Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

На правах рукопису

БІЛЯЙ Іванна Михайлівна

УДК 378.011.3-051:51]:519.856

КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНА МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ОКРЕМИХ РОЗДІЛІВ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ІНФОРМАТИКИ (СТОХАСТИКИ)

13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
дійсний член НАПН України,
доктор педагогічних наук, професор
Жалдак Мирослав Іванович

Київ – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ..... 4
ВСТУП 5
РОЗДІЛ 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ІНФОРМАТИКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ІНФОРМАТИЗАЦІЇ ОСВІТИ..... 17
1.1. Психолого-педагогічні основи використання ІКТ як засобу підвищення мотивації при вивченні стохастики майбутніми вчителями математики. 17
1.2. Огляд нормативних документів і наукових робіт, присвячених навчанню стохастики у школах та педагогічних університетах України. 30
1.3. Порівняльний аналіз програмних засобів, що використовуються в навчанні стохастики..... 51
1.4. Методика побудови ймовірнісного простору. 69
Висновки до першого розділу..... 80
РОЗДІЛ 2. КОНЦЕПЦІЯ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВНОЇ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ 82
2.1. Структура та зміст курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» в умовах інформатизації освіти для майбутніх вчителів математики..... 82
2.2. Актуальність і доцільність вивчення курсу «Теорія ймовірностей та математичної статистики»..... 87
2.2.1. Мета, завдання і очікувані результати навчання стохастики майбутніх вчителів математики..... 87
2.2.2. Зміст навчального матеріалу курсу..... 90
2.2.3. Методика навчання основних понять стохастики. 93
2.2.4. Навчально-методичне і програмне забезпечення курсу. 118
2.2.5. Методи і форми організації навчання стохастики..... 120
2.2.6. Засоби навчання. 149
2.2.7. Контроль результатів опанування майбутніми учителями математики

стохастичними компетентностями. 154
2.3. Методичні особливості побудови стохастичної лінії шкільного курсу математики. 155
Висновки до другого розділу 159
РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНОЇ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ ТА ПЕРЕВІРКА ЇЇ ЕФЕКТИВНОСТІ. 160
Висновки до третього розділу 168
ВИСНОВКИ 169
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 174
ДОДАТКИ 200

Перелік умовних позначень

ВНЗ – вищий навчальний заклад

ДК – дистанційний курс

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології

КОМСН – комп’ютерно-орієнтована методична система навчання

КОНМК – комп’ютерно-орієнтований навчально-методичний комплекс

ППЗ – педагогічний програмний засіб

СКМ – системи комп’ютерної математики

Вступ

Актуальність дослідження. Одним з пріоритетів сучасної системи освіти України є орієнтування на інтереси людини як активного суб'єкта різних видів діяльності. Відповідальність за підготовку фахівців з необхідними професійними якостями несе вища школа, тому що саме тут отримують професійну освіту майбутні фахівці – основний інтелектуальний потенціал суспільства. У багатьох галузях сучасний рівень професійної діяльності настільки високий, що для її впровадження потрібне застосування методів логіко-варіативного мислення. Реальною основою для формування навичок такого мислення є міцні логічні і стохастичні знання.

Необхідність вивчення стохастики Б.В. Гнєденко пояснював тим, що стохастичні поняття, методи та ідеї, що на них ґрунтуються, вже давно широко застосовують в різних галузях науки та в практичній діяльності [50]. Питання, пов'язані з навчанням стохастики, знайшли своє відображення в працях багатьох вчених та педагогів, зокрема, А.А. Боровкова [32], Б.В. Гнєденка [50], М.І. Жалдака [74, 68], А.М. Колмогорова [90], Г.О. Михаліна [117], Ю.В. Прохорова [159], Б.А. Севастьянова [173], С.В. Щербатих [223] та ін.

За останні роки в Україні прийнято ряд важливих документів щодо підтримки науки та освіти, які є підґрунтям теоретичних та методичних основ професійної підготовки майбутніх вчителів математики. До них відносяться: Закони України «Про пріоритетні напрями інноваційної діяльності в Україні» (2003 р.), «Про вищу освіту» (2014 р.) та інші. Проблеми вищих навчальних закладів вимагають подальшої орієнтації навчального процесу на використання інформаційних технологій для підвищення ефективності навчання.

Національною програмою інформатизації [77] передбачається впровадження програм розвитку інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в освітню сферу для досягнення майбутніми учителями та викладачами ВНЗ відповідного рівня оволодіння навичками роботи з сучасними ІКТ, що є

невід'ємною умовою забезпечення ринку праці висококваліфікованими фахівцями.

Стохастика – відносно нова складова шкільної математичної освіти, в навчанні якої ще не напрацьовано достатньо досвіду, тому існує необхідність у популяризації знань стохастики серед школярів, у підготовці підручників, посібників, збірників задач і вправ, методичних настанов і у створенні сучасних методичних систем навчання стохастики майбутніх учителів.

Навчання стохастики на основі комп'ютерно-орієнтованих методичних систем в педагогічних закладах України досі не було представлено в цілісному вигляді, відчувається недостатня кількість методичних розробок, в яких би розглядалися особливості підготовки майбутніх вчителів математики зі стохастики. Специфіка навчання стохастики полягає у тому, що майбутні вчителі математики мають не тільки опанувати стохастичні компетентності, а й навчитися навчати цього своїх майбутніх учнів.

Практичне значення статистичних методів досліджень різноманітних явищ полягає в тому, що вони широко використовуються в різних галузях життєдіяльності людини (біології, медицині, лінгвістиці, соціології, військовій справі, страхуванні, криптології, теорії масового обслуговування, управлінні і т.д.). Наявність у фахівця стохастичних компетентностей є необхідною умовою його творчої роботи в багатьох галузях людської діяльності. Теорія ймовірностей і математична статистика має стати сьогодні одним із базових предметів у системі формування загальнокультурних і професійних компетентностей фахівців будь-якого профілю. У зв'язку з цим гостро стоїть проблема підготовки педагогів, які не тільки вільно володіють комп'ютерно-орієнтованими методами статистичних досліджень, а й можуть навчити цього інших. Для вирішення цього питання необхідні педагогічні інновації, спрямовані на активізацію процесу формування стохастичної культури студентів педагогічних університетів. Такого роду іновації зокрема пов'язані з використанням сучасних ІКТ у навчальному процесі. Напрацювань у цьому напрямку явно недостатньо, а використання вже

існуючих найчастіше є епізодичними.

У педагогічних університетах під час підготовки майбутніх вчителів математики варто розкривати взаємозв'язок стохастики з інформатикою. З одного боку, стохастика – одна з найважливіших складових математичних основ інформатики, які в свою чергу відносяться до її теоретичних основ – філософії, психології, педагогіки, математики та ін.

З іншого – в математичній статистиці (як складовій стохастики), як і в інформатиці, вивчаються методи і засоби збирання та опрацювання всеможливих даних стосовно різноманітних процесів і явищ. У зв'язку з цим гостро стоїть питання про підготовку педагогів, які володіють стохастичними та інформатичними методами досліджень виробничих та природних процесів з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, формування стохастичної та інформатичної культури майбутніх вчителів.

Разом з тим, вдосконалення комп'ютерної техніки та програмних засобів стало важливою передумовою для появи якісно нових вимог до професійної підготовки майбутніх вчителів всіх, в тому числі природничих дисциплін, зокрема інформатики, математики, фізики, хімії, біології та ін. Модернізація та інтелектуалізація системи освіти залежать від рівня інформатичних компетентностей вчителів, вміння педагогічно виважено і ефективно використовувати сучасні інформаційно- комунікаційні технології під час розв'язання професійних і навчальних проблем. Формування системи інформатичних компетентностей майбутніх вчителів повинно здійснюватись у процесі навчання всього комплексу навчальних предметів у вищому навчальному закладі, в тому числі і стохастики. Основною рушійною силою підвищення ефективності навчання у всіх сферах освіти та підготовки кадрів є саме педагогічно виважене і доцільне впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій. Особливої актуальності набуває проблема безперервної підготовки та перепідготовки фахівців найрізноманітніших галузей знань і кваліфікаційних категорій до ефективного використання сучасних інформаційно-комунікаційних

технологій у своїй діяльності.

Дослідження, пов’язані з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі, започатковано в роботах В.М. Глушкова [49], В.М. Монахова [121], А.П. Єршова [63], М.П. Лапчика [101], Б.В. Гнєденка [50], Ю.В. Горошка [52], М.І. Жалдака [66, 69], В.І. Клочка [83], А.М. Колмогорова [90], Н.В. Морзе [125, 127], Ю.І. Машбиця [111], А.В. Пенькова [146], С.А. Ракова [163], Ю.В. Триуса [198], С.В. Щербатих [223] та ін.

Психолого-педагогічні аспекти інформатизації навчального процесу розглядаються у публікаціях В.С. Ледньова [102], С.Д. Максименка [107], Ю.І. Машбиця [112], В.Ф. Паламарчук [143], Н.Ф. Тализіної [192], М.Л. Смульсон [183], Є.С. Полат [154], І.В. Роберт [169] та інших.

Проблеми підготовки майбутніх педагогів досліджувались у різних напрямах: педагогічна творчість вчителя (А.М. Алексюк [3], Л.І. Андрєєв [4], І.А. Зязюн [78], Н.Ф. Тализіна [193]); організація навчально-виховного процесу (А.М. Алексюк [3], С.С. Вітвицька [44], В.П. Беспалько [13] та ін.); основи інтерактивності навчання у вищому навчальному закладі (І.А. Зязюн [78], О.І. Пометун [155]); загальнопедагогічна підготовка студентів (О.А. Абдулліна [1], Л.В. Коваль [88], Н.Г. Ничкало [139]); формування особистості майбутнього вчителя у процесі навчання у вищому навчальному закладі (Г.О. Балл [8], В.О. Моляко [119], К.К. Платонов [150], В.А. Кан-Калик [82] та ін.).

Активно досліджуються в останні роки можливості використання сучасних ІКТ у навчальному процесі. Питання інформатизації навчального процесу в середніх та вищих навчальних закладах залишаються предметом досліджень багатьох науковців, зокрема: В.Ю. Бикова [15, 16], Є.И. Бідайбекова [14], Ю.В. Горошка [52], А.П. Єршова [63], М.І. Жалдака [72, 67], Е.І. Кузнєцова [100], М.П. Лапчика [101], Ю.І. Машбиця [110, 111, 112], В.М. Монахова [120, 121], Н.В. Морзе [126, 128], І.О. Новік [140], С.А. Ракова [162], Ю.С. Рамського [165], І.В. Роберт [168], З.С. Сейдаметової

[174], С.О. Семерікова [175, 176], Є.М. Смірнової-Трибульської [181], О.М. Спіріна [185], Ю.В. Триуса [195, 197], С.М. Яшанова [224] та ін.

Значна та постійна увага проблемам навчання стохастики приділялася і приділяється А.М. Колмогоровим [90], Б.В. Гнєденком [50], О.Я. Хінчиним [208], М.І. Жалдаком [24, 26, 74], Г.О. Михаліним [22, 25, 117], С.В. Щербатих [223] та іншими.

Рівень стохастичної підготовки майбутніх вчителів математики має сприяти створенню та впровадженню нових комп'ютерно-орієнтованих педагогічних технологій навчання математики, формуванню теоретичного підґрунтя для професійної діяльності.

Актуальність окреслених вище проблем зумовили вибір теми дисертаційного дослідження «**Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (стохастики)».**

Об'єктом дослідження є процес навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (стохастики) в умовах інформатизації освіти.

Предметом дослідження є комп'ютерно-орієнтована методична система навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (стохастики) в умовах використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Мета дослідження полягає в розробці основних компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики) та експериментальній перевірці їх ефективності.

Гіпотеза дослідження. Навчання стохастики з педагогічно виваженим і методично вмотивованим використанням у навчальному процесі засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій буде сприяти вдосконаленню процесу навчання та застосуванню основних понять і методів стохастики під час розв'язування проблем навчання більшості предметів, які

вивчають майбутні вчителі математики, активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, якщо ці технології будуть інтегровані у комп'ютерно-орієнтовану методичну систему навчання.

Завдання дослідження:

1) вивчити та узагальнити вітчизняний і зарубіжний досвід навчання стохастики майбутніх вчителів математики з використанням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання;
2) з'ясувати рівень відображення в навчальних програмах вітчизняних вищих педагогічних навчальних закладів змістової лінії стохастики та визначити її наповнення, визначити основні компоненти системи компетентностей, якими повинні оволодіти майбутні вчителі математики в умовах обов'язкового вивчення стохастики на основі комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання окремих розділів математичних основ інформатики, зокрема стохастики;
3) уточнити окремі поняття курсу стохастики, який вивчається в педагогічному університеті, та елементів стохастики, що вивчаються в середніх навчальних закладах, зокрема поняття випадкової події, ймовірності події, залежних і незалежних подій, поняття випадкової величини, типів розподілів ймовірностей та їх описів і ін.;
4) розробити основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики, зокрема стохастики;
5) дослідити внутріпредметні та міжпредметні зв'язки стохастики з іншими математичними дисциплінами (геометрія, алгебра, математичний аналіз та ін.);
6) з'ясувати зв'язки курсу стохастики вищих навчальних закладів з шкільними курсами геометрії та алгебри і початків аналізу, зокрема тем, де формуються поняття міри множини – довжини лінії, площі плоскої фігури, об'єму тіла, маси тіла, міри дискретної множини –

кількості елементів у множині і т.д.;

7) провести експериментальну перевірку ефективності розроблених компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики, зокрема стохастики, і здійснити впровадження розроблених навчально-методичних матеріалів;
8) розробити дистанційний курс "Теорія ймовірностей та математична статистика" для навчання майбутніх вчителів математики та інформатики.

Для розв'язування поставлених завдань застосовувались такі ***методи досліджень***:

- теоретичні методи були задіяні з метою вивчення теоретичних психолого-педагогічних основ і визначення концептуальних засад дослідження, визначення змісту та структури курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» для навчання студентів спеціальності «Інформатика*» в педагогічному університеті: аналіз нормативних документів, психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури (1.1, 1.2 (тут й далі підрозділи дисертації)); аналіз, синтез, порівняння теоретичних положень, викладених у психолого-педагогічній літературі, та досвіду викладання у вищих навчальних закладах (1.1-1.2, 1.4, 2.1); порівняння, узагальнення, класифікація і систематизація теоретичного і практичного матеріалу з проблеми дослідження (1.1-1.4, 2.1-2.3); спостереження за навчальним процесом у педагогічних вищих навчальних закладах (1.4, 2.1, 2.2);
- емпіричні методи (анкетування, бесіда, пряме і непряме спостереження (2.1, 3.1)) застосовувалися з метою визначення й перевірки ефективності комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання стохастики майбутніх учителів математики; визначення вмінь студентів ефективно і вмотивовано використовувати новітні ІКТ;
- експериментальні методи (констатувальний, пошуковий,

формувальний етапи педагогічного експерименту) з метою апробації окремих компонентів запропонованої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання та експериментального впровадження в практику вищих педагогічних навчальних закладів основних положень дослідження; опрацювання результатів педагогічного експерименту за методами математичної статистики (підтвердження ефективності експериментальної комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання) (3.1).

Провідним на всіх етапах дослідження був метод педагогічного експерименту (констатуючий, пошуковий, формуючий) та наступні аналіз і узагальнення його результатів.

Методологічною основою дослідження є теоретико-методичні основи навчального процесу; нова парадигма освіти в умовах реформування освітньої системи, основні положення Законів України "Про Вищу освіту", "Про Національну програму інформатизації", Державна національна програма "Освіта. Україна XXI століття", Концепція розвитку дистанційної освіти в Україні, Національна доктрина розвитку освіти в Україні у XXI столітті, Концепція розвитку економічної освіти в Україні, основні засади розвитку вищої освіти України в контексті Болонського процесу. Методологія експериментальної роботи ґрунтується на принципах єдності теорії і практики, дотримання об'єктивності щодо емпіричного вивчення предметів і явищ педагогічного процесу у вищому навчальному закладі.

Наукова новизна дослідження полягає у тому, що:

- ***розроблено*** основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики);
- ***обґрунтовано*** психолого-педагогічні основи формування стохастичних компетентностей майбутніх вчителів математики та ***конкретизовано*** напрями практичного використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у процесі їх підготовки до

професійної діяльності;

- ***уточнено*** зміст навчання стохастики майбутніх вчителів математики, зокрема основні поняття: випадкової події, ймовірності випадкової події, залежних і незалежних випадкових подій, випадкової величини, типів розподілів ймовірностей та засобів їх опису, концепцію побудови змісту курсу стосовно розподілів ймовірностей від щільності розподілу ймовірностей в безкоординатному просторі з мірою з наступним переходом до координатних просторів, де з'являється можливість введення поняття функції розподілу ймовірностей, а не навпаки;
- ***запропоновано*** методи та організаційні форми навчання стохастики пов'язані з використанням інформаційно-комунікаційних технологій;
- ***розкрито*** теоретичні взаємозв'язки стохастики з іншими фізико-математичними дисциплінами, зокрема з математичним аналізом, геометрією та іншими.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що:

- впроваджено в педагогічну практику створені окремі компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики;
- уточнено зміст навчання стохастики майбутніх вчителів математики, впроваджено сучасний понятійний апарат, вихідні принципи, положення і вимоги до навчання стохастики майбутніх вчителів математики;
- розроблено (у співавторстві) й апробовано посібник для вчителів «Стохастика» та факультативний курс для учнів старшої школи «Початки стохастики» українською та російською мовами;
- вирішено основні проблеми інформатизації процесу навчання стохастики, зокрема розроблено основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання стохастики, осучаснено зміст навчання та розроблено відповідні елементи інформаційно-

комунікаційних технологій навчального призначення, в тому числі для дистанційної підтримки навчання та самостійної роботи студентів;

- розроблено (у співавторстві) дистанційний курс «Теорія ймовірностей та математична стохастика»;
- створені компоненти методичної системи навчання стохастики, які можуть застосовуватись під час проведення спецкурсів у вищих навчальних закладах, інститутах післядипломної освіти вчителів, на факультативних заняттях в старших класах загальноосвітніх шкіл.

Особистий внесок здобувача полягає в розробці комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика" у педагогічному університеті; розробці посібників, навчально-методичних матеріалів щодо вивчення стохастики студентами педагогічних спеціальностей стаціонарної форми навчання в педагогічному університеті, програмного засобу для вивчення поінтервальних розподілів ймовірностей. Подано пропозиції щодо внесення змін до ППЗ GRAN1, які стосуються подрібнення інтервалів, під час побудови функці розподілу.

Особистий внесок здобувача у працях, написаних у співавторстві [24, 17, 26], становить 30%. Зокрема, було дібрано систему задач і вправ до окремих розділів та уточнено окремі теоретичні положення стосовно поточкових та поінтервальних розподілів ймовірностей та залежності функції розподілу від структури подій.

Обґрунтованість і вірогідність результатів дослідження забезпечується його науковими і методологічними основами; використанням методів дослідження, відповідних меті, гіпотезі і завданням; системним аналізом теоретичного та емпіричного матеріалу; результатами проведеного педагогічного експерименту, опрацьованими за допомогою статистичних методів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Обраний напрям досліджень узгоджується з планом науково-дослідної роботи кафедри

теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова (номер державної реєстрації 0105U000448). Тема дисертації затверджена вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова 27 лютого 2014 року (протокол №7) та узгоджена в Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні при АПН України 28 травня 2014 року (протокол № 5).

Апробація і впровадження результатів дослідження здійснювались в ході:

- навчання дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» в Інституті інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, на кафедрі алгебри і математичного аналізу Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького, в Криворізькому педагогічному інституті ДВНЗ «Криворізький національний університет», на математичному факультеті Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, в Інституті фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка;
- обговорення результатів дослідження на Всеукраїнському науково-методичному семінарі Інституту інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова;
- публікації результатів дослідження у збірниках науково-методичних праць.

Основні положення і результати дослідження доповідались автором та обговорювались на X Міжнародній науково-практичній конференції «Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі» (м. Кривий Ріг, 5-6 квітня 2012 р.), I Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті» (Ченстохова – Ужгород – Дрогобич, 19-20

листопада 2015 р.), Всеукраїнському науково-методичному семінарі Інституту інформатики НПУ імені М.П. Драгоманова (м. Київ, 2015 р.).

Основні положення та результати дослідження впроваджено у навчальний процес Інституту інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, математичного факультету Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки (довідка №13 від 5.06.2015 р.), Інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (довідки №1227, 1228 від 24.06.2015 р.), Криворізького педагогічного інституту ДВНЗ «Криворізький національний університет» (довідка №02/02-403/3 від 30.06.2015 р.), Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (довідка №256/03 від 14.09.2015 р.).

Публікації. Основні результати дослідження опубліковано у 11 науково-методичних працях. Серед них: 3 навчальні посібники [17, 24, 26] (у співавторстві), 6 статей у фахових виданнях [18, 21, 23, 20, 19, 25] (у тому числі 4 праці є одноосібними [18, 21, 23, 20], з них 1 праця опублікована у виданні наукометричних баз даних [20]), 2 тези доповідей у матеріалах конференцій [22, 27] (одноосібно).

Структура та обсяг дисертації. Робота складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків до розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (250 найменувань, розміщених на 26 сторінках), 5 додатків на 38 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить 237 сторінок, з яких 173 сторінки – основна частина, що містить 13 таблиць та 42 рисунки.

РОЗДІЛ 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ІНФОРМАТИКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ІНФОРМАТИЗАЦІЇ ОСВІТИ

1.1. Психолого-педагогічні основи використання ІКТ як засобу підвищення мотивації при вивченні стохастики майбутніми вчителями математики.

Питанням формування стохастичних уявлень учнів, зважаючи на їх актуальність, присвячено роботи як вітчизняних так і закордонних психологів. Окремі аспекти цього питання висвітлено в працях зарубіжних психологів: Ж. Піаже [149], І.М. Фейгенберг [203], А. В. Брушлінский [36] та інші. Так, А.В. Брушлінський [36], досліджуючи особливості мислення, зауважив, що до важливих особливостей пам’яті людини належить здатність до ймовірнісного прогнозування. Крім того, прогнозування розвитку подій і планування власних вчинків, спрямованих на досягнення очікуваних результатів, є невід’ємними складовими діяльності людини.

Основою засвоєння учнями імовірнісно-статистичних понять виступає діяльнісна концепція навчання (Л.С. Виготський [46], П.Я. Гальперін [45], О.Н. Леонтьєв [103]). Її характерною особливістю є організація навчання відповідно до етапів концепції поетапного формування розумових дій, запропонованої П.Я. Гальперіним [47], яка, в свою чергу, пов'язана з розвитком у людини нових дій, образів і понять. Згідно такого підходу до організації навчання, ознайомлення з елементами стохастики в початкових класах відбувається на наочно-інтуїтивному рівні під час проведення ігор, дослідів, що закладає перші емпіричні уявлення про випадковість. Збільшення частки абстрактного й теоретичного мислення зумовлює перехід на стадію «формальних операцій» (11–15 років). Поява здатності міркувати за допомогою вербально сформульованих гіпотез (15–17 років) – важливий чинник формування стохастичних уявлень в основній і старшій школах, а також в процесі навчання у вищих навчальних закладах.

У вищих педагогічних навчальних закладах переважно запроваджена

дворівнева система підготовки з ІКТ, що охоплює весь термін навчання студента і включає вивчення інформатики та інформаційних технологій (перший, другий курс навчання), та методик застосування засобів ІКТ у процесі навчання майже усіх навчальних дисциплін протягом усього теорміну навчання.

Використання ІКТ (навчаючих і контролюючих програм, програми для тестування, програм-редакторів, комп'ютерних ігрових програм) у процесі навчання будь-яких дисциплін, включаючи і стохастику, підвищують ефективність навчання, оскільки це:

- забезпечує інтенсифікацію процесу навчання, сприяє більш активному і свідомому засвоєнню студентами навчального матеріалу і розкриває їх творчий потенціал;
- створює позитивне емоційне ставлення студентів до діяльності, опосередкованої комп'ютером, дає можливість зосередитись на з'ясуванні сутності досліджуваних закономірностей, проявів всеможливих явищ і перебігу процесів, переклавши виконання рутинних обчислювальних і графічних операцій на комп'ютер, за необхідності провести відповідний обчислювальний експеримент для підтвердження чи спростування все можливих гіпотез, пов'язаних з пошуком відповідей на питання, що виникають під час дослідження, та формування відповідних висновків;
- стимулює інтерес студентів до навчальної діяльності, сприяє формуванню логічного, творчого мислення, розвитку інтелекту.

Але поряд з перевагами використання ІКТ виникають різні проблеми як під час підготовки до таких занять, так і під час їх проведення ,зокрема:

- Існують недоліки та проблеми застосування ІКТ. Наприклад, захопившись застосуванням ІКТ, можна перейти від розвивального навчання до використання наочно-ілюстративних методів [89].
- Недостатньо розроблені методичні системи навчання, орієнтовані на педагогічно виважене і методично вмотивоване використання

сучасних ІКТ в навчальному процесі.

- Через недостатнє комп'ютерне забезпечення складно інтегрувати комп'ютер у поурочну структуру занять.
- Недостатньо мотивовані до роботи студенти часто відволікаються на ігри.

Окрім цього, методично необґрунтоване і педагогічно не виважене використання таких технологій несе в собі небезпеку негативних наслідків такого навчання, виховання і розвитку, оскільки:

- зменшується комунікативний потенціал навчального процесу;
- з «поля зору» викладача виключається процесуальна складова навчальної діяльності;
- послаблюються концентрація уваги студентів до явищ, що вивчаються;
- знижується творча ініціатива студентів;
- посилюється тенденція до формування алгоритмічної діяльності.

Разом з тим, використання в навчальному процесі інноваційних педагогічних технологій є одним із шляхів підвищення якості навчання поряд з розробкою науково обґрунтованих методичних систем навчання математики, забезпеченням інтенсифікації процесу навчання, активізацією навчально-пізнавальної діяльності учнів і студентів, розкриттям їхнього творчого потенціалу.

Виконання частини навчальних завдань з використанням сучасних ІКТ, аналіз проблем навчання з врахуванням можливостей використання комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання не тільки висувають нові проблеми, але й потребують критичного перегляду фундаментальних положень педагогічної і психологічної теорій навчання. Адже дані теорії є методологічним підґрунтям проектування методичних систем навчання і повинні відноситися до всіх аспектів взаємодії учителя і учня.

На різних етапах розвитку комп'ютерно-орієнтованих систем навчання на передній план виступають різні психолого-педагогічні проблеми. Сьогодні

значну увагу необхідно приділити проблемам створення сучасних ефективних систем навчання, в рамках яких дослідження традиційних психологічних проблем надає можливість уточнити ефективність певної системи навчання, зокрема особливості уваги і мислення учнів в умовах комп'ютеризованого навчання.

Актуальність цього зумовлюється необхідністю модернізації системи освіти у зв'язку з процесами демократизації, гуманізації навчального процесу і гуманітаризації освіти в сучасному суспільстві, розширенням сфер використання інформаційно-комунікаційних технологій і підвищенням їх якісних характеристик. Дослідження щодо інформатизації навчального процесу підтверджують, що педагогічно виважене і методично вмотивоване і доцільне використання ІКТ в навчальному процесі суттєво підвищує ефективність навчання на всіх його рівнях: інтенсифікація навчально-пізнавальної діяльності, індивідуалізація навчання, можливості щодо унаочнення матеріалів.

Значною мірою описане стосується і математичної (зокрема, стохастичної) підготовки студентів, в ході якої комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання завдяки своєрідності взаємозв'язків змісту навчання і реальності слугуватимуть засобом підсилення професійної спрямованості навчання, необхідним інструментарієм підтримки такої діяльності.

Провідні математики і методисти вказують на те, що сьогодні рівень математичної підготовки студентів і випускників ВНЗ III-IV рівнів акредитації помітно знижується [40, 99, 108, 172, 194]. Серед причин цього можна вказати на основні:

- низький рівень базової підготовки студентів з математики;
- недостатній рівень навчально-пізнавальної активності;
- низька мотивація студентів щодо навчання дисциплін математичного циклу;
- невміння і небажання студентів працювати самостійно;
- невміння студентів застосовувати знання для формалізації

практичних задач та їх розв’язування.

Вказані причини умовно можна поділити на дві групи: причини, на вирішення яких вплинути не можна (соціальні, політичні, фінансові), та причини, вирішення яких залежить від професіоналізму викладача, його психолого-педагогічної і методичної підготовки, а також від матеріально-технічної бази, зокрема програмного і методичного забезпечення навчального процесу.

Головними проблемами, які доводиться долати викладачам та студентам, є невміння студентів самостійно опрацьовувати навчальний матеріал і низький рівень підготовки студентів з математики та їхньої навчально-пізнавальної активності, а також найголовніше – слабка мотивація пізнавальної діяльності студентів.

Ставлення майбутнього вчителя математики до обраної (часто не самостійно) професії визначається мотивами її вибору, домінуючими серед яких можуть бути:

- інтерес до професії вчителя;
- інтерес до математики, інформатики, фізики;
- бажання одержати вищу освіту.

В процесі діяльності (навчання) мотиви можуть зазнавати змін у відповідній ієрархічній структурі, можуть виникати і зміцнюватися або послаблюватися і навіть зникати [117]. Тому процес навчання повинен бути організованим так, щоб забезпечити формування у студентів професійних та навчально-пізнавальних мотивів, сприяти їх зміцненню і переведенню у ранг домінуючих.

Формування мотивів здійснюють за схемами «згори донизу» або «знизу догори».

Суть механізму «згори донизу» полягає у тому, що студенту (особі, яка навчається) пропонують у готовій формі цілі, ідеали, спонукання, а він повинен поступово перетворити їх із зовнішньо зрозумілих у внутрішньо прийняті і реально діючі [6]. Наприклад, бесіди та дискусії про суспільну

значущість професії вчителя, зустрічі з відомими вчителями, майстерність викладачів фахових дисциплін можуть пробудити у студента інтерес до професії вчителя, викликати захопленість та прагнення оволодіти нею, тобто сприяти формуванню професійного мотиву.

Механізм «знизу догори» полягає у створенні умов діяльності студентів, за яких у них виникають потрібні спонукання, які зміцнюються за систематичного повторення умов діяльності і формуються у стійкий мотив цієї діяльності. Окрім того, бажано, щоб студент одержував емоційне задоволення, насолоду від своєї діяльності. Наприклад, систематично практикуючи самостійне доведення деяких тверджень, можна надавати студентам можливість провести частину лекції замість викладача і дістати від цього емоційну насолоду, що сприятиме формуванню професійного мотиву (бажанню оволодіти професією вчителя) значно ефективніше, ніж у випадку механізму «згори вниз».

Одним з домінуючих навчально-пізнавальних мотивів повинен бути пізнавальний інтерес, який виражається у прагненні до нових знань і дій. На його формування суттєво впливають:

- зміст навчального матеріалу, який повинен бути професійно спрямованим;
- корисність набутих знань у повсякденному житті;
- методи активного навчання, використання яких сприяє зростанню пізнавального інтересу, розумінню потреб у пізнанні;
- використання ІКТ.

Підсилення мотивації навчально-пізнавальної діяльності студентів в процесі навчання стохастики можливе завдяки особистості викладача. В результаті аналізу накопичених в науці підходів до особистості сучасного педагога, найбільш доцільною, є система якостей наведена в Таблиця 1.1 [158].

Особливість сучасного педагога в значній мірі визначається його ерудицією, високим рівнем культури. Той, хто хоче вільно орієнтуватися в

сучасному світі, повинен багато знати. Ерудований педагог повинен бути і носієм високої індивідуальної культури. Викладач завжди є наочним зразком для студентів, своєрідним еталоном вчинків і поведінки [76].

