1. – С. 9–11.

86. *Берулава Н. М.* Теория и методика интеграции содержания общего и профессионального образования в профтехучилищах: Автореф. дис. … д-ра. пед. наук: 13.00.01. / Гос. пед. инст. им. Низами. – Ташкент, 1988. – 42 с.

87. *Беспалько В. П.* Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 302 с.

88. *Биков В. Ю., Осіна Р. А.* Впровадження інформаційних технологій в навчальний процес школи // Нові технології навчання: Наук.-метод. зб. Вип. 13. – К.: ІСДО, 1995. – С. 154–158.

89. *Билюк А. В.* Дидактические пути осуществления внутрикурсовых, межкурсовых и межпредметных связей в процессе обучения. – Автореф. дисс. … канд. пед. наук. – К., 1978. – 25 с.

90. *Бим-Бад Б. М., Петровский А. В.* Образование в контексте социализации // Педагогика. – 1996. – № 1. – С. 3–8.

91. *Блауберг И. В., Садовский В. Н., Юдин Е. Г.* Системный подход: предпосылки, проблемы, трудности. – М.: Наука, 1969. – С. 29–35.

92. *Блауберг И. В., Юдин Е. Г.* Становление и сущность системного подхода. – М.: Знание, 1973. – 48 с.

93. *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.* Прикладная математика. – К.: Наукова думка, 1976. – 272 с.

ня в школі // Наукові записки: Збірник наукових статей НПУ імені М. П. Драгоманова / Укл. П. В. Дмитренко, Л. Л. Макаренко. – К.: НПУ, 2001. – Вип. 44. – С.3–10.

109. *Бор Н.* Единство знаний // Избранные науч. тр. – М.: Наука, 1971. – 275 с.

110. *Бордовский Г. А., Извозчиков В. А.* Новые технологии обучения: вопросы терминологии // Педагогика. – 1993. – № 5. – С. 45–47.

111. *Борисенко Н. Ф.* Об основах межпредметных связей // Сов. педагогика. – 1971. – № 11–С. 24–31.

112. *Борисов Л. Б., Козьмин-Соколов Б. Н., Фрейдлин И. С.* Система анализа и оценки интеграции в преподавании различных дисциплин в мединституте // Сов. здравоохранение. – 1979. – № 10. – С. 40–44.

113. *Бородін А. І., Бугай А. С.* Біографічний словник діячів в галузі математики. – К.: Радянська школа, 1973. – 552 с.

114. *Бородин А. И.* Из истории арифметики. – К.: Вища шк., 1986. – 95 с.

115. *Брадис В. М.* Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1949. – 472 с.

116. *Брунер Дж.* Процесс обучения. – М.: Мир, 1971. – 162 с.

117. *Брушлинский А. В.* Психология мышления и проблемное обучение. – М.: Знание, 1983. – 96 с.

118. *Бугай А. С.* Короткий тлумачний словник / За ред. С.М. Кіро, Ю.М. Шмандіна. – Державне учбово-педагогічне видавництво. – К.: Рад. шк., 1964. – 428 с.

119. *Булах І. Є.* Теорія і методика комп'ютерного тестування успішності навчання: Дис. … докт. пед. наук. – К., 1995. – 230 с.

120. *Булах І. С.* Психологічні аспекти міжособистісної взаємодії викладачів і студентів: Навч.-метод. посіб. / І.С. Булах, Л. В. Долинська. – К.: Нац. пед. ун-т, 2002. – 114 с.

121. *Бурбаки Н.* Архитектура математики /Очерки по истории математики. – М.: Изд-во ин. лит., – 1963. – С. 245–259.

122. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1963. – 264 с.

123. *Бургин М. С., Кузнецов В. И.* Введение в современную точную методологию науки: Структуры систем знания. – М.:АО "Аспект пресс", 1994. – 215 с.

124. *Бургин М. С., Кузнецов В. К.* Номологические структуры научных теорий / АН Украины, Ин-т философии. – К.: Наук. думка, 1993. – 220 с.

125. *Бургін М. С.* Про природу та сутність математики. Праці науково-дослідного семінару"Основи математики та інформатики". – К.: УкрАІН, 1998. – Т. 4.

126. *Бурда М. І.* Зміст підручника з геометрії для спеціалізованих шкіл // Проблеми сучасного підручника: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: Педагогічна думка, 2000. – Вип. 2. – 196 с.

94. *Бобынин В. В.* Об указаниях, получаемых преподаванием математики от её истории // Математическое образование. – 1914. – № 2. – С. 76–83.

95. *Бобынин В. В.* Современное состояние преподавания истории наук / Сообщение, прочитанное в заседании секции математики и астрономии VIII съезда Естествоиспытателей и Врачей 2 января 1890 года // Физ.-мат. науки в их настоящем и прошлом. – 1890. – Т. 9. – № 1. – С. 1–6.

96. *Бобынин В. В.* Цели, формы и средства введения исторических элементов в курс математики средней школы // Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. – С.-Птб. – Т. 1. – 1913. – С. 34–36.

97. *Богданова І. М.* Оновлення професійно-педагогічної підготовки майбутніх учителів на основі застосування інноваційних технологій // Педагогіка і психологія. – 1997. – № 4. – С. 174–184.

98. *Боголюбов А. Н.* Детство академика // У світі математики. – Т. 4. – Вип. 4. – С. 66–70.

99. *Боголюбов А. Н.* Математики. Механики: Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 640 с.

100. *Боголюбов А. Н.* На рубеже двух веков // Праці інституту математики НАН України. Т. № 34: Математика і математичне природознавство в Україні в XX ст. / Відп. ред. О. М. Боголюбов. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 21–29.

101. *Боголюбов А.Н.* Социальная история математического естествознания // Нариси з історії природознавства і техніки. – 1994. – № 41. – С. 3–16.

102. *Боголюбов А. Н.* Тематика проблем истории науки в обозримом будущем // Праці інституту математики НАН України. Т. № 34: Математика і математичне природознавство в Україні в XX ст. / Відп. ред. О. М. Боголюбов. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 187–191.

103. *Боголюбов А. Н., Пустовойтов Н. А.* Антология истории математики // Праці інституту математики НАН України. Т. № 39: Нариси з історії математики і математичного природознавства / Відп. ред.: М. О. Пустовойтов. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 8–20.

104. *Боголюбов О. М.* Праці О. Ю. Шмідта з історії науки (до 100-річчя з дня народження) // Вісник Академії наук України. – 1991. – № 10. – С. 60–64.

105. *Бокарева Г. А.* Дидактические основы совершенствования профессиональной подготовки студентов в процессе обучения общенаучным дисциплинам. – Автореф. дисс. … докт. пед. наук.. – М., 1988. – 38 с.

106. *Болгарский Б. В.* Историзм в преподавании математики / Вопросы преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1958. – С. 52–64.

107. *Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики. Под ред. В. Д. Чистякова. – Минск: Вышэйш. кола, 1974. – 288 с.

108. *Бондар С. П., Бондар В. І.* Сучасні тенденції оновлення змісту і процесу навчан-

127. *Бурда М. І., Савченко Л. М.* Геометрія: Навч. посібник для 8–9 кл. шк. з поглиб. Вивченням математики. – К.: Освіта, 1996. – 240 с.

128. *Бурда М. І.* Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти // Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – С. 40–45.

129. *Бурда М. І., Бевз В. Г., Прокопенко Н. С.* Факультативний курс з математики для 7–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів // Програми факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: "Навчальна книга", 2002. – С. 50–56.

130. *Бурова Н.А.* Курс истории математики как фактор гуманизации и гуманитаризации математического образования в педвузе. Дис. … канд. пед. наук., 13.00.02. – Новосибирск, Гос. пед. ун-т., 2000. – 196 с.

131. *Быстракова М. С.* Из истории развития историко-научных исследований // ВИЕТ. – 1979. – Вып. 61–63. – С. 34–36.

132. Бюлетень ВАК, 2003. – № 7. – 48 с.

133. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука / Пер с гол. И.Н. Веселовского. – М.: Гос. изд. ФМЛ., 1959. – 460 с.

134. *Василенко О. О.* Серенада Математиці. – Х.: Видав. гр. "Основа", 2003. – 128 с.

135. *Вербицкий А., Бакшаев Н.* Развитие мотиваций в контекстном обучении // Alma mater. – 1998. – № 1–2. – С. 47–50.

