МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

Т.М.ЛОЗБЕНЬ

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДГРУПП

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1971

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100310668

Диссертация выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.С.Чарин

Официальные оппоненты: член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор С.Н.Черников, кандидат физико-математических наук доцент Ушаков В.И.

Ведущее предприятие - Белорусский (Минский) государственный университет имени В.И.Ленина.

Автореферат разослан 5 октября 1971 г.

Защита диссертации состоится _____ 197 г. на заседании Ученого совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института (Киев, 30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

В теории топологических групп сложилось и успешно развивается направление, основным содержанием и целью которого является изучение алгебраической структуры топологических групп. Естественно, что в теорию топологических групп проникли и широко применяются идеи и методы абстрактной теории групп. Достаточно отметить здесь работы А.Г.Куроша (I) о силовских подгруппах топологических групп, Н.А.Маркова о свободных топологических группах, а также работы В.М.Глушкова, В.С.Чарина, В.И.Ушакова и др. о топологических группах с условиями конечности. Идея последних состоит в изучении строения групп, подгруппы которых удовлетворяют наперед заданным требованиям (ограничениям).

Изучение групп с ограничениями для подгрупп играет существенную роль в развитии теории абстрактных групп. Исследования, предпринятые в этом направлении привели к открытию и описанию новых конкретных видов групп. Отметим, например, исследования О.Ю.Шмидта, в которых изучались конечные ненильпотентные группы с нильпотентными истинными подгруппами, а также исследования С.Н.Черникова, А.И.Мальцева и других авторов, посвященные обобщенно разрешимым и обобщенно нильпотентным группам с условиями конечности.

Ограничения, налагаемые на подгруппы или системы подгрупп могут быть самыми разнообразными: абелевость, нильпотентность, инвариантность, дополняемость и др. Содержание настоящей диссертации связано с понятием дополняемости подгрупп в группе.

Подгруппа $A$ группы $G$ называется дополняемой, если в группе $G$ существует такая подгруппа $B$, что $G=AB$ и $A\cap B = I$. Ф.Холлом (2), а затем Н.В.Баевой (Черниковой) (3, 4) изучались группы, в которых каждая подгруппа дополняема

(вполне факторизуемые группы).

С.Н.Черниковым (5) была поставлена задача изучения групп, в которых систему дополняемых подгрупп составляют не все подгруппы, а те или иные совокупности подгрупп. Сужение системы дополняемых подгрупп привело в ряде случаев к расширению класса вполне факторизуемых групп. Расширение класса вполне факторизуемых групп в теории абстрактных групп было получено также видоизменением самого определения дополняемости.

Понятие дополняемости в тех или иных вариантах имеет смысл и для топологических групп. Это понятие под видом расщепляемости расширений встречалось и ранее в связи с отысканием условий, при которых расщепление возможно. Наряду с такими проблемами целесообразно рассматривать свойства топологических групп на которые заранее наложены условия дополняемости тех или иных подгрупп, аналогичных условиям дополняемости для абстрактных групп. Изучению топологических вполне факторизуемых групп посвящена работа В.С.Чарина (6).

В.С.Чарин поставил перед автором задачу выяснить строение некоторых классов топологических групп, если с одной стороны сужать систему дополняемых подгрупп, а с другой - видоизменять определение дополняемости. Решению этих задач посвящена диссертация автора.

В первой главе диссертации рассматриваются локально компактные группы, систему дополняемых подгрупп которых составляют: все замкнутые абелевы подгруппы, все монотетичные подгруппы, все замкнутые бесконечные подгруппы и, наконец, группы, в которых каждая замкнутая характеристическая подгруппа выделяется прямым множителем. Основное содержание этой главы отражают следующие теоремы I-5.

Теорема I. Топологическая группа с дополняемыми замкнутыми абелевыми подгруппами вполне факторизуема (теорема I,I - диссертации).

Эта теорема обобщает известный результат С.Н.Черникова (5) о дискретных группах с дополняемыми абелевыми подгруппами.

Дальнейшее сужение системы дополняемых подгрупп до совокупности монотетичных подгрупп в компактных группах не выводит за пределы класса вполне факторизуемых групп. Для дискретных групп этот факт был доказан Ю.М.Горчаковым (7).