Таблиця 1.1

Система якостей сучасного педагога

Особистісно-етичні	Індивідуально-психологічні	Педагогічні
▪ почуття громадянської відповідальності, ▪ гуманізм, ▪ щиросердя, ▪ уважність, ▪ доброзичливість, ▪ свідоме ставлення до праці і дисциплінованість, ▪ об’єктивність, ▪ самокритичність, ▪ висока моральна культура, ▪ загальна ерудиція, ▪ наполегливість.	▪ глибина пізнавальних інтересів, ▪ критичність розуму, ▪ емоційна стійкість, ▪ культура темпераменту, ▪ об’єктивна самооцінка.	▪ високий рівень професійно-педагогічної підготовки, ▪ інтерес до педагогічної діяльності, ▪ педагогічний такт, ▪ прагнення до науково-педагогічної діяльності, ▪ культура і виразність мови, ▪ почуття гумору.

Не менш важливу роль у підсиленні мотивації навчально-пізнавальної діяльності студентів є правильна постановка цілей навчання. Угорський математик Альфред Реньї зазначав [167], що «вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер тих, хто навчається. Наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що за певних обставин невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім

не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, які перебувають на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка би біда не трапилася з ними, вони схильні приписувати її чиємусь злому наміру, навіть якщо такі твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким поняття, як випадковість.

Вивчення теорії ймовірностей може принести безперечну користь, оскільки дає змогу остаточно порвати з пережитками магічного мислення кам'яного століття. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш доброзичливими і толерантними до оточуючих і, отже, легше вписуються в життя суспільства».

Таким чином, при виборі основних цілей навчання варто керуватися такими аргументами:

- вивчення основних понять з теорії ймовірностей відіграє важливу роль у розвитку мислення;
- теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень;
- вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між дійсністю і математикою, математичних моделей дійсності.

Таким чином, підсилення мотивації навчально-пізнавальної діяльності студентів у процесі навчання стохастики можливе завдяки особистості викладача, правильній постановці цілей навчання, створення сприятливих умов для зацікавленої роботи студентів, формування установок на досягнення успіху. Поєднання традиційних педагогічних технологій навчання та нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання стохастики сприяє підвищенню мотивації пізнавальної діяльності студентів, індивідуалізації і диференціації процесу навчання, ґрунтовному засвоєнню базових математичних понять за рахунок їх універсального використання в різних прикладних ситуаціях.

Використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики

дає можливість об’єктивно і досить точно оцінювати рівень навчальних досягнень студентів за рахунок прозорої шкали оцінювання, створюється основа для диференціації і індивідуалізації процесу навчання, у викладача з’являється можливість мати систематичний зворотній зв'язок з кожним студентом.

Особливістю використання комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики відповідно до принципів диференціації навчання та комплексного використання ІКТ є можливість акцентування уваги на індивідуальних особливостях студентів, різних рівнях їх підготовки з математичних та інформатичних дисциплін.

Гриб’юк О.О. в своїй роботі [54] стверджує, що ефективність навчання математичних дисциплін з використанням комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання значною мірою залежить від психолого-педагогічної обґрунтованості програмних засобів навчального призначення.

В разі використання в навчальному процесі сучасних ІКТ принципово змінюються всі компоненти методичних систем навчання, не тільки засоби навчання, але і пов’язані з ними зміст, методи, організаційні форми навчання. Як приклад таких змін в побудові методичних систем навчання різних предметів можна навести комп’ютерні програми для підтримки навчання математичних дисциплін (алгебри і початків аналізу, геометрії, тригонометрії, стохастики). Крім того, використовуються типи задач, спрямовані на рефлексію учнями своєї діяльності, на її саморегуляцію, адже такі задачі складно реалізувати навіть в умовах індивідуального навчання. Безумовно, з впровадженням ІКТ в навчальний процес не вирішуються всі проблеми навчання і переоцінювати можливості такого впровадження не варто. В навчальному процесі комп’ютер може бути і об’єктом вивчення, і засобом навчання.

У першому випадку засвоєння знань, вмінь і навичок призводить до усвідомлення можливостей використання комп’ютера, зокрема під час розв’язування різноманітних задач. У другому випадку комп’ютер є засобом

підвищення ефективності навчання. Вказані напрямки покладено в основу інформатизації навчання як соціального процесу, активізації пізнавальної діяльності студентів, інтенсифікації навчального процесу, диференціації навчання у відповідності до нахилів і здібностей студентів, розкриття їх творчого потенціалу.

Одним з найскладніших моментів аналізу ефективності використання комп'ютера і програм навчального призначення є визначення того, чи здійснюється діяльність студентів дійсно як учіння, чи не мігрує вона без постійного супроводу викладача до пізнавальної (або трудової), що не є поганим самим по собі, однак нівелює відповідну навчальну діяльність, у межах якої здійснюється учіння.

Принципи, на яких базується розвиток комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання, Гриб'юк О.О. розподіляє [54] за групами психолого-педагогічні, дидактичні, технологічні і організаційно-комунікативні.

1. *Принцип зацікавленості в навчанні*. ІКТ навчання будуються на базі інструментів для підсилювання мислительної діяльності, використання яких надає можливості моделювання особливого інформаційного поля для розвитку зацікавленості і мотивації студента для досягнення навчальних і пізнавальних цілей, а значить, і зростання пізнавальних потреб.

2. *Принцип адаптивності щодо індивідуальних особливостей студентів*, що реалізовується не тільки на рахунок подання навчального матеріалу на різних рівнях складності, але й з врахуванням індивідуальних особливостей студентів, використання засобів виконання сукупності необхідних операцій і дій під час навчання матеріалу, що сприяє підвищенню ефективності засвоєння матеріалу.

3. *Принцип пошукової активності студента*. Реалізація цього принципу здійснюється шляхом застосування інформаційного і особистісно-діяльнісного підходів у процесі навчання з використанням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем. Принцип спрямований на розв'язання

головного завдання педагогіки – навчати вчитися, а також на реалізацію ціннісної орієнтації в становленні особистості студента.

4. *Принцип особистої відповідальності за власний рівень освіти*. Сформована потреба самостійного набуття і застосування знань повинна стати життєвою необхідністю сучасної людини для неперервного підвищення професійного, культурного та освітнього рівня.

5. *Принцип самооцінювання і самоактуалізації*. Ключовими індивідуальними якостями студента повинні стати самоповага, цілеспрямованість, здатність до самоконтролю і самостійної пізнавальної діяльності.

6. *Принцип індивідуалізації навчання*: можливість забезпечити організацію управління пізнавальною діяльністю з врахуванням індивідуальних особливостей студента (швидкість і тип мислення, рівень його здібностей і початкової підготовки в даній предметній галузі, рівень тривожності і наполегливості у досягненні цілі тощо). Реалізація даного принципу і контролю в комп'ютерно-орієнтованому навчальному середовищі ґрунтується на відповідних технологічних принципах розробки різнорівневих комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання.

7. *Принцип об'єктивності оцінювання результатів навчальних досягнень* забезпечується завдяки: стандартизації програм навчання і контролю; індивідуальності і незалежності проходження навчання і процедури різностороннього контролю; виключення суб'єктивних факторів в процесі навчання і контролю (стомленість викладача, емоційність, обмеженість часу для спілкування); забезпечення можливості самоперевірки рівня засвоєння матеріалу у зручному для студента режимі (мережевий режим доступу до контролюючих систем та вимірювальних матеріалів); оперативності статистичного опрацювання, вірогідності і доступність результатів контролю.

8. *Принцип співробітництва і наставництва в процесі організації навчання* з використанням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем

навчання. Труднощі педагогів можна звести до двох проблем: необхідність переходу від авторитарного управління навчальним процесом до спільної діяльності і співпраці зі студентами; необхідність переходу від репродуктивного підходу в навчанні до розвитку продуктивної творчої мислительної діяльності студентів. Складним завданням в новій моделі навчання на базі сучасних інформаційно- комунікаційних технологій є зміна особистої установки педагога та студента на самоосвіту, саморозвиток, співробітництво.

9. *Принцип навчання протягом усього життя*. Використання сучасних ІКТ навчання сприяє принциповим змінам у відношенні студента до отримання освіти, необхідності неперервного підвищення свого культурно-освітнього рівня протягом усього життя.

Досить зручним та ефективним для підтримки навчання курсу математики (включаючи і стохастику) в загальноосвітніх навчальних закладах та молодших курсах університетів видається програмно-методичний комплекс Gran [69, 223], використання якого надає студенту можливість розв’язувати досить важливі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо, швидко обчислювати визначені інтеграли з відповідним графічним супроводом, будувати графіки явно і неявно, параметрично і таблично заданих функцій в декартових і полярних координатах, обчислювати їх значення в заданих точках, наближати таблично задані функції поліномами за методом найменших квадратів, обчислювати площі і периметри многокутників, довжини дуг, площі поверхонь і об’єми тіл обертання, розв’язувати графічно системи рівнянь і нерівностей, розв’язувати найпростіші задачі оптимізації, задачі на побудову, розв’язування трикутників, досліджувати статистичні вибірки, швидко змінювати в разі потреби графічні побудови за рахунок змінювання динаміних параметрів, вводити координати точок ламаних і редагувати їх «з екрану» та ін..

В процесі використання подібних технологій навчання

першочерговими стають наступні завдання: з'ясування сутності проблеми; розгляд проблеми під «різними кутами» зору; постановка та формулювання задачі; розробка математичної моделі досліджуваного явища; матеріальна інтерпретація отриманих результатів; узагальнення отриманих результатів та синтез відповідних висновків. Безперечно, використання комп'ютера під час навчання стохастики сприяє перетворенню репродуктивної навчальної діяльності в навчально-дослідницьку, творчу, пошукову, евристичну. Залучення студентів до творчої розумової діяльності, створення проблемних творчих ситуацій найкраще реалізовується завдяки впровадженням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання в навчально-пізнавально-дослідницьку діяльність студентів. Комп'ютерна підтримка навчання математики з використанням Gran забезпечує значний педагогічний ефект, що надає можливість полегшити, розширити і поглибити вивчення та розуміння методів математики.

Такий підхід до навчання математики уможливлює унаочнення навчального матеріалу, що значно сприяє розвитку як аналітичного, логічного, так і синтетичного образного мислення, оскільки рутинні обчислювальні операції і побудови покладаються на комп'ютер, залишаючи студентові час на дослідницьку діяльність. Застосування автоматизованих систем у навчанні доцільне тоді, коли це призводить до підвищення ефективності навчання хоча б за одним з критеріїв: підвищення мотиваційно-емоційної сторони навчання; підвищення якості навчання; скорочення витрат часу студента і викладача на навчання предмету (теми); зменшення фінансових витрат на навчання.

Дослідження підтверджують, що застосування програм навчального та навчально-контролюючого призначення допомагає звільнити 30-50% часу викладача на заняттях для творчої роботи зі студентами; застосування елементів автоматизованого навчання надає можливість за даними досліджень на 30-45% підвищити мотивацію навчання і коефіцієнт відтворення знань і вмінь [54].

1.2. Огляд нормативних документів і наукових робіт, присвячених навчанню стохастики у школах та педагогічних університетах України.

В системі освіти в Україні продовжується реформування, спрямоване на оновлення змісту навчання, удосконалення технологій навчання і виховання. Це процес безперервний, бо пов`язаний з прогресом суспільства, і кожний етап його розвитку ставить перед вищою освітою різних рівнів специфічні завдання.

Головною фігурою цих процесів залишається вчитель. Без підготовки нової генерації педагогічних кадрів, підвищення їх професійного та загальнокультурного рівня неможливо реалізувати кардинальні перетворення в галузі освіти. Особлива увага привертається до вчителя математики, бо значною мірою саме він, поряд з вчителями інших предметів, формує в учнів здатність мислити, розвиває логіку, дослідницькі навички, вміння аналізувати найрізноманітніші прояви дійсності і синтезувати відповідні висновки, сприяє формуванню специфічних якостей особистості, пов’язаних з розумовим розвитком. Оволодіши фундаментом знань, що закладається на уроках математики, учень отримує можливості оволодівати новими знаннями на наступних ступенях освіти.

Інтенсивна інформатизація суспільства, що спостерігається в останні десятиліття, ставить перед системою освіти низку проблемних питань, одним з яких є інформатизація закладів освіти. Ефективність вирішення таких проблем значною мірою залежить від рівня оволодіння на професійному рівні педагогічними працівниками сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ). Поряд із цим спостерігається перехід до компетентнісного підходу в розробці стандартів освіти, фаховій підготовці та продовженому навчанні. Тому нині є актуальною проблема формування і розвитку системи інформатичних компетентностей вчителя. З огляду на це Міністерство освіти і науки України започаткувало два експериментальні проекти для підготовки вчителів і студентів педагогічних навчальних закладів до застосування засобів ІКТ у навчальній діяльності.

Перший спільно з фірмою Intel – "Intel@Навчання для майбутнього", інший – з фірмою Microsoft "Партнерство в навчанні". Поряд із цим, значна частина теоретичних і методичних робіт науковців зорієнтована на розв’язування наявних проблем під час підготовки майбутніх учителів у вищих навчальних закладах.

Системний аналіз вітчизняного й зарубіжного досвіду, чинних програм, підручників та методичних підходів щодо вивчення стохастики доводить факт недостатньої уваги до стохастичної лінії під час навчання майбутніх вчителів математики.

Навчальний план – документ, складений у вищому навчальному закладі освіти на підставі освітньо-професійної програми та структурно-логічної схеми підготовки, в якому визначається перелік і обсяг нормативних та вибіркових навчальних дисциплін, послідовність їх вивчення, конкретні форми проведення навчальних занять та їх обсяг, графік навчального процесу, форми і засоби здійснення поточного й підсумкового контролю.

Згідно постанови Кабінету міністрів України від 23 листопада 2011 р. №1392 Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти з 1 вересня 2013 року зазначений Державний стандарт впроваджується в частині базової загальної середньої освіти, а в частині повної загальної середньої освіти – з 1 вересня 2018 року [59].

Цей Державний стандарт ґрунтується на засадах особистісно орієнтованого, компетентнісного і діяльнісного підходів до навчання, що реалізовані в освітніх галузях і відображені в результативних складових змісту базової і повної загальної середньої освіти.

Розглянемо його зміст, відносно стохастичних компетентностей.

Одним із завдань навчання і виховання стосовно освітньої галузі «Математика», за якими визначають зміст математичної освіти в *основній школі*, є:

- формування уявлень про математичну статистику і теорію ймовірностей як споріднені науки, про особливості організації

статистичних досліджень, наочне подання статистичних даних, визначення числових характеристик статистичного ряду, понять випадкової події та її ймовірності.

У старшій школі завдання навчання і виховання стосовно освітньої галузі «Математика», за якими визначають зміст математичної освіти стосовно лінії «Стохастика» є:

- формування практичних компетентностей щодо розпізнавання випадкових подій, обчислення їх ймовірнісної міри, застосування базових статистико-ймовірнісних моделей під час розв'язування навчальних і практичних задач та опрацювання експериментальних даних у процесі вивчення предметів природничого циклу;
- формування уявлення про аксіоматичну побудову математичних теорій.

Зміст освіти та державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів подано в Таблиця 1.2.

Таблиця 1.2

Зміст освіти та державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів освітньої галузі «Математика» стосовно теми «Стохастика»

Зміст освіти	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Освітня галузь "Математика"	
Основна школа	
Елементи комбінаторики, теорії ймовірності та статистики. Множини. Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність випадкової події. Способи подання даних та їх обробки	знати і розуміти, що таке множина, елемент множини, комбінаторна задача, комбінаторні правила суми та добутку, випадкова подія, ймовірність випадкової події, що таке статистичне дослідження та його складові,

	уміти розв’язувати найпростіші комбінаторні задачі шляхом розгляду можливих варіантів, застосовувати комбінаторні правила суми та добутку під час розв’язування найпростіших комбінаторних задач, обчислювати частоту випадкової події та оцінювати її ймовірність, обчислювати ймовірність випадкової події в досліді з рівноможливими результатами, подавати та аналізувати дані у вигляді таблиць, графіків, діаграм різних типів, робити висновки, аналізуючи дані у простих статистичних дослідженнях, застосовувати оцінку ймовірності випадкової події для характеристики випадкового явища, ймовірнісні властивості навколишніх явищ для прийняття рішень
Старша школа	
Елементи комбінаторики, теорії ймовірності та статистики Класичне визначення ймовірності випадкової події. Комбінаторний підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій. Генеральна	знати і розуміти, що таке перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), класичне визначення поняття ймовірності, що таке генеральна сукупність та вибірка, означення середнього значення, моди

сукупність та вибірка. Мода, медіана, середнє значення	та медіани вибірки, уміти обчислювати в найпростіших випадках кількість перестановок, розміщень, комбінацій, обчислювати ймовірності випадкових подій, використовуючи класичне визначення та комбінаторні правила і формули, обчислювати середнє значення, моду і медіану вибірки та інтерпретувати одержані результати, застосовувати ймовірнісні характеристики навколишніх явищ для прийняття рішень

Розглянемо також зміст освітньої галузі «Математика» стосовно теми «Стохастика» чинного Державного стандарту [60] (Таблиця 1.3).

Таблиця 1.3

Зміст освіти та державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів освітньої галузі «Математика» стосовно теми «Стохастика»

Зміст освіти	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Освітня галузь “Математика”	
Основна школа	
Початки теорії ймовірностей та елементи статистики Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Способи подання даних. Частота. Середнє значення	Уявлення про теорію ймовірностей і статистику як науку; про випадкову подію, ймовірність випадкової події,частоту, середнє значення. Знання способів збирання і

	подання даних з різних сфер діяльності. Уміннярозв'язувати найпростіші задачі на обчислення ймовірностей;подавати дані заданими способами
Старша школа	
Початок теорії ймовірностей та елементи статистики Випадкові події. Ймовірність випадкової події. Умовні ймовірності. Незалежні випадкові події. Уявлення про закон великих чисел. Означення ймовірності. Статистичні таблиці. Ряди розподілу та наочне їх зображення. Мода і медіана. Середні значення.	Уявлення про випадкові події та їх ймовірності; способи представлення даних. Знання основних понять, зазначених у змісті. Уміння застосовувати набуті знання під час розв'язування задач прикладного змісту.

Відносно змісту освіти чинний Державний стандарт є більш коректним. Оскільки комбінаторика – це лише один із обчислювальних апаратів, що використовують під час розв’язування окремих типів стохастичних задач, до того ж застосовний лише до рівноімовірних наслідків випробувань із скінченною множиною Ω елементарних подій. Крім комбінаторики в стохастиці використовуються інтеграли, вектори, наближення функцій і т.д. Тому помилковим є поєднання комбінаторики та теорії ймовірностей. Цей підхід є давно застарілим. У посібниках [24], [26], [74] елементи комбінаторики віднесено в додатки як допоміжний, другорядний, не обов’язковий матеріал під час навчання основних понять і положень теорії ймовірностей.

Такі ж некоректності побудови змісту навчального матеріалу спостерігається у навчальних програмах для учнів загальноосвітніх навчальних закладів з математики.

Розглянемо їх детальніше.

Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з математики [131].

Крім загальних освітніх завдань, таких як формування *ставлення* учнів до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, забезпечення *оволодіння* учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул тощо, в основній школі реалізуються такі специфічні для даного етапу навчання математики освітні завдання, що досягаються в процесі навчання стохастики:

- розширення знань учнів про число (від вивчених у початковій школі натуральних чисел до дійсних), формування культури усних, письмових, інструментальних обчислень;
- формування системи функціональних понять, умінь використовувати функції та їх графіки для характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів;
- формування в учнів уявлення про математичну статистику і теорію ймовірностей як споріднені науки, про особливості організації статистичних досліджень, наочне подання статистичних даних, визначення числових характеристик розподілів статистичних ймовірностей (відносних частот) відбування тих чи інших можливих наслідків випробування та їх сукупностей, поняття випадкової події як деякої підмножини множини можливих наслідків випробування та її ймовірності;
- забезпечення оволодіння учнями мовою геометрії, розвиток їх просторових уявлень, умінь виконувати геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів (лінійки з поділками, транспортира, косинця, циркуля і лінійки);

- формування в учнів знань про основні геометричні величини (міри множин – довжину, площу, об’єм, міру кута), про способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і найпростіших стереометричних фігур, а також уміння застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях та інші.

У навчання математики в 5-6 класах вводяться елементи комбінаторики й теорії ймовірностей. В учнів формуються початкові відомості про множину, її елементи. Учні набувають умінь розв’язувати найпростіші стохастичні задачі шляхом розгляду можливих варіантів. На прикладах пояснюються поняття випадкової події та ймовірності відбування випадкової події.

Вперше з поняттям ймовірності випадкової події учні знайомляться в 6 класі в темі «Відношення і пропорції».

У 9 класі вивчається тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики» (10 год.), в якій вивчаються основні правила комбінаторики,частота та ймовірність випадкової події,початкові відомості про статистику, способи подання даних та їх обробки. Учень/учениця наводить приклади: випадкових подій; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, застосування правил комбінаторики; пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події; розв’язує задачі, що передбачають: використання комбінаторних правил суми та добутку; знаходження ймовірності випадкової події; обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків.

Знову ж таки основна увага приділяється елементам комбінаторики, що насправді має бути другорядним матеріалом під час навчання стохастики.

Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів з математики [130]

В темі «*Елементи прикладної математики*» ілюструється практичне застосування теоретичного матеріалу курсу математики в різних сферах реального життя. Практичну значущість цієї теми мають усвідомити в першу

чергу учні, орієнтовані на подальшу фахову діяльність в галузях, де математика відіграє прикладну роль (інформатика, технічні дисципліни, фізика, економіка, технології і ін.), що має стати емоційним підкріпленням для поглибленого вивчення курсу математики. Математичні моделі, що вивчаються, мають бути побудовані на матеріалі з практичних життєвих ситуацій, що сприятиме кращому засвоєнню запропонованого математичного апарату. Продовжується вивчення на формальній основі елементів теорії ймовірностей, яке було розпочато в шостому класі. У цій темі важливою є інтерпретація запропонованих імовірнісних і статистичних характеристик, їх тлумачення в практичному плані. Слід зауважити, що навчальний матеріал, пов'язаний з початками теорії ймовірностей та елементами статистики зазвичай є складним для сприймання. Тому дуже важливим є розгляд достатньої кількості прикладів, а також історичних відомостей із становлення теорії ймовірностей (задача Д'Аламбера, дослідження Б. Паскаля і ін.), в яких належну увагу слід приділити коректному формулюванню опису окремих результатів і, як наслідок, – правильному обчисленню статистичних ймовірностей (відносних частот) відбування подій.

Зміст навчального матеріалу та вимоги до знань та вмінь учнів подано в табл. 1.4. Наявність комбінаторних правил додавання і множення, омновних формул комбінаторики тощо у змісті навчального матеріалу є неприйнятним для класів з поглибленим вивченням математики, адже кількість годин дозволяє перейти до ґрунтовного та поглибленого вивчення основних понять стохастики, таких як випадкова подія та ймовірність випадкової події.

Така ж тенденція до фактично заміни змістової лінії «Стохастика» на «Елементи комбінаторики» відбувається і в старшій школі усіх рівнів (див. Додаток Д).

Проаналізуємо наскільки коректно у шкільних (та інших) посібниках вводяться поняття "випадкова подія" та "ймовірність випадкової події" [73].

Таблиця 1.4

Зміст навчального матеріалу та вимоги до знань та вмінь учнів з теми «Елементи прикладної математики» за навчальною програмою для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів з математики

Тема 5. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ (25 год.) Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. *Комбінаторні правила додавання і множення. Основні формули комбінаторики. Розміщення, сполучення (комбінації), перестановки.* Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. *Статистичне і класичне означення ймовірності. Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики.* Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Вибірка. Середні значення	**Учень/учениця:** **пояснює** поняття: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань; **формулює** комбінаторні правила додавання і множення; означення понять: перестановка, сполучення (комбінації), розміщення, ймовірність випадкової події; **розв'язує вправи, що передбачають**: використання формули обчислення складних відсотків, формул для обчислення перестановок, сполучень і розміщень, знаходження ймовірності випадкової події, знаходження частоти, моди і медіани статистичної вибірки

У деяких навчальних посібниках та підручниках пишуть , що «поняття події належить до неозначуваних (основних) понять теорії ймовірностей; під подією розуміють кожне явище, про яке можна сказати, що воно відбувається або не відбувається». Після таких слів у деяких шкільних підручниках вводяться:

- «*Означення*. Випадковою подією називають подію, яка може

відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування... Під випробуванням розуміють ті умови, в результаті яких відбувається подія».

- «*Означення*. Масовими називають однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів. Масовими вважаються і ті події, для яких відповідні випробування не можна відтворити, але є можливість спостерігати аналогічні випробування у великій кількості».
- «*Означення*. Множина подій утворює повну групу подій, якщо внаслідок кожного випробування хоч одна з цих подій напевне виконується».
- «Означення. Події A_1, A_2, ..., A_n називаються попарно несумісними у даному випробуванні, якщо ніякі дві з них не можуть відбуватися разом».
- «Поняття рівноможливих подій первісне, неозначуване. Під рівноможливими розуміють такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов». «Багато теоретичних тверджень теорії ймовірностей будується на розгляді множини подій, які мають всі три властивості: утворюють повну групу подій, є несумісними і рівноможливими. Події такої множини називають елементарними».

Стосовно наведеного виникає багато запитань:

– Чим відрізняється первісне поняття «подія» від означуваного поняття «випадкова подія»?
– Що таке однорідні події та певні умови? Чи насправді певні умови можуть бути відтвореними необмежену кількість разів? І що таке необмежена кількість разів?
– Чи може якась подія повної групи подій ніколи не виконуватися або виконуватися в результаті кожного випробування?
– У даному випробуванні несумісні події не можуть відбутися разом.

А в іншому випробуванні – можуть?

– Чи можна з рівноможливих і попарно несумісних подій, що утворюють повну групу, утворити нову повну групу подій, рівноможливих і попарно несумісних? Події цієї групи також називаються елементарними? Чим одні елементарні події відрізняються від інших?

Перелік запитань, що виникають при читанні багатьох навчальних посібників, можна продовжувати досить довго. Головним недоліком наведених тлумачень та означень випадкових подій і відношень між ними є те, що всі ці тлумачення і означення важко назвати *математичними моделями* реальних випадкових подій, оскільки усі вони не є сукупностями відомих учням математичних понять і тверджень, що характеризують відповідні реальні випадкові події.

Побудову шкільного курсу теорії ймовірностей на основі таких тлумачень випадкових подій можна уподобити побудові шкільного курсу геометрії, у якому вивчали б не математичні моделі реальних об’єктів, а самі об’єкти, наприклад, не геометричне поняття кулі, а земну кулю, дощову краплю, футбольний м’яч та багато інших реальних об’єктів, математичною моделлю яких є поняття «куля».

Разом з тим, враховуючи сучасні підходи до побудови теорії ймовірностей, можна легко, навіть у рамках шкільного курсу математики будувати *математичні моделі* реальних випадкових подій, які називають *ймовірнісними моделями.* Як конкретно будувати такі моделі, про це йдеться у багатьох статтях і посібниках [18, 21, 20, 24, 26, 25]. Основна ідея полягає в тому, що побудову ймовірнісної моделі починають з випадкового (стохастичного) експерименту – спостереження за певним реальним випадковим явищем. Можливі результати цього експерименту називають *елементарними подіями,* а *множину усіх таких результатів* (елементарних подій) позначають Ω і називають *простором елементарних подій.* Ця множина Ω є *початковою моделлю* згаданого експерименту або реального

випадкового явища. В залежності від поставленої мети початкова модель може неодноразово уточнюватися, проте кожного разу вона залишається математичною, оскільки пов'язана з математичними поняттями «множина» та «елемент множини» і відношеннями («належності» та «неналежності») між цими поняттями.

В рамках початкової моделі Ω можна тлумачити поняття *випадкової події A* як певну підмножину елементарних подій з множини Ω. Випробування (окреме проведення експерименту) можна тлумачити як вибір навмання окремого елемента з деякої множини елементів Ω, кожному з яких поставлено у взаємно однозначну відповідність елементарну подію E з простору Ω. Якщо при цьому виявиться, що елементарна подія $E \in A$ *(E* сприяє події *A*), то це й означає відбування події *A* у даному випробуванні.

Не завжди зручно, а іноді і неможливо (наприклад, [65]) вважати кожну підмножину $A \in \Omega$ випадковою подією. Тому бажано у процесі побудови ймовірнісної моделі вказати *характеристичні* або *основні властивості,* що цілком визначають сукупність *S випадкових подій*:

1_S. $\Omega \in S$, тобто вірогідна подія завжди є подією.

2_S. Якщо A є подією з простору S, то S містить і подію $\overline{A} = \Omega \setminus A$, протилежну до A ($\overline{A} = \Omega \setminus A$ часто позначають $\Omega - A$).

3_S. Якщо A_k, $k \in N$, є подіями з простору S, то S містить і суму цих подій, тобто $\bigcup_k A_k \in S$ ($\bigcup_k A_k$ часто позначають також $\sum_k A_k$).

Доцільно підкреслити, що умови 1_S-3_S нагадують умови, які задовольняють фігури, що мають довжину, площу чи об'єм. Так, якщо S – це сукупність тих частин відрізка [0;1], що мають довжину, то $[0; 1] \in S$; для кожної частини $A \in S$, частина $\overline{A} = [0;1] \setminus A$ також має довжину, а тому $\overline{A} \in S$, якщо частини A_k мають довжину, то і $\bigcup_k A_k$ також має довжину.

Отже, умови 1_S-3_S – це правила побудови сукупності випадкових подій. Виходячи з однієї і тієї ж сукупності Ω елементарних подій, можна

побудувати багато різних сукупностей S випадкових подій (якщо Ω містить більше одного елемента), що задовольнятимуть умови 1_S-3_S. Серед таких сукупностей є така, коли кожна підмножина множини Ω результатів випадкового експерименту вважається випадковою подією; проте не завжди останній варіант можливий для побудови ймовірнісної моделі, а досить часто хоч і можливий, проте недоцільний [66].

Пару (Ω, S), тобто простір Ω елементарних подій разом з простором подій S, іноді називають *уточненою моделлю відповідного стохастичного експерименту.* Можливість вибору уточненої моделі серед усіх існуючих забезпечує гнучкість та широту застосувань таких моделей.

Велика кількість навчальних посібників з теорії ймовірностей присвячена побудові цієї теорії на основі так званого «класичного означення ймовірності».

Наведемо один з найгірших прикладів такого означення: «Ймовірністю випадкової події називається відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих несумісних подій, які утворюють повну групу подій під час певного випробування».

Зауважимо, що перед тим, як ввести наведене «означення», у відповідному шкільному посібнику формулюють довгу низку тлумачень та «означень», пов’язаних з поняттям випадкової події, які на думку авторів посібника допомагають зрозуміти наведене означення ймовірності, проте насправді тільки заплутують сутність поняття «ймовірність випадкової події», оскільки залишаються без відповіді такі запитання (до наведеного означення ймовірності):

- Що таке подія, яка сприяє цій події?
- Скільки існує таких подій, що сприяють даній випадковій події, і як їх визначити?
- Яке відношення мають всі рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу, до події, ймовірність якої визначається?
- Чи завжди це означення можна застосувати?

В деяких посібниках «класичне означення» ймовірності $P(A)$ події A вводять акуратніше, вважаючи, що усі елементарні події простору Ω є рівноможливими, а $P(A)=\frac{m}{n}$, де m – кількість елементарних подій, що сприяють події A, а n – кількість усіх елементарних подій простору Ω.

Окрім того, що залишається невизначеним поняття рівноможливості елементарних подій, виникає питання, як знайти ймовірність події A , коли множина елементарних подій нескінченна. Також виявляється, що далеко не для кожного випадкового експерименту, для якого простір елементарних подій Ω скінченний, можна вважати елементарні події рівноможливими (наприклад при біноміальному розподілі ймовірностей). Отже «класичне означення» ймовірності не розкриває сутності поняття ймовірності випадкової події і тому некоректне.