136. *Вербицкий А. А.* Активное обучение в высшей школе: Контекстный подход. – М., 1991. – 160 с.

137. *Вергасов В. М.* Активизация познавательной деятельности студентов в высшей школе. – К.: Вища школа, 1985. – 189 с.

138. *Вернадский В. И.* Мысли о современном значении истории знаний. – Л-д.: Изд-во АН СССР, 1927. – 23 с.

139. *Верніков М. М.* Екзистенціальна філософія в Україні // Діалог культур: Україна у світовому контексті (Міжвузів. зб. наук, праць). – Львів: Каменяр, 1996. – Вип. 2. – С. 84–90.

140. *Вивальнюк Л. М., Ігнатенко М. Я.* Елементи історії математики: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 180 с.

141. *Вилейтнер Г.* Как зарождалась современная математика? – М.-Л.: Гос. техн-теор. изд., – 1933. – 100 с.

142. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 64 с.

143. *Виненко В.Г.* Синергетика в школе // Педагогика. – 1997. – № 2. – С. 55–60.

144. *Винокуров Б. З.* IV Межвузовская научная конференция по истории физико-математических наук // ВИЕТ. – Вып. 23. – 1968. – С. 3–9.

145. *Винокуров Б. З., Кудрявцев П. С.* Всесоюзная конференция по истории физико-математических наук // ВИЕТ. – 1972. – Вып. 38. – С. 107–108.

146. Вікова психологія: Метод. поради / Укл.: П. Є. Мармазинська, О. С. Тарновська. – Чернівці: Рута, 2001. – 415 с.

147. Вікова та педагогічна психологія: Навч.посібн. / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчук та ін. – К.: Просвіта, 2001. – 415 с.

148. *Вірченко Н. О.* Вибрані питання методики вищої математики. – К., 2003. – 282 с.

149. *Воевудзки Т.* Философия и интеграция современного технического знания // Философия и интеграция наук. – М.: Знание, 1980. – С. 50–64.

150. Возрастная и педагогическая психология: Хрестоматия: учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. завед. / Сост. И. В. Дубровина, А. М. Прихожан, В. В. Зацепин. – М.: Академия, 1998. – 313 с.

151. *Володько В. М.* Індивідуалізація й диференціація навчання: понятійно-категоріальний аналіз // Педагогіка і психологія. – 1997. – № 4. – С. 9–17.

152. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

153. *Выготский Л. С.* Педагогическая психология / Под. ред. В.В. Давідова. – М.: Педагогика, 1991. – 479 с.

154. *Галай І. Я., Гриневич Г. Д.* Учням про видатних математиків / За ред. М. І. Кованцова. – К.: Рад. школа, 1976. – 160 с.

155. Галузеві стандарти вищої освіти (Напрям підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти. Математика). – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. – 84 с.

156. *Галузинський В. М., Євтух М. Б.* Основи педагогіки та психології вищої школи України. – К.: Інтнл, 1995. – 332 с.

157. *Гельман З. Е.* Интеграция общего среднего образования на базе идей истории науки и культуры // Alma mater. – 1991. – № 1. – С. 20–33.

158. *Гельман З. Е.* История науки и культуры в системе общего среднего образования // Проблемы школьного учебника. Сб.статей. – М.: Просвещение, 1987. – Вып. 17. – С. 21–34.

159. *Гершунский В. С.* О взаимоотношениях категорий "целостность", "системность" и комплексность // Проблемы повышения эффективности педагогического процесса на основе идей оптимизации: Сб. науч. тр. – М.: Изд-во АПН СССР, 1985. – С. 14–24.

160. *Гершунский В. С.* Прогностические методы в педагогике. – К.: Вища школа, 1974. – 208 с.

161. *Гершунский Б. С.* Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы. – М.: Педагогика, 1987. – 264 с.

162. *Гершунский Б. С.* Педагогическая прогностика. – К.: Вища школа, 1987. – 263 с.

163. *Гершунський Б. С.* Прогностические методы в педагогике. – К.: Вища школа,

182. *Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

183. *Даан-Дельмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 428 с.

184. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.

185. *Давыдов Ю. С.* Высшее образование: состояние, проблемы, решения // Педагогика. – 1997. – № 2. – С. 61–67.

186. *Д'Амброзио У.* История математики и этноматематика. Воздействие культуры на процесс обучения // Импакт. – 1991. – № 4. – С. 93–101.

187. *Данилюк А. Я.* Метаморфозы и перспективы интеграции в образовании. – Педагогика. – 1998. – № 2. – С. 8–12.

188. *Данилюк А. Я.* Учебный предмет как интегрированная система // Педагогика. – 1997. – № 4. – С. 24–28.

189. *Демидов С. С., Юшкевич А. П.* О курсе истории математики в педагогических институтах // Вопросы истории естествознания и техники. – 1985. – № 2. – С. 136–141.

190. *Депенчук Л. П.* Преемственность в развитии естествознания. – К.: Наукова думка, 1988 128 с.

191. *Депенчук Н. П.* Комплексні проблеми і інтегровані процеси в сучасному природознавстві // Філософська думка. – 1979. – № 1. – С. 73–82.

192. *Депман И. Я.* Исторический элемент в преподавании математики / Идейное воспитание учащихся в процессе обучения. – Л.: 1948. – С. 360–369.

193. Державна національна програма "Освіта: Україна XXI століття" // Освіта. – 1993. – .№ 44–46.

194. *Джулай Л. І., Козловська І. М.* Інтегративний підхід до використання методів навчання при впровадженні нових технологій // Педагогічна практика і філософія освіти. – Полтава.П0ІПОП, 1997. – С. 55, 143.

195. *Дик Ю. И., Пинский А. А., Усанов В. В.* Интеграция учебных предметов // Сов. педагогика. – 1987. – № 9. – С. 42–47.

196. Дисциплинарность и взаимодействие наук / АН СССР. Ин-т истории естествознания и техники; Отв. ред.: Кедров Б. М., Юдин Б. Г. – М.: Наука, 1986. – 280 с.

197. Дневник Второго Всероссийского съезда преподавателей математики. – М., 1913–1914. – 182 с.

198. *Добровольський В. А.* Очерки развития аналитической теории диференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1974. – 451 с.

199. *Добровольский В. А., Рижкова С. А.* Змістовна наповненість навчальних дисциплін загальноосвітнього циклу в контексті реалій сьогодення. // Системні дослі-

1974. – 208 с.

164. *Гласс Д., Стэнли Д.* Статистические методы в педагогике и психологии: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1976. – 495 с.

165. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. IV–VI кл. – М.: Просвещение, 1981. – 239 с.

166. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. VII–VIII кл. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

167. *Глейзер Г. И.* История математики в школе, IX–X кл. – М.: Просвещение, 1983. – 352 с.

168. *Гнеденко Б. В.* Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

169. *Гнеденко Б. В.* Развитие теории вероятностей // Очерки по истории математики. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – С. 247–338.

170. *Гнеденко Б. В.* Введение в специальность математика. – М.: Наука, 1991. – 240 с.

171. *Гнеденко Б. В.* Знание истории науки преподавателю школы // Матем. в школе. – 1993. – № 3. – С. 31–32.

172. *Гнеденко Б. В.* О воспитании учителя математики // Матем. в школе. – 1964. – № 6. – С. 8–20.

173. *Гнеденко Б. В.* О некоторых задачах истории математики // Историко-математические исследования. – М.: Гос. изд. ФМЛ, 1958. – Вып. XI. – С. 47–62.

174. *Гнеденко Б. В.* Об исследованиях по истории математики в Советском Союзе // Матем. в школе. – 1975. – № 5. – С. 8–16.

175. *Гнеденко Б. В.* Об образовании преподавателя математики средней школы // Матем. в школе. – 1989. – № 3. – С. 19–20.

176. *Гнеденко Б. В.* Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, – 1982. – 145 с.

177. *Гнеденко Б. В., Гнеденко Д. Б.* О некоторых вопросах перестройки математического образования в университетах // Соврем. высшая школа. – 1988. – № 3. – С. 81–90.

178. *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Об истории математики и ее значении для математики и других наук // Историко-математические исследования. – М.: Гос. изд. ФМЛ, 1958. – Вып. XI. – С. 441–460.