Теорема 2. Компактная группа с дополняемыми монотетичными подгруппами вполне факторизуема (теорема I,2 диссертации).

Теорема 3. Компактная группа, не содержащая подгрупп типа $J_p$ (целых $p$ - адических чисел), с дополняемыми циклическими подгруппами простых порядков вполне факторизуема (теорема I,3 диссертации).

Расширение класса топологических вполне факторизуемых групп получается, например, в случае сужения системы дополняемых подгрупп до одних лишь замкнутых бесконечных подгрупп, причем это расширение захватывает некоторые связные группы.

Топологическая группа называется $JC$ - группой, если в ней дополняема каждая замкнутая бесконечная подгруппа.

Строение дискретных $JC$ - групп при некоторых ограничениях было изучено С.Н.Черниковым (8). В диссертации изучаются локально-разрешимые $JC$ - группы, строение которых описывает следующая теорема.

Теорема 4. Локально разрешимая группа $G$ тогда и только тогда является $JC$ - группой, когда она относится к одному из следующих типов групп:

1) $G$ - вполне факторизуемая группа;

2) $G = T \lambda K$ где $T$ - одномерная торовидная группа, $K$ - конечная вполне факторизуемая группа;

3) $G = P \lambda K$ где $P$ - квазициклическая группа, $K$ - конечная вполне факторизуемая группа (теоремы I.4 - I.6 диссертации).

Первая глава диссертации заканчивается изучением локально компактных групп, в которых каждая замкнутая характеристическая подгруппа выделяется прямым множителем ($c\mathcal{D}$ - группы). Дискретные $c\mathcal{D}$ - группы изучались Христенсеном (9).

Легко видеть, что разрешимые $c\mathcal{D}$ - группы абелевы. Абелевы $c\mathcal{D}$ - группы изучаются при таком дополнительном условии: они удовлетворяют П аксиоме счетности. Необходимость в этом дополнительном требовании вызвана применением одной теоремы Н.Я.Виленкина о разложении локально компактной абелевой группы в произведение групп типа $R_p$ (аддитивной группы поля $p$ - адических чисел), доказанной для групп со П аксиомой счетности. Описание абелевых $c\mathcal{D}$ - групп, удовлетворяющих П аксиоме счетности дает следующая теорема.

Теорема 5. Абелева группа $G$ тогда и только тогда является $c\mathcal{D}$ - группой, когда она разлагается в топологическое прямое произведение $G = F \times S \times \mathcal{D} \times V \times M$ вполне факторизуемой группы $F$, соленоидальной группы $S$, дискретной полной группы без кручения $\mathcal{D}$, конечномерной векторной группы $V$ и группы $M$, каждая силовская $p$ - подгруппа которой разлагается в прямое произведение групп типа $R_p$ с открытой в $M$ компактной подгруппой (теорема I.8 диссертации).

Отметим, что под соленоидальной подгруппой понимается

здесь топологическое прямое произведение групп двойственных дискретной аддитивной группе рациональных чисел.

Вторая глава диссертации посвящена изучению обобщенно факторизуемых групп. Под обобщенно факторизуемыми группами понимаются определенные ниже классы $\mathfrak{f}$ - факторизуемых, $\mathfrak{m}$ - факторизуемых и $\mathfrak{R}$ - факторизуемых групп.

Топологическая группа $G$ называется $\mathfrak{f}$ - факторизуемой, если для каждой замкнутой подгруппы $A$ существует такая замкнутая подгруппа $B$, что $G=AB$ и пересечение $A\cap B$ - конечная группа.

Заменяя в этом определении требование $A\cap B$ - конечная группа следующими: $A\cap B$ - компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп, $A\cap B$ - компактная группа получим, соответственно, определения $\mathfrak{m}$ - факторизуемой и $\mathfrak{R}$ - факторизуемой групп.

Дискретные $\mathfrak{f}$ - факторизуемые группы изучал М.И.Сергеев (IO). В диссертации изучение локально компактных обобщенно факторизуемых групп разбито на две части. Сначала изучаются абелевые обобщенно-факторизуемые группы, а затем с помощью полученных результатов - нильпотентные обобщенно факторизуемые группы.