Вагомим аргументом використання «класичного означення» ймовірності автори багатьох посібників вважають те, що цим означенням користувалися творці теорії ймовірностей – великі математики. Проте справа в тому, що творцям математичних (і не тільки) теорій часто не потрібні строгі означення. Більше того, народження принципово нової теорії навіть неможливе в якихось строгих рамках. Великі математики тому й вважаються великими, що здатні побачити і побудувати стрункy математичну теорію серед хаосу різноманітних математичних фактів, на перший погляд, ніяк не пов’язаних між собою, здобутих їхніми попередниками протягом багатьох років, іноді століть і навіть тисячоліть.

Стрункість теорії досягається лише на заключних етапах її розвитку. Тоді вона стає доступною для вивчення не тільки студентами університетів, а й учнями середньої школи. Саме учням потрібні чіткі і зрозумілі означення, до яких класичне означення аж ніяк не відноситься.

Розуміючи (або ні) недосконалість «класичного означення» ймовірності, автори багатьох посібників наводять вже традиційно ще два означення ймовірності: статистичне та геометричне, які часто ніяк не

пов’язують ні одне з одним, ні з класичним означенням ймовірності, а разом з тим вважають, що доведення різних властивостей ймовірностей достатньо провести лише для «класичних ймовірностей». Тому таке навчання теорії ймовірностей не лише не розвиває мислення студентів та учнів, але часто навіть шкідливе.

Проаналізуємо «означення статистичної ймовірності», що наводиться в багатьох посібниках: для n проведених випробувань підраховують кількість $m = m_n(A)$ тих випробувань, у яких подія A відбулася, і число $P_n^*(A) = \frac{m}{n}$ називають відносною частотою події A , а число $P(A)$, навколо якого скупчуються (стабілізуються) відносні частоти $P_n^*(A)$ при великій кількості n випробувань, називають *ймовірністю*, або *статистичною ймовірністю події* A. Іноді після таких слів роблять висновок, що $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(A)$.

Такі означення і ймовірності, і статистичної ймовірності не витримують жодної критики.

Стосовно наведених означень виникають запитання:

- Як розуміти слова «$P_n^*(A)$ скупчуються навколо $P(A)$»? Як перевірити це скупчування?
- Якщо «скупчуваність» означає існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(A)$, то звідки випливає існування цієї границі?
- Чи якось пов язані між собою скупчуваності $P_n^*(A)$ і $P_n^*(B)$ для двох різних подій та для більшої кількості подій?

Без відповідей на поставлені запитання наведене означення насправді не є означенням, а лише певним інтуїтивним тлумаченням ймовірності.

Окрім того можна навести приклади, коли відносні частоти $P_n^*(A)$ із збільшенням n не стабілізуються або ж стабілізуються, проте не виключено, що біля числа, далекого від ймовірності події A .

Нехай, наприклад, є кубик (можливо неоднорідний), на двох гранях якого нанесені цифри 0, а на інших чотирьох – цифри 1. Тоді не виключено, що при як завгодно великому числі випробувань – підкидань одного і того самого кубика буде отримано наступні серії наслідків таких випробувань:

1) 000...00... (на верхній грані кубика весь час випадає цифра нуль) – $P_n^*(\{0\})$ стабілізується біля значення 1;
2) 111…11… (на верхній грані кубика весь час випадає цифра 1) – $P_n^*(\{0\})$ стабілізується біля значення 0;
3) 010101...0101... (на верхній грані кубика почергово випадають цифри 0 і 1) – $P_n^*(\{0\})$ стабілізується біля значення 0,5;
4) 011000111111... (на верхній грані кубика цифри 0 і 1 випадають у відповідності з правилами: 1 -й раз випадає 0, потім двічі 1, далі набір цифр довжиною, що дорівнює кількості всіх попередніх, причому всі цифри такого набору однакові і протилежні до останньої в попередній серії, тобто, 1-ша цифра 0, потім 2 цифри 1, потім три цифри 0, потім 6 цифр 1, потім 12 цифр 0 і т.д. Тоді $P_n^*(\{0\})$ не стабілізується біля якогось числа і змінюється із збільшенням n між значеннями 1/3 та 2/3, коливаючись між ними і збільшуючись від 1/3 до 2/3, потім зменшуючись від 2/3 до 1/3, потім знову збільшуючись від 1/3 до 2/3 і т. д.

Такі приклади можна продовжити. Це говорить про те, що навіть у випадку, коли значення $P_n^*(A)$ із збільшенням n скупчуються (стабілізуються) біля якогось числа, не можна стверджувати, що в інших серіях випробувань $P_n^*(A)$ із збільшенням n будуть стабілізуватися біля того самого числа чи взагалі стабілізуватися. Звідси випливає некоректність статистичного означення ймовірності.

Разом з тим, наведене «статистичне означення ймовірності» містить раціональну частину – означення відносної частоти або, що те саме,

статистичної ймовірності події A .

Справа в тому, що поняття ймовірнісної моделі (уявлення про яку треба сформувати у тих, хто вивчає курс теорії ймовірностей) потрібне для того, щоб зрозуміти:

- математичну сутність випадкової події;
- закономірності, пов’язані з тим, наскільки часто можуть відбуватися випадкові події у довгій серії випробувань;
- як за спостереженими значеннями частоти відбування певної випадкової події зробити досить точний прогноз щодо можливостей подальшого відбування цієї події.

Статистичні ймовірності (відносні частоти) $P_n^*(A)$ характеризують середню можливість відбування події A з простору S у кожному з n проведених випробувань. Разом з тим виявляється, що часто ці статистичні ймовірності (відносні частоти) досить добре характеризують можливість відбування події A у кожному випробуванні, а не тільки в уже проведених. Число $P_n^*(A)$ називають статистичною ймовірністю відповідної події $A \in S$, а трійку (Ω, S, P_n^*). тобто простір Ω елементарних подій, разом з простором подій S та статистичними ймовірностями $P_n^*(A),\ A \in S$ називають статистичною моделлю відповідного стохастичного експерименту або ймовірнісним простором.

Безпосередньо з означення статистичної ймовірності $P_n^*(A),\ A \in S$, випливають її основні властивості:

$1_{\text{р}}$. $P_n^*(A) \geq 0,\ \ A \in S$, тобто статистична ймовірність довільної події $A \in S$ невід’ємна;

$2_{\text{р}}$. $P_n^*\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P_n^*(A_k)$, коли $A_k \in S$ і $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (події A_k попарно несумісні), тобто статистична ймовірність скінченної або зчисленної суми попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей

цих подій. Це так звана *властивість повної* (*або зчисленної*) *адитивності* статистичної ймовірності.

$3_р$. $P_n^*(\Omega)=1,$ тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Властивості 1р-2р нагадують відповідні властивості площі, об'єму, довжини, маси тощо. Всі ці величини мають узагальнену назву – міра. Якщо така міра задовольняє ще і властивість 3р, тоді вона називається імовірнісною мірою (або просто ймовірністю).

З основних властивостей 1р-3р статистичної ймовірності випливають усі інші її властивості [66].

Такі некоректності трапляються не лише в шкільних посібниках та підручниках. Зокрема, в переважній більшості посібників з теорії ймовірностей, де згадується *теорема Бернуллі* (закон великих чисел для відносних частот), стверджується, що ця теорема є простим наслідком *теореми Чебишева* – загального закону великих чисел для послідовності попарно незалежних випадкових величин $X_i(e),\ i\in N$:

$$\widetilde{P}(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(e)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]|\geq\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty)$$

за умови $D[X_i]\leq c,\ i\in N$, а тому $\widetilde{P}(|P_n^*(A)-p|\geq\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty),$ де $P_n^*(A)$ – статистична ймовірність (відносна частота) події A, а $p=P(A)$ – ймовірність цієї події. При цьому обґрунтовують, що $P_n^*(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(e)$, де X_i – індикатор події A_i – здійснення події A в i-му випробуванні (з довільних n послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з ймовірнісною моделлю (Ω,S,P), для якої подія $A\in S$ і $p=P(A)$).

Разом з тим, майже ніколи не кажуть:

- на якому просторі $\widetilde{\Omega}$ визначено функції $X_i(e)$, для яких

$$P_n^*(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(e);$$

- стосовно якої ймовірності ці функції $X_i(e)$ є попарно незалежними випадковими величинами;
- до якого простору подій $\widetilde{S}$ належать події A_i, $i \in N$;
- стосовно якої ймовірності $\widetilde{P}$ можна стверджувати, що $\widetilde{P}(A_i) = p = P(A)$, $i \in N$, а $\widetilde{P}(|P_n^*(A) - p| \geq \varepsilon) \to 0$, коли $n \to \infty$.

У деяких посібниках [48], [204] про все це кажуть, але досить схематично. Зокрема, сказане не виключає, що шукана ймовірнісна модель $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ насправді залежить від *n*, тобто $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P}) = (\widetilde{\Omega}_n, \widetilde{S}_n, \widetilde{P}_n)$.

Виникає питання: «*Чи існує ймовірнісний простір* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$*, не залежний від n, стосовно якого є правильним твердження* $\widetilde{P}(|P_n^*(A) - p| \geq \varepsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$*, а* $P_n^*(A) = Y_n(e)$, $e \in \widetilde{\Omega}$*, є випадковою величиною, що набуває значень* $\frac{m}{n}$ *тоді й тільки тоді, коли подія A відбувається m разів в n послідовних незалежних випробуваннях, тобто коли* $e \in B_{n,m}$*, причому* $B_{n,m} \in \widetilde{S}$ *і* $\widetilde{P}(B_{n,m}) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$*, де* $B_{n,m}$ *– подія, яка полягає в тому, що подія A відбувається m разів в серії із n послідовних незалежних випробувань?*»

Такий простір $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ побудовано в [22] і за його допомогою з'ясовано, коли можна використовувати спосіб задання ймовірності, запропонований Р. Мізесом: $P(A) = \lim\limits_{i \to \infty} P_i^*(A)$, де $P_i^*(A)$ – спостережене значення статистичної ймовірності за результатами серії із *i* послідовних випробувань [204, с. 218]. Ця побудова ґрунтується на тому, що кожній послідовності з нулів та одиниць відповідає єдине дійсне число відрізка [0; 1]. Використання цієї ідеї проілюстровано у роботі [204, с. 223].

Порівняльний аналіз шкільних та вузівських програм з математики щодо відповідної змістової лінії дає підстави стверджувати, що перш за все

потребує змін зміст навчального матеріалу в шкільних підручниках та програмах, а для реалізації нового змісту в школах – підготовка вчителів, які володіють високим рівнем знань зі стохастики. Тому розроблена комп'ютерно-орієнтована методична система вивчення стохастики може бути використана в педагогічних університетах з метою удосконалення математичної підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики, зокрема стосовно формування компетентностей зі стохастики та методики її навчання учнів основної і старшої школи з педагогічно виваженим та методично вмотивованим використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій і інформаційних ресурсів навчального призначення.

1.3. Порівняльний аналіз програмних засобів, що використовуються в навчанні стохастики.

Ефективність навчального процесу в педагогічному університеті за умов широкого впровадження засобів сучасних ІКТ у значній мірі залежить від розуміння викладачем шляхів та методів педагогічно виваженого, методично вмотивованого і доцільного застосування програмних засобів.

Сьогодні існує чимало засобів загального, спеціального, навчального призначення, які можна використовувати у процесі навчання стохастики, серед них: GRAN, DG, TepM, Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica, Maxima, Statistica і ін. Педагогічний потенціал застосування цих програмних засобів у навчанні математики висвітлено у роботах Вінниченка Є.Ф., Горошка Ю.В., Грамбовської Л.В., Жалдака М.І., Крамаренко Т.Г., Костюченко А.О., Ракова С.А., Триуса Ю.В., Покришня Д.А., Кобильника Т.П., Почтовюк С.І., Колчук Т.В., Єфіменка В.В., Смірнової-Трибульської Є.М., Гриб'юк О.О., Пенькова А.В., Шавальової О.В., Зайцевої Т.В., Чепрасової Т.І., Вітюка О.В., Красюк Ю.В., Ліходєєвої А.В., Яценко С.Є. та ін. Більшість вищезгаданих досліджень стосуються застосування програм «сімейства» GRAN, DG, TepM у процесі навчання математики.

Системи комп'ютерної математики (СКМ) – програмні засоби за допомогою яких можна досить швидко і якісно виконати чисельні обчислення, аналітичні перетворення, побудувати дво- та тривимірні графіки. Ці засоби сьогодні знайшли широке використання у науці, техніці та освіті. З 90-х років XX ст. СКМ використовуються в системах середньої освіти Австрії, Словенії, Німеччини, Франції, Італії, Португалії та інших країн.

Вибір СКМ для навчання математики залишається за викладачем. Лідерами серед СКМ є системи Maple та Mathematica [202]. На жаль, на сьогодні вони є комерційними продуктами. Проте, існуючі вільнопоширювані СКМ (до них належать Maxima, SAGE) практично нічим не поступаються згаданим системам. У них реалізовано багато команд для

перетворення та спрощення алгебраїчних виразів, диференціювання функцій, обчислення невизначених і визначених інтегралів, скінченних, нескінченних сум і добутків, розв'язування алгебраїчних і диференціальних рівнянь та їх систем, знаходження границь функцій тощо.

Опрацювання результатів навчальних експериментів і спостережень з великою кількістю даних та розв’язування навчальних прикладних задач із значними за обсягом сукупностями статистичних матеріалів переконують в доцільності використання інформаційно-комунікаційних технологій для зняття рутинних операцій та вивільнення часу для творчої розумової діяльності, інтенсифікації процесу навчання та активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Використання програмних засобів типу GRAN-1, DG та ін., які оснащені зручним інтерфейсом, прості у використанні для роботи з ними не вимагаються потужні технічні ресурси комп’ютера, надає можливість легко унаочнити процедуру опрацювання значних за обсягом статистичних даних, і в такий спосіб ознайомити студентів із застосуванням різних методів для розв’язання задач. Використання комп’ютерних технологій під час навчання стохастики створює умови для інтелектуального розвитку студентів, розкриття їхнього творчого потенціалу, покращення професійної підготовки щодо обраної профільної орієнтації навчання, підвищення рівня інформатично-комп’ютерної обізнаності, формування в них ключових, а також галузевих і предметних компетентностей, зокрема математичних та інформатичних.

Тип програмного засобу навчального призначення з точки зору його місця у навчальному процесі може бути визначений відповідно до поданої нижче класифікації.

1. Демонстраційно-моделювальні програмні засоби.

Характерними ознаками таких програмних засобів навчального призначення є їх використання на етапах пояснення нового матеріалу (фронтальна демонстрація моделі об’єкта вивчення). Можливі варіанти ППЗ, які відрізняються способом формування та видом моделі:

-*імітаційні моделі*, які використовуються замість динамічних плакатів;

-*імітаційні керовані моделі*, характерною особливістю яких є зовнішня схожість з об'єктом вивчення (фізичним явищем, природним об'єктом тощо), яка формується з використанням математичної моделі, суттєво відмінної від тієї, що використовується для наукового опису цього явища, тому математичний опис моделі є закритим для студента;

-*динамічні керовані моделі*, засновані на математичних описах явищ, максимально наближених до наукових моделей певної предметної галузі і тому відкритих (або частково відкритих, доступних) для студента.

Умовно до демонстраційно-моделюючих програмних засобів можна віднести також *записані на електронних цифрових носіях відеофрагменти*, які використовуються в процесі навчання історичних аспектів розвитку відповідної предметної галузі, демонстрації проведень експериментів тощо, *демонстраційні довідково-інформаційні системи, аудіозаписи* тощо.

До ППЗ цього типу та програмно-апаратних засобів, за допомогою яких вони використовуються у навчальному процесі, застосовні вимоги, сформульовані для демонстраційного експерименту (вимоги науковості, доступності, наочності, збалансованості «закритої» та «відкритої» для учнів складових та ін.).

2. Педагогічні програмні засоби як складові діяльнісного предметно-орієнтованого середовища.

До них належать *програмні засоби*, призначені для візуалізації об'єктів вивчення та виконання певних дій над ними. Такі навчальні середовища іноді називають «мікросвітами».

До цього типу ПЗНП належать також різного типу *тренажери, симулятори (імітатори)*, лінгвістичні тренажери (програмні засоби, за допомогою яких забезпечують запис та відтворення звуку з метою контролю та формування вимови), системи для навчання глухонімих (системи типу «видима мова»), тренажери для формування навичок гри на музичних інструментах тощо.

Суттєвою особливістю цього типу ППЗ є їх пристосованість до індивідуального використання тих, хто навчається.

3. Педагогічні програмні засоби, призначені для визначення рівня навчальних досягнень.

Дані програмні засоби використовуються для індивідуальної роботи студентів та можуть відрізнятись за способом формулювання і подання навчальних завдань, способом введення студентом команд і даних, способом організації і подання результатів тощо. Як правило, ці програмні засоби можуть використовуватись і для самоконтролю, у режимі тренування. ППЗ цього типу можуть класифікуватись у такий спосіб.

1. *За способом організації роботи у мережі:*

-*ППЗ для використання на окремому комп'ютері*, з фіксацією результатів на його зовнішньому запам'ятовуючому пристрої та наступним аналізом результатів викладачем;

-*мережеві засоби з виконанням на клієнтському* (студентському) *комп'ютері* і фіксацією результатів на сервері (комп'ютері викладача);

-*мережеві засоби з виконанням і фіксацією результатів на сервері*.

2. *За ступенем «гнучкості»*, можливістю редагування предметного наповнення і критеріїв оцінювання:

-*відкриті програмні засоби*, предметне наповнення яких може редагуватись, поповнюватись викладачем;

-*закриті для користувача програмні засоби*, предметне наповнення яких не може редагуватись, поповнюватись викладачем;

3. *За структурою і повнотою охоплення навчального курсу*:

-*програмні засоби, які є автоматизованими навчальними курсами або так званими «електронними підручниками»*, в яких поєднується програмне забезпечення, призначене для подання, закріплення, перевірки рівня навчальних досягнень без втручання або з мінімальним втручанням викладача;

-*програмні засоби, призначені для використання у межах однієї або*

кількох навчальних тем.

4. *За способом введення команд і даних та можливою варіативністю формування відповіді*:

-*програмні засоби для підтримки предметно-орієнтованого діяльнісного середовища або емулятора*, за допомогою яких ведеться протоколювання дій користувача (наприклад, формуванням частотної діаграми помилок);

-*програмні засоби з розділеним у часі поданням студентові навчальної задачі й введенням його реакції*;

5. *За можливими способами формулювання та подання студентові навчальних задач*:

-графічне подання змісту навчальної задачі;

-вербальне (або текстове) подання змісту навчальної задачі;

-графічно-текстове подання змісту навчальної задачі.

6) *За способом введення даних студентом:*

-подання відповіді через введення тексту з клавіатури;

-обрання одного з кількох варіантів;

-встановлення відповідності між елементами двох множин;

-упорядкування множин (обрання послідовності дій);

-виконання наперед обумовлених дій з віртуальними органами управлінням об’єктом.

4. Педагогічні програмні засоби довідково-інформаційного призначення.

Ці засоби використовуються для доповнення підручників та навчальних посібників. *За формою структурування і подання матеріалу* ці засоби можуть бути:

- *базами даних* (у т.ч. з текстовим і/або мультимедійним поданням навчального матеріалу) із реляційною, ієрархічною, мережевою моделлю організації даних;

- *гіпертекстовими або гіпермедійними системами*;

- *базами знань*, як складовими експертних систем навчального призначення.

За способами зберігання даних довідково-інформаційні системи можуть бути побудовані на основі моделей із зосередженим або розподіленим зберіганням даних.

Завдяки значній кількості команд та послуг СКМ для розв'язування досить широкого класу математичних задач з візуалізацією основних етапів розв'язування, ці програмні засоби можна з успіхом використовувати у процесі навчання математики, зокрема і стохастики, в педагогічному ВНЗ. А саме, для:

- візуалізації абстрактних математичних понять, включаючи можливість анімації графічних зображень;
- виконання громіздких рутинних обчислень з наперед заданою точністю;
- здійснення символьних перетворень для спрощення виразів;
- проведення комп'ютерних експериментів, дослідження математичних моделей реальних практичних задач;
- створення електронних документів математичного змісту, до яких можуть бути включені текст, графічні ілюстрації, результати обчислень, гіперпосилання на інші документи та ресурси Інтернету тощо.

СКМ можна застосовувати під час вивчення таких тем стохастики: операції над подіями, статистична ймовірність події, розподіли статистичних ймовірностей, випадкові величини, функції від випадкових величин тощо. Використання СКМ також дає можливість розглянути теми, які часто не розглядаються у процесі навчання математики у зв'язку з необхідністю виконання значного обсягу обчислень (наприклад, під час вивчення статистичної перевірки гіпотез).

Можливість проведення комп'ютерних експериментів у середовищі СКМ дає змогу організувати навчання стохастики з використанням елементів

проблемного навчання, дослідницьких підходів у навчанні.

Окремо розглянемо такі програми, як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D. На основі їх використання можна організувати евристичну діяльність учнів, у ході якої формуються наступні евристичні уміння:

- спостереження явищ у плані логічних і математичних категорій;
- аналіз фактів, сприйняття їх через призму математичних моделей;
- виокремлення об'єктів, важливих для пошуку розв’язання задач;
- облік і співвіднесення всіх завдань між собою, з'ясування їх погодженості й протиріччя;
- висування різних припущень з обґрунтуванням їх коректності, істинності чи хибності (гіпотези);
- прогнозування результатів;
- формулювання узагальнених принципів для пояснення сутності завдання;
- побудова варіантів плану дій (планування діяльності) стосовно розв’язування задач;
- пошук аналогів у зв’язку з об’єктом завдання;
- відшукання нових властивостей одного й того самого об’єкта;
- комбінування одних відомих прийомів і способів розв’язування з іншими;
- формулювання й доведення висновків;
- перевірка правильності виконаних дій;
- перевірка повноти й достатності доказів;
- зіставлення результатів з еталонними, нормативними.

Програма Gran1 (GRaphic ANalysis) призначена для графічного аналізу функцій. Використання програми надає можливість знаходити обернені функції та їх графіки, графічно розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи, обчислювати значення виразів, знаходити найбільші та найменші значення функцій на заданій множині точок, обчислювати визначені інтеграли, площі довільних фігур, довжини кривих, об’єми та площі

поверхонь тіл обертання, опрацьовувати статистичні дані, будувати функції розподілу статистичних ймовірностей, перевіряти гіпотези про розподіл ймовірностей за критерієм Пірсона.

Програма Gran-2D (GRaphic Analysis 2-Dimension) призначена для графічного аналізу систем геометричних об’єктів на площині і належить до розряду програм динамічної геометрії. Її використання дозволяє обчислювати значення виразів, відстані між точками, кути між відрізками прямих, створювати макроконструкції, що призначені для спрощення опрацювання комбінацій об’єктів. Програма може бути використана для розв’язування задач шляхом моделювання об’єктів.

Програма Gran-3D (GRaphic Analysis 3-Dimension) призначена для графічного аналізу просторових (тривимірних) об’єктів. За допомогою Gran-3D можна обчислювати об’єми й площі поверхонь многогранників, відстані між точками й кути між прямими та площинами, площі поверхонь та обмежені ними об’єми, об’єми та площі тіл обертання, значення виразів, інтеграли вздовж контура; виконувати перетини многогранників площинами та обчислювати об’єми і площі поверхонь отриманих частин.

Використання ІКТ, зокрема Gran1, у навчанні математики надає можливість зробити доступнішими для сприйняття абстрактні математичні об'єкти та методи, здійснювати індивідуальний підхід в навчанні, посилює мотивацію навчально-пізнавальної діяльності, завдяки чому підвищується ефективність процесу навчання математики; створюються умови для розвитку творчого мислення та уяви, інтелектуального потенціалу студентів.

Порівняємо різні програмні засоби для побудови функції розподілу випадкових величин.

Зазвичай основою для такої побудови є набір спостережуваних значень випадкової величини. В процесі розгляду моделі іноді потрібно уточнити отримані результати шляхом подрібнення чи укрупнення інтервалів поділу множини можливих значень випадкової величини найпростіші події окремі частини. Такий процес достовірно можна здійснити лише за наявності

початкових даних експерименту. Проте за відсутності таких даних можна скористатись усередненою щільністю розподілу ймовірностей для побудови відповідних графіків функції розподілу. Для цього інтервали, на яких задана щільність розподілу, ділять на менші за довжиною та обчислюють значення функції розподілу ймовірностей в кінцях кожного інтервалу. Якщо в процесі подрібнення інтервалів їх довжина буде прямувати до нуля, то в разі поінтервального розподілу ймовірностей із сталою усередненою щільністю розподілу ймовірностей на кожному інтервалі функція розподілу ймовірностей буде наближатись від кусково сталої до неперервної, а її графік буде поступово від ступінчатого із все меншою і меншою висотою ступіньок наближатися до неперервної лінії.

Розглянемо приклади візуального подання процесу подрібнення інтервалів з використання програмних засобів різних категорій. Системи комп'ютерної математики характеризуються наявністю потужних обчислювальних алгоритмів та алгоритмів візуального відображення даних. Таким чином можна, використовуючи вбудовані засоби програмування, побудувати динамічну модель процесу, що розглядається. Недоліками використання систем комп'ютерної математики для демонстрації є переобтяженість додатковими функціями, що відволікає увагу від суті розглядуваного прикладу. Наприклад, Mathcad – система комп'ютерної алгебри, орієнтована на оформлення документів з динамічним наповненням. У Mathcad до версії 13.1 включно використовуються пакети обчислень спільні з Maple, починаючи з 14 – символьне ядро MuPAD, таким чином користувач може переносити проекти з однієї системи в іншу.

Розглянемо приклад.

Нехай на множині $\Omega = [0,5)$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей

$[a_{i-1}, a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1,i)$, $i\in\overline{1,5}$, на множині $\Omega=[0,5)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)$ подано на Рис. 1.1.

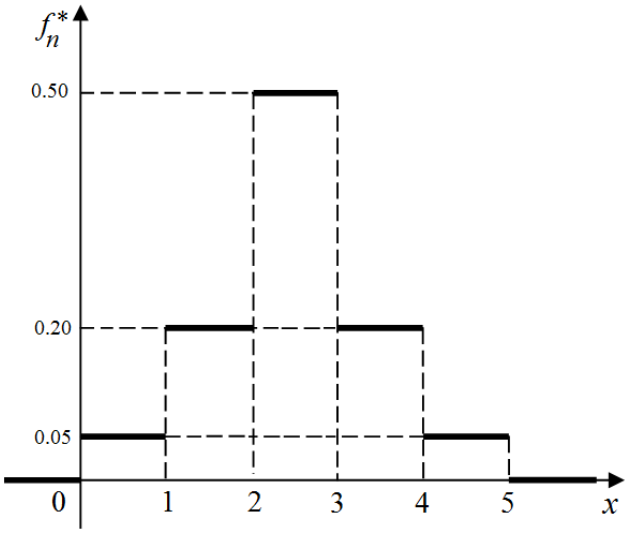


Рис. 1.1. Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1,i)$, $i\in\overline{1,5}$, на множині $\Omega=[0,5)$

Побудуємо функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$.

Виходячи з означення функції розподілу ймовірностей, дістанемо, що для будь-якої точки x, що лежить в інтервалі $(-\infty,1]$, буде $F_X(x)=0$, оскільки для $x\in(-\infty,1]$ $F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum\limits_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)}P_X([a_{i-1},a_i))=0$.

Для довільної точки $x\in(1,2]$ буде $F_X(x)=0{,}05$, оскільки для таких x

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)}P_X([a_{i-1},a_i))=P_X([0,1))=0{,}05.$$

Коли точка x лежатиме в інтервалі $(2,3]$, тоді буде $F_X(x)=0{,}25$, оскільки для таких x буде

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)}P_X([a_{i-1},a_i))=P_X([0,1))+P_X([1,2))=0{,}05+0{,}20=0{,}25.$$

Для $x\in(3,4]$ $F_X(x)=0{,}75$, оскільки для таких x маємо

$$F_X(x)=P_X((-\infty,x))=$$

$$=\sum_{[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,x)}P_X([a_{i-1},a_i))=P_X([0,1))+P_X([1,2))+P_X([2,3))=0{,}05+0{,}20+0{,}50=0{,}75.$$

Для всіх $x \in (4,5]$ буде $F_X(x) = 0{,}95$, тому що для таких x одержуємо

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset (-\infty, x)} P_X([a_{i-1}, a_i)) =$$

$$= P_X([0,1)) + P_X([1,2)) + P_X([2,3)) + P_X([3,4)) = 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}50 + 0{,}20 = 0{,}95.$$

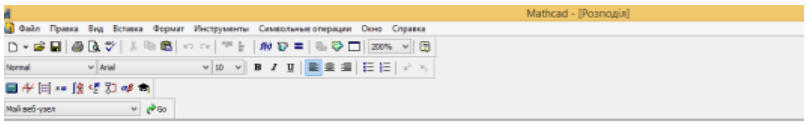
Аналогічно для будь-якого x з інтервалу $(3,\infty)$ одержуємо

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset (-\infty, x)} P_X([a_{i-1}, a_i)) = P_X([0,1)) + P_X([1,2)) + P_X([2,3)) +$$

$$+ P_X([3,4)) + P_X([4,5)) = 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}50 + 0{,}20 + 0{,}05 = 1.$$

Таким чином, функція розподілу ймовірностей матиме вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0{,}05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0{,}25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0{,}75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0{,}95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$



f1 :=

	0	1
0	0.5	0
1	1.5	0.05
2	2.5	0.25
3	3.5	0.75
4	4.5	0.95
5	5.0	1

f2 :=

	0	1
0	0.25	0
1	0.75	0.025
2	1.25	0.05
3	1.75	0.15
4	2.25	0.25
5	2.75	0.5
6	3.25	0.75
7	3.75	0.85
8	4.25	0.95
9	4.75	0.975
10	5.0	1

Рис. 1.2. Дані з координатами середин інтервалів і відповідними значеннями функції розподілу ймовірностей на цих інтервалах

Для того, щоб зобразити графік функції розподілу ймовірностей $F_X(x)$ скористаємось програмою Mathcad. Для цього в меню програми обираємо послугу Меню/Вставка/Таблиця і заповнюємо її координатами середин інтервалів і відповідними значеннями функції розподілу ймовірностей на цих

інтервалах (див. f1, Рис. 1.2). Для побудови графіка за введеними даними обираємо пункт меню Вставка/Графік (Рис. 1.3).

Поділивши довжину інтервалів навпіл, отримаємо нові значення функції розподілу, за якими аналогічно створюємо ще одну таблицю (див. f2 Рис. 1.2) та перебудовуємо графік функції розподілу ймовірностей (Рис. 1.4).

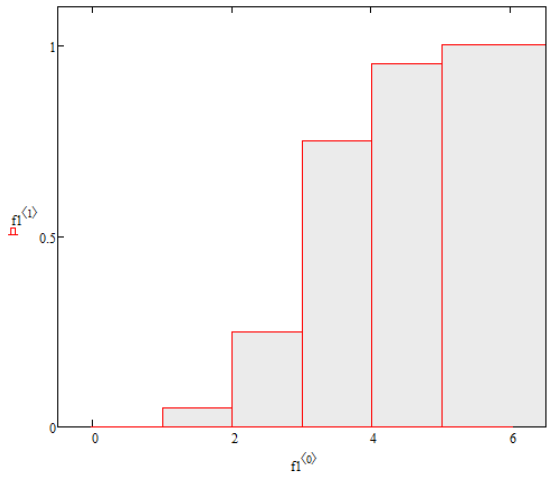


Рис. 1.3. Графік функції розподілу в СКМ Mathcad

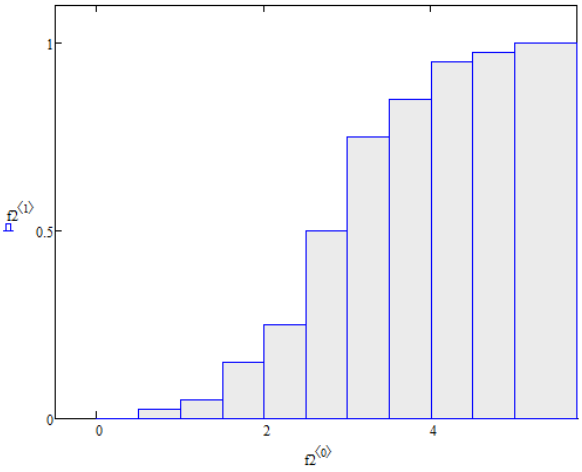


Рис. 1.4. Графік функції розподілу в СКМ Mathcad

Для демонстрації такого процесу подрібнення інтервалів також можна скористатись табличним процесором, зокрема Microsoft Excel.