179. *Гордеев Д. И., Гуло Д. Д., Заржицкая Л. В.* Итоги XI Международного конгресса по истории науки // ИМЕН. – 1968. – Вып. 7. – С. 292–304.

180. *Горская В.А.* История и методология математики // www.mf.grsu.by/Kafedry/kaf_alg/academic_process/umo.

181. *Громов М.* Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях // У світі математики. – 2002. – № 1. – С. 3–5.

дження та інформаційні технології. – 2002. – № 2. – С. 133–142.

200. *Добровольский В. А., Крамар Ф. Д.* О механическом и алгебраическом направлениях в формировании векторного исчисления // Вопросы истории естествознания и техники. – М., 1969. – Вып. 3 (28).– С. 25–29.

201. *Добровольська Е. М., Добровольський В. О.* З історії київського семінару // Праці інституту математики НАН України. Т. № 34: Математика і математичне природознавство в Україні в XX ст. // Відп. ред. О. М. Боголюбов. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 53–70.

202. *Добровольський В. А.* Василий Петрович Ермаков 1845–1922. – М., 1981. – 88 с.

203. *Добровольський В. А.* Первый курс по истории физико-математических наук в России П.Л. Лаврова // Вопросы истории естествознания и техники. – М.: Наука, 1971. – Вып. 1 (34). – С. 47–49.

204. *Добронравова И. С.* Синергетика: становление нелинейного мышления. – К.: Лыбидь, 1990. – 152 с.

205. *Доній В. М., Судаков Є. М.* Впровадження в навчальний процес прогресивних педагогічних технологій // Проблеми наступності та інтеграції змісту навчання у системі "школа – ПТУ – ВНЗ". – Вінниця, 1996. – С. 13–16.

206. *Дубинчук О. С.* До проблеми впорядкування педагогічної термінології // Педагогіка і психологія. – 1994. – № 3. – С. 37–43.

207. *Дубовик О.* Новітні підходи до організації навчального процесу в університетах США // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 1997. – № 3,4. – Ч. 2. – С. 116–120

208. *Дышлевый П. С.* Естественнонаучная картина мира как форма синтеза знания // Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – С. 94–120.

209. *Дьомін А. І.* Основи професійної педагогіки і психології – К.: Вища шк., 1984. – 204 с.

210. *Дюженкова Л. І., Михалін Г. О.* Елементи теорії множин і теорії чисел. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 128 с.

211. Единство научного знания / В. Ф. Асмус, В. И. Шинкарук, К. Т. Абрамова и др. – М.: Наука, 1988. – 335 с.

212. *Елисеев А. Ф.* Межпредметные связи между общеобразовательными и специальными предметами. – К.: Вища шк., 1978. – 78 с.

213. *Еремкин А. И.* Система межпредметных связей в высшей школе: Аспект подготовки учителя. – Харьков: Высшая шк., 1984. – 152 с.

214. *Ермаков В. П.* Теория векторов на плоскости. – К., 1887.

215. *Жалдак М. І.* та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч. посібник / М. І. Жалдака, Н. М. Кузьміна, С. Ю. Берлінська. – К.: Вища шк., 1995. – 351 с.

216. *Жалдак М. И.* Система подготовки учителей к использованию информационной технологии в учебном процессе: Автореф. дисс. ... докт. пед. наук. – М.: НИИ СИМО АПН СССР, 1989. – 48 с.

217. *Жалдак М. І.* Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

218. *Жалдак М. І.* НІТ і гуманітаризація освіти // Використання сучасної інформаційної технології в навчальному процесі: Матеріали міжвуз. наук.-практ. конф. (29–30 жовтня 1991 р.) Редкол. М. І. Шкіль та ін. –К.: КДПІ, 1992. – С. 3–8.

219. *Жалдак М. І.* Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Вип. 7. – 2003. – 263 с.

220. *Журавлев В. И.* Педагогика в системе наук о человеке. – М.: Педагогика, 1990. – 168 с.

221. Журнал елементарной математики. – К., 1886. – № 9. – Т. 2.

222. *Зайцева І. В.* Мотивація учіння студентів: Монографія / За ред. П.Г. Лузана. – Ірпінь, Академія ДПС України, 2000. – 196 с.

223. *Зайченко І. В.* Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів. – Чернігів, 2003. – 528 с.

224. Закон України "Про вищу освіту. – К.: Верховна рада України. Інститут законодавства, 2002. – 96 с.

225. Закон України "Про загальну середню освіту" // Голос України. – 1999. – № 65.- 23 червня. – С. 4–7.

226. *Засельский В. И., Тимко Е. В., Засельская Т. А.* Методология изложения лекционного курса фундаментальных дисциплин в высшей школе // Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С. 98–100.

227. *Зверев И. Д.* Взаимная связь учебных предметов. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

228. *Зверев И. Д., Максимова В. Н.* Межпредметные связи в современной школе. – М.: Педагогика, 1981. – 159 с.

229. *Зверева Н. М., Касьян А. А.* Методологическое знание в содержании образования // Педагогика. – 1993. – № 1. – С. 9–12.

230. *Землянский Ф. М.* Развитие научных понятий в процессе дифференциации и интеграции знаний: Автореф. дисс. д-ра филолог, наук. – М., 1982. – 32 с.

231. *Зимняя И. А.* Педагогическая психология. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. – 480 с.

232. *Зорина Л. Я.* Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. – М.: Педагогика, 1978. – 128 с.

233. *Зорина Л. Я.* Отражение идей самоорганизации в содержании образования

251. История отечественной математики: В 4-х Т. 5-ти кн. / Отв. Ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 2. – 616 с.

252. История, философия и библиография физико-математических наук на Парижских международных конгрессах 1900 года // Физико-матем. науки в ходе их развития, 1901. – Т. 1. – С. 193–204.

253. *Ительсон Л. Б.* Психологические теории научения и модели процесса обучения // Сов педагогика. – 1973. – № 3. – С. 83–95.

254. *Ільченко В. Р.* Навчальна технологія інтеграції змісту природничо-наукової освіти: досвід комплексного дослідження // Педагогіка і психологія. – 1995. – № 4. – С. 3–11.

255. Інтегративний зв'язок психічних функцій та явищ // Кульчицький О. Основи філософії та філософських наук. – Мюнхен-Львів, 1995. – С. 75–89.

256. Інтеграція елементів змісту освіти: Матеріали Всеукр. конф. – Полтава, 1994. – 234 с.

257. *Касярум П. Л.* Вопросы совершенствования профессиональной подготовки учителя математики средней школы в педагогическом институте: Дис. ... канд.пед.наук: 13.00.02. – Черкассы, 1971. – 251 с.

258. Квалификационная характеристика учителя математики по специальности 2104 "Математика" (приказ Министерства высшего и среднего специального образования СССР от 31 декабря 1982 г., № 1320).

259. *Кедров Б. М.* Источники и формы взаимосвязи наук // Вопр. философии. – 1973. – № 10. – С. 50–63.

260. *Кедров Б. М.* Классификация наук. – М.: Мысль, 1985. – 190 с.

261. *Кедров Б. М.* Предмет и взаимосвязь естественных наук. – М.: Наука, 1967. – 302 с.

262. *Кедров Б. М., Смирнов П. В., Юдин Б. Г.* Системное выражение общего взаимодействия наук // Науки в их взаимосвязи. – М.: Наука, 1988. – С. 3–11.

263. Киевские математики-педагоги. Под ред. чл.-кор. АН УССР А. Н. Боголюбова. – К.: Вища школа, 1979. – 312 с.

264. Києво-Могилянська академія. – К.: В-во Київського університету, 1970. – 174 с.

265. *Кикец Ю. Г.* Проблемы интеграции общественных и естественных наук. – М.: Высш. шк., 1978. – 176 с.

266. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.

267. *Клайн М.* Математика. Поиск истины: Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. В. И. Аршинова, Ю. В. Сачкова. – М.: Мир, 1988. – 295 с.

268. *Клебанова Т. С.* Концепція викладання дисциплін математичного циклу // Матеріали науково-методичної конференції "Методичні засади викладання

// Педагогика, 1996. – № 4. – С. 105–109.

234. *Зорина Л. Я., Ярошевский М. Г.* История науки и школьное обучение. – М.: Знание, 1978. – 48 с.