Теорема 6. Абелева группа тогда и только тогда $\mathfrak{f}$ - факторизуема когда она разлагается в топологическое прямое произведение вполне факторизуемой группы и группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп (теорема 2.I диссертации). Отсюда, в частности, вытекает, что абелева связная $\mathfrak{f}$ - факторизуемая группа компактна и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Теорема 7. Абелева $m$ - факторизуемая группа является $f$ - факторизуемой (теорема 2.2 диссертации).

Теорема 8. Нильпотентная группа $G$ $f$ - факторизуема тогда и только тогда, когда она распадается в произведение двух замкнутых инвариантных подгрупп $A$ и $B$ ; $A$ является расширением конечной подгруппы центра группы $G$ при помощи вполне факторизуемой группы; $B$ - группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп (теорема 2.3, диссертации).

Теорема 9. Нильпотентная группа $m$ - факторизуема тогда и только тогда, когда она является расширением некоторой центральной компактной подгруппы с условием минимальности для замкнутых подгрупп при помощи $f$ - факторизуемой группы (теорема 2.4 диссертации).

Пример, приведенный в диссертации показывает, что класс нильпотентных $m$ - факторизуемых групп шире класса нильпотентных $f$ - факторизуемых групп.

Теорема 10. Нильпотентная группа $R$ - факторизуемая тогда и только тогда, когда она является расширением компактной группы с помощью дискретной $f$ - факторизуемой группы (теорема 2.5 диссертации).

Таким образом, изменением совокупности дополняемых подгрупп, а также изменение требования дополняемости приводит в ряде случаев к расширению класса топологических вполне факторизуемых групп, причем эти расширения помимо вполне несвязных групп захватывают и связные группы.

Результаты диссертации опубликованы в работах (II-I4), докладывались на У Республиканской конференции молодых математиков Украины (г.Киев, 1970 г.) на семинаре по алгебре Киевского университета и на семинаре по теории групп Института математики АН УССР.

## ЛИТЕРАТУРА


I. КУРОШ А.Г. - Силовские подгруппы нуль мерных топологических групп. Известия АН СССР, серия математическая, т.9 (I945), 65-75.

2. Hall Ph.-Complemented groups, J. London Math. S. I2 (I937), 20I-204.

3. БАЕВА Н.В. - Вполне факторизуемые группы, ДАН СССР, 92 (I953), 877-880.

4. ЧЕРНИКОВА Н.В. - Группы с дополняемыми подгруппами. Матем. сб., 39 (I956), 273-292.

5. ЧЕРНИКОВ С.Н. - Группы с системами дополняемых подгрупп. Матем.сб. 35 (I954), 93-I28.

6. ЧАРИН В.С. - Группы с дополняемыми подгруппами, ДАН СССР, I73 (I967), 50-53.

7. ГОРЧАКОВ Ю.М. - Приметивно факторизуемые группы. Ученые записки Пермского ун-та, I7 (I960), I5-3I.

8. ЧЕРНИКОВ С.Н. - Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп. ДАН СССР, 59 (I964), 759-760.

9. Christensen, - Complementation in groups, Math. Zeit. 84 (I964), 52-69

I0. СЕРГЕЕВ М.И. - Вполне $F$-$X$ - факторизуемые группы ДАН СССР 55 (I964), 532-535.

II. ЛОЗБЕНЬ Т.М. - Локально компактные группы с дополняемыми замкнутными подгруппами. Матем.заметки. 6 (I969), 64I-649.

I2. ЛОЗБЕНЬ Т.М. - Про $F$ - факторизовані групи. АН УРСР, Інститут математики, У наукова конференція молодих математиків України, м.Київ, (I970).

I3. ЛОЗБЕНЬ Т.М. - Локально компактные группы с некоторой системой дополняемых подгрупп. Группы с ограничениями для подгрупп. Изд-во "Наукова думка", Киев, I97I.

I4. ЛОЗБЕНЬ Т.М. - Обобщенно факторизуемые группы (в печати).

БФ I8446 7.7.7I 0,5 печ.листа
Тираж 200 экз. Зак. № 4045

Книжная типография № 5,
Киев, ул.Репина, 4.