Використовуючи вбудований майстер діаграм, користувач може створити аналогічне зображення, маючи значення функції розподілу ймовірностей. Для цього створюємо таблицю показану на Рис. 1.5. Виділяємо діапазон клітинок C4:D9 і обираємо послугу Вставка/Діаграми та визначаємо тип діаграми, наприклад, Стовпчаста/Плоска стовпчаста діаграма/Гістограма

з накопиченням. В разі потреби змінюємо колір, підписи осей, легенди тощо.

Проте для побудови наступного кроку подрібнення користувачеві потрібно буде обчислити значення функції розподілу самостійно і знову побудувати нову діаграму (Рис. 1.5, Рис. 1.6).

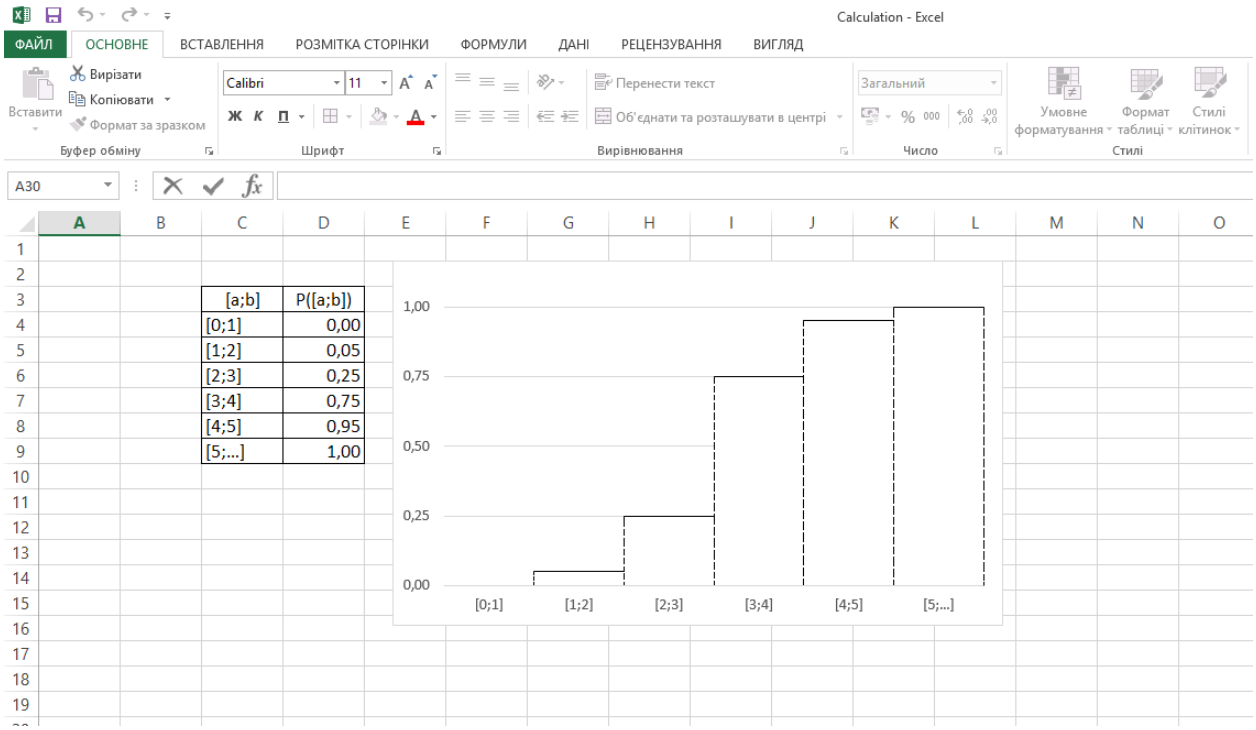


Рис. 1.5. Графік функції розподілу в MS Excel

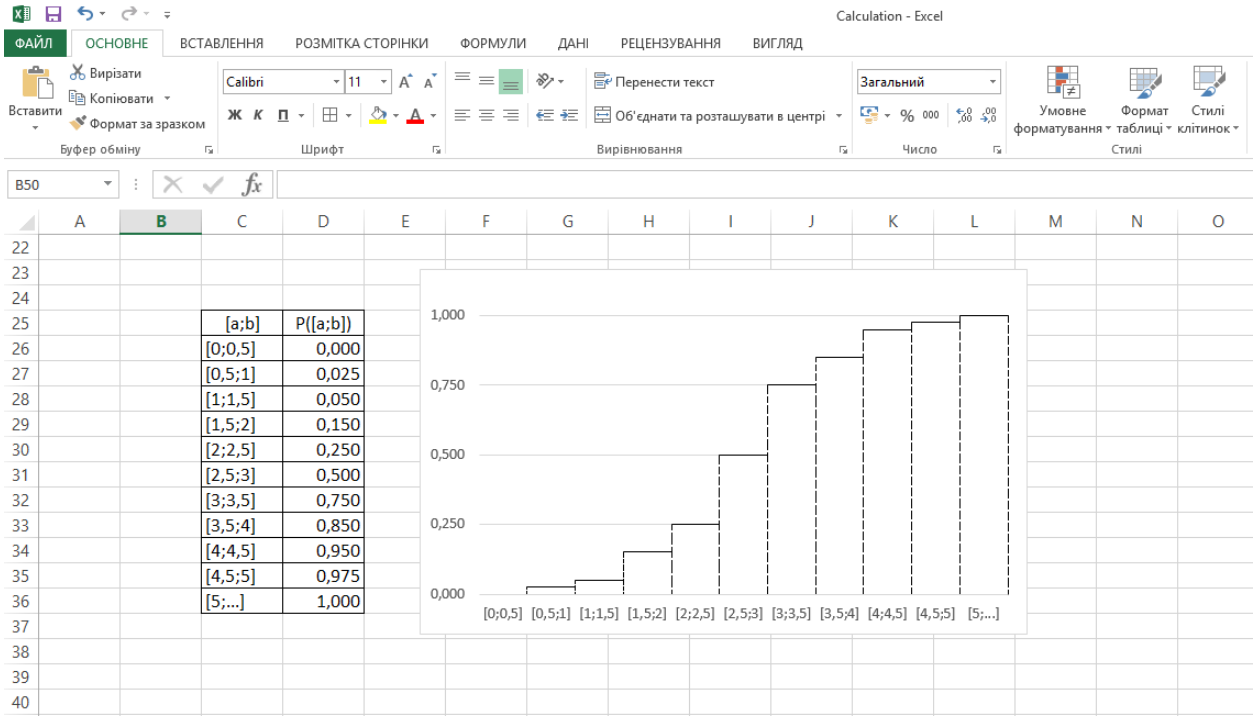


Рис. 1.6. Графік функції розподілу в MS Excel

Побудована модель є статичною. Для побудови наступних кроків потрібно обчислити значення функції розподілу ймовірностей на кожному інтервалі. В разі значного збільшення їх кількості такий процес може зайняти відносно багато часу. Основною перевагою такого методу є те, що для його використання користувачеві не потрібні знання додаткових програмних засобів чи мов програмування.

Більш доцільним в процесі розв'язування задач розглянутого типу є використання педагогічних програмних засобів, зокрема Gran1. Використовуючи вбудовані засоби динамічної зміни параметра (наприклад, p1 див. Рис. 1.7) та побудови функції розподілу ймовірностей, користувач може побудувати потрібний розподіл та, змінюючи значення параметра, отримати новий графік функції поінтервального розподілу ймовірностей на множині інтервалів (Рис. 1.8).

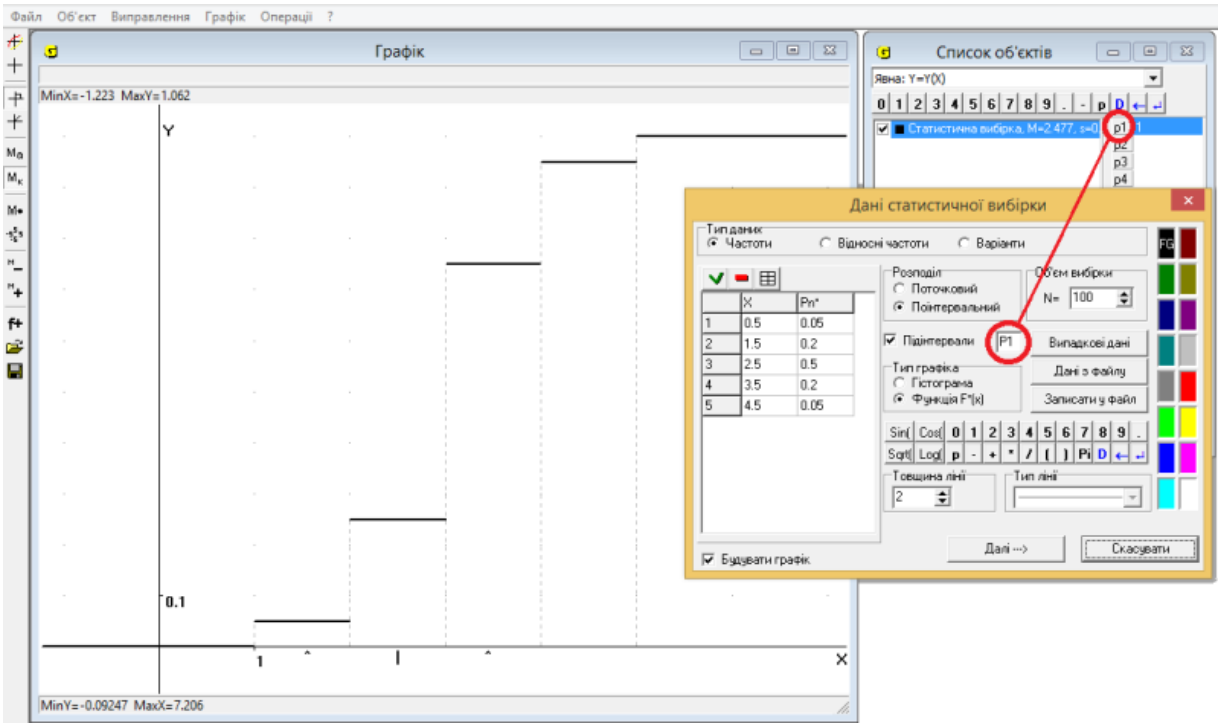


Рис. 1.7. Побудова функції розподілу ймовірностей з використанням вбудованого засобу динамічної зміни параметра в ППЗ GRAN1

Ще одним способом демонстрації такої моделі може бути використання спеціально створених програм. Перевагами таких програм є те, що для їх використання користувачеві не потрібно знати синтаксис систем

комп'ютерної математики чи використовувати комерційні програмні продукти з платною ліцензією [69].

Наприклад, розглянемо розроблену автором програму Function та продемонструємо основні принципи роботи з нею.

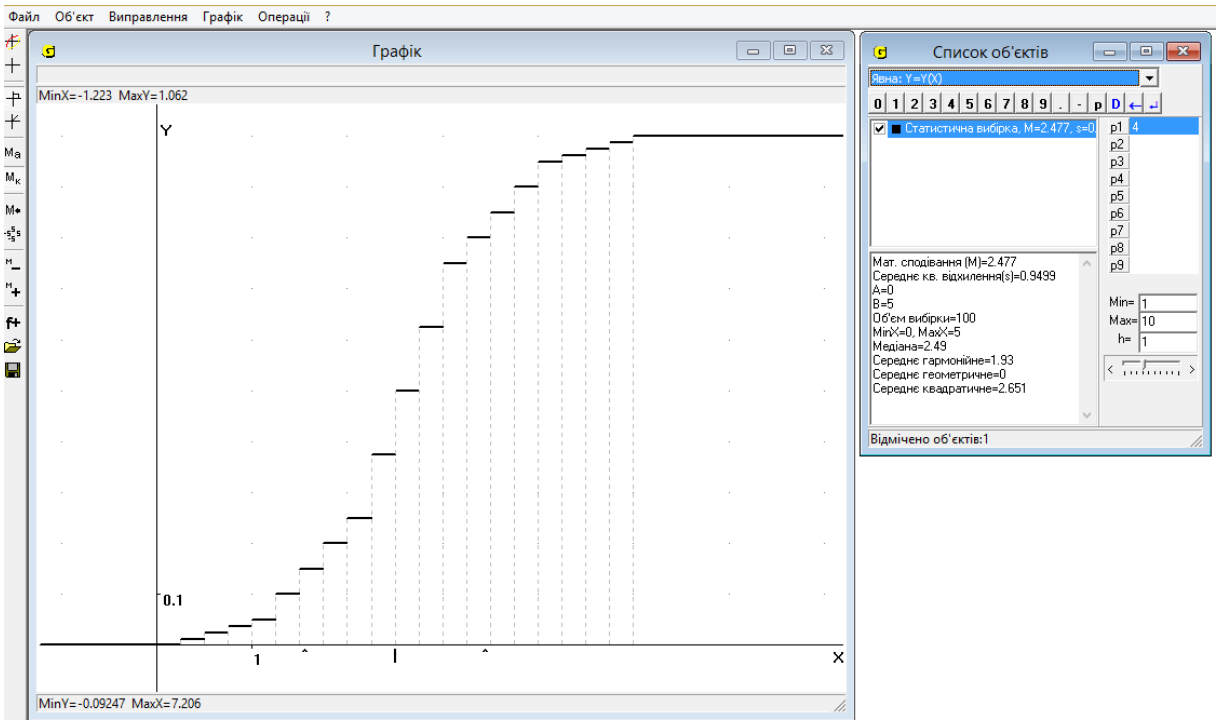


Рис. 1.8. Графік функції поінтервального розподілу ймовірностей на множині інтервалів в ППЗ GRAN1

У головному вікні програми вказуємо множину $\Omega = [a,b)$ елементарних подій (параметри a, b) та кількість інтервалів (n). В таблиці в правому нижньому кутку робочого вікна програми вказуємо значення статистичних ймовірностей попадання в інтервали $[a_{i-1}, a_i)$, такі, що $[a_{i-1}, a_i) \cap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega_X$. Натискаємо кнопку «Побудувати». В результаті отримаємо графік функції даного поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (Рис. 1.9).

Для того, щоб поділити множину $\Omega = [0,5)$ на 25 інтервалів довжиною 0.2, змінюємо значення кількості інтервалів на 25 (параметр n) і натискаємо кнопку >>>>. Продовжуємо подрібнення інтервалів до n=80. Легко бачити, що

за подальшого зменшення довжини інтервалів і за обмеженої усередненої (гіпотетичної) щільності розподілу ймовірностей графік функції поінтервального розподілу ймовірностей наближатиметься до графіка функції абсолютно неперервного розподілу узагальнених статистичних (гіпотетичних) ймовірностей (Рис. 1.10).

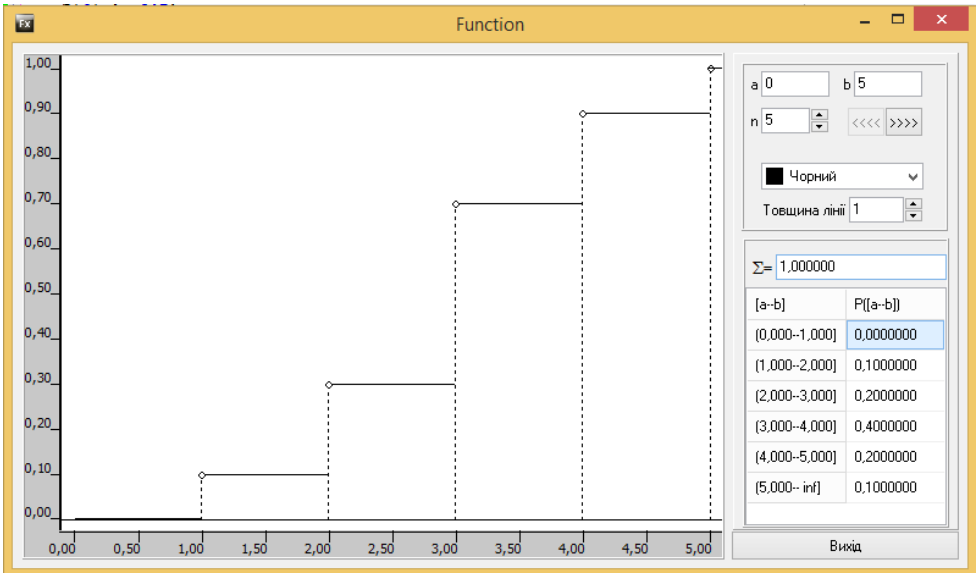


Рис. 1.9. Графік функції поінтервального розподілу ймовірностей на множині інтервалів в програмі Function

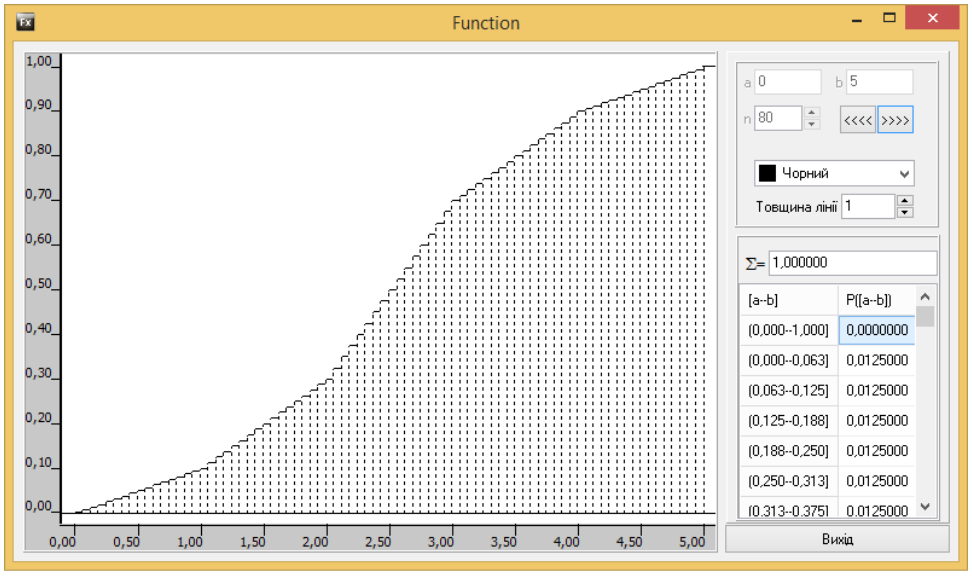


Рис. 1.10. Графік функції поінтервального розподілу ймовірностей на множині інтервалів в програмі Function

Таким чином, за допомогою швидкої побудови графіків функцій розподілу можна легко зробити висновок, що не завжди за функцією розподілу статистичних ймовірностей можна визначити тип розподілу. Це

залежить від структури подій $A \in S$ із простору подій S, на якому задана ймовірнісна міра P.

Також такі програмні засоби як GRAN1 можна використовувати для побудови графіків функцій розподілів, що значно пришвидшить процес розв'язування задач і у викладача з'явиться можливість більше часу витрачати на обговорення та аналіз отриманих результатів.

Отже, всі розглянуті програмні засоби мають приблизно однаковий набір вбудованих засобів, що надають можливість використовувати ці програми для розв'язування навчальних та дослідницьких завдань. Найбільш прийнятним програмним засобом для використання на заняттях зі стохастики в середніх навчальних закладах і в педагогічних університетах є GRAN1 (див. [69], [223]), хоч це не виключає створення авторських програмних розробок.

Наведені міркування свідчать про те, що за функцією розподілу ймовірностей встановити тип розподілу ймовірностей можна лише тоді, коли як простір елементарних подій розглядається множина всіх дійсних чисел, тобто $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$, як простір подій S розглядається σ-алгебра $\mathscr{B}(R^1)$ борелівських підмножин множини Ω. Тоді $(-\infty, x) \in S$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$, $F(x) = P((-\infty, x))$ визначена за довільних $x \in (-\infty, \infty)$, і коли щільність розподілу ймовірностей обмежена і інтегровна функція, тоді $F(x)$ буде абсолютно неперервна.

Разом з тим під час практичних застосувань стохастики розглядають найчастіше поточкові та поінтервальні розподіли статистичних ймовірностей, іноді і в безкоординатних просторах з мірою, де розгляд функції розподілу ймовірностей взагалі втрачає смисл.

Використання відповідного програмного забезпечення надає можливість полегшити сприйняття теоретичних положень курсу стохастики. До того ж діяльність, опосередкована комп'ютером, сприяє розв'язуванню проблем формування у студентів продуктивних та творчих математичних

умінь, поглибленню професійної спрямованості навчання математичних дисциплін.

Практика свідчить, що пакети програм, подібні до GRAN1, є досить зручним засобом унаочнення навчального матеріалу та виконання конкретних завдань під час вивчення курсу стохастики в школі.

Наприклад, під час вивчення узагальненого закону великих чисел для того, щоб уявити розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на подіях простору $\widetilde{S}$, за допомогою GRAN1 можна побудувати кілька інтервальних розподілів ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1..e_n}$, $n \in N$ [22].

1.4. Методика побудови ймовірнісного простору.

Дослідимо процес побудови ймовірнісного простору $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$, про який йшла мова в п. 1.2.

Розглянемо довільну фіксовану випадкову подію A з певного простору випадкових подій S. Припустимо, що на основі цього простору S утворено послідовність ймовірнісних просторів (Ω, S, P_i), $i \in N$, причому $P_i(A) \in [\alpha; \beta] \subset (0;1)$, $i \in N$.

Отже, подія A пов'язана немовби з одним і тим самим стохастичним експериментом ε, тільки ймовірнісні моделі цього експерименту можуть відрізнятися (а можуть і не відрізнятися) ймовірностями P_i, визначеними на одному і тому самому просторі подій S.

За допомогою даного експерименту ε утворимо новий експеримент $\varepsilon(a)$, де довільне випробування, пов'язане з експериментом $\varepsilon(a)$, складається із зчисленної кількості послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з експериментом ε, і фіксацією того, відбулася подія A у кожному з цих випробувань чи ні. Елементарні події, пов'язані з експериментом $\varepsilon(a)$, можуть мати вигляд нескінченних послідовностей з нулів та одиниць: $e = (e_1, e_2, ..., e_n, ...)$, де $e_i = 1$, коли подія A відбувається в i-му випробуванні, і $e_i = 0$ в іншому разі. Отже, простір $\widetilde{\Omega}$ елементарних подій, пов'язаних з експериментом $\varepsilon(a)$, може мати вигляд $\widetilde{\Omega} = \{e = (e_1, e_2, ..., e_n, ...) : e_i \in \{0;1\}, i \in N\}$.

Встановимо відповідність між елементарними подіями e простору $\widetilde{\Omega}$ і точками числового піввідрізка [0; 1) за допомогою функції $f(e) = f(e_1, e_2, ..., e_n, ...) = 0, e_1 e_2 \ldots e_n \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$, тобто значення $f(e)$ – це нескінченний двійковий дріб $\forall e = (e_1, e_2, ..., e_n, ...) \in \widetilde{\Omega}$.

Домовимося вважати, що коли подія A не відбувається в k-му випробуванні (тобто $e_k = 0$), а в усіх наступних відбувається (тобто $e_i = 1$, коли $i > k$), то це рівносильне тому, що подія A відбувається в k-му

випробуванні (тобто $e_k = 1$) і не відбувається в усіх наступних (тобто $e_i = 0$, коли $i > k$). Така домовленість обумовлена тим, що $\frac{0}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{1}{2^k} + \frac{0}{2^{k+1}} + ... + \frac{0}{2^n} + ...$. Фактично ми домовляємося замінювати кожну послідовність вигляду $(e_1, ..., e_{k-1}, 0, 1, ..., 1, ...)$ на послідовність $(e_1, ..., e_{k-1}, 1, 0, ..., 0, ...)$. Тоді за допомогою функції $f(e_1, e_2, ..., e_n, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ встановлюється взаємно однозначне відображення простору $\widetilde{\Omega}$ на піввідрізок [0; 1), а тому можна вважати, що $\widetilde{\Omega} = [0;1)$. За такою домовленістю кожне випробування, пов'язане з експериментом $\varepsilon(a)$, полягає у випадковому виборі числа x з піввідрізка [0; 1) і фіксації двійкових розрядів e_i, $i \in N$, цього числа. Значення кожного i-го розряду означає, відбулася ($e_i = 1$) чи ні ($e_i = 0$) подія A у i-му випробуванні із зчисленної кількості послідовних незалежних випробувань, пов'язаних з експериментом ε.

Природно вважати, що простір подій $\widetilde{S}$ містить кожну подію A_k, яка полягає у тому, що $e_k = 1$, тобто у k-му випробуванні, пов'язаному з експериментом ε, подія A відбувається. Зрозуміло, що $A_k = \{e = (e_1, e_2, ..., e_n, ...) \in \widetilde{\Omega} : e_k = 1\}$, $k = 1, 2, ..., n, ...$.

Подивимося уважніше на події A_k для кожного $k \in N$.

Подію A_1 – здійснення події A у першому випробуванні можна тлумачити так, що у випадково вибраної точки $e = 0, e_1 e_2 ... e_n ...$ з піввідрізка [0; 1) $e_1 = 1$, а тому $e \in [\frac{1}{2}; 1)$. Аналогічно подія $\overline{A}_1$ полягає у тому, що $e_1 = 0$, тобто $e \in [0; \frac{1}{2})$. Проміжки $\Delta_0^1 = [0; \frac{1}{2})$ і $\Delta_1^1 = [\frac{1}{2}; 1)$ позначають $\Delta_{e_1}^1$, $e_1 \in \{0; 1\}$, і називають *піввідрізками першого рангу*. Таким чином, $A_1 = \Delta_1^1$, $\overline{A}_1 = \Delta_0^1$, $\Delta_0^1 \cup \Delta_1^1 = [0;1) = \Delta_0^0$ (Рис. 1.11).

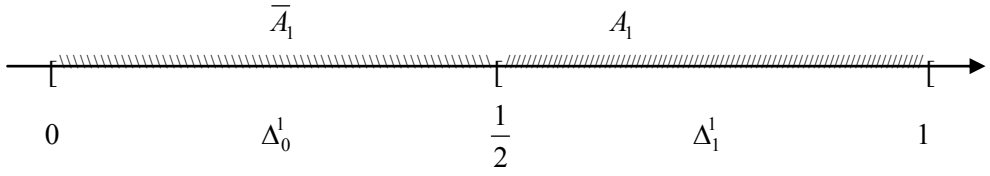


Рис. 1.11. Піввідрізки першого рангу

Кожен з двох піввідрізків $\Delta_{e_1}^1$ першого рангу своєю серединою поділяється на два *піввідрізки другого рангу* $\Delta_{e_1e_2}^1$, $e_2 \in \{0;1\}$. Тому є $4=2^2$ піввідрізки другого рангу: $\Delta_{00}^2 = [0;\frac{1}{4})$, $\Delta_{01}^2 = [\frac{1}{4};\frac{2}{4})$, $\Delta_{10}^2 = [\frac{2}{4};\frac{3}{4})$ і $\Delta_{11}^2 = [\frac{3}{4};1)$ (Рис. 1.12).

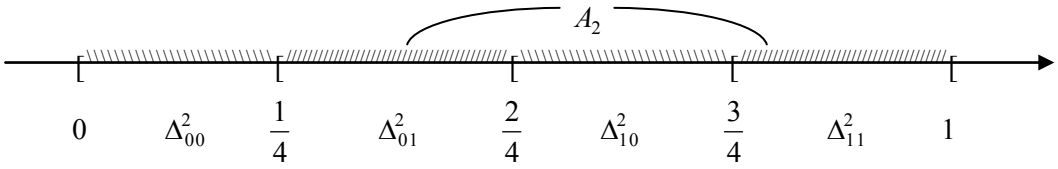


Рис. 1.12. Піввідрізки другого рангу

Таким чином, $A_2 = \Delta_{01}^2 \cup \Delta_{11}^2$, $\Delta_0^1 = \Delta_{00}^2 \cup \Delta_{01}^2$, $\Delta_1^1 = \Delta_{10}^2 \cup \Delta_{11}^2$ і $\bigcup_{e_1=0}^{1} \bigcup_{e_2=0}^{1} \Delta_{e_1e_2}^2 = \bigcup_{e_1=0}^{1} \Delta_{e_1}^1 = [0;1)$.

Припустимо, що введено поняття *піввідрізків* $\Delta_{e_1e_2...e_k}^k$ *k-го рангу*, де $e_i \in \{0;1\}$ $\forall i \in \overline{1,k}$, кількість яких дорівнює 2^k, причому подія $A_k = \bigcup_{e_1=0}^{1} ... \bigcup_{e_{k-1}=0}^{1} \Delta_{e_1...e_{k-1}1}^k$, $\Delta_{e_1...e_{k-1}}^{k-1} = \bigcup_{e_k=0}^{1} \Delta_{e_1...e_{k-1}e_k}^k = \Delta_{e_1...e_{k-1}0}^k \cup \Delta_{e_1...e_{k-1}1}^k$ і $\bigcup_{e_1=0}^{1} \bigcup_{e_2=0}^{1} ... \bigcup_{e_k=0}^{1} \Delta_{e_1e_2...e_k} = [0,1)$. Тоді середина кожного піввідрізка $\Delta_{e_1e_2...e_k}^k$ k-го рангу поділяє його на два *піввідрізки (k+1)-го рангу*: $\Delta_{e_1e_2...e_ke_{k+1}}^{k+1}$, $e_{k+1} \in \{0;1\}$. При цьому в числі $e=0,e_1e_2...e_n...$ цифра $e_{k+1}=1$ тоді й тільки тоді, коли $e \in \bigcup_{e_1=0}^{1} \bigcup_{e_2=0}^{1} ... \bigcup_{e_k=0}^{1} \Delta_{e_1e_2...e_k1}^{k+1}$, тобто $A_{k+1} = \bigcup_{e_1=0}^{1} ... \bigcup_{e_k=0}^{1} \Delta_{e_1...e_k1}^{k+1}$.

Окрім цього

$$\Delta^{k}_{e_1\ldots e_k} = \Delta^{k+1}_{e_1\ldots e_k 0} \cup \Delta^{k+1}_{e_1\ldots e_k 1} \text{ і } \bigcup_{e_1=0}^{1}\bigcup_{e_2=0}^{1}\ldots\bigcup_{e_k=0}^{1}\bigcup_{e_{k+1}=0}^{1}\Delta^{k+1}_{e_1 e_2\ldots e_k e_{k+1}} = [0;1),$$

а кількість піввідрізків (k+1)-го рангу дорівнює 2^{k+1}.

Таким чином, за принципом математичної індукції можна вважати, що для довільного натурального числа n визначено 2^n піввідрізків $\Delta^{n}_{e_1 e_2\ldots e_n}$ n-го рангу, де $e_i \in \{0;1\}\ \ \forall i \in \overline{1,n}$, причому

$$\Delta^{n}_{e_1\ldots e_n} = \Delta^{n+1}_{e_1\ldots e_n 0} \cup \Delta^{n+1}_{e_1\ldots e_n 1},\ e_i \in \{0;1\},\ i \in \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

$$\bigcup_{e_1=0}^{1}\ldots\bigcup_{e_n=0}^{1}\Delta^{n}_{e_1\ldots e_n} = [0;1)\ \ \forall n \in N, \tag{1.2}$$

$$A_n = \bigcup_{e_1=0}^{1}\ldots\bigcup_{e_{n-1}=0}^{1}\Delta^{n}_{e_1\ldots e_{n-1}1} - \text{«подія } A \text{ відбувається у } n\text{-му випробуванні»}. \tag{1.3}$$

Для n=1 умова (1.3) набуває вигляду $A_1 = \Delta^{1}_{1}$.