235. *Зубов В. П.* Проблемы истории естествознания на VII Международном конгрессе по истории науки // ВИЕТ. – 1956. – Вып. 2. – С. 294–297.

236. *Зязюн І. А.* Засоби .урівноваження протилежностей і конфліктів в освіті // Проблеми наступності та інтеграції змісту навчання у системі "школа – ПТУ – ВНЗ". – Вінниця, 1996. – С. 6–9.

237. *Зязюн І. А., Крамущенко Л. В., Кривонос І. Ф.* та ін. Педагогічна майстерність: Підручник.; за ред. І. А. Зязюна. – К.: Вища школа, 1997. – 349 с.

238. *Ибрагимов Г. И.* К вопросу о технологии концентрированного обучения // Специалист. – 1993. – № 1. – С. 29–31.

239. *Измайлов А. О., Махмутов М. И.* Профессиональная направленность как педагогическое понятие и принцип // Вопросы взаимосвязь общеобразовательной и профессионально-технической подготовки молодих рабочих. – М.: Изд-во АПН СССР, 1982. – С. 4–30.

240. *Ильина Т.* Структурно-системный подход к организации обучения. – М.: Знание, 1972. – 88 с.

241. *Ильченко В. Р.* Обобщение и межпредметные связи. // Сов. педагогика. – 1986. – № 10. – С. 28–31.

242. *Ингенкамп К.* Педагогическая диагностика / Серия "Зарубежная школа и педагогика". – М.: Педагогика, 1991. – 240 с.

243. Институт математики /АН УССР; Сост. Ю. А. Митропольский, В.В. Строк. – К.: Наук. думка, 1988. – 176 с.

244. Интегративные процессы в педагогической науке и практике: Сб.науч.тр. – М.: Изд-во АПН СССР, НИИ общей педагогики, 1983. – 95 с.

245. Интеграция науки, образования и производства // Сов. педагогика. – 1989. – № 4. – С. 68–75.

246. Интеграция современного научного знания / Н. Т. Костюк, В. С. Лутай, Г. Ю. Кикец и др. – К.: Вища школа, 1984. – 184 с.

247. *Ирвин К.* Интегрированное образование в неоднородных обществах // Перспективы. Вопросы образования. – 1993. – № 1. – С. 81–97.

248. Историко-математические исследования, Вып. XV. – М.: Наука, 1963. – С. 225–290.

249. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. – М.: Наука, 1970–1972. – Т. 1–3.

250. История отечественной математики: В 4-х т. 5-ти кн. / Отв. ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 1. – 492 с.

спеціальних дисциплін з професійного напрямку "Менеджмент" для бакалаврського та магістерського рівнів". – Харків, 1996. – С. 94–96.

269. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2–х томах. Т.І: Пер. с нем. / Под ред. М. М. Постникова. – М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит., 1989. – 456 с.

270. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2–х томах. Т. 2. Геометрия: Пер. с нем. Под ред. В. Г. Болтянского. – 2–е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с.

271. *Клепко С. Ф.* Інтегративна освіта і поліформізм знання. – Монографія. – Київ-Полтава-Харків: ПОПОПП, 1998. – 360 с.

272. *Клепко С. Ф.* Феномен уникания математики // Постметодика. – 1995. – № 1 (8). – С. 12–18.

273. *Клепко С. Ф.* Що це таке – гуманізм? // Постметодика. – 1995. – № 2 (9). – С. 9–10.

274. *Клочко В. І.* Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 396 с.

275. *Ковальчук Г. О.* Активізація навчання в економічній освіті. – К.: КНЕУ, 1999. – 128 с.

276. *Кожабаев К. Г.* О воспитательной направленности обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1988. – 80 с.

277. *Козаков В. А.* Самостійна праця студентів та її інформаційно-методичне забезпечення. – К.: Вища школа, 1990. – 157 с.

278. *Козаков В. А.* Самостоятельная работа студентов и ее информационно-методическое обеспечение. – К.: Вища шк., 1990. – 248 с.

279. *Козловська І., Кміт Я., Собко Я.* Ідеї інтеграції у контексті світової філософської думки // Філософські пошуки. – 1997. – Вип. 1–2. – С. 121–131.

280. *Козловська І., Собко Я., Джулик О.* Взаємозв'язок філософських та психологічних основ процесів інтеграції в освіті // Філософські пошуки. – 1997. – Вип. 4. – С. 132–136.

281. *Козловська І. М.* Інтегративні тенденції в сучасній педагогіці: закономірності та принципи дидактичної інтегрології // Наука і освіта. – 1998. – С. 27–33.

282. *Козловська І. М.* Теоретичні та методичні основи інтеграції знань учнів професійно-технічної школи: Дис. … докт. пед. наук: 13.00.04. – К., 2001.

283. *Колмогоров А. Н.* Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988.

284. *Колмогоров А. Н.* Математика // Больш. Сов. Энциклоп. 3–е изд. – М., 1974.

285. *Колмогоров А. Н.* Математика // Мат. Энц. Слов. Гл. ред. Ю.В.Прохоров. – М., 1988. – С. 7–38.

286. *Колмогоров А. Н.* Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука,1991. –

224 с.

287. *Колмогоров А. Н.* О профессии математика. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 30 с.

288. *Кольман Э.* История математики в древности. – М.: Изд-во ФМЛ, 1961. – 236 с.

289. *Кольман Э.* О некоторых нерешенных вопросах истории античной математики // Историко-математические исследования. – М.: Гос. изд. ФМЛ, 1958. – Вып. XI. – С. 159–170.

290. Комп'ютер як засіб діагностики знань з історії математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – № 1 (8). – С. 148–156.

291. Конструювання цілісності змісту освіти // ПостМетодика. – 1994. – № 2 (6). – С. 16–24.

292. *Конфорович А. Г., Сорока М.О.* Остроградський: Роман. – К.: Молодь, 1980. – 216 с.

293. *Конфорович А. Г., Андрієвська Г. М.* Історія розвитку математики. Методичні вказівки. – К.: Вища школа, 1980. – 92 с.

294. *Конфорович А. Г.* Визначні математичні задачі. – К.: Радянська школа, 1981. – 189 с.

295. *Конфорович А. Г.* Колумби математики. – К.: Радянська школа,1982. –222 с.

296. *Конфорович А. Г., Андрощук І. Г., Груніна К. О.* Математичні вечори у восьмирічній школі. – К.: Рад.школа, 1974. – 200 с.

297. *Коссов Б. Б.* Обобщенность содержания высшего образования как фактор его развития // Вопросы психологии. – 1995. – № 6. – С. 9–20.

298. *Костарчук В. М., Хацет Б. І.* Курс вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1969. – 540 с.

299. *Костюк Н. Т.* Об'єктивна зумовленість і діалектика інтеграції сучасного наукового знання // Вісник Київ. ун-ту: Вип. 10 (Питання філософських наук). – К., 1978. – С. 35–43.

300. *Котенко В. П.* История науки. Классические модели // История науки и техники. – 2002. – № 6. – С. 62–67.

301. *Котенко В. П.* История науки. Неклассические модели // История науки и техники, 2003. – № 7. – С. 17–24.

302. *Крамар Ф. Д.* Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX вв. // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1963. – Вып. XV. – С. 225–290.

303. *Крамар Ф. Д.* От геометрической алгебры древних к векторному исчислению // История и методология естественных наук. – М.: Изд-во МГУ, 1970. – Вып. IX. – С. 159–168.

вчителів України, 1996. – 256 с.

323. *Мадер В.В.* Введение в методологию математики (Гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики). Математика и теория познания. – М.: Интерпракс, 1994. – 448 с.

324. *Маковский Н. А.* Взаимосвязь наук. – Харьков: Высш. шк., 1984. – 137 с.

325. *Максименко С. Д.* Структура особистості: теоретико-методологічний аспект дослідження // Наукові записки Інституту психології ім. Г.С. Костюка АПН України / За ред. академіка С. Д. Максименка. – К.: Нора-прінт, 2004. – Вип.24. – С. 3–15.

326. *Маланюк М. П.* Нариси з історії розвитку математичної освіти у Галичині. – Тернопіль, 1993. – 58 с.

327. *Малыгин К.А.* Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. – М.: Учпедгиз, 1963. – 240 с.