З наведених міркувань випливає, що до подій простору $\widetilde{S}$ доцільно віднести кожен піввідрізок $\Delta^{n}_{e_1 e_2\ldots e_n}$, де n=0, 1, 2, …, а $\Delta^{0}_{e_0} = [0;1)$. Легко бачити, що два різні піввідрізки $\Delta^{n}_{a_1 a_2\ldots a_n}$ і $\Delta^{m}_{b_1 b_2\ldots b_m}$ або не перетинаються, або один з них є частиною іншого з них. Тому сукупність цих піввідрізків породжує мінімальну алгебру, тобто мінімальне кільце з одиницею $I = [0;1)$ [70, с. 242], [91, с. 38-42]. Елементами цієї алгебри є усілякі скінченні об'єднання піввідрізків (однакових чи різних рангів), що попарно не перетинаються. Враховуючи, що кінці піввідрізків $\Delta^{n}_{e_1 e_2\ldots e_n}$, $n \in N$, – числа $\frac{i}{2^n}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, $n \in N$, утворюють множину, скрізь щільну на відрізку [0; 1], дістанемо, що кожен інтервал $(\alpha;\beta) \subset [0;1)$ є об'єднанням зчисленної кількості піввідрізків $\Delta^{n_i}_{e_1 e_2\ldots e_{n_i}}$, $i \in N$, які попарно не перетинаються. Тому

простір подій $\widetilde{S}$ повинен містити усі такі інтервали.

Враховуючи, що кожна точка x_0 є перерізом зчисленної кількості піввідрізків $\Delta^{k_i}_{e_1e_2\ldots e_{k_j}}$, дістанемо, що $\widetilde{S}$ мусить містити кожну одноелементну множину $\{x_0\}$, якщо $x_0 \in [0;1)$. Таким чином, простір подій $\widetilde{S}$ повинен містити будь-яку борелівську множину $A \subset [0;1)$, і тому $\widetilde{S}$ можна вважати σ-алгеброю борелівських підмножин піввідрізка [0; 1).

Кожне випробування експерименту $\varepsilon(a)$ є зчисленною послідовністю випробувань, пов'язаних з експериментом ε, причому результатом i-го випробування є число $e_i = 1$ – «подія A відбудеться в i-му випробуванні» (з ймовірністю $P_i(A) = p_i$), або $e_i = 0$ – «подія A не відбудеться в i-му випробуванні» (з ймовірністю $P_i(\overline{A}) = 1 - p_i$). Це означає, що

$$\widetilde{P}(A_1) = P_1(A) = \widetilde{P}(\Delta^1_1) = p_1, \text{ а } \widetilde{P}(\overline{A}_1) = P_1(\overline{A}) = \widetilde{P}(\Delta^1_0) = 1 - p_1,$$

$$\widetilde{P}(A_2) = P_2(A) = \widetilde{P}(\Delta^2_{01} \cup \Delta^2_{11}) = p_2 \text{ і } \widetilde{P}(\overline{A}_2) = P_2(\overline{A}) = \widetilde{P}(\Delta^2_{00} \cup \Delta^2_{10}) = 1 - p_2.$$

Вважаючи події A_i, $i \in N$, незалежними (відносно міри $\widetilde{P}$), маємо

$$\widetilde{P}(A_1A_2) = \widetilde{P}(\Delta^2_{11}) = \widetilde{P}(A_1)\widetilde{P}(A_2) = p_1p_2,$$

$$\widetilde{P}(\overline{A}_1A_2) = \widetilde{P}(\Delta^2_{01}) = \widetilde{P}(\overline{A}_1)\widetilde{P}(A_2) = (1-p_1)p_2,\ \widetilde{P}(A_1\overline{A}_2) = \widetilde{P}(\Delta^2_{10}) = p_1(1-p_2),$$

$$\widetilde{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \widetilde{P}(\Delta^2_{00}) = (1-p_1)(1-p_2).$$

Це означає, що

$$\widetilde{P}(\Delta^2_{e_1e_2}) = p_2\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1}), \text{ коли } e_2 = 1, \text{ і } \widetilde{P}(\Delta^2_{e_1e_2}) = (1-p_2)\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1}), \text{ коли } e_2 = 0,$$

а тому

$$\widetilde{P}\Big(\bigcup_{e_1=0}^{1}\bigcup_{e_2=0}^{1}\Delta^2_{e_1e_2}\Big) = \sum_{e_1=0}^{1}\sum_{e_2=0}^{1}\widetilde{P}(\Delta^2_{e_1e_2}) = \sum_{e_1=0}^{1}((1-p_2)\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1}) + p_2\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1})) = \sum_{e_1=0}^{1}\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1}) = 1.$$

Аналогічно переконуємося, що $\widetilde{P}(A_n) = P_n(A) = p_n$, $\widetilde{P}(\Delta^n_{e_1e_2\ldots e_n}) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \quad \forall n \in N$, де $\alpha_i = p_i$, коли $e_i = 1$, і $\alpha_i = (1-p_i)$, коли

$e_i = 0$, $i \in \overline{1,n}$, причому $\widetilde{P}(\bigcup_{e_1=0}^{1} \dots \bigcup_{e_n=0}^{1} \Delta^n_{e_1 \dots e_n}) = \sum_{e_1=0}^{1} \sum_{e_2=0}^{1} \dots \sum_{e_n=0}^{1} \widetilde{P}(\Delta^n_{e_1 \dots e_n}) = 1 \ \forall n \in N$.

Оскільки сукупність піввідрізків $\Delta^n_{e_1 \dots e_n}$, n=0, 1, 2, … , породжує алгебру підмножин піввідрізка $\Omega = [0;1) = \Delta^0_0$, кожна з яких є об'єднанням скінченної кількості таких піввідрізків, що попарно не перетинаються, то міра $\widetilde{P}$ продовжується на цю алгебру природним чином: $\widetilde{P}(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}})$, якщо піввідрізки $\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}$, $i \in \overline{1,m}$, попарно не перетинаються.

Перевіримо, чи є міра $\widetilde{P}$ σ-адитивною на введеній алгебрі. Для цього припустимо, що $\Delta^k_{e_1 \dots e_k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}$, причому піввідрізки $\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}$ попарно не перетинаються. Тоді зрозуміло, що

$\bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}} \subset \Delta^k_{e_1 \dots e_k}$ і $\widetilde{P} \bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}) \le \widetilde{P}(\Delta^k_{e_1 \dots e_k}) \ \forall m \in N$, а тому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}) \le \widetilde{P}(\Delta^k_{e_1 \dots e_k}).$$

З іншого боку $\forall \varepsilon > 0$ кожен піввідрізок $\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}$ можна доповнити зліва і справа досить малими піввідрізками з даної алгебри так, що дістанемо піввідрізок $[a_i;b_i)$, для якого $\Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}} \subset (a_i;b_i)$ і $\widetilde{P}([a_i;b_i) \setminus \Delta^{n_i}_{e_1 \dots e_{n_i}}) \le \frac{\varepsilon}{2^i}$, причому сукупність інтервалів $(a_i;b_i)$, $i \in N$, покриває замикання піввідрізка $\Delta^k_{e_1 \dots e_k}$, тобто $\Delta^k_{e_1 \dots e_k} \subset \overline{\Delta}^k_{e_1 \dots e_k} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i;b_i)$. Тоді за критеріями компактної множини [4, с. 48-51] існує скінченне підпокриття множини $\overline{\Delta}^k_{e_1 \dots e_k}$, тобто існують $[a_i;b_i)$, $i = i_j$, $j \in \overline{1,m}$, для яких

$$\Delta^k_{e_1\ldots e_k} \subset \overline{\Delta}^k_{e_1\ldots e_k} \subset \bigcup_{\substack{i=i_j \\ 1\le j\le m}} (a_i;b_i) \subset \bigcup_{\substack{i=i_j \\ 1\le j\le m}} [a_i;b_i).$$

При цьому

$$\widetilde{P}(\Delta^k_{e_1\ldots e_k}) \le \sum_{\substack{i=i_j \\ 1\le j\le m}} \widetilde{P}([a_i;b_i)) = \sum_{\substack{i=i_j \\ 1\le j\le m}} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) + \sum_{\substack{i=i_j \\ 1\le j\le m}} \widetilde{P}([a_{i_j};b_{i_j}) \setminus \Delta^{n_{i_j}}_{e_1\ldots e_{n_{i_j}}}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{i_m} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) + \varepsilon.$$

Отже, $\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) \le \widetilde{P}(\Delta^k_{e_1\ldots e_k}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) + \varepsilon$, а оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то $\widetilde{P}(\Delta^k_{e_1\ldots e_k}) = \widetilde{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}(\Delta^{n_i}_{e_1\ldots e_{n_i}})$.

Таким чином, ймовірнісна міра $\widetilde{P}$ визначена і є $\sigma-$ адитивною на сукупності усіляких піввідрізків $\Delta^n_{e_1\ldots e_n}$, $n \in N$, що породжують мінімальну алгебру. Здійснюючи лебегове продовження цієї міри [91, с. 255], дістанемо, що ймовірність $\widetilde{P}$ визначена на просторі подій $\widetilde{S}$, що є борелівською σ-алгеброю підмножин проміжку [0; 1).

Побудову ймовірнісного простору $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$ завершено.

Для того, щоб уявити розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на подіях простору $\widetilde{S}$, побудуємо за допомогою GRAN1 кілька інтервальних розподілів ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1\ldots e_n}$, $n \in N$, вважаючи, що $p_n = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})$.

Якщо n=1, то маємо Таблиця 1.5.

Таблиця 1.5

Розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1\ldots e_n}$, $n \in N$, вважаючи, що $p_n = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})$, n=1

$\Delta^1_{e_1}$	$\Delta^1_0 = [0;\frac{1}{2})$	$\Delta^1_1 = [\frac{1}{2};1)$
$\widetilde{P}(\Delta^1_{e_1})$	$1-p_1$	p_1

Цей розподіл визначає функцію $F_1(x)$

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 2(1-p_1)x, & \text{коли } 0<x\le \dfrac{1}{2},\\ 2p_1(x-1)+1, & \text{коли } \dfrac{1}{2}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1,\end{cases}$$

графік якої зображено на Рис. 1.13.

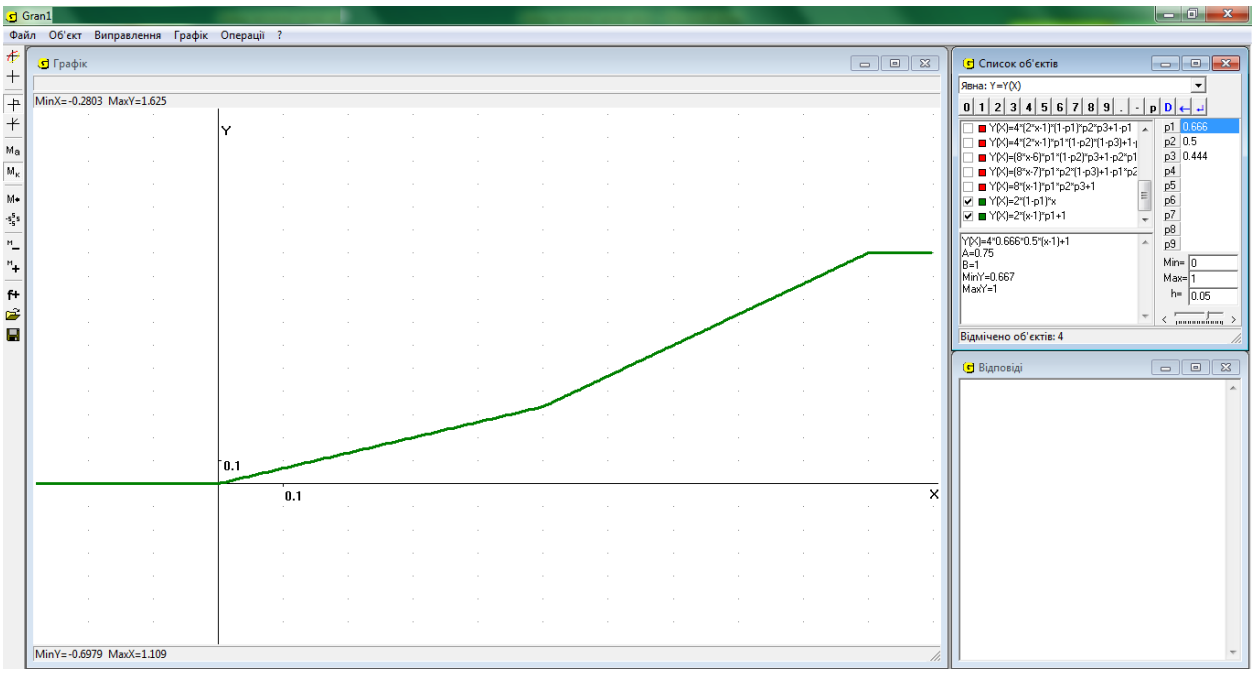


Рис. 1.13. Графік функції розподілу $F_1(x)$ ймовірностей в ППЗ GRAN1

Функція $F_1(x)$ є наближенням функції $F(x)$ розподілу ймовірності $\widetilde{P}$ на проміжку [0; 1).

Якщо *n*=2, то маємо Таблиця 1.6.

Таблиця 1.6

Розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1\dots e_n}$, $n\in N$, вважаючи, що

$$p_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \boldsymbol{n=2}$$

$\Delta^2_{e_1e_2}$	$\Delta^2_{00}=[0;\frac{1}{4})$	$\Delta^2_{01}=[\frac{1}{4};\frac{1}{2})$	$\Delta^2_{10}=[\frac{1}{2};\frac{3}{4})$	$\Delta^2_{11}=[\frac{3}{4};1)$
$\widetilde{P}(\Delta^2_{e_1e_2})$	$(1-p_1)(1-p_2)$	$(1-p_1)p_2$	$p_1(1-p_2)$	p_1p_2

Цей розподіл визначає функцію $F_2(x)$:

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 4(1-p_1)(1-p_2)x, & \text{коли } 0<x\le\frac{1}{4},\\ 2p_2(1-p_1)(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2},\\ (p_1p_2-p_1)(3-4x)+1-p_1p_2, & \text{коли } \frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4},\\ 4p_1p_2(x-1)+1, & \text{коли } \frac{3}{4}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1,\end{cases}$$

графік якої зображено на Рис. 1.14.

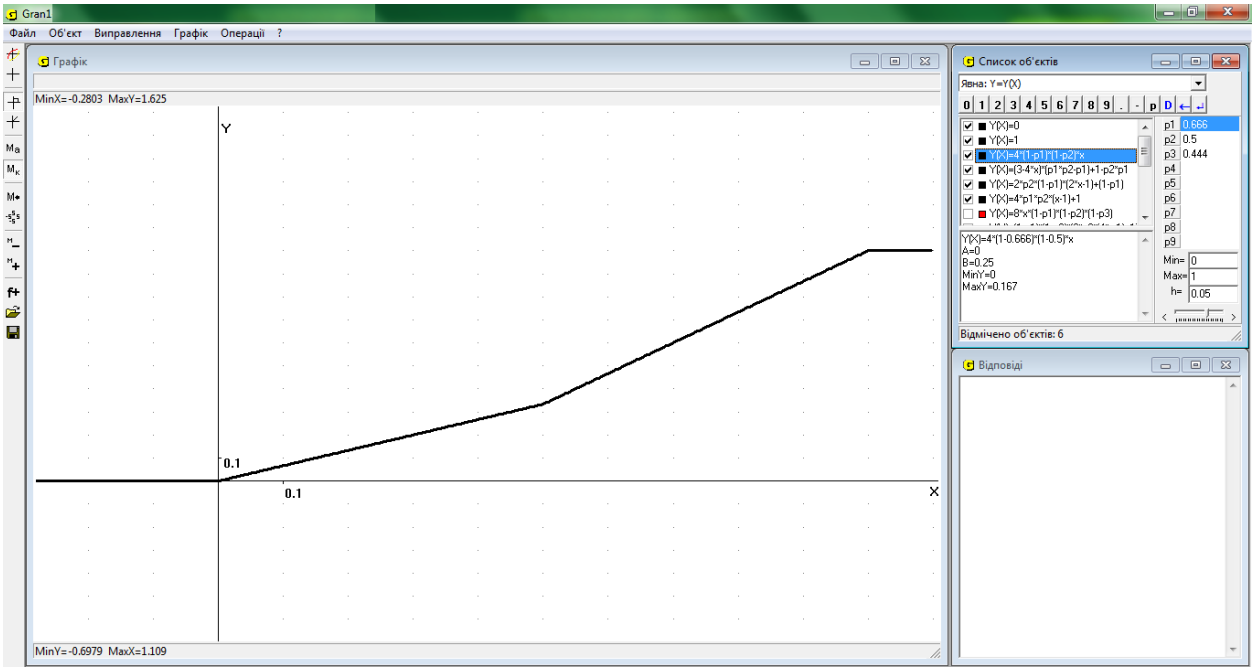


Рис. 1.14. Графік функції розподілу $F_2(x)$ ймовірностей в ППЗ GRAN1

Функція $F_2(x)$ є наближенням функції $F(x)$, точнішим ніж $F_1(x)$.

Якщо *n*=3, то маємо Таблиця 1.7.

Таблиця 1.7

Розподіл ймовірності $\widetilde{P}$ на піввідрізках $\Delta^n_{e_1\ldots e_n}$, $n\in N$, вважаючи, що

$$p_n=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}),\ \boldsymbol{n=3}$$

$\Delta^3_{e_1e_2e_3}$	$\Delta^3_{000}=[0;\frac{1}{8})$	$\Delta^3_{001}=[\frac{1}{8};\frac{1}{4})$	$\Delta^3_{010}=[\frac{1}{4};\frac{3}{8})$
$\widetilde{P}(\Delta^3_{e_1e_2e_3})$	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$

Продовження Табл. 1.7

$\Delta^3_{011}=[\frac{3}{8};\frac{1}{2})$	$\Delta^3_{100}=[\frac{1}{2};\frac{5}{8})$	$\Delta^3_{101}=[\frac{5}{8};\frac{3}{4})$
$(1-p_1)p_2p_3$	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	$p_1(1-p_2)p_3$

$\Delta^3_{110}=[\frac{3}{4};\frac{7}{8})$	$\Delta^3_{111}=[\frac{7}{8};1)$	
$p_1p_2(1-p_3)$	$p_1p_2p_3$	

Цей розподіл визначає функцію $F_3(x)$:

$$F_3(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 8(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)x, & \text{коли } 0<x\le\frac{1}{8},\\ 2(1-p_1)(1-p_2)p_3(4x-1)+(1-p_1)(1-p_2), & \text{коли } \frac{1}{8}<x\le\frac{1}{4},\\ (1-p_1)p_2(1-p_3)(8x-3)+(1-p_1)(1-p_2p_3), & \text{коли } \frac{1}{4}<x\le\frac{3}{8},\\ 4(1-p_1)p_2p_3(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \frac{3}{8}<x\le\frac{1}{2},\\ 4p_1(1-p_2)(1-p_3)(2x-1)+1-p_1, & \text{коли } \frac{1}{2}<x\le\frac{5}{8},\\ 2p_1(1-p_2)p_3(4x-3)+1-p_1p_2, & \text{коли } \frac{5}{8}<x\le\frac{3}{4},\\ p_1p_2(1-p_3)(8x-7)+1-p_1p_2p_3, & \text{коли } \frac{3}{4}<x\le\frac{7}{8},\\ 8p_1p_2p_3(x-1)+1, & \text{коли } \frac{7}{8}<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1,\end{cases}$$

графік якої зображено на Рис. 1.15.

Функція $F_3(x)$ є наближенням функції $F(x)$, точнішим ніж $F_2(x)$.

Таким чином, використання засобів сучасних ІКТ в процесі навчання стохастики дає змогу приділити більше уваги постановці задач, дослідженню розв’язків, виявленню закономірностей та причинно-наслідкових зв’язків перебігу різноманітних процесів і проявів явищ, переклавши на комп’ютер виконання технічних та нецікавих рутинних операцій.

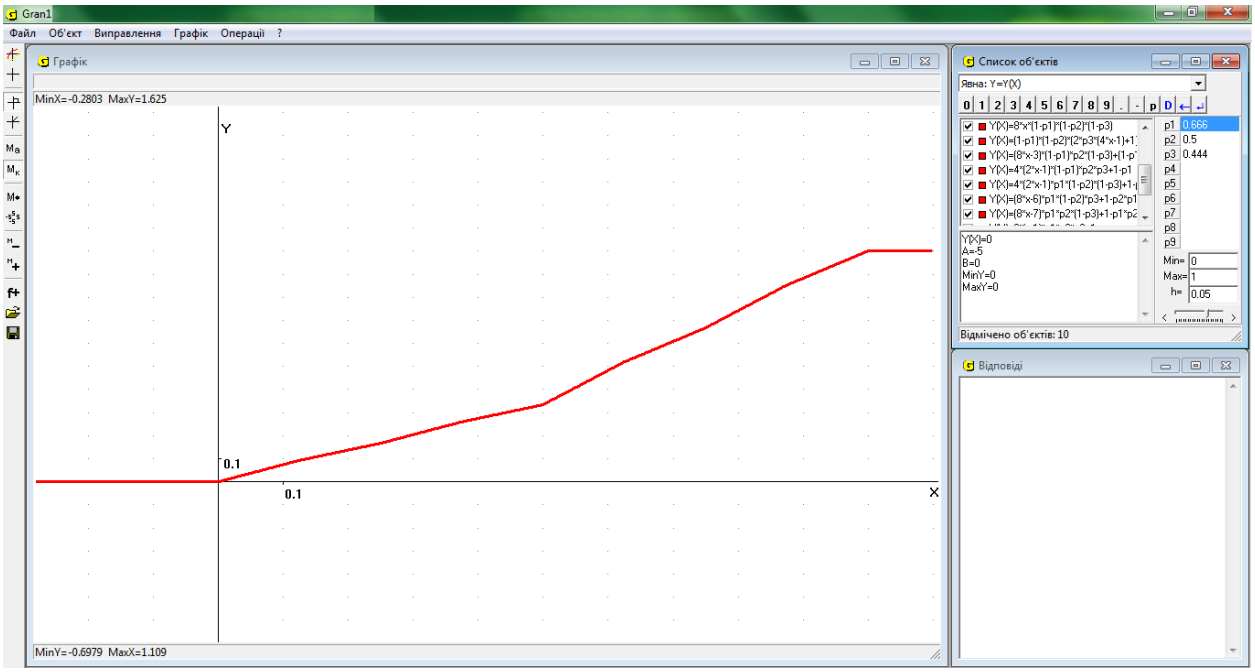


Рис. 1.15. Графік функції розподілу $F_3(x)$ ймовірностей в ППЗ GRAN1

Висновки до першого розділу

1. Загальний рівень стохастичної підготовки випускників педагогічних вищих навчальних закладів не відповідає професійним вимогам, які пред'являються до сучасного фахівця. Досягти необхідного професійного рівня можна тільки на основі комплексного підходу, цілеспрямованих і поетапних дій, науково-обгрунтованих методів управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів. Для організації ефективної підготовки майбутніх вчителів математики до роботи в умовах інформатизації навчального процесу необхідно в курсі стохастики модернізувати існуючі зміст і засоби навчання, форми організації навчального процесу, методи та дидактичні принципи, спрямовані на істотне удосконалення методичних систем навчання, зокрема за рахунок фундаметалізації змісту навчання, інформатизації навчального процесу на основі принципів педагогічно виваженого та методично вмотивованого і доцільного використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі.

2. Використання інформаційних технологій навчання стохастики майбутніх вчителів математики, орієнтоване на міждисциплінарну предметну підготовку, може внести істотний внесок у їх професійну підготовку.

3. Врахування типології програмних засобів надає можливість за рахунок відповідного функціонального наповнення технологій навчання інтенсифікувати процес навчання стохастики.

4. Так зване «класичне означення» ймовірності, виходячи з позицій теорії міри, виявляється некоректним, оскільки означення має бути застосовним для будь-якого розподілу ймовірностей, як рівномірного, так і нерівномірного. А «класичний» підхід до обчислення ймовірностей подій можна розглядати лише у випадку рівномірного розподілу ймовірностей на скінченній множині точок. Крім того, на відміну від сучасних дедуктивних підходів до вивчення курсів теорії ймовірностей шкільний курс доцільно будувати індуктивно, допомагаючи учням самим відкривати основні результати. Зокрема, основні властивості подій: 1_S-3_S та ймовірностей: 1р-3р

слід подавати не як аксіоми, що невідомо звідки і навіщо з’явилися, а як зручні і прості правила розв’язування великого класу задач. В ідеалі, ці правила учні (під керівництвом учителя) відкривають самі. А комбінаторика застосовна лише у випадку рівноймовірних наслідків випробування із скінченної множини елементарних подій, і включення її як окремого підрозділу до курсу теорії ймовірностей і математичної статистики нелогічне і некоректне і має бути вилучене разом з «класичним означенням» ймовірності.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [18, 21, 23, 20, 22].

РОЗДІЛ 2. КОНЦЕПЦІЯ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВНОЇ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

2.1. Структура та зміст курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» в умовах інформатизації освіти для майбутніх вчителів математики.

З врахуванням теоретичних засад дослідження і окреслених педагогічних умов була розроблена комп'ютерно-орієнтована методична система навчання майбутніх учителів математики математичних основ інформатики (зокрема, стохастики).

Для чіткості і зв'язності подання результатів дослідження наведемо насамперед відомі тлумачення деяких важливих понять.

Поняття методичної системи навчання запропонував А. М. Пишкало в [161]. П. І. Підкасистий [145] пропонує традиційну модель процесу навчання. Така система складається з п'яти взаємопов'язаних компонентів: цілі навчання, зміст, методи, засоби, організаційні форми. До складу методичної системи Н.В. Морзе [129] пропонує долучити і очікувані результати навчання (Рис. 2.1).

Цілі навчання – соціальне замовлення, впливи суспільного розвитку – модель бажаного результату засвоєння змісту навчання, до якого прагнуть ті, хто навчає, і ті, хто навчається [207].

Освітніми цілями можна назвати загальноосвітні, пов'язані з набуттям певного рівня методичних, психолого-педагогічних та спеціальних предметних компетентностей, необхідних для майбутньої професійної діяльності майбутнього вчителя математики. Структурними складовими таких компетентностей є відповідні знання, уміння і навички.

Традиційний підхід до визначення процесу навчання як процесу цілеспрямованого формування знань, умінь і навичок в ході відповідним чином організованої і спрямованої навчально-пізнавальної діяльності, передбачає три основні групи взаємопов'язаних цілей: 1) освітні –

формування у студентів наукових знань, спеціальних й загально-навчальних умінь і навичок; 2) розвивальні– розвиток мови, мислення, пам'яті, творчих здібностей, рухової та сенсорних систем; 3) виховні – формування світогляду, моралі, естетичної культури [196, с. 229].

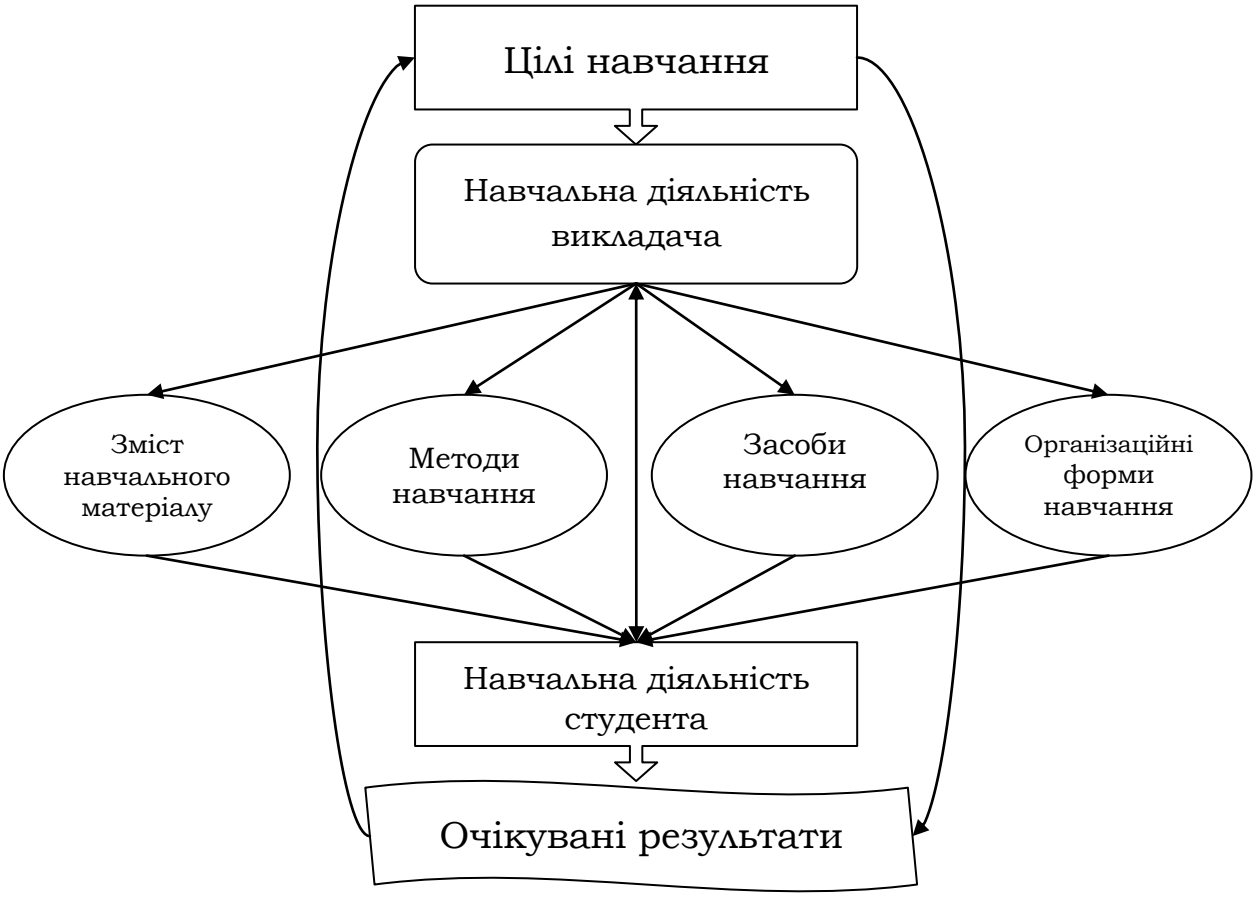


Рис. 2.1. Структура методичної системи

Зміст навчання – це структура, зміст і обсяг навчального матеріалу, оволодіння яким забезпечує тим, хто навчається, можливість здобути освіту; це система відомостей стосовно певної наукової галузі, практичних вмінь і навичок та способів діяльності, якими повинен оволодіти студент у процесі навчання (на рівні навчального предмету) [198, с. 230].

Метод (грец. *μεθοδος* – шлях, спосіб) – це система послідовних взаємопов'язаних дій викладача та студентів, через які забезпечується засвоєння змісту навчання, і спрямовані на досягнення ними освітніх цілей [125, с. 73]. Під *методом навчання* розуміють впорядковані різновиди взаємопов'язаної діяльності викладача та студентів, спрямовані на

досягнення цілей навчання [176, с. 206].

Засоби навчання – матеріальні та ідеальні об'єкти, що використовуються в освітньому процесі як носії відомостей та інструменти діяльності викладача й студентів, та застосовуються ними як окремо, так і спільно. До них належать: природне і соціальне оточення, обладнання, підручники, книги, наукові видання, довідники, енциклопедії, комп'ютери з відповідним програмним забезпеченням, комп'ютерні мережі з відповідним інформаційним забезпеченням та інформаційними ресурсами, електронні посібники та підручники, електронні словники, електронні бібліотеки і т. д. [125, с. 116]

Умовно засоби навчання поділяють на дві групи: традиційні і комп'ютерно-орієнтовані. Ці дві групи потрібно гармонійно поєднувати і взаємодоповнювати в процесі навчально-пізнавальної діяльності.

Використання правильно дібраних засобів навчання сприяє: підвищенню мотивації навчально-пізнавальної діяльності; посиленню інтересу до навчальних предметів та способів здобування знань; індивідуалізації та диференціації навчання; створенню позитивної соціально-психологічної атмосфери; активнішому залученню студентів до інтенсивної, творчої навчальної роботи, самостійного здобування знань; підвищенню ефективності самостійної роботи студентів; розширенню способів подання навчальних матеріалів та поліпшення їх унаочнення; скороченню терміну вивчення кожного розділу навчального курсу за рахунок інтенсифікації навчального процесу та активізації навчально-пізнавальної діяльності, фундаменталізації змісту навчання та підвищенню соціальної значущості його результатів [176].

Форма (від лат. *forma – зовнішній вигляд*, *оболонка*) – це спосіб існування навчального процесу, оболонка для його внутрішньої сутності, логіки і змісту [198, с. 231]. *Форма організації навчання* – цілеспрямована, чітко організована, змістово насичена й методично забезпечена система пізнавального та виховного спілкування, взаємодії, а також співпраці

викладачів та студентів [98, с. 316].

В. Г. Крисько поділяє форми організації навчання на *навчально-планові* (лекція, семінар, практичне заняття, залік, екзамен та ін.), *позапланові* (лабораторні заняття в групах, консультації, конференції, гуртки, екскурсії, заняття за поглибленими та допоміжними програмами) та *допоміжні* (групові та індивідуальні заняття, групи вирівнювання, репетиторство) [98].

Результати навчання – те, до чого приводить навчання, кінцевий продукт навчально-пізнавальної діяльності, ступінь реалізації поставленої мети.

Відповідно до навчальних планів підготовки майбутнього вчителя математики за галуззю знань 0403 «Системні науки та кібернетика», напрямом підготовки 6.040302 «Інформатика*» спеціалізація «Математика» у нормативній частині пропонується вивчення курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика». Загальні відомості про дисципліну наведено в таблиці (див. Таблиця 2.1).

Таблиця 2.1

Опис навчальної дисципліни
«Теорія ймовірностей та математична статистика»

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів – 5</td><td>Галузь знань 0403 «Системні науки та кібернетика»</td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td>Напрям підготовки 6.040302 «Інформатика»</td></tr>
<tr><td>Модулів – 3</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 5</td><td>3-й</td><td>3-й</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Індивідуальне науково-дослідне завдання: застосування інформаційних технологій в процесі навчання дисципліни</td><td rowspan="12"></td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>1-й/2-й</td><td>1-й/2-й</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість годин – 180</td><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних в т.ч. індивідуальна робота – 4,5 год. самостійної роботи студента– 6 год.</td><td rowspan="11">Освітньо-кваліфікаційний рівень: «Бакалавр»</td><td>/ 34 год.</td><td>6 год / 6 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td></td><td>4 год / 8 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>/ 34 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальна робота</td></tr>
<tr><td>/ 12 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>/ 100 год.</td><td>62 год/ 94 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання:</td></tr>
<tr><td>/ 12год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td>/ екзамен</td><td>/ екзамен</td></tr>
</table>

Матеріал курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» поділено на змістові модулі. Студенти, вивчаючи даний курс, повинні послідовно оволодіти матеріалом цих тематичних модулів.

Робоча програма курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» подана у додатку А.

2.2. Актуальність і доцільність вивчення курсу «Теорія ймовірностей та математичної статистики».

Як показав аналіз галузевого стандарту вищої освіти з напряму підготовки “0101 Педагогічна освіта”, спеціальність “6.040302 Педагогіка і методика середньої освіти. Інформатика” [136], сучасним проблемам стохастики в процесі підготовки майбутніх вчителів математики приділяється належна увага. Ця змістова лінія в освітньо-професійній програмі представлена в курсі «Теорія ймовірностей та математична статистика». Разом з тим, зміст курсу потребує деяких змін.

Розглянемо основні компоненти *комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання* курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», яка складається з традиційних компонентів і компонентів ІКТ. У першій компоненті методичної системи навчання стохастики майбутніх учителів інформатики та математики доцільно об’єднати мету, завдання і очікувані результати навчання.

2.2.1. Мета, завдання і очікувані результати навчання стохастики майбутніх вчителів математики.

Мета навчання стохастики майбутніх вчителів математики полягає у формуванні в них стохастичних компетентностей необхідних для розв’язування задач, в яких наявні елементи випадковості, для опрацювання результатів стохастичних експериментів, у тому числі і педагогічних, а також для навчання елементів стохастики в середніх навчальних закладах.

Процес навчання слід організувати так, щоб ця загальна мета стала власною метою і педагога, і студента.

Загальна мета навчання конкретизується у процесі вивчення кожної теми, на кожній лекції, практичному занятті, у процесі виконання лабораторної роботи та самостійної роботи студентів.

Завдання навчання дисципліни.

Коли мета навчання перестає бути загальною, абстрактною, формальною, а стає особистою метою майбутнього вчителя математики,

йому стають зрозумілішими і основні завдання навчання стохастики:

1) розкрити місце і значення стохастичних компетентностей в загальній і професійній культурі людини, з'ясувати психолого-педагогічні аспекти опанування цими компетентностями, взаємозв'язки стохастики з іншими навчальними предметами, зокрема математичним аналізом, аналітичною геометрією, алгеброю, з шкільним курсом математики, зокрема геометрії та алгебри і початків аналізу, а також елементів теорії ймовірностей та математичної статистики, що вивчаються в школі, показати практичну значимість стохастичних методів пізнання дійсності, їх застосовність до розв'язування найрізноманітніших гуманітарних, технічних і наукових проблем;

2) забезпечити опанування майбутніми вчителями математики не тільки поняттями і методами теорії ймовірностей, які можуть бути використані ними в майбутній професійній діяльності в процесі навчання окремих розділів шкільного курсу стохастики і відповідної їх інтерпретації, а також і методикою навчання елементів стохастики своїх майбутніх учнів, розуміння ідей використання стохастичних методів як в процесі реалізації навчального процесу, так і під час його дослідження з метою удосконалення та коригування;

3) виховати у майбутніх вчителів творчий підхід до розв'язування проблем навчання математики, зокрема з використанням засобів сучасних інформаційних технологій, сформувати знання, вміння і навички, необхідні для самостійного аналізу навчального процесу, дослідження різноманітних методичних проблем і психолого–педагогічних ситуацій, розвинути здатність і відчуття необхідності постійної самоосвіти і самовдосконалення, наукового пошуку шляхів удосконалення процесу навчання, формування загальної і математичної культури учнів, активізації їх пізнавальної діяльності, творчої активності, надання навчальній діяльності дослідницького характеру, самостійного пошуку нових знань.

4) сформувати у студентів достатні знання, необхідні для практичного

проведення навчально-виховної роботи під час навчання різних розділів шкільних курсів математики і інформатики.

Одним з головних завдань організації навчання дисципліни є поєднання теоретичного і практичного аспектів її змісту. При цьому практичний аспект пов'язаний з набуттям студентами навичок роботи з готовим проблемно-орієнтованим програмним забезпеченням, а також можливістю написання ними програм для розв'язування задач прикладного змісту однією з мов програмування високого рівня. Тому під час організації самостійної та індивідуальної робіт, для виконання допоміжних обчислень і розрахунків, а також для побудови ілюстрацій, зображень та рисунків, доцільно широко застосовувати різноманітні СКМ і ППЗ, зокрема і такі програмні продукти, як MS Excel, Mathcad, GRAN1 та ін., а також авторську програму Function для підтримки вивчення окремих тем.

Очікувані загальні результати навчання.

В результаті навчання стохастики майбутні вчителі математики повинні сформувати наступні компетентності.

Знання:

- основних стохастичних понять (зокрема, стохастичні випробування та його результат, випадкові події та операції над ними, статистична та гіпотетична ймовірності, випадкова величина розподілу статистичних ймовірностей тощо);
- розподілів ймовірностей (зокрема статистичних) та їх типи;
- важливих розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин;
- основних числових характеристик розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин;
- основні положення закону великих чисел;
- найважливіші стохастичні теореми;
- програмні засоби, які можна використовувати у процесі розв'язування стохастичних задач та у процесі навчання стохастики;

- методичної системи навчання стохастики у школі;
- шкільні підручники зі стохастики;
- науково-педагогічні джерела: журнали, підручники, посібники тощо.

Вміння:

- розв’язувати стохастичні задачі;
- аналізувати та порівнювати розподіли ймовірностей (зокрема статистичних) на множинах значень випадкових величин;
- прогнозувати результати на основі статистичних даних;
- будувати розподіли ймовірностей за їх параметрами;
- використовувати нові досягнення у педагогіці, психології, методиці у професійній діяльності;
- працювати з науково-методичною літературою;
- використовувати інтернет для самоосвіти та у професійній діяльності;
- аналізувати можливості застосування програмних засобів для розв’язування задач та навчання стохастики.

У процесі вивчення кожної теми очікувані загальні результати конкретизуються і уточнюються на кожній лекції, практичному занятті, під час виконання лабораторної роботи, у процесі самостійної роботи студентів.

В процесі навчання курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» використовуються основи знань з таких дисциплін: «Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Алгебра», «Чисельні методи математики», “Дискретна математика” (зокрема, комбінаторика), «Інформатика і програмування», «Проективна геометрія і методи зображень», «Комп’ютерне моделювання».

2.2.2. Зміст навчального матеріалу курсу.

Перелік розділів, тем та їх зміст.

Зміст курсу поділено на шість розділів.

У першому розділі **«Випадкові події. Ймовірнісні міри»** вивчаються поняття стохастичного експерименту, простору елементарних подій, поняття

випадкової події, вірогідної та неможливої події, операції над подіями, поняття простору подій, поняття статистичної ймовірності події, поняття ймовірнісної міри, поняття ймовірнісного простору, умовної статистичної ймовірності, ймовірності добутку подій, залежних і незалежних відносно ймовірнісної міри подій, події, незалежні в сукупності відносно ймовірнісної міри P, формула повної статистичної ймовірності, формула Байєса.

Студенти вчаться розв'язувати задачі на знаходження статистичної ймовірності подій, будувати ймовірнісні простори за наслідками експерименту, застосовувати формули Байєса та повної статистичної ймовірності до розв'язування задач.

У другому розділі «Розподіли статистичних ймовірностей» вивчаються повторні незалежні випробування, поняття поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок, поняття поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині точок, поняття щільності поінтервального розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, поняття функції поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок, поняття функції поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині точок, поняття дискретного, абсолютно неперервного та сингулярного розподілів ймовірностей, деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей, деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

Студенти вчаться будувати графіки функцій щільності та розподілу статистичних ймовірностей, обчислювати основні числові характеристики розподілів ймовірностей.

У третьому розділі **«Ймовірності» вивчаються** поняття ймовірнісної міри, поняття ймовірності, функції та щільності одновимірного розподілу ймовірностей та їх властивості, геометрично задані ймовірності, властивості ймовірностей, умовні ймовірності, залежні і незалежні відносно ймовірнісної

міри події, формула повної ймовірності, формула Байєса, повторні випробування, формула Бернуллі, дискретні розподіли ймовірностей, двохвимірний дискретний розподіл ймовірностей, неперервні розподіли ймовірностей, двохвимірний неперервний розподіл ймовірностей, деякі числові характеристики дискретних розподілів ймовірностей, деякі числові характеристики неперервних розподілів ймовірностей, приклади важливих розподілів ймовірностей, одновимірний нормальний розподіл ймовірностей, двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей.

Під час вивчення цього розділу формуються вміння задавати ймовірності за допомогою щільності розподілу ймовірностей і функцій розподілу ймовірностей, розв'язувати задачі з використанням формули Бернуллі, обчислювати ймовірність подій, що пов'язані з серіями повторних незалежних випробувань, будувати та аналізувати графіки двохвимірних розподілів ймовірностей.

Четвертий розділ **«Випадкові величини»** присвячений вивченню понять випадкової величини та розподілів ймовірностей. Також студенти знайомляться з такими поняттями як розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини, функції випадкового аргументу, випадкові вектори, розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора, функції кількох випадкових аргументів, математичне сподівання випадкової величини та функції від випадкових аргументів, властивості математичного сподівання, моменти випадкових величин, умовні розподіли ймовірностей та їх числові характеристики, деякі важливі функції від випадкових величин з нормальними розподілами ймовірностей, поняття про випадкові процеси.

Формуються вміння будувати розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини, випадкового вектора, обчислювати та аналізувати значення математичного сподівання випадкової величини та функції від випадкових аргументів, деякі зв'язки стохастики та геометрії, моменти випадкових величин.

У п'ятому розділі **«Закон великих чисел»** вивчаються закон великих

чисел, теорема Чебишова, теорема Бернуллі, центральна гранична теорема, асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.

Формуються вміння застосовувати теореми Чебишова, Бернуллі та центральну граничну теореми до розв’язування задач.

Шостий розділ **«Елементи математичної статистики»** присвячений основним поняттям і задачам математичної статистики. Вивчаються такі поняття як функція та щільність розподілу статистичних ймовірностей, статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірностей, надійна ймовірність, надійні інтервали, статистична перевірка гіпотез, поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло).

Під час вивчення цього розділу студенти вчаться обчислювати статистичні оцінки параметрів розподілу, обчислювати надійні інтервали, перевіряти статистичні гіпотези про відповідність статистичних даних прогнозованим, зокрема за критерієм Пірсона з використанням програми Gran1, використовувати метод Монте-Карло для імітації перебігу випадкових процесів, обчислення визначених інтегралів та обчислення ймовірностей пов’язаних з ними випадкових подій тощо.

Відповідно до цих розділів навчальний матеріал поділено на три змістові модулі. Програму курсу наведено у додатку А. Також у додатку А наведено зміст лабораторних робіт, зміст самостійної роботи студентів та зразки індивідуальних завдань.

Для того, щоб досягти цілей, які сформульовані в програмі курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика», до змісту навчального матеріалу має бути включений понятійний апарат, на основі якого формуватимуться основні поняття стохастики у майбутніх вчителів математики.

2.2.3. Методика навчання основних понять стохастики.

У багатьох посібниках з теорії ймовірностей подання матеріалу здійснюється за схемою, наведеною на рис. 2.2: розглядається координатний простір, потім вводиться міра, будуються розподіли, після цього

розглядається поняття функції розподілу і лише потім щільність.

В такому разі може скластися хибне уявлення про те, що ймовірнісні простори можна будувати тільки в координатних просторах. Однак це зовсім не так. Ймовірність як міру можна ввести і в беззкоординатному просторі з мірою, але в ньому неможливо ввести функцію розподілу ймовірностей, а разом з тим поняття щільності можна ввести досить коректно. Тому природніше будувати курс стохастики, починаючи з розподілів ймовірностей в безкоординатних просторах, розглядати в них щільність розподілу ймовірностей і після цього переходити до координатних просторів, де можна буде ввести і поняття функції $F(x) = P((-\infty, x))$ розподілу ймовірностей (Рис. 2.3).

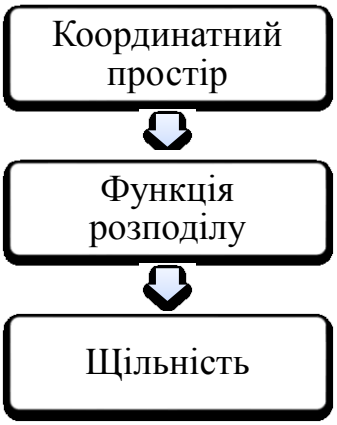


Рис. 2.2



Рис. 2.3

Не менш важливим поняттям в курсі «Теорія ймовірностей та математичної статистики» є поняття незалежності подій, означення якого в багатьох посібниках є не зовсім коректним.

Розглянемо означення подане в одному з шкільних посібників: «Дві події A і B називають незалежними, якщо здійснення чи нездійснення однієї з них не впливає на ймовірність іншої… Наприклад, нехай із кошика, у якому

лежать 5 білих і 5 чорних кульок, навмання послідовно вибирають дві кульки без повернення. Тоді події A="перша кулька – біла" і B="друга кулька – біла" є залежними». Таке означення є описовим і не відповідає принципу науковості. Наприклад, не враховано випадку, що коли статистична за певною серією випробувань ймовірність дістати білу кульку виявилась рівною 1, а чорну – 0, то події стануть незалежними.

Отже, одні і ті самі події A і B, ($A \in S$, $B \in S$), відносно однієї ймовірнісної міри P_n^*, заданої на просторі подій S, можуть бути незалежними, а відносно іншої ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$, заданої на тому самому просторі подій, можуть бути залежними.

Розглянемо приклад [24, ст. 44-45].

Приклад 2.1. Нехай проведено серію випробувань, в кожному з яких із скриньки, де було 40 кульок чотирьох кольорів – білі, червоні, зелені, жовті, 10 кульок кожного кольору, навмання вибирали одну кульку, фіксували її колір і повертали в скриньку (див. Рис. 2.4).

Кульки кожного кольору пронумеровані від 1 до 10.

Нехай простір подій S містить всі підмножини заданої сорокаелементної множини Ω, подія A – кулька білого кольору, подія B – на кульці нанесено один із номерів 5, 6, 7 (див. Рис.2.4).

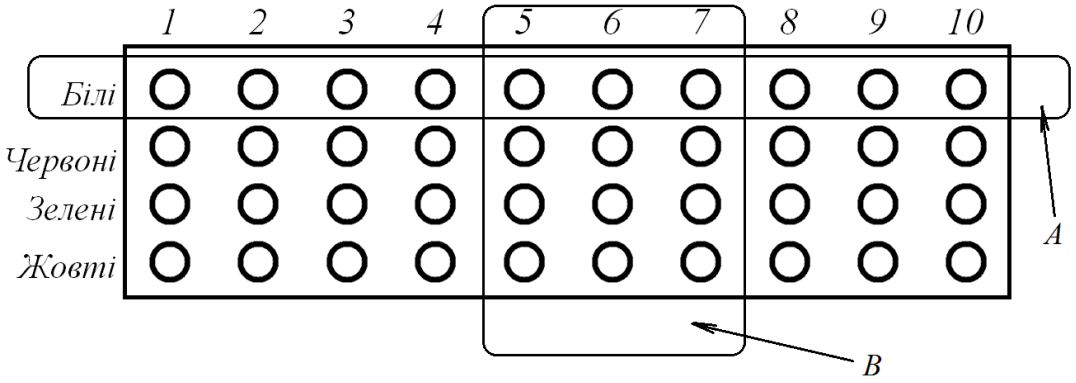


Рис. 2.4

а) Нехай в результаті проведеної серії випробувань отримали, що всі кульки вибирали однаково часто, тобто із статистичною ймовірністю 1/40

кожна. Тоді $P_n^*(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, $P_n^*(B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$, $P_n^*(AB)=\frac{3}{40}$, $P_n^*(A/B)=\frac{3/40}{12/40}=\frac{1}{4}=P_n^*(A)$,

$P_n^*(B/A)=\frac{3/40}{10/40}=\frac{3}{10}=P_n^*(B)$, $P_n^*(AB)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B/A)=P_n^*(B)\cdot P_n^*(A/B)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B)=\frac{10}{40}\cdot\frac{12}{40}=\frac{3}{40}$.

Таким чином **відносно так заданої ймовірнісної міри** $P_n^*(A)$, $A\in S$, розглядувані події A і B **незалежні**.

б) Нехай в результаті іншої серії випробувань з тими самими множиною Ω, сукупністю підмножин S і подіями A, B отримали $\widetilde{P}_n^*(AB)=0$ (в множину AB не попадали жодного разу), $\widetilde{P}_n^*(A)=1/2$ (в половині всіх випробувань серії попадали в множину A), $\widetilde{P}_n^*(B)=1/4$ (в четвертій частині всіх випробувань серії попадали в множину B), але біла кулька з номерами 5, 6, 7 не була вибрана жодного разу. Тоді, очевидно, $\widetilde{P}_n^*(AB)=0\neq\widetilde{P}_n^*(A)\cdot\widetilde{P}_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ і тому відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A\in S$, розглядувані події A і B **залежні**.

Тому говорити про незалежність чи залежність подій A і B безвідносно якоїсь ймовірнісної міри некоректно. В посібнику [24] *події A та B називаються незалежними відносно ймовірнісної міри* P_n^*, *якщо* $P_n^*(AB)=P_n^*(A)P_n^*(B)$.

Ще одним, не менш важливим поняттям, є узагальнена статистична ймовірність. Використовуючи функцію щільності $f_n^*(x)$, можна ввести нову ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta))$ для довільних проміжків $[\alpha,\beta)\subset(-\infty,+\infty)$. Сукупністю таких проміжків породжується новий простір подій $\widetilde{S}\supset S$.

Ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*$, визначену на сукупності $\widetilde{S}$ підмножин множини $\widetilde{\Omega}=(-\infty,\infty)$ за мірою P_n^*, визначеною на сукупності S, будемо називати *узагальненою статистичною ймовірністю*, для якої функція $f_n^*(x)$ також називається *щільністю розподілу узагальнених статистичних ймовірностей*.

Очевидно, що коли $A \in S$, тоді $\widetilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$.

Розглянемо **приклад 2.2**. Нехай задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$:

Таблиця 2.2

Поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$

$[a_{i-1}, a_i)$	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.006	0.061	0.242	0.382	0.242	0.061	0.006

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого поінтервального розподілу ймовірностей матиме вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.006, \text{ коли } [0,1) \cup [6,7), \\ 0.061, \text{ коли } [1,2) \cup [5,6), \\ 0.242, \text{ коли } [2,3) \cup [4,5), \\ 0.382, \text{ коли } [3,4). \end{cases}$$

Графік функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 2.5.

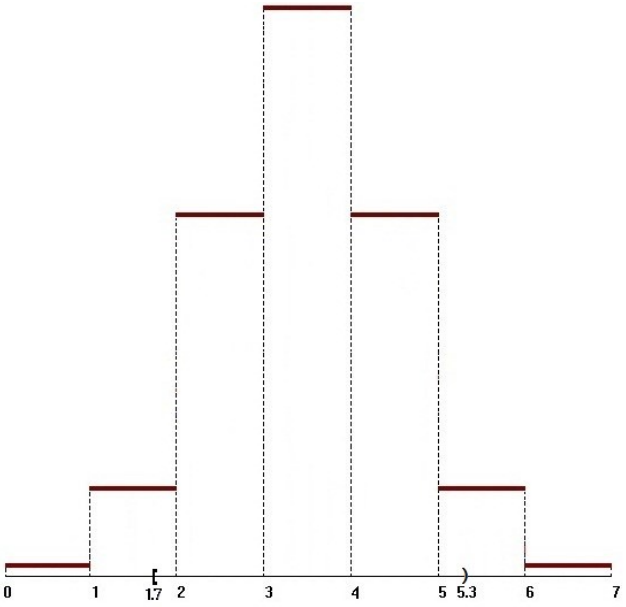


Рис. 2.5. Графік функції $f_n^*(x)$

Для того, щоб знайти узагальнену статистичну ймовірність, потрібно визначити внутрішню та зовнішню ймовірнісні міри відповідних подій.

Зі способом визначення внутрішньої та зовнішньої мір учні знайомляться ще в школі під час введення поняття площі двохвимірної плоскої фігури в курсі геометрії О.В. Погорєлова для 7-8 класів. Можна згадати цей матеріал, розглянувши приклад.

Насамперед потрібно нагадати, що обчислення площі фігури базується на наступних *основних властивостях площі*:

- *Невід'ємність.* Площа – невід'ємне число.
- *Адитивність.* Площа замкненої області, яка складається з кількох фігур, в яких немає спільних внутрішніх точок, дорівнює сумі площ цих фігур.
- *Інваріантність.* Площі рівних фігур рівні.
- *Нормованість.* Площа квадрата, побудованого на одиничному відрізку, дорівнює одиниці.

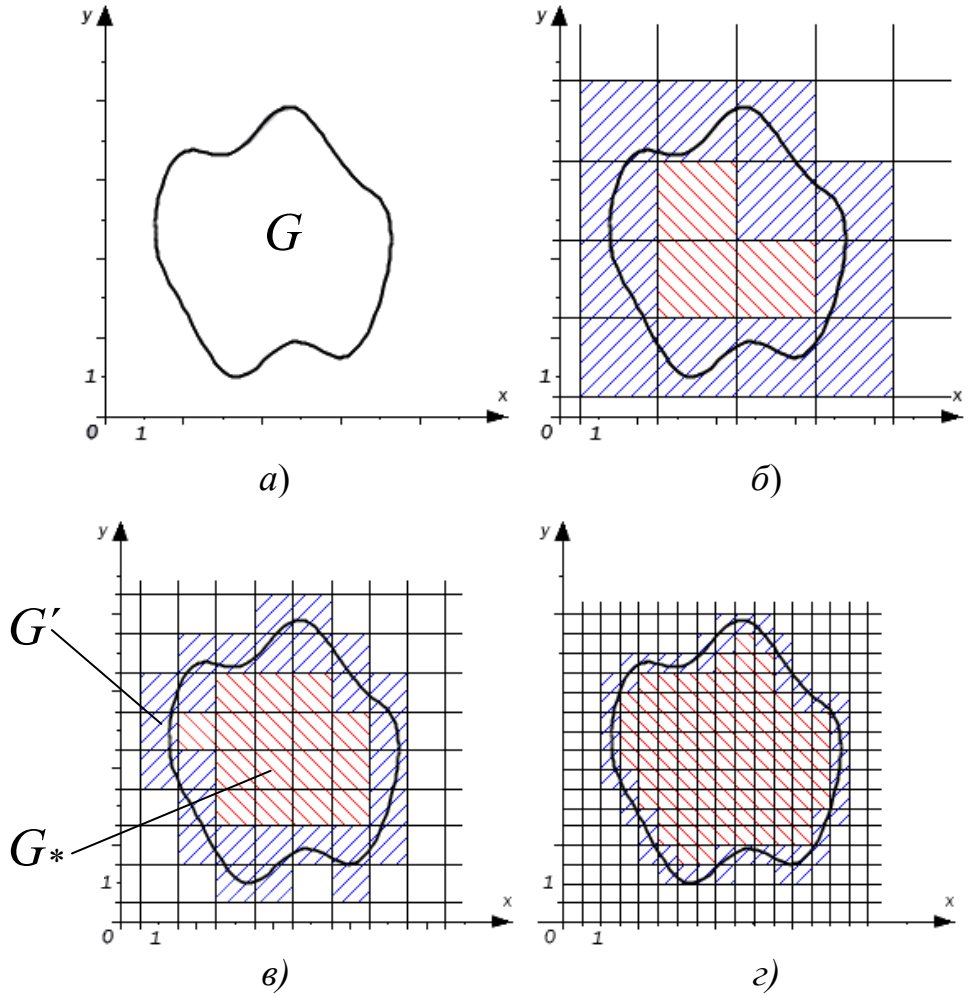


Рис. 2.6. Внутрішня та зовнішня міри фігури G

Наприклад, розглянемо деяку фігуру G в прямокутній декартовій системі координат, її площу позначимо $S(G)$. Побудуємо прямі, паралельні до осі абсцис і до осі ординат на однаковій відстані одна від одної. З цих прямих утворюється сітка, якою ділиться площина xОy на елементарні квадрати. Позначимо G_* – фігура, яка складається з елементарних квадратів, які повністю лежать всередині G (червона заштрихована область на Рис. 2.6), а G' – фігура, яка складається з елементарних квадратів, сукупнісю яких охоплюється фігура G (синя заштрихована область на Рис. 2.6), а G^* – фігура, яка є об'єднанням G_* і G' (об'єднання заштрихованих синьої та червоної областей). Позначимо площі фігур G_* та G^* відповідно $S(G_*)$ та $S(G^*)$, вони дорівнюють сумі площ елементарних квадратів, з яких вони складені.

Якщо зменшувати довжину сторони елементарного квадрата (робити сітку густішою, як це показано на Рис. 2.6), то отримаємо множину значень площ $S(G_*)$ та $S(G^*)$.

Множина $S(G_*)$ обмежена зверху, а значить, має точну верхню межу a, яку назвемо *внутрішньою площею* (*мірою*) фігури G.

Множина $S(G^*)$ обмежена знизу, тому маємо точну нижню межу A, назвемо її *зовнішньою площею* (*мірою*) фігури G.

Фігуру G, у якої зовнішня площа дорівнює внутрішній, називають *квадровною*, а число $S(G)=a=A$ *– площею* цієї *фігури* [160].

Більш детально знаходження щільності розподілу статистичної ймовірності та узагальненої статистичної ймовірності розглянуто в посібнику [74].

Повернемось до прикладу 2.2. Коли $[\alpha,\beta)=[1.7,5.3)$, тоді за попереднім, можна знайти внутрішню та зовнішню міри. Об'єднання усіх п'яти інтервалів охоплює інтервал [1.7, 5.3], а найширше об'єднання трьох [2, 3), [3, 4), [4, 5) – входить в цей інтервал. Отже, внутрішня міра – це сума мір трьох інтервалів, а зовнішня – сума мір п'яти.

$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)) =$$

$= P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) = 0.242 + 0.382 + 0.242 = 0.866$;

$m^* = \min\limits_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\cup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\cup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup$

$\cup[5,6)) = = P_n^*([1,2)) + P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) + P_n^*([5,6)) =$

$= 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988$;

$m^* - m_* = 0.988 - 0.866 = 0.122$;

$\widetilde{P}_n^*([1.7,5.3)) = m_* + \frac{3}{10}(m^* - m_*) = 0.866 + 0.037 = 0.903$.

Зауважимо, що поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей, наведений в Таблиця 2.2, міг бути отриманий за розподілом, поданим в Таблиця 2.3, чи за будь яким іншим розподілом таким, що статистичні ймовірності попадання в інтервали $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$, вказані в Таблиця 2.2, набувають вказаних в цій таблиці значень.

Задачі такого типу призначені для засвоєння понять узагальнена статистична ймовірність, щільність розподілу узагальнених статистичних ймовірностей, внутрішня та зовнішня міри та їх властивостями.

Розглянемо наступний **приклад 2.3**. Нехай задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$:

Таблиця 2.3

Поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$

$[a_{i-1},a_i)$	[0, 0.2)	[0.2, 0.4)	[0.4, 0.6)	[0.6, 0.8)	[0.8, 1.0)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.003
	[1.0, 1.2)	[1.2, 1.4)	[1.4, 1.6)	[1.6, 1.8)	[1.8, 2.0)
	0.005	0.007	0.011	0.016	0.022
	[2.0, 2.2)	[2.2, 2.4)	[2.4, 2.6)	[2.6, 2.8)	[2.8, 3.0)
	0.030	0.039	0.048	0.058	0.067
	[3.0, 3.2)	[3.2, 3.4)	[3.4, 3.6)	[3.6, 3.8)	[3.8, 4.0)
	0.073	0.078	0.080	0.078	0.073

Продовження Табл. 2.3

[4.0, 4.2)	[4.2, 4.4)	[4.4, 4.6)	[4.6, 4.8)	[4.8, 5.0)
0.067	0.058	0.048	0.039	0.030
[5.0, 5.2)	[5.2, 5.4)	[5.4, 5.6)	[5.6, 5.8)	[5.8, 6.0)
0.022	0.016	0.011	0.007	0.005
[6.0, 6.2)	[6.2, 6.4)	[6.4, 6.6)	[6.6, 6.8)	[6.8, 7.0)
0.003	0.002	0.001	0.000	0.000

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого поінтервального розподілу статистичних ймовірностей матиме вигляд

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.000, \text{ коли } x \in [0,0.2) \cup [0.2,0.4) \cup [6.6,6.8) \cup [6.8,7.0), \\ 0.005, \text{ коли } x \in [0.4,0.6) \cup [6.4,6.6), \\ 0.010, \text{ коли } x \in [0.6,0.8) \cup [6.2,6.4), \\ 0.015, \text{ коли } x \in [0.8,1.0) \cup [6.0,6.2), \\ 0.025, \text{ коли } x \in [1.0,1.2) \cup [5.8,6.0), \\ 0.035, \text{ коли } x \in [1.2,1.4) \cup [5.6,5.8), \\ 0.055, \text{ коли } x \in [1.4,1.6) \cup [5.4,5.6), \\ 0.080, \text{ коли } x \in [1.6,1.8) \cup [5.2,5.4), \\ 0.110, \text{ коли } x \in [1.8,2.0) \cup [5.0,5.2), \\ 0.150, \text{ коли } x \in [2.0,2.2) \cup [4.8,5.0), \\ 0.195, \text{ коли } x \in [2.2,2.4) \cup [4.6,4.8), \\ 0.240, \text{ коли } x \in [2.4,2.6) \cup [4.4,4.6), \\ 0.290, \text{ коли } x \in [2.6,2.8) \cup [4.2,4.4), \\ 0.335, \text{ коли } x \in [2.8,3.0) \cup [4.0,4.2), \\ 0.365, \text{ коли } x \in [3.0,3.2) \cup [3.8,4.0), \\ 0.390, \text{ коли } x \in [3.2,3.4) \cup [3.6,3.8), \\ 0.400, \text{ коли } x \in [3.4,3.6). \end{cases}$$

Графік цієї функції $f_n^*(x)$ подано на рис. 2.7.