328. *Марков С. Н.* История и методология математики для специальности "Математика" // ww.isu.ru/ facs/ math/kafedra/matan/index.jsp

329. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях / Укладач Н.О.Вірченко – К.: Вища школа, 1974. – 272 с.

330. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – 250 с.

331. *Матюшкин А. М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.

332. Международный конгресс математиков в Киото, 1990. Избранные доклады: Сб. статей: Пер. с англ. / Сост. В. М. Тихомиров. – М.: Мир, 1996. – 431 с.

333. Межпредметные связи естественно-математических дисциплин. Пособие для учителей. Сб. статей / Под ред. В. Н. Федоровой. – М.: Просвещение, 1980. – 208 с.

334. *Мейдер В. А.* Учителю о философских проблемах математики. Монография. М.: Прометей, 1989. – 213 с.

335. *Мелюхин С. Г.* Интеграция научного знания // Философия и современность. – М.: Наука, 1971. – С. 290–310.

336. Методика преподавания математики / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.

337. Методичні рекомендації для проведення семінарсько-практичних занять з історії математики для студентів V курсу фізико-математичних факультетів / Укладач А. О. Розуменко. – Суми: СумДНУ імені А. С. Макаренка, 2004. – 60 с.

338. *Микулинский С. Н.* Современное состояние и теоретические проблемы развития науки // Философия, естествознание, современность. – М.: Мысль, 1981. – С. 181–208.

339. *Минковский В. Л., Ветров В. В.* О курсе истории математики в педвузах

304. *Крилова Т. В.* Початки математичного моделювання (Наукові основи навчання математики студентів технічних спеціальностей). – К.: Інститут змісту та методів навчання МО України, 1997. – Ч. 1. – 278 с.

305. *Кремень В. Г.* Стратегія і перспективи розвитку освіти в Україні // Образование без границ. – Крым, МДЦ "Артек". – 2001. – № 1. – С. 11–20.

306. *Кудрявцев Л. Д.* Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука, 1977. – 112 с.

307. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1980. – 132 с.

308. *Кудрявцев П. С., Фигуровский Н. А.* О преподавании истории науки и техники // ВИЕТ. – 1974. – Вып. 47–48. – С. 116–118.

309. *Кудряшов А. Ф.* Единство наук: основания и перспективы. – Свердловск: Изд-во Урал.ун-та, 1988. – 183 с.

310. *Кузнецов Б. Г.* История философии для физиков и математиков. – М.: Наука, 1974. – 352 с.

311. *Кузнецов В. И.* Принципы активной педагогики: Что и как преподавать в современной школе: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр "Академия", 2001. – 120 с.

312. *Кузьмин М. В.* Синергетика – наука о сложном в контексте целого // Наука та наукознавство. – 1995. – № 1–2. – С. 22–33.

313. *Кульчицкий К.И., Корнеева М.Г.* Интегративные процессы в современной медицине и их отражение в подготовке врачей // Фил. вопр. медицины и биологии: Вып. 19. – К.: Здоровье, 1987. – С. 77–88.

314. *Кун Т.* Структура научных революций. – М.: Прогресс, 1975. – 288 с.

315. Курсові роботи з методики математики: Методичні вказівки. – К.: УДПУ, 1994. – 68 с. (В. Г. Бевз, О. І. Глобін, В. Я. Забранський, В. О. Швець)

316. *Лебег А.* Об измерении величин. – Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФР, 1960. – 206 с.

317. *Ленюк М. П., Михацький М. А.* Нариси з історії розвитку математики в Україні. – Чернівці: Прут, 2004. – 56 с.

318. *Лобачевский Н. И.* Научно-педагогическое наследие. – М.: Наука, 1976. – 663 с.

319. *Логвинов И. И.* Философия образования и педагогика: точка зрения дидакта. // Педагогика. – 1997. – № 3. – С. 105–110.

320. *Луи де Бройль.* По тропам науки (польза и уроки истории науки). – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 408 с.

321. *Лук'янова М.* Урок розв'язання текстових задач // Математика в школі. – 2002. – № 1. – С. 31–36.

322. *Лутай В. С.* Філософія сучасної освіти. – К.: Центр "Магістр-S" Творчої слілки

// Математика в школе. – 1977. – № 5. – С. 70–71.

340. *Михалін Г.О.* Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. – Київ: РННЦ „ДІНІТ", 2003. – 320 с.

341. *Мойсеюк Н. Є.* Педагогіка. Навчальний посібник. 4–е видання, доповнене, 2003. – 615 с.

342. *Молодший В. Н.* Элементы истории математики в школе. – М.: Учпедгиз, 1953. – 35 с.

343. *Монастырский М. И.* Development of Mathematics 1950 – 2000 /Ed by Jean-Paul Pier. Basel et al., 2000 // Вопросы истории естествознания и техники. – 2003. – № 2. – С. 200–204.

344. *Монахова Г. А.* Образование как рабочее поле интеграции // Педагогика. – 1997. – № 5. – С. 52–55.

345. *Моргун В. Ф.* Інтердифія освіти: психолого-педагогічні основи інтеграції та диференціації (інтердифії) навчання на прикладі шкільного циклу природничих дисциплін. Курс лекцій. – Полтава: Наукова зміна, 1996. – 78 с.

346. *Мордкович А. Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте. Автореф. дис. … докт. пед. наук. – М., 1986. – 36 с.

347. *Москаленко П. Г.* Структурная модель науки как дидактическое основание формирования системных знаний школьников // Новые исслед. в пед. науках. – М.: Педагогика, 1991. – С. 30 – 33.

348. *Насыров А. З.* Историко-методологические основы образования учителей. – Новосибирск: НГПИ, 1989. – 84 с.

349. Науки в их взаимосвязи: История. Теория. Практика / Б.М. Кедров и др. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

350. Національна академія наук України.Персональний склад. 1918–2003. – К.: Фенікс, 2003. – 300 с.

351. *Никонова Т. Ф.* Джон Валлис как создатель первого курса "Алгебры" (1685 года) на историко-генетических началах и применение историко-генетического метода в современном преподавании математики в школе (732–методика математики) Автореф. дис. … канд. пед. наук. – М, 1969. – 18 с.

352. Наукові школи Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова / Ред. В. П. Андрущенко, укл. В.П.Бех, Г.І.Волинка. – К.: Четверта хвиля, 2005. – 328 с.

353. О преподавании курса истории техники в высших технических учебных заведениях /Приказ Министерства высшего образования СССР № 44 от 25 февраля 1955 года // Бюл. мин. высш. образ. СССР. – 1955. – № 3. – С. 4–5.

354. *Овчинников Н. Ф.* Особенности развития и тенденция к единству научного знания. – М.: Наука, 1974. – 311 с.

355. *Овчинников Н. Ф.* Тенденция к единству науки: Познание и природа. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

356. *Огурцов А. П.* Взаимосвязь наук и принцип деятельности // Науки в их взаимосвязи: История. Теория. Практика / Б.М. Кедров и др. – М.: Наука, 1988. – С. 50–76.

357. *Огурцов А. П.* Дисциплинарная структура науки: ее генезис и обоснование. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

358. *Околелов О. П.* Современные технологии обучения в вузе: сущность, принципы проектирования, тенденции развития // Высшее образ. в России. – 1994. – № 2. – С. 45–50.

359. *Оконь В.* Введение в общую дидактику. – М.: Высшая школа, 1990. – 381 с.

360. *Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К.* Старинные занимательные задачи. – М.: Дрофа, 2002. – 176 с.

361. *Остроградский М. В.* Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности / Под ред. И. В. Подгребысского и А. П. Юшкевича. – М.: Физматгиз, 1961. – 399 с.

362. *Остроградський М. В., Блюм А.* Міркування про викладання // Наукові записки КДПІ ім. О. М. Горького, Т.XVII. – К., 1995. – С. 137–155.

363. *Охрименко Д. В. Каган В. Ф.* и его роль в повышении квалификации учителей // Матем. в школе. – 1972. – № 1. – С. 87–89.

364. *Ощепкова Н. П.* Логико-дидактическое обоснование отбора содержания учебного материала вузовских дисциплин. Автореф. дис. … канд. пед. наук. – М., 1984. – 17 с.

365. *Павленко Ю. В.* та ін. Природознавство в Україні до початку XX ст. в історичному, культурному та освітньому контекстах. – К.: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 420 с.