Якщо $[\alpha,\beta) = [1.7,5.3)$, тоді

$$m_* = \max_{\cup[a_{i-1},a_i) \subset [\alpha,\beta) \cap \Omega} P_n^*(\cup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.8,2.0) \cup [2.0,2.2) \cup$$

$$\cup [2.2,2.4) \cup [2.4,2.6) \cup [2.6,2.8) \cup [2.8,3.0) \cup [3.0,3.2) \cup [3.2,3.4) \cup$$

$$\cup [3.4,3.6) \cup [3.6,3.8) \cup [3.8,4.0) \cup [4.0,4.2) \cup [4.2,4.4) \cup [4.4,4.6) \cup$$

$$\cup[4.6,4.8)\cup[4.8,5.0)\cup[5.0,5.2)) = 0.022 + 0.030 + 0.039 + 0.048 +$$

$$+ 0.058 + 0.067 + 0.073 + 0.078 + 0.080 + 0.078 + 0.073 + 0.067 +$$

$$+ 0.058 + 0.048 + 0.039 + 0.030 + 0.022 = 0.910;$$

$$m^* = \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\cup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\cup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.6,1.8)\cup[1.8,2.0)\cup$$

$$\cup[2.0,2.2)\cup[2.2,2.4)\cup[2.4,2.6)\cup[2.6,2.8)\cup[2.8,3.0)\cup[3.0,3.2)\cup$$

$$\cup[3.2,3.4)\cup[3.4,3.6)\cup[3.6,3.8)\cup[3.8,4.0)\cup[4.0,4.2)\cup[4.2,4.4)\cup$$

$$\cup[4.4,4.6)\cup[4.6,4.8)\cup[4.8,5.0)\cup[5.0,5.2)\cup[5.2,5.4)) =$$

$$= 0.016 + 0.022 + 0.030 + 0.039 + 0.048 + 0.058 + 0.067 + 0.073 +$$

$$+ 0.078 + 0.080 + 0.078 + 0.073 + 0.067 + 0.058 + 0.048 + 0.039 +$$

$$+ 0.030 + 0.022 + 0.016 = 0.942;$$

$$m^* - m_* = 0.942 - 0.910 = 0.032;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7,5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.910 + 0.016 = 0.926.$$

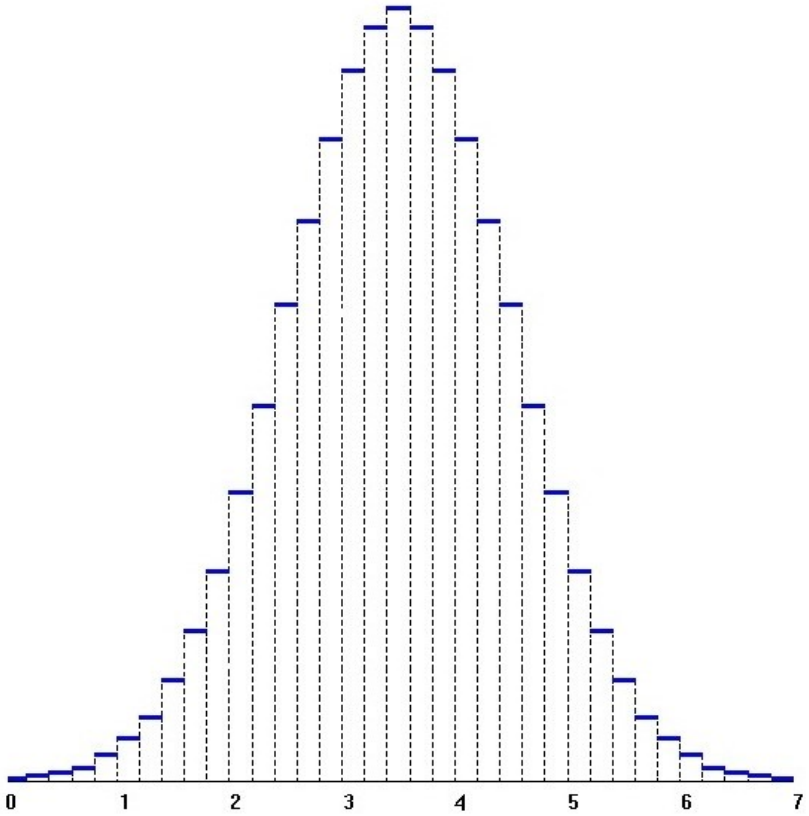


Рис. 2.7. Графік функції $f_n^*(x)$

Оскільки $m_* \le m^*$, бо $\bigcup_{i\in I_1}[a_{i-1},a_i) \subset [\alpha,\beta)\cap\Omega \subset \bigcup_{i\in I_2}[a_{i-1},a_i)$, де

$I_1 \subset \{1,2,...,k\}$, $I_2 \subset \{1,2,...,k\}$, $I_1 \subset I_2$, то $m_* \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \le \frac{1}{2}(m_* + m^*) \le m^*$.

Варто звернути увагу студентів, що із зменшенням довжини $h = a_i - a_{i-1}$ інтервалу $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, різниця $m^* - m_*$ також зменшується. Процес подрібнення інтервалів можна продовжувати за умови, що є можливість визначати ймовірнісні міри цих подрібнених інтервалів.

Разом з тим, за заданим поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей можна побудувати новий поінтервальний розподіл з укрупненими інтервалами, одержаними як об'єднання кількох заданих інтервалів, в такому разі статистичні ймовірності попадання в укрупнені інтервали одержуються як суми статистичних ймовірностей попадання в інтервали, через об'єднання яких утворено укрупнений інтервал.

Для того, щоб сформувати означення гіпотетичної ймовірнісної міри та підвести під поняття рівномірного та нерівномірного розподілів статистичних ймовірностей на множині G варто розглянути наступні приклади.

Приклад 2.4. Нехай задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$, усереднена щільність $f_n^*(x)$ якого має вигляд (як і в прикладі 2.2):

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.006, \text{ коли } [0,1) \cup [6,7), \\ 0.061, \text{ коли } [1,2) \cup [5,6), \\ 0.242, \text{ коли } [2,3) \cup [4,5), \\ 0.382, \text{ коли } [3,4). \end{cases}$$

В даному випадку на інтервалах $[\widetilde{a}_{i-1}, \widetilde{a}_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $\widetilde{a}_0 = 0$, довжиною $\widetilde{h} = \widetilde{a}_i - \widetilde{a}_{i-1} = 1$ статистичні ймовірності розподілені рівномірно за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$ довжиною $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$, тобто якщо $[a_{i-1}, a_i) \subset [\widetilde{a}_{k-1}, \widetilde{a}_k)$, $k \in \overline{1,7}$, $[a_{j-1}, a_j) \subset [\widetilde{a}_{k-1}, \widetilde{a}_k)$, $i \ne j$, то

$P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([a_{j-1}, a_j))$.

Графік розглядуваної функції подано на рис. 2.8.

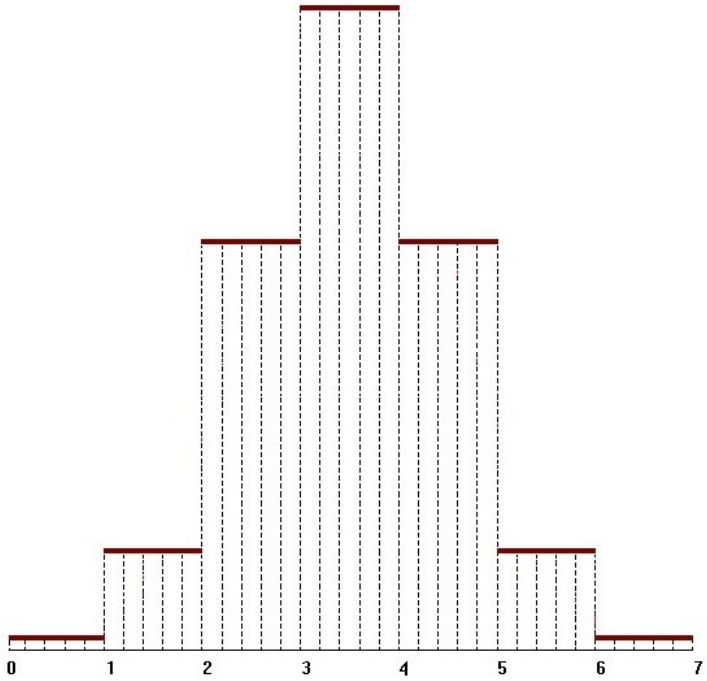


Рис. 2.8. Графік функції $f_n^*(x)$

Якщо $[\alpha, \beta) = [1.7, 5.3)$, тоді (див. Рис. 2.8)

$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \cap \Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1.8, 2.0) \bigcup [2.0, 3.0) \bigcup$$

$$\bigcup [3.0, 4.0) \bigcup [4.0, 5.0) \bigcup [5.0, 5.2)) = P_n^*([1.8, 2.0)) + P_n^*([2.0, 3.0)) +$$

$$+ P_n^*([3.0, 4.0)) + P_n^*([4.0, 5.0)) + P_n^*([5.0, 5.2)) = 0.0122 + 0.2420 +$$

$$+ 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 = 0.0244 + 0.8660 = 0.8904;$$

$$m^* = \min_{[\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \bigcup[a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1.6, 1.8) \bigcup [1.8, 2.0) \bigcup$$

$$\bigcup [2.0, 3.0) \bigcup [3.0, 4.0) \bigcup [4.0, 5.0) \bigcup [5.0, 5.2) \bigcup [5.2, 5.4)) = 0.0122 +$$

$$+ 0.0122 + 0.2420 + 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 + 0.0122 = 0.0488 +$$

$$+ 0.8660 = 0.9148;$$

$$m^* - m_* = 0.9148 - 0.8904 = 0.0244;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.8904 + 0.0122 = 0.9026.$$

Приклад 2.5. Нехай задано поінтервальний розподіл статистичних

ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ такий самий, як і в прикладі 4, і нехай $[\alpha,\beta) = [1,6)$.

Тоді

$$m_* = \max_{\cup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*(\cup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup$$

$$\cup[5,6)) = 0.061 + 0.242 + 0.0382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$

оскільки $[1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup[5,6)\subset[1,6)$,

$$m^* = \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\cup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\cup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup$$

$$\cup[5,6)) = 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$

оскільки $[1,6)\subset[1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup[5,6)$.

Таким чином $m_* = m^*$.

В розглядуваному випадку $[1,6) = [1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)\cup[5,6)\in S$,

$\widetilde{P}_n^*([1,6)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = m_* = m^* = P_n^*([1,6)) = 0.988$.

Оскільки за довільних $[\alpha,\beta)\subset(-\infty,\infty)$ $0 \le m_* \le m^* \le 1$, то коли $m_* = 1$, природно покласти $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 1$. Зокрема коли $\Omega\subset[\alpha,\beta)$, тоді буде $m_* = 1$. Якщо $[\alpha,\beta)\cap\Omega = \varnothing$, тоді природно покласти $m^* = 0$, $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 0$.

Тут варто зауважити, що ймовірнісні міри P_n^*, розглянуті в прикладах 2.2 і 2.3, є гіпотетичні, знайдені за припущенням, що щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на проміжках $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5)$, $[5,6)$, $[6,7)$, набуває сталих значень відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, і значення 0 за межами проміжка $[0,7)$, що в дійсності може виявитись не так.

Якщо статистичні ймовірності попадання у будь-які підмножини V і W множини G однакові, коли міри цих підмножин однакові, тобто $P_n^*(V) = P_n^*(W)$, коли $m(V) = m(W)$, тоді розподіл статистичних

ймовірностей на множині G називається рівномірним.

В такому разі, якщо множина G скінченна, тоді як міру $m(V)$ підмножини $V \subset G$ розглядатимемо кількість елементів у множині V, якщо ж множина G є деякий відрізок на числовій прямій чи деяка область на площині (в двохвимірному просторі) чи в просторі (тривимірному), тоді як міру $m(V)$ множини $V \subset G$ розглядатимемо відповідно суму довжин інтервалів, з яких складено V, чи суму площ областей, з яких складено V, чи суму об'ємів просторових областей, з яких складено V, і т.д.

Зокрема, розподіли статистичних ймовірностей на множинах Ω, розглянутих в прикладах 2.2-2.4, не є рівномірними.

Якщо розглянути інтервали $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$ із прикладу 2.2 і поділити кожен з них на 5 інтервалів довжиною 0.2, як це зроблено в прикладі 4, то статистичні ймовірності попадання в інтервали $[i-1, i)$ довжиною 1 залишаються такими самими, як і задані в поінтервальному розподілі із прикладу 2, і (за припущенням) усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 7)$ на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$, набуває сталих значень, відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, тобто за припущенням статистичні ймовірності на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$ розподілені рівномірно із щільністю $f_n^*(x)$, а тому (за припущенням) статистичні імовірності попадання у дві, складені із підінтервалів довжиною 0.2, підмножини $[\alpha, \beta) \subset [i-1, i)$ і $[\gamma, \delta) \subset [i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$, однакові, тобто $P_n^*([\alpha, \beta)) = P_n^*([\gamma, \delta))$, коли міри (довжини) цих множин $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$ однакові, тобто $m([\alpha, \beta)) = m([\gamma, \delta))$, або, що те саме, однакові кількості інтервалів довжиною 0.2, з яких складені множини $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$.

Однак припущення про рівномірність розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$, може виявитись таким, що не

узгоджується із реальним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{7}[i-1,i)$.

Приклад 2.6. Якщо усереднена щільність $f_n^*(x)$ задана у вигляді (Рис. 2.9):

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} [0,5), \\ 0.05, & \text{коли } x \in [0,1) \cup [4,5), \\ 0.20, & \text{коли } x \in [1,2) \cup [3,4), \\ 0.5, & \text{коли } x \in [2,3). \end{cases}$$

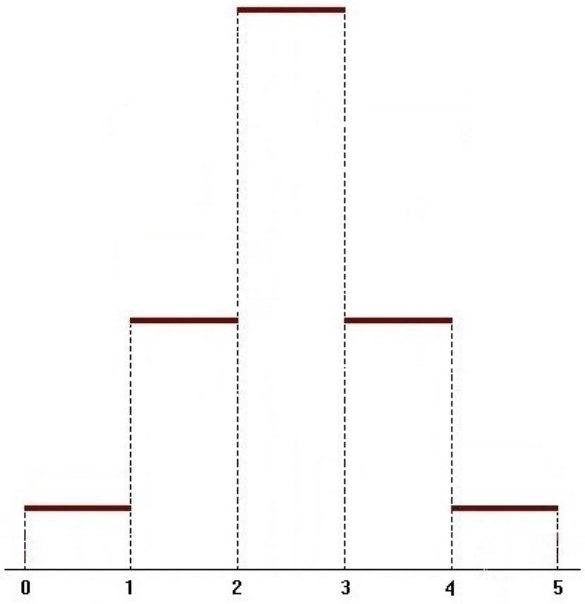


Рис. 2.9. Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$

то насправді розподіл може мати вигляд, поданий в Таблиця 2.4.

Таблиця 2.4

Поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,5)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$

$[a_{i-1}, a_i)$	[0; 0.2)	[0.2; 0.4)	[0.4; 0.6)	[0.6; 0.8)	[0.8; 1.0)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.02	0	0.03	0	0

[1; 1.2)	[1.2; 1.4)	[1.4; 1.6)	[1.6; 1.8)	[1.8; 2.0)
0.05	0.05	0	0.05	0.05

Продовження Табл. 2.4

[2; 2.2)	[2.2; 2.4)	[2.4; 2.6)	[2.6; 2.8)	[2.8; 3.0)
0.10	0.12	0.08	0.11	0.09
[3; 3.2)	[3.2; 3.4)	[3.4; 3.6)	[3.6; 3.8)	[3.8; 4.0)
0.05	0.05	0.10	0	0
[4; 4.2)	[4.2; 4.4)	[4.4; 4.6)	[4.6; 4.8)	[4.8; 5.0)
0.03	0.01	0.01	0	0

На рис. 2.10 подано графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0,5)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, довжиною 0.2, за припущенням, що на інтервалах $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, статистичні ймовірності розподілені рівномірно.

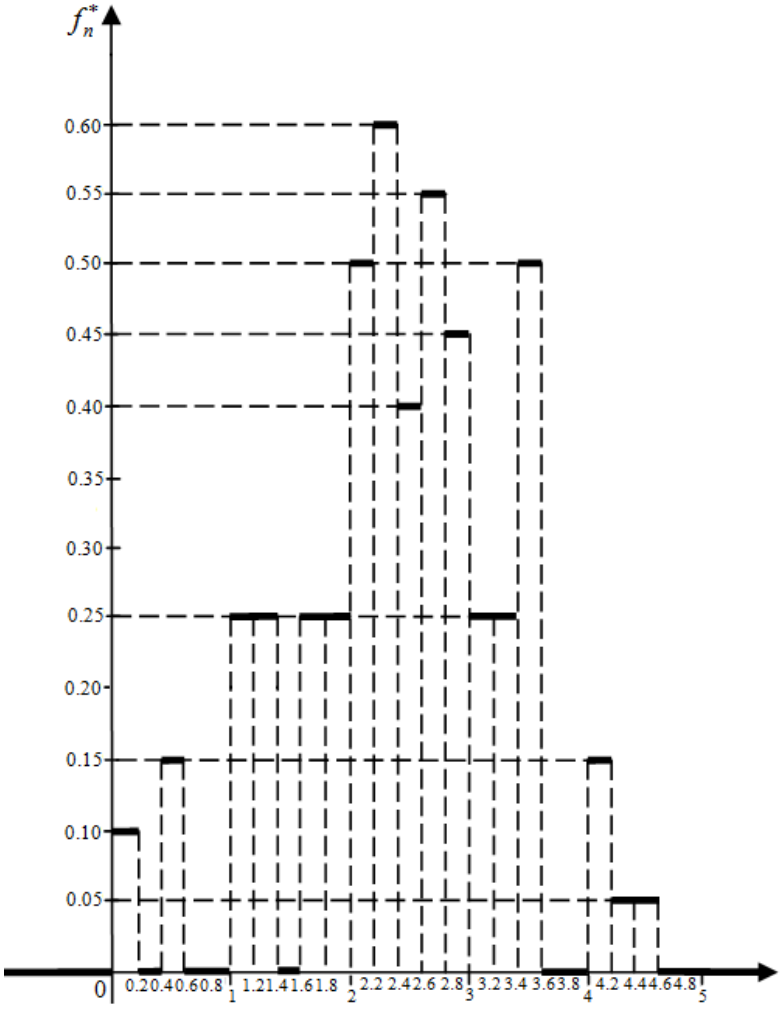


Рис. 2.10. Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0,5)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, довжиною 0.2

Можливе проблемне завдання на цьому етапі вивчення теми: навести інші варіанти розподілів статистичних ймовірностей, за якими одержується один і той самий поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$ з однією і тією самою усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в попередніх прикладах.

Зокрема, може виявитись, що поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей, розглянутий в прикладі 6, одержаний за дискретним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\{0.5;1.5;2.5;3.5;4.5\}$ із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, або на множині {0.20; 0.40; 0.60; 0.80; 1.00; 1.20; 1.40; 1.60; 1.80; 2.00; 2.20; 2.40; 2.60; 2.80; 3.00; 3.20; 3.40; 3.60; 3.80; 4.00; 4.20; 4.40; 4.60; 4.80; 5.00} із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01. Очевидно, можливі і інші розподіли статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0;5)$, за яких буде одержуватися один і той самий поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0;5)$ за інтервалами $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, з однією і тією самою усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в прикладі 6.

Подібних прикладів можна навести як завгодно багато.

Зауважимо, що якщо не збережено варіаційний ряд, в якому зафіксовано місцеположення на числовій осі всіх спостережених точок, і не проводити додаткових спостережень для уточнення розподілу статистичних ймовірностей, то за заданим поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей побудувати новий поінтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами неможливо, якщо не робити припущення про те, що усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на заданих інтервалах стала і не змінюється з подрібненням заданих інтервалів, чи якихось інших

припущень. Якщо ж таке припущення зробити, тоді новий поінтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами, як і наявний, будуть гіпотетичними, які можуть виявитись такими, що не цілком узгоджуються із спостереженими даними, зафіксованими у варіаційному ряді.

Разом з тим, за заданим поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей можна побудувати новий поінтервальний розподіл з укрупненими інтервалами, одержаними як об'єднання кількох заданих інтервалів, в такому разі статистичні ймовірності попадання в укрупнені інтервали одержуються як суми статистичних ймовірностей попадання в інтервали, через об'єднання яких утворено укрупнений інтервал.

Під час вивчення функції розподілу статистичних ймовірностей важливу роль відіграють задачі на дослідження та побудову графіків функцій розподілу статистичних ймовірностей. Зазвичай говорять, що за функцією розподілу можна визначити тип розподілу (Рис. 2.11).

- Якщо функція розподілу кусково-стала, то маємо дискретний розподіл.
- Якщо функція розподілу неперервна, то неперервний розподіл.

Але виявляється таким чином тип розподілу можна визначати лише тоді, коли простір елементарних подій $\Omega = R^1$, простір подій S – борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}(R^1)$ підмножин множини R^1.

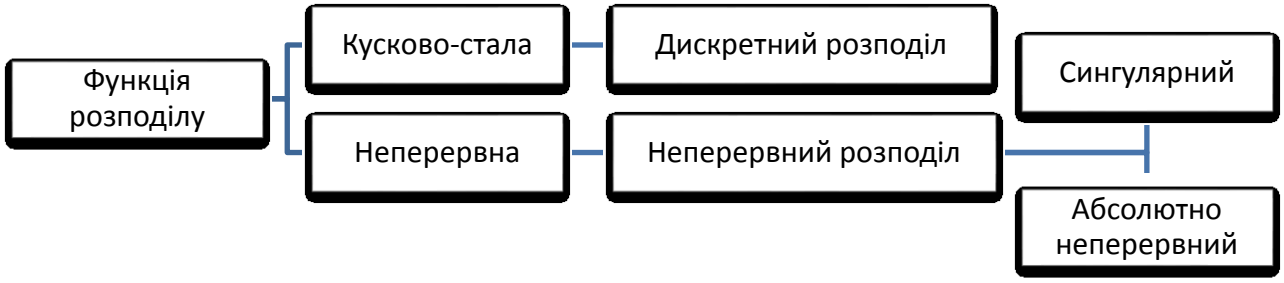


Рис. 2.11

На практиці часто Ω – скінченна множина виду $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ або нескінченна обмежена виду $\Omega = [a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, як простір подій S розглядають сукупність підмножин множини Ω виду $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} H_i$,

$I \subset \{1,2,...,k\}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega\}$. Такий простір подій називають породженим поділом множини Ω на підмножини H_i, $I \in \{1,2,...,k\}$, такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$. В такому разі розподіл ймовірностей задають, вказавши ймовірнісну міру $P(H_i)$ для кожного $H_i \in S$, $i \in \overline{1,k}$. Тоді для довільного $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$ буде $P(A) = P(\bigcup_{i \in I} H_i) = \sum_{i \in I} P(H_i)$, $I \subset \{1,2,...,k\}$.

Отже, таким чином задано ймовірнісний простір (Ω, S, P).

Зауважимо, що оскільки порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь якої непорожньої множини (див. [26], [74], [24]), то не виключено, що може бути $I = \varnothing$.

Оскільки функція $F(x)$ розподілу ймовірностей на $R^1 = (-\infty, \infty)$ визначається як ймовірнісна міра множини $(-\infty, x)$, а в розглянутому способі побудови ймовірнісного простору (Ω, S, P) множина $(-\infty, x)$ не належить до сукупності S підмножин множини Ω, на якій задано ймовірнісну міру $P(A)$, $A \in S$, то за так заданого ймовірнісного простору неможливо визначити ймовірнісну міру множини $(-\infty, x)$.

Тому розглянемо інший ймовірнісний простір $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P})$, де $\widetilde{\Omega} = R^1 = (-\infty, \infty)$, $\widetilde{S} = \mathcal{B}(R^1)$ – σ-алгебра борелівських підмножин множини R^1, зокрема $(-\infty, x) \in \widetilde{S}$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$. Як ймовірнісну міру множини $\widetilde{A} \in \widetilde{S}$ покладемо $\widetilde{P}(\widetilde{A}) = \max_{\bigcup A \subset \widetilde{A},\, A \in S} P(\bigcup A)$, продовжуючи в такий спосіб міру $P(A)$, $A \in S$, із простору подій S на простір подій $\widetilde{S}$. В такому разі говорять, що міра $\widetilde{P}(\widetilde{A})$, $\widetilde{A} \in \widetilde{S}$, є продовженням міри $P(A)$, $A \in S$, із S на $\widetilde{S}$. Зауважимо, що $S \subset \widetilde{S}$ і $\widetilde{P}(A) = P(A)$, коли $A \in S$. Тоді можна визначити

функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей на множині $\widetilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, поклавши $F(x) = \widetilde{P}((-\infty, x)) = \; = \max_{\bigcup A \subset (-\infty, x),\, A \in S} P(\bigcup A)$, $(-\infty, x) \in \widetilde{S}$, $A \in S$, $\bigcup A \in S$ [26], [74], [24].

Приклад 2.7. Нехай на множині $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ задано поточковий розподіл статистичних ймовірностей через ряд розподілу

x_i	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $x_i = i$, $i \in \overline{1,5}$, тобто всеможливі підмножини множини $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Покладемо $\widetilde{\Omega} = R^1$, $\widetilde{S} = \mathcal{B}(R^1)$, для $A \in \widetilde{S}$, $\widetilde{P}(A) = P(A \bigcap \Omega) = \sum_{x_i \in A \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\})$.

Тоді для даного розподілу статистичних ймовірностей буде:

1) $F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна із непорожніх підмножин $\bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \neq \varnothing$, множини Ω не є підмножиною множини $(-\infty, 1)$;

2) коли буде $1 < x \le 2$, тоді до множини $(-\infty, x)$ буде входити підмножина $\{1\}$ множини Ω, і тому

$$F_n^*(x) = P_n^*(\{1\}) = 0.05, \text{ коли } 1 < x \le 2;$$

3) коли x буде змінюватись в межах від 2 до 3 включно, тобто буде $2 < x \le 3$, тоді до множини $(-\infty, x)$ будуть входити підмножини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, які є елементами сукупності S, тобто подіями, і об'єднання яких $\{1\} \cup \{2\} \cup \{1,2\}$ буде множиною, що входить до сукупності S, тобто подією, і крім того буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, коли $x \in (2,3]$. Тому

$$F_n^*(x) = P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A\right) = P_n^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{1,2\}) = P_n^*(\{1,2\}) = P_n^*(\{1\}) + P_n^*(\{2\}) = 0.25,$$

коли $2 < x \le 3$, тобто $F_n^*(x) = 0.25$, коли $2 < x \le 3$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

4) $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3 < x \le 4$;

5) $F_n^*(x) = 0.95$, коли $4 < x \le 5$;

6) $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5 < x$.

Остаточно одержуємо

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік такої функції $F_n^*(x)$ для заданого дискретного (поточкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ подано на рис. 2.12.

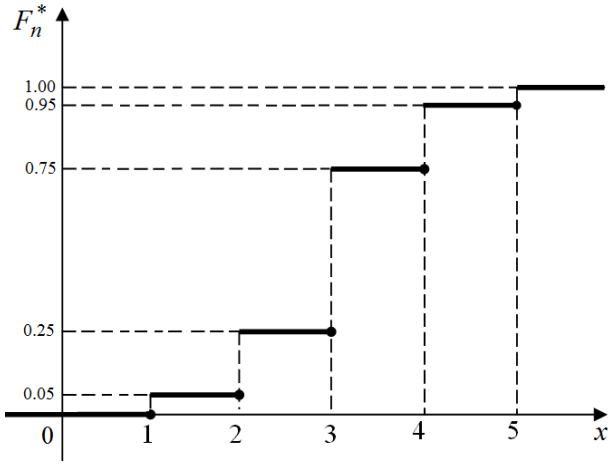


Рис. 2.12. Графік функції $F_n^*(x)$ для дискретного розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$

Підкреслимо, що в даному прикладі множини вигляду $(-\infty, x)$ не є подіями, бо таких множин немає в сукупності S підмножин розглядуваної множини Ω, тобто в просторі подій, до якого разом з порожньою множиною

$\varnothing$ віднесено підмножини $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, множини Ω, а тому записи вигляду $F_n^*(x)=P_n^*((-\infty,x))$ в розглядуваному випадку некоректні, якщо не ввести новий простір подій, до якого входитимуть множини виду $(-\infty,x)$ за довільних $x\in R^1$. Разом з тим, якщо ввести простір подій $\widetilde{S}\supset S$, як це було зроблено в розглядуваному прикладі, і продовжити міру P із простору S на простір $\widetilde{S}$, поклавши для $A\in\widetilde{S}$ $\widetilde{P}(A)=\max\limits_{\bigcup\{x_i\}\subset(-\infty,x)} P(\bigcup\{x_i\})$, тоді всі наведені міркування будуть цілком коректними.

Приклад 2.8. Нехай на множині $\Omega=[0,5)$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей

$[a_{i-1},a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, тобто $A=\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\in S$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$.

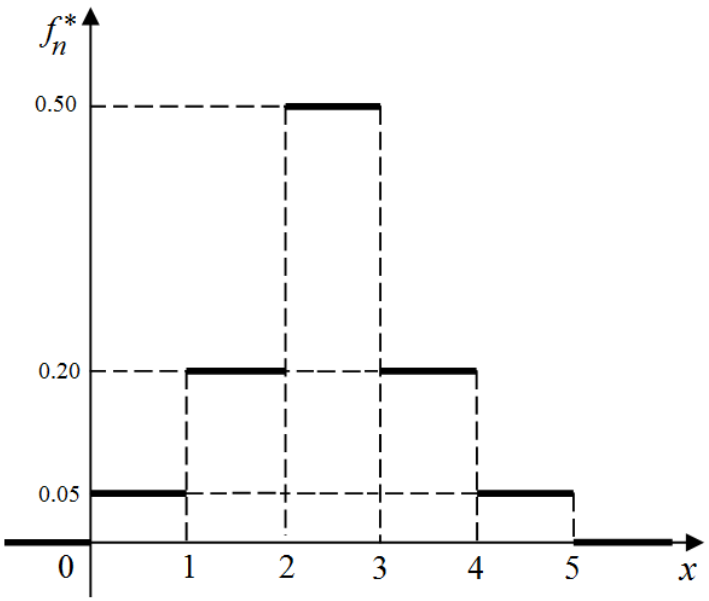


Рис. 2.13. Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1,i)$, $i\in\overline{1,5}$, на множині

$$\Omega=[0,5)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)\cup[3,4)\cup[4,5)$$

Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1,i)$, $i \in \overline{1,5}$, на множині $\Omega = [0,5) = [0,1) \cup [1,2) \cup [2,3) \cup [3,4) \cup [4,5)$ зображено на рис. 2.13.