366. *Павленко Ю. В.* Наука в контексте мирового цивилизационного процесса // Наука та наукознавство. – 2002. – № 4. – С. 23–32.

367. *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов, Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

368. *Паламарчук В. И.* Реализация межпредметных связей в процессе проблемного обучения. – К.: Вища школа, 1975. – 57 с.

369. *Папуча М. В.* Психологія ранньої юності: Навч.-метод.посіб. – Ніжин: Ред.-вид. відд. НДПУ, 2001. – 174 с.

370. Педагогічний словник / За редакцією дійсного члена АПН України М. Д. Ярмаченка – К.: Педагогічна думка, 2001. – 516 с.

371. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей. /Под ред. П. И. Пидкасистого. – М.: Рос. педагогическое агентство, 1998. – 640 с.

/ Буш Г.Я., Ведин И.Ф., Дрейманис А.П. и др. – Рига: Зинатне, 1988. – 210 с.

391. Проблемы истории и методологии научного познания / Под ред. Б.М. Кедрова, Н.Ф. Овчинникова. – М.: Наука, 1974. – 408 с.

392. Програми факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2002. – 154 с.

393. Програма курсу математики для гуманітарних класів (10–11 класи) // Концепція та зміст природничо-математичної освіти в навчальних закладах гуманітарного спрямування: Збірник методичних матеріалів: Вип. 1. – К.: АПН України, 1995. – С. 35–39 (Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова).

394. Програма науково-дослідних робіт з математики в установах НАН України та вищих учбових закладах України на 2000–2010 роки // Бюлетень українського математичного товариства. – Київ, 2001. –№ 9–10. – С. 20–44.

395. Програма педагогічних інститутів. Історія елементарної математики (для фіз.-мат. факультетів). – Київ: Державне учбово-педагогічне видавництво „Радянська школа", 1957. – 4 с.

396. Программа лекций по Истории древней математики, читанных в 1883–1884 академическом году приват-доцентом В.В. Бобыниным / продолжение курса 1882–1883 года // История и методология естественных наук. – 1982. – Вып. XXIX. – С. 11–13.

397. Программа лекций по Истории новой математики, читанных в 1883–1884 академическом году приват-доцентом В. В. Бобыниным // История и методология естественных наук. – 1982. – Вып. XXIX. – С. 14–15.

398. Программа педагогических вузов по истории математики // Матем. в школе. – 1985. – № 3. – С. 57–60.

399. Программа по истории математики / для физ.-мат. и мех.-мат. факульт. гос. университетов. Авторы: А. П. Юшкевич, С. А. Яновская. – М.: Издательство Московского университета, 1949. – 9 с.

400. Программа по истории математики / для физ.-мат. факульт. гос. университетов. – М., 1945. – 4 с.

401. Программа по истории математики / составлена проблемной группой по истории математики ИИЕиТ, отв.ред. В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1981. – 16 с.

402. Программа по истории математики с элементами методологии // Матем. в школе. – 1985. – № 3. – С. 60 – 63.

403. Программа по математике для поступающих в вузы // Бюл. мин. высш. образ. СССР. – 1949. – № 3. С. 5.

404. Программа по математике для поступающих в вузы // Бюл. мин. высш. образ. СССР. – 1955. – № 4. – С. 4.

405. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.

372. Педагогическая прогностика: Методология, теория, практика / Б. С. Гершунский. – К.: Вища школа, 1986. – 200 с.

373. *Петрова И. И.* Педагогические основы межпредметных связей. – М.: Высш. шк., 1985. – 79 с.

374. *Пидласый И. П.* Педгогика. - М.: Просвещение. Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1996. – 432 с.

375. *Пинский А. А., Голин Г.* Логика науки и логика учебного предмета // Сов. педагогика. – 1983. – № 2. – С. 53–59.

376. *Плоткин С. Я.* XIV Конгресс по истории науки // ВИЕТ. – 1975. – Вып. 50. – С. 30–39.

377. *Плоткин С. Я.* Организация в СССР исследований по истории естествознания и техники // ВИЕТ. – 1968. – Вып. 23. – С. 3–9.

378. *Плоткин С. Я., Юшкевич А. П.* XIII Международный конгресс по истории науки // ВИЕТ. – 1972. – Вып.38. – С. 90–100.

379. *Пов'якель Н. І.* Професіогенез саморегуляції мислення практичного психолога: Монографія. – Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. – 295 с.

380. *Полякова Т. С.* Историко-методическая подготовка учителя математики: Методический аппарат. – Ростов на Дону: Изд-во РГПУ, 1997. – 64 с.

381. *Пометун О. І.* та ін. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. посібн / О.І. Пометун, Л. В. Пироженко. За ред. О.І. Пометун. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 192 с.

382. *Попов Г. Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. –М., Л.: ОНТИ, 1938. – 216 с.

383. *Потоцкий М. В.* Преподавание высшей математики в педагогическом институте. – М.: Просвещение, 1975. – 208 с.

384. *Працьовитий М. В.* Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр). – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 92 с.

385. *Працьовитий М. В.* Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАНУ – НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – № 1.– С. 5–26.

386. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

387. *Пригожин И.* Философия нестабильности // Вопр. философии. – 1991. – № 6. – С. 46–52.

388. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. – М.: Прогрес, 1986. – 431 с.

389. Про математику і математиків / Упоряд.: А. С. Зоря, С. М. Кіро. – К.: Рад. школа, 1981. – 254 с.

390. Проблемы интеграции научного знания: Теоретико-методологический аспект

406. Психологія: Підручник / Ю. Л. Трофімов, В. В. Рибалка, П. А. Гончарук та ін.; за ред. Ю. Л. Трофімова. – 3–є вид. – К.: Либідь, 2001. – 560 с.

407. *Разумовский В. Г., Тарасов Л. В.* Развитие общего образования: интеграция и гуманитаризация // Советская педагогика. – 1988. – № 7. – С. 3–10.

408. *Рац М.В.* К вопросу о фундаментальном и прикладном в науке и образовании // Вопр. философии. – 1996. – № 9. – С. 169 – 177.

409. *Реньи А.* Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980. – 376 с.

410. *Рижко В. А.* Концепція як форма наукового знання. – К.: Наукова думка, 1995. – 212 с.

411. *Рогов Е. И.* Настольная книга практического психолога в образовании: Учебное пособие. – М.:ВЛАДОС, 1995. – 529 с.

412. *Роджерс Л.* Историческая реконструкция математического знания // Математическое образование. – 2001. – № 1 (16). – С. 74–85. // Перевод с английского выполнен А. И. Щетниковым.

413. *Рыбалко Е. Ф.* Возрастная и дифференциальная психология. – СПб: Питер, 2001. – 221 с.

414. *Рыбников К. А.* Введение в методологию математики. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995. – 69 с.

415. *Рыбников К. А.* Виктор Викторович Бобынин // Историко-математические исследования. Т. 3. – М., Л.: ГИТТЛ, 1950. – С. 343–357.

416. *Рыбников К.А.* История математики, I: Учебн. пособ. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 190 с.

417. *Рыбников К. А.* История математики, II: Учебн. пособ. – М.: Изд-во МГУ, 1963. – 336 с.

418. *Рыбников К. А.* История математики: Учебник. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 496 с.

419. *Рыбников К. А.* Об историко-методологических основах математического образования учителей // Матем. в школе. – 1981. – № 5. – С. 31–33.

420. *Рыбников К. А.* Об историко-методологических основах математического образования учителей // Матем. в школе. – 1982. – № 3. – С. 48–49.

421. *Самойленко П. И., Сергеев А. В.* Интегративная функция обучения основам наук // Специалист. – 1995. – № 5–6. – С. 36–37.

422. *Саранцев Г. И.* Гуманизация образования и актуальные проблемы методики преподавания математики // Матем. в школе. – 1995. – № 5. – С. 36–39.

423. *Саркисян А.А.* Познакомьтесь с топологией. – М.: Просвещение, 1976. – С. 3–76.

424. *Сафонова Н.В.* Уніфікація наукового знання на основі математики: Автореф. дис. ... канд. філософ. наук: 09.00.01.– Сімферополь, 2000. – 16 с.

425. *Семенюк Э. П.* Интегративные процессы в современной науке и информатике.

// Научно техническая информация. – 1978. – № 8. – С. 72.

426. *Семенюк Э.П.* Информативный подход к познанию действительности. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.

427. *Сидоренко В. К.* Інтеграція навчальних предметів як педагогічна категорія // Проблеми наступності та інтеграції змісту навчання у системі "школа – ПТУ – ВНЗ". – Вінниця, 1996. – С. 96–98.

428. Синергетика и образование. – М.: Гнозис, 1997. – 360 с.

429. Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – 427 с.

430. *Синцов Д.М.* О международной комиссии по преподаванию математики // Матем. образование. – 1914. – № 1. – С. 5–20.

431. *Синцов Д. М.* О подготовке преподавателей математики // Матем. образование. – 1914. – № 2. – С. 89–93.

432. *Синцов Д. М.* Университет и средняя школа / Доклад, читанный на XIII съезде Русских Естествоиспытателей и Врачей в Тифлисе в секции педагогических вопросов 19 июня 1913 г. // Матем. образование. – 1913. – № 5.

433. *Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П.* Абу Райхан Беруни и его математические труды. Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1978. – 98 с.

434. *Сичивица О. М.* Сложные формы интеграции наук. – М.: Высш. шк., 1980. – 202 с.

435. *Скрипченко О. В.* Довідник з педагогіки і психології: Навч. посібник для викладачів, аспірантів та студентів пед. навч. закл. для шкільних психологів та вчителів / О.В. Скрипченко, Т.М. Лисенська, Л.О. Скрипченко. – К., 2001. – 216 с.

436. *Сластенин В. А.* Профессионализм педагога: акмеологический контекст // Педагогическое образование и наука. – 2003. – № 3. – С. 4–9.

437. *Слепкань З. И.* Психолого-педагогические основы обучения математики: Метод. пособие. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.

438. *Слєпкань З. І.* Методика навчання математики: Підручн. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

439. *Слєпкань З. І.* Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі. – К.: НПУ, 2000. – 210 с.

440. *Смирнов В. П.* Пути науки // Методологические проблемы взаимосвязи общественных естественных и технических наук. – М.: Наука, 1981. – С. 12–26.

441. *Смирнов С. Д.* Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр "Академия", 2001. – 304 с.

442. *Смирнова Г. Е.* Интегративный характер научно-технического знания // Философские науки. – 1986. – № 1. – С. 45.

443. Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей. Учеб.

пособие для студентов мат. и физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Сост. Н. С. Антонов, В. А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – 304 с.

444. *Соловьёв Ю. П.* Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма // Энциклопедия естествознания. – С. 40–41.

445. *Сохор А. М.* Логическая структура учебного материала. – М.: Педагогика, 1974. – 192 с.

446. *Співаковський О. В.* Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій. Дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. – К., 2004. – 534 с.

447. *Спиркин А. Г., Тюхтин В. С.* О взаимосвязи наук в современном естествознании // Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – С. 60–73.

448. Средства обучения математики в школе: Сб.статей / Сост. А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1980. – 208 с.

449. *Ставская Н.Р.* Интеграция науки и ее роль в развитии научно-технической революции. – Волгоград: Нижневолжское книж. изд-во, 1972. – 168 с.

450. *Ставская Н. Р.* Философские вопросы развития современной науки (социологические и методологические проблемы интеграции науки). – М.: Высш. шк., 1974. – 232 с.

451. *Старостин Б. А.* Общие проблемы истории науки на международных конгрессах // ВИЕТ. – 1977. – Вып. 58. – С. 57–75.

452. *Столяр А. А.* Роль математики в гуманизации образования // Матем. в школе. – 1990. – № 6. – С. 5–7.

453. *Столяренко Л. Д.* Педагогическая психология. Серия "Учебники и учебные пособия". – 2–е изд., перераб. и доп. – Ростов-на-Дону: "Феникс", 2003. – 544 с.

454. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1990. – 256 с.

455. *Судибор Г. П.* Содержание и структура геометрического материала в курсе математики педагогических институтов. Автореф. дис. … канд. пед. наук. – Киев, 1982. – 18 с.

456. *Сыновецкий А.* Роль диалектики в процессе интеграции естественных наук // Философия и интеграция науки. – М.: Знание, 1980. – 64 с.

457. *Тадеєв В. О.* Неформальна математика. 6–9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.

458. *Тадеєв В. О.* Шкільний тлумачний словник-довідник з математики. – Тернопіль: "Навчальна книга – Богдан", 1999. – 160 с.

459. *Талашев Х., Умаров А.* О принципе историзма в обучении школьному курсу математики // Современные проблемы методики преподавания математики. – М.: Просвещение, 1985. – С. 294–301.

460. *Торбін Г. М., Лещинський О. Л.* Історія розвитку інтересу до фракталів у математичних дослідженнях в Україні // Рік 2000 – рік математики.: Матеріали міжвузівської науково-практичної конференції. – Чернігів, 2001. – С.48–50.

461. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

462. *Умаров А. Т.* Педагогические основы использования принципа историзма на уроках математики в средней школе. Автореф. дис. … канд. пед. наук. – Ташкент, 1989. – 16 с.

463. *Урсул А. Д.* Философия и интегративно-общенаучные процессы. – М.: Наука, 1981. – 366 с.

464. *Ухань П. С.* Сучасні автоматизовані системи контролю знань: можливості та шляхи використання // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб.наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Випуск 2. – 2000. – С. 104–122.

465. *Фёдоров И. Г.* Взаимосвязь математики и философии в процессе их исторического развития. Автореф. дис. … канд. пед. наук. – М., 1973. – 16 с.

466. *Федосеев П. Н.* Философия и интеграция знания // Философия, естествознание современность. – М.: Мысль, 1981. – С. 6–25.

467. *Федосеев П. Н.* Философия и научное познание. – М.: Наука, 1983. – 464 с.

468. *Фигуровский Н. А.* VIII конгресс по истории науки // ВИЕТ. – 1957. – Вып. 3. – С. 256–259.

469. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, Том. I. – М.: Наука, 1968. – 440 с.

470. Філософія: Курс лекцій / Л. В. Губерський, І. Ф. Надольний, В. П. Андрущенко та ін.; За ред. І. Ф. Надольного. – К.: Вікар, 2000. – 516 с.

471. *Фоменко В. Т.* Построение процесса обучения на интегративной основе: содержание, технологии, организационные формы. – Ростов-на-Дону, 1996. – С. 12–24.

472. *Френкель А. М.* Элементы историзма в преподавании математики // Матем. в школе. – 1950. – № 6. – С. 34–36.

473. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

474. *Хазратова Н.* Психологічні проблеми та особистісні кризи студентського віку // Особистісні кризи студентського віку: Зб. наук. ст. / За ред. Т. М. Титаренко. – Луцьк: Вежа, 2001. – 140 с.

475. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980. – 404 с.

476. *Хацет Б. І.* Незабутні роки // У світі математики. – Т.4. – Вип.4. – С. 71–81.

477. *Холтон Дж.* Тематический анализ науки. – М.: Мир, 1981. – 157 с.

478. *Храмова В. Л.* Новая парадигма современных историко-научных исследований // Наука та наукознавство. – 2002. – № 4. – С. 90 – 97.

479. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. Пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 318 с.

480. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей. Пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 310 с.

481. *Цетлин В. С.* Группировка учебных предметов с учетом особенностей отражения науки в содержании образования // Теория содержания общего среднего образования и пути ее построения. – М.: Педагогика, 1978. – С. 53–65.

482. *Циглер Ф.* Элементы истории математики в средней школе // Математика и физика в школе. – 1934. – № 3. – С.

483. *Чепелєва Н. В.* Психологія читання тексту студентами вузів. – К.: Либідь, 1990. – 100 с.

484. *Чепиков М. Т.* Интеграция науки. – М.: Мысль, 1981. – 276 с.

485. *Чернилевский Д. В.* Дидактические технологии в высшей школе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 437 с.

486. *Чистяков В. Д.* Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Высшая школа, 1978. – 270 с.

487. *Шабашова О. В.* Элементы истории математики как средство формирования общей культуры ученика основной школы (на примере геометрии) Автореф. дис. … канд. пед. наук. – М., 1995. – 16 с.

488. *Швалб Ю. М.* Целепокладающее сознание (психологические модели и исследования). – К.: Миллениум, 2003. – 152 с.

489. *Швецов К.І.* Математика на Україні. – К.: Радянська школа. – 1968. – 76 с.

490. *Швець В. О., Бойко Л. М.* Міжпредметні зв'язки математики і фізики: стан, проблеми, перспективи // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – № 6. – С. 21–25.

491. *Швець В. О., Забранський В. Я.* Програма з методики навчання математики // Програми з методики навчання математики, елементарної математики та історії математики. – К.: НПУ ім. М.Драгоманова, 2001. – С. 4–19.

492. *Шевелева С. С.* К становлению синергетической модели образования // Общественные науки и современность. – 1997. – № 1. – С. 125–133.

493. *Шевченко И. Н.* Элементы историзма в преподавании математики // Известия АПН РСФСР, Вып. 92. Вопросы общей методики математики. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958. – С. 199–229.

494. *Шереметевский В. П.* Исторический очерк развития анализа и его приложений к геометрии / В кн. Г.Лоренц. Элементы высшей математики. – М.: 1903. – Т.1. –

С. 87–362.

495. *Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф.* За страницами учебника математики: Мат.анализ.Теория вероятностей.Старин. и занимат. задачи: Кн. для учащихся 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 1997. – 269 с.: ил.

496. *Шиманський І. Є.* Методика викладання ірраціональних чисел у середній школі // Методика викладання математики. Республіканський науково-методичний збірник. – Випуск 1. – К.: Вид-во "Радянська школа", 1964. – С. 4–21.

497. *Шкиль Н. И., Бевз В. Г.* Педагогические идеи М. В. Остроградского и их влияние на развитие образования // Вестник Московского университета. Серия XX. Педагогическое образование. – 2003. – № 2. – С. 100–112.

498. *Шкіль М. І., Бевз В. Г.* Алгоритм доброти. Педагогічні ідеї М. В. Остроградського та їх вплив на розвиток освіти України // Освіта. – 2001. – 29 серпня – 5 вересня. – С. 48–50.

499. *Шкіль М. І., Бевз В. Г.* М. В. Остроградський – прогресивний реформатор математичної освіти // М. В. Остроградський – видатний математик, механік і педагог: матеріали міжнар. конф., присвяченої 200–річчю з дня народження М. В. Остроградського. – Полтава: ІОЦ ПДУ, 2001. – С. 162–164.

500. *Шкіль М. І., Бевз В. Г.* Педагогічні ідеї М. В. Остроградського та їх вплив на розвиток освіти в Україні // Бюллетень Українського математичного товариства. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – № 9–10. – С. 6–13.

501. *Шкиль М. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении: В двух частях. – Ч. І. – К.: КСУ, 1996. – 258 с.

502. *Шкиль М. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении: В двух частях. – Ч. ІІ. – К.: КСУ, 1997. – 2226 с.

503. *Шмигевський М. В.* Видатні математики. – Х.: Видав. гр. "Основа", 2004. – 164 с.

504. *Шмідт О. Ю.* Перша лекція // Нариси з історії природознавства і техніки. – 1994. – № 41. – С. 64–68.

505. *Штокало Й. З.* Нарис розвитку математики в Україні за 40 років радянської влади. – К.: Вид-во АН УРСР, 1958. – 82 с.

506. *Шут М. І, Форостян Н. П.* Вибрані питання історії молекулярної фізики (XVIII-початок XXст.): .Навчальний посібник. – К.: "Шлях", 2003. – 152 с.

507. *Щотка О. П.* Вікова психологія дорослої людини: Навчальне вид. – Ніжин: НДПУ, 2001. – 194 с.

508. *Энгельгардт В. А.* О некоторых атрибутах жизни: иерархия, интеграция, узнавание // Философия, естествознание, современность. – М.: Мысль, 1981. – С.91–107.

509. *Юдин Б. Г.* Методологическая характеристика процессов взаимодействия в нау-

ке // Методологические проблеми взаимодействия общественных естественных и технических наук. – М.: Наука, 1981. – С. 45–49.

510. *Юдин Е. Г.* Системные исследования и взаимосвязь наук // Науки в их взаимосвязи. – М.: Наука, 1988. – С. 193–215.

511. *Юлина Н. С.* Образы науки и плюрализм метафизических теорий // Вопросы философии. – 1982. – № 3. – С. 109–118.

512. *Юлина Н. С.* Обучение разумности и демократии: педагогическая стратегия "Философия для детей" // Вопросы философии. – 1996. – № 10. – С. 32–45.

513. *Юшкевич А. П.* Из истории возникновения математического анализа. – М.: „Знание", 1985. – 48 с.

514. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1961. – 448 с.

515. *Яворський Е. Б.* Системологічні аспекти взаємодії знань і складових навчання // Інтеграція елементів змісту освіти. – Полтава, 1994. – С. 21–22.

516. *Яглом И. М.* Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское радио, 1980. – 144 с.

517. *Яковлев И. П.* Интеграционные процессы в высшей школе. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 116 с.

518. *Яновская А. С.* Об одном применении истории математики // Вопросы истории естествознания и техники, 1956. – Вып. 1. – С. 290–293.

519. *Яценко Т. С.* Інтеграція та дезінтеграція як механізми психокорекції // Педагогіка і психологія. – 1996. – № 1. – С. 3–9.

520. *Яценко Т. С.* Активна соцыально-психологычна пыдготовка вчителя до спілкування з учнями: Книга для вчителя. – К.: Освіта, 1993. – 224 с.

521. *Bobynin V.V.* Programme de cours de l'histoire des matheniatiques a'l'universite de Moskwa // Bibl. math.–1881. – № 3. – P. 79–88.

522. *Christensen S.A., Heiberg J.L.* Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Dänemark // Bibl. math. – 1889. – № 3. – S. 75–77.

523. History of mathematics. Manchester Department of Mathematics // www.ma.man.ac.uk /DeptWeb/UGCourses/Syllabus/HS2481.html

524. History of mathematics. Leicester Department of Mathematics and Computer Science // www.mcs.le.ac.uk/Modules/MA-02–03/MA3501.html

525. *Eneström G.* Die Geschichte der Mathematik und Universitätunterricht // Bibl. math. – 1904. – f.3. – Bd.5. – S. 63–67.

526. *Eneström G.* Programme d'un ccours universitaire d'histoire des mathematiques // Bibl.math. – 1890. – № 1. – P. 1–10.

527. *Favaro A.* Otto anni d'insegnamento di storia delle Matematiche nella R.Universita di Padova // Bibl.math. – 1887. – P. 49–54.

528. *Halsted G.B.* On the teaching of the history of mathematics in the University of Texas // Bibl. math. – 1891. – № 3. – P.53.

529. *Holst E.* Bibliographische Notiz über das Studium der Geschichte der Mathematik in Norwegen // Bibl. math. – 1889. – № 4. – S. 97–99.

530. *Mansion P.* Programme du Cours d'histoire des Mathematiques de l'Universite de Gand // Bibl. math. – 1900. – f.3. – Bd.l. – P. 232–236.

531. *Mansion P.* Sur le cours d'histoire des mathematiques de l'Universite de Gand // Bibl. math. – 1888. – f.2. – P. 33–35.

532. *Rogers L.* Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible? Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, IREM de Montpellier, 1995, P. 105–114.

533. *Smith D.E.* On the course in the history of mathematics in the Michigan State Normal College // Bibil. math. – 1898. – № 1. – P. 13–17.

534. *Stipanic E.* History and philosophy of mathematics as a subject of the regular curriculumat the scientific-mathematical university of Belgrade /Historia mathematica. – 1978. – v.5. – № 3. – P. 342–345.

535. Wissenschaftliche Chronik. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik // Bibl.math. – 1900 – 1906.

Наукове видання

Валентина Григорівна БЕВЗ

Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів

Монографія

Редагування та коректура *П. Гвоздецький, О. Макаренко*

Обкладинка та макетування *О. Макаренко*

ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА

Підписано до друку 29.06.2005р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 22,5. Облік.-видав. арк. 24,9.
Наклад 300 прим. Зам. № 402
Віддруковано з оригіналів.

01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9 кім. 221-а, тел. 239-30-85
Редакційний відділ НПУ імені М.П.Драгоманова
Видавництво Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. 01601, м.Київ, вул. Пирогова, 9
Друкарня НПУ імені М.П. Драгоманова.
01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002.
(044) 239-30-26