Тоді для даного інтервального розподілу статистичних ймовірностей будемо мати: $F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна з підмножин $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \neq \varnothing$, не є підмножиною множини $(-\infty, x)$ при $x \le 1$. Коли ж x буде в межах від 1 до 2 включно, тобто $x \in (1,2]$, тоді інтервал $[0,1)$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, і тому для $x \in (1,2]$ буде

$$F_n^*(x) = P_n^*([0,1)) = \int_0^1 f_n^*(x)dx = 0.05, \text{ коли } x \in (1,2].$$

Коли x буде в межах від 2 до 3 включно, тобто $x \in (2,3]$, тоді сума подій $[0,1) \in S$, $[1,2) \in S$, $[0,1) \cup [1,2) \in S$, тобто $[0,1) \cup [1,2) \cup ([0,1) \cup [1,2)) \in S$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, $x \in (2,3]$, тому

$$F_n^*(x) = P_n^*([0,1) \cup [1,2) \cup ([0,1) \cup [1,2))) = P_n^*([0,1) \cup [1,2)) = P_n^*([0,1)) + P_n^*([1,2)) =$$

$$= \int_0^1 f_n^*(x)dx + \int_1^2 f_n^*(x)dx = 0.05 + 0.20 = 0.25, \text{ коли } x \in (2,3].$$

Міркуючи аналогічно, знайдемо $F_n^*(x) = 0.75$, коли $x \in (3;4]$; $F_n^*(x) = 0.95$, коли $x \in (4;5]$; $F_n^*(x) = 1.00$, коли $x \in (5;+\infty)$.

Таким чином

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Вигляд графіка так визначені функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на нескінченні неперервній обмеженій множині

$\Omega = [0,5)$, розглядуваного в прикладі 8, буде такий самий, як і вигляд графіка функції $F_n^*(x)$ поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, розглянутого в прикладі 2.7 (Рис. 2.12). Однаковий вигляд мають і подання самих функцій $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей в обох розглядуваних в прикладах 2.7 і 2.8 випадках.

Тому у випадках розглянутого способу побудови простору подій *S*, коли як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, підмножин (можливо одноточкових) H_i, $i \in \overline{1,k}$, скінченної множини $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $(k \le m)$, чи підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, нескінченної множини $\Omega = [a,b)$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \ne j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, за виглядом опису функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей неможливо визначити, розглядається дискретний поточковий розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, чи поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині $\Omega = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, $[a_{i-1}, a_i) \bigcap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \ne j$.

На основі розглянутих прикладів та прикладів, показаних в [21], стає очевидним, що не завжди за функцією розподілу ймовірностей можна визначити тип розподілу, якщо $\Omega \ne R^1$, а як простір подій розглядається сукупність підмножин множини Ω, відмінна від $\mathcal{B}(R^1)$.

Ще одним не менш важливим поняттям в курсі «Теорія ймовірностей та математична статистика» є поняття випадкової величини.

Оскільки «кожен викладач вищого педагогічного навчального закладу повинен усвідомити, що він навчає свого предмету не просто студентів, а

майбутніх вчителів» [117, с. 29], на етапі формування поняття випадкової величини можна розглядати деякі шкільні приклади прикладного змісту, які студенти в майбутньому зможуть використати на гурткових, факультативних заняттях тощо. Такі приклади наведені в [20].

Оскільки як випадкова величина розглядається S/S_X-вимірна функція, то розподіл ймовірностей потрібно розглядати на множині значень випадкової величини.

Разом з тим слід підкреслити, що сукупність S_X- сукупність підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$ може бути визначена неоднозначно, тому її слід задавати наперед.

Приклад 2.9. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, яка є S/S_X-вимірною, де S_X – деяка сукупність підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$, що задовольняє вимоги 1_s-3_s.

Якщо побудовано ймовірнісний простір $(\Omega_X, S_X, P^*_{nX})$*, який генерується* S/S_X*-випадковою величиною* X *за ймовірнісним простором* (Ω, S, P^*_n) *та сукупністю* S_X *підмножин множини* Ω_X*, що задовольняє вимоги* 1_s-3_s*, і тим самим для будь-якого* $G \in S_X$ *визначена ймовірнісна міра* $P^*_{nX}(G)$*, тоді говорять, що задано розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині* Ω_X *значень* S/S_X*-випадкової величини* X.

У випадку дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, цей розподіл можна описати за допомогою ряду розподілу статистичних ймовірностей.

Зауважимо, що у випадку, коли $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, де $x_1 < x_2 < ... < x_k$, скінченна множина, але число k дуже велике, наприклад $k = 10^{1000000}$, а $P^*_{nX}(\{x_i\}) = P^*_n(X^{-1}(\{x_i\}))$ виявляються практично рівними між собою, то на практиці доцільно покласти $\Omega_X = [x_1, x_k + \varepsilon)$ і поділити Ω_X на деяку практично прийнятну кількість m підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,m}$, $a_0 = x_1$,

$a_m = x_k + \varepsilon$, побудувати нову сукупність $\widetilde{S}_X$ підмножин множини Ω_X, породжену поділом множини Ω_X на підмножини H_i, $i \in \overline{1,m}$, і наближено вважати, що на множині значень $S / \widetilde{S}_X$-випадкової величини X задано поінтервальний розподіл узагальнених статистичних ймовірностей $P_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,m}$, причому $P_n^*(H_i)$ рівні між собою за всіх $i \in \overline{1,m}$.

І нарешті найважливішою зміною при побудові курсі «Теорія ймовірностей та математична статистика» є покладене в основу аксіоматичне означення ймовірності, введення якого здійснюється емпірично-індуктивним шляхом.

У більшості посібників наводять так зване «класичне означення» ймовірності, але виходячи з позицій теорії міри таке означення виявляється некоректним, оскільки означення має бути застосовним для будь-якого розподілу ймовірностей, як рівномірного, так і нерівномірного. А «класичний» підхід до обчислення ймовірностей подій можна розглядати лише у випадку рівномірного розподілу ймовірностей на скінченній множині точок.

Часто в посібниках можна зустріти і так зване геометричне означення ймовірності на вимірних підмножинах неперервної вимірної множини Ω. Однак, як і у випадку скінченної множини Ω, це “означення” також некоректне. Такий підхід до обчислення ймовірностей подій можна розглядати лише у випадку рівномірного розподілу ймовірностей на вимірній множині точок. Разом з тим, можна навести велику кількість прикладів нерівномірних розподілів ймовірностей, зокрема біноміальний, нормальний, показниковий і інші.

2.2.4. Навчально-методичне і програмне забезпечення курсу.

Перелік основної література наведено у додатку А.

Перелік додаткової літератури наведено у додатку А.

Навчально-методичне і програмне забезпечення курсу являє собою комп’ютерно-орієнтований навчально-методичний комплекс (КОНМК), до

якого входять:

1. Навчальні посібники та збірники задач і вправ з теорії ймовірностей та математичної статистики: «Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів.» (Жалдак М. І., Михалін Г.О., Кузьміна Н.М.) [74], «Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики: для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів» (Жалдак М. І., Михалін Г.О., Кузьміна Н.М.) [68], «Стохастика: Посібник для вчителів» (Жалдак М. І., Біляй І.М.) [26], «Початки стохастики. Факультативний курс для учнів старшої школи» (Жалдак М. І., Михалін Г.О., Біляй І.М.) [24];
2. Навчально-методичні матеріали з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» (в друкованому та електронному вигляді);
3. Тестові завдання для початкової діагностики знань;
4. Завдання для самостійного виконання;
5. Контрольні і тестові завдання для поточного контролю;
6. Завдання для підсумкового контролю;
7. Математичний пакет MathCad;
8. Табличний процесор MS Excel;
9. Спеціалізовані програми Gran1, Gran-2D, Gran-3D;
10. Авторська програма Function;
11. Посилання на математичні електронні бібліотеки;
12. Посилання на Internet-ресурси з теорії ймовірностей і математичної статистики.

Весь комп’ютерно-орієнтований навчально-методичний комплекс дисципліни “Теорія ймовірностей і математична статистика” доступний всім студентам, які вивчають дисципліну в поточному семестрі та викладачам.

Зокрема, усі посібники розміщені на сайті кафедри та доступні для копіювання за адресою http://ktoi.npu.edu.ua/uk/navchalni-posibnyky-ta-

pidruchnyky.

2.2.5. Методи і форми організації навчання стохастики.

До основних форм навчання стохастики майбутніх вчителів математики можна віднести наступні: позааудиторну (самостійна і під керівництвом викладача діяльність студентів на засадах самоосвіти, участь їх у роботі гурткових занять, лабораторних практикумів, наукових конференцій) і аудиторну (сюди відносять: лекції, практичні заняття, лабораторні роботи, домашні заняття).

До основних форм організації навчальної діяльності студентів відносять: фронтальну та індивідуальну.

До організаційних форм фронтального навчання відносять і групові форми навчання. Фронтальне навчання дає викладачеві значні можливості для управління навчальною діяльністю студентів всієї групи. В його процесі створюється у студентів психологічні передумови до навчання, стимулюється активність у навчальній діяльності. Слід зазначити, що за фронтального навчання послаблюється індивідуальний підхід до студентів, ускладнюються можливості враховувати індивідуальні особливості кожного конкретного студента, не враховуються особистісні відносини між окремими студентами.

В процесі індивідуальної роботи передбачається індивідуалізація та диференціація навчання, тоді як під час фронтальної роботи їх забезпечити практично неможливо. Даний вид роботи доцільний під час виконання вправ, розв’язування задач, в процесі формування умінь і навичок студентів у галузі стохастики. За допомогою такої роботи можна регулювати темп навчання кожного студента завдяки правильному добору диференційованих завдань, надання своєчасної допомоги з боку викладача, систематичному контролю за виконанням задач та домашніх завдань. Однак за такого способу організації навчального процесу завжди знаходяться студенти, які не беруть активної участі в навчальній роботі.

Доволі прогресивним є навчання, в якому поєднано індивідуальну та

фронтальну форми організації навчальної діяльності.

Серед фронтальних форм навчання в процесі групової роботи студентів найбільш враховуються індивідуальні особливості кожного.

Навчання стохастики багато в чому залежить від міцності заздалегідь сформованих бази знань, умінь і навичок. Правильному і швидкому їх формуванню сприяють такі види групової роботи студентів, як лабораторні та самостійні роботи, виконані під час аудиторних занять або в домашніх умовах.

Під час роботи в групах студенти зараховуються до кількох підгруп по 5-7 чоловік. В такому разі найкраще будуть працювати підгрупи з однаковою успішністю і однаковим темпом роботи.

Групова робота може успішно застосовуватися під час закріплення, повторення і вивчення нового матеріалу. Під час даної форми роботи з'являються значні можливості реалізації пізнавальних цілей, створюються для кожного студента можливості відчути себе причетним до результатів роботи команди, студент несе відповідальність за успіхи всієї групи, привчається до готовності надати допомогу іншим, до партнерства, за рахунок чого підвищується продуктивність праці студентів. Саме в груповій формі досить добре зарекомендували себе такі методики як ділова гра, «мозковий штурм», «акваріум», метод проектів, кейс-метод.

Таким чином, основними формами організації навчальної діяльності під час навчання стохастики в педагогічному університеті є позакласна і класно-урочна форми, в рамках якої найбільш успішною є групова робота.

Найчастіше в педагогічній практиці виокремлюють наступні методи навчання стохастики:

- вербальні: розповідь, бесіда;
- наочні: ілюстрації, схеми, демонстрація;
- практичні: спостереження, статистичні дослідження, статистичний експеримент, лабораторна робота, практична робота, вправи, моделювання;

- методи інтерактивного навчання: дискусія, ділова гра, «акваріум», метод проектів, кейс-метод, «мозковий штурм».

Опишемо можливі застосування деяких з наведених методів в процесі навчання математичних основ інформатики, зокрема стохастики.

Вербальні. Розповідь як метод навчання являє собою образне, емоційне подання навчального матеріалу, яке ґрунтується на фактах: коментарі процесів, подій, явищ. За рахунок поєднання усного подання матеріалу з іншими методами створюється особлива емоційна атмосфера, що сприяє активізації пізнавальної діяльності студентів, мотивує їх до плідної навчально-пізнавальної діяльності. Цей метод виявляється найбільш ефективним під час первинного ознайомлення студентів з навчальним матеріалом. Так, наприклад, під час навчання нової теми із курсу теорії ймовірностей та математичної статистики розповідь може бути використана викладачем для наведення історичних фактів, біографії вчених з метою формування мотивації для подальшого навчання предмету.

Разом з тим, розповідь під час навчання повинна мати порівняно невелику тривалість, поєднуючись при цьому з іншими методами навчання.

Наприклад, на перших заняттях теорії ймовірностей та математичної статистики можна ознайомити студентів з історією про парадокс Монті Холла [249].

«Ймовірність грає ключову роль в науці – зокрема, у точних та соціальних, в тому числі комп’ютерних науках. Багато алгоритмів пов’язані з поняттям випадковості. Для дослідження їх правильності та ефективності потрібна теорія ймовірностей. Крім того, комп’ютерні системи та конструкції, такі як управління пам’яттю, передбачення розгалужень, пакети маршрутизації і урівноваження завантажень базуються на основі ймовірнісних припущень та аналізу. Ймовірність є центральною наукою, а також суміжною, для таких дисциплін як криптографія, штучний інтелект та теорія ігор. Почнемо з більш простішого застосування: отримання призу в ігровому шоу.

9 вересня 1990 року у випуску американського журналу *Парад* (*Parade*), журналіст Мерилін Савант відповіла на лист такого змісту:

Припустимо, Ви знаходитесь на ігровому шоу, і Вас потрібно обрати одні двері з трьох. За одними – автомобіль, за іншими – коза. Ви вибираєте двері, скажімо номер 1, і ведучий, який знає, що знаходиться за обраними дверима, відкриває інші двері, скажімо, номер 3, за якими коза. Він говорить Вам: «Ви хочете, вибрати двері номер 2? Змініте свій вибір?» Чи у Ваших інтересах, змінити вибір номеру дверей?

Крейг Ф. Уітакер

Колумбія

У листі описується одна з ситуацій, з якими стикалися учасники на ігровому шоу 1970-х років «*Давайте укладемо угоду*» (*Let's Make a Deal*), організованому Монті Холлом та Керол Меріл. Мерилін відповіла, що суперник дійсно повинен змінити своє рішення. Вона пояснила, у випадку коли автомобіль стоїть за однією з двох необраних дверей (такий випадок можливий вдвічі частіше, ніж випадок, коли обрані двері правильні), учасник виграє, змінивши вибір. Але незабаром вона отримала потік листів багатьох математиків, які сказали їй, що вона помилилася. Було покладено початок тисячам дебатів та дискусій.

Після цього можна підкреслити наступне: така дисципліна як теорія ймовірностей розкриває безліч прикладів, коли звичайна інтуїція приводить до абсолютно неправильних висновків.»

Таким чином, у розповіді такого змісту поєднуються вербальний та проблемний методи, тому з'являється можливість не тільки підвищити мотивацію до вивчення предмету, а й розвивати критичне мислення.

Разом з тим, можна запропонувати студентам самостійно знайти розповіді про цікаві парадокси теорії ймовірностей, які вони підготують на перші практичні чи семінарські заняття.

Бесіда застосовується на різних етапах навчання і з різними цілями. Інколи мала кількість годин на вивчення окремої теми не дозволяє активно

використовувати бесіду через неекономні затрати навчального часу.

Наприклад, перед вивченням деяких числових характеристик поточкового та поінтервального розподілів статистичних ймовірностей в одновимірному координатному просторі, визначається рівень обізнаності студентів у навчальному матеріалі, який буде використовуватись під час навчання теми. Для цього проводиться бесіда, яка може містити наступні питання:

1. Який розподіл статистичних ймовірностей називають поточковим?
2. Як задається поточковий розподіл статистичних ймовірностей?
3. Чи кожен простір елементарних подій є дискретним?
4. Чи визначається дискретний поточковий розподіл частот через полігон відносних частот?
5. Який розподіл статистичних ймовірностей називають поінтервальним?
6. Чи можна задати через варіаційний ряд поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей?
7. Чи можна визначити статистичну ймовірність будь-якої події $A \in S$, $A \subset \Omega$, якщо відома щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей?
8. Чи залежить поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей від поділу проміжка $[a;b)$ на проміжки $[a_{i-1};a_i)$?

Однією з цілей проведення бесіди може бути перевірка результатів засвоєння навчального матеріалу та рівня підготовки до заняття.

Наочні методи навчання. Добре відомо, що більшість людей має саме візуальний тип сприйняття матеріалу. Дана обставина спонукає використовувати переваги наочних методів навчання під час подання навчального матеріалу. Застосування наочності в процесі навчання стохастики (проведення стохастичних експериментів, демонстрація схем і

плакатів відповідної тематики і т.д.) спирається на принцип когнітивної візуалізації, який був запропонований Л.В. Занковою і Н.А. Менчинською [29], згідно з яким наочність під час навчання повинна виконувати не тільки функції джерела повідомлень, основи чуттєвого сприйняття, але й, на думку М.І. Махмутова [109], бути джерелом навчальних проблем, що сприятиме природно-інтелектуальному процесу отримання нових знань.

Наприклад, покажемо приклад застосування наочностей під час вивчення теми «Випадкова величина», для кращого засвоєння та сприйняття таких понять як випадкова величина, образ та прообраз елемента, образ та прообраз множини.

Нехай задано дві множини V і W елементів деякої природи. Наприклад, V – множина кольорів, V={«білий», «синій», «жовтий», «червоний»}, а W – множина квітів, W={«гвоздика», «ромашка», «соняшник», «мак»} (див. Рис. 2.14).

Відповідністю X між множинами V і W називають деяку підмножину X множини впорядкованих пар (v, w), де $v \in V$, $w \in W$. Наприклад, біла ромашка, жовтий соняшник і т.д. Множину всіх впорядкованих пар (v, w), таких, що $v \in V$, $w \in W$, називатимемо *декартовим добутком* множин V і W, який позначають $V \times W$. В такому разі коли $(v, w) \in X$, то кажуть, що елемент $w \in W$ поставлено у відповідність елементові $v \in V$ за відповідністю X.

Множину Q тих елементів $w \in W$, що поставлені у відповідність елементові $v \in V$ за відповідністю X, називають *образом* елемента $v \in V$ за відповідністю X і пишуть $Q = X(v)$, $v \in V$, $Q = X(v) \subset W$. Цей образ $Q = X(v) \subset W$ може містити довільну кількість елементів із W, зокрема бути порожнім. Наприклад, в наведеному прикладі образом елемента «червоний» із множини V кольорів є підмножина із двох елементів «гвоздика» і «мак» із множини W, тобто X(«червоний»)={«гвоздика», «мак»}, а X(«синій»)=Ø. *Образом множини* $G \subset V$ за відповідністю X називають об'єднання образів всіх елементів множини G, тобто $X(G) = \bigcup_{v \in G} X(v)$.

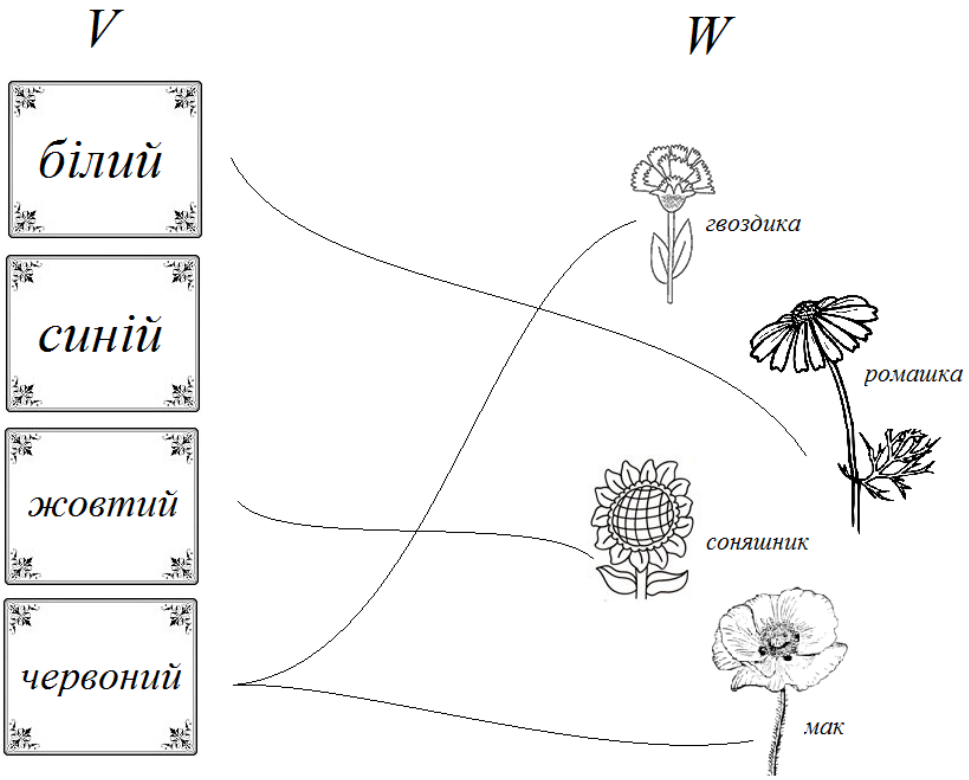


Рис. 2.14. Приклад відповідності між двома множинами V (кольорів) та W (квітів)

Прообразом елемента $w \in W$ за відповідністю X називають множину всіх елементів із V, яким поставлено у відповідність елемент $w \in W$. Таку множину елементів із V позначатимемо через $X^{-1}(w)$. Наприклад, X^{-1}(«соняшник»)= ={«жовтий»}. *Прообразом множини* $Q \subset W$ елементів із W за відповідністю X називають об'єднання прообразів всіх елементів із Q, тобто $X^{-1}(Q) = \bigcup_{w \in Q} X^{-1}(w)$.

Така, здавалося б, проста візуалізація полегшує сприйняття нового матеріалу, вивчення нових понять та їх властивостей.

У цій же темі розглядаються задачі та приклади різного типу, які доцільно супроводжувати подібними схемами. Розглянемо два приклади та схеми до них.

Приклад 2.10. Учневі пропонується випадковим чином обрати приз. Для цього він повинен навмання обрати одну із 12 кульок, серед яких 2

зелених, 3 червоних, 3 білих, 2 блакитних, 1 жовта, 1 чорна.

Серед призів є годинник, калькулятор, м’яч, книга, блокнот, олівці, альбом (Рис. 2.15).

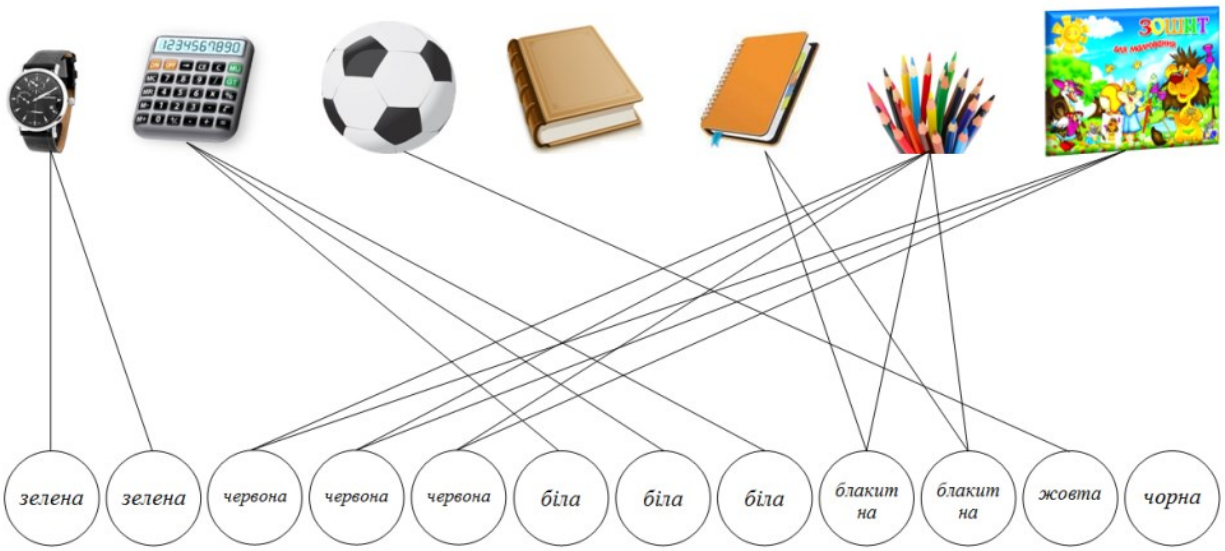


Рис. 2.15

Якщо учень вибере зелену кульку, він одержить годинник,

якщо учень вибере червону кульку, він одержить олівці і альбом,

якщо учень вибере білу кульку, він одержить калькулятор,

якщо учень вибере блакитну кульку, він одержить олівці і блокнот,

якщо учень вибере жовту кульку, він одержить м’яч,

якщо учень вибере чорну кульку, він не одержує приз.

Такі висновки студенти можуть легко зробити самостійно, користуючись зв’язками показаними на схемі.

Нехай V={зелена, червона, біла, блакитна, жовта, чорна} – множина варіантів вибрати кульку якогось із вказаних шести кольорів, W={годинник, калькулятор, м’яч, книга, блокнот, олівці, альбом} – множина призів. Тоді одержимо

X({зелена}) = {годинник}, X({червона}) = {олівці, альбом},

X({біла}) = {калькулятор}, X({блакитна}) = {блокнот, олівці},

X({жовта}) = {м’яч}, X({чорна})=$\varnothing$.

В даному випадку

X({червона})$\cap X$({блакитна})={олівці, альбом}$\cap$ {блокнот, олівці}=

$=\{\text{олівці}\}\neq\varnothing$,

перетини всіх інших пар образів елементів множини V порожні.

Прообразами елементів множини w в даному прикладі будуть:

$X^{-1}(\{\text{годинник}\})=\{\text{зелена}\}$, $X^{-1}(\{\text{калькулятор}\})=\{\text{біла}\}$,

$X^{-1}(\{\text{м'яч}\})=\{\text{жовта}\}$, $X^{-1}(\{\text{книга}\})=\varnothing$, $X^{-1}(\{\text{блокнот}\})=\{\text{блакитна}\}$,

$X^{-1}(\{\text{олівці}\})=\{\text{червона, блакитна}\}$, $X^{-1}(\{\text{альбом}\})=\{\text{червона}\}$.

Таким чином

$X^{-1}(\{\text{олівці}\})\cap X^{-1}(\{\text{блокнот}\})=\{\text{блакитна}\}$,

$X^{-1}(\{\text{олівці}\})\cap X^{-1}(\{\text{альбом }\})=\{\text{червона}\}$,

перетини всіх інших пар прообразів елементів множини W порожні.

В розглядуваному випадку відповідність X між елементами множин V та W неоднозначна. Тому X не є відображенням або функцією.

Приклад 2.11. В результаті проведення конкурсу «Цікавий факт з життя математика» переможці отримують в подарунок безкоштовний похід до одного з музеїв Києва. Учневі пропонується випадковим чином обрати собі один із чотирьох – музей однієї вулиці, аптека-музей, музей води або музей київського метрополітену. Для цього він повинен навмання вибрати одну із шести карток з літерами М, А, Р, К, О, В. Якщо учень обере літеру М або В, він одержить квиток у музей води; якщо учень вибере літеру Р або К, він одержить квиток до музею київського метрополітену; якщо учень вибере літеру А, тоді отримає квиток у музей-аптеку; якщо учень обере літеру О, тоді отримає квиток до музею однієї вулиці (Рис. 2.16).

Нехай V={М, А, Р, К, О, В} – множина варіантів вибрати одну з шести літер, W={музей однієї вулиці, аптека-музей, музей води, музей київського метрополітену} – множина квитків-призів.

Тоді одержимо:

$X(\{\text{М}\})=X(\{\text{В}\})=\{\text{музей води}\}$, $X^{-1}(\{\text{музей води}\})=\{\text{М, В}\}$,

$X(\{\text{А}\})=\{\text{аптека-музей}\}$, $X^{-1}(\{\text{аптека-музей}\})=\{\text{А}\}$,

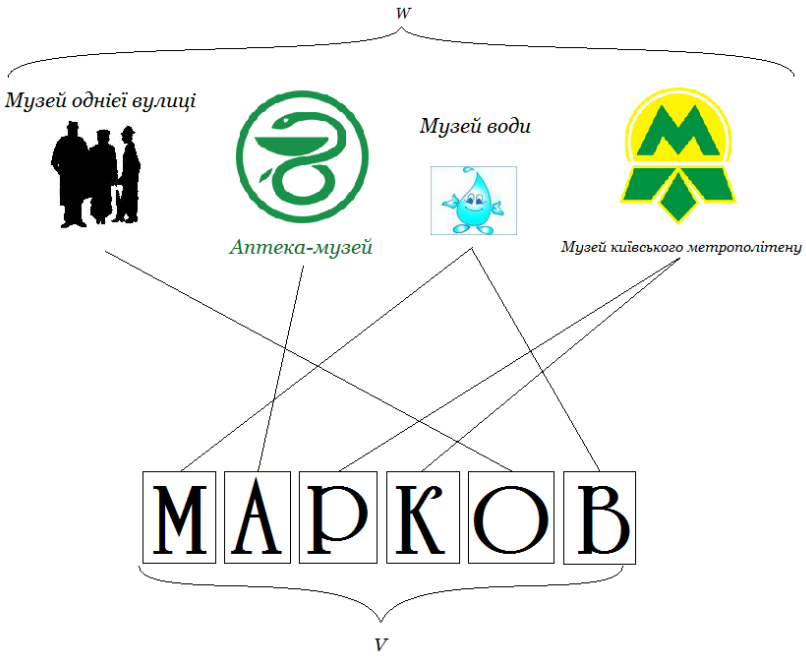


Рис. 2.16

X({Р})=X({К})={музей київського метрополітену},

X^{-1}({музей київського метрополітену})={Р, К},

X({О})={музей однієї вулиці}, X^{-1}({музей однієї вулиці})={О},

X({М, В}$\cup${А})={музей води}$\cup${аптека-музей}={музей води, аптека-музей},

X^{-1}({музей однієї вулиці, аптека-музей})=

$=X^{-1}$({музей однієї вулиці})$\cup X^{-1}$({аптека-музей})=

={О}$\cup${А}={О, А},

X^{-1}({музей води, музей київського метрополітену})=

$=X^{-1}$({музей води})$\cup X^{-1}$({музей київського метрополітену})=

={М, В}$\cup${Р, К}={М, В, Р, К},

X^{-1}({аптека-музей, музей води})$\cap X^{-1}$({музей однієї вулиці, музей води})={А, М, В}$\cap${О, М, В}={М, В}$=X^{-1}$({музей води}).

Легко перевірити, що прообрази будь яких двох різних підмножин із W, які не містять спільних елементів (не перетинаються), також не містять спільних елементів (не перетинаються).

В даному прикладі відповідність X між елементами множин V={М, А,

Р, К, О, В} та *W*={музей однієї вулиці, аптека-музей, музей води, музей київського метрополітену} однозначна, оскільки кожному елементові із множини *V* ставиться у відповідність єдиний елемент із множини *W*. Тому відповідність *X* є відображенням (функцією). Разом з тим відповідність X^{-1}, обернена до *X*, не є однозначною, оскільки в множині *W* є елементи, яким за відповідністю X^{-1} ставиться у відповідність не один, а кілька елементів:

X^{-1}({музей води})={М, В},

X^{-1}({музей київського метрополітену})={Р, К}.

Тому відповідність X^{-1} не є відображенням (функцією).

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і на множині Ω елементарних подій задано дійсну функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, за якою кожному елементові E множини Ω ставиться у відповідність деяке дійсне число $x = X(E)$. Це число $x = X(E)$ (чи відповідна точка на числовій осі) є *образом* елемента E. В такому разі може трапитись, що одне і те саме число x поставлене у відповідність кільком елементарним подіям (чи навіть нескінченній їх кількості, якщо, наприклад, задана функція набуває одного і того самого значення, тобто стала, на деякому відрізку).

Множина всіх точок (елементарних подій) $E \in \Omega$, яким поставлено у відповідність на числовій осі одну і ту саму точку *x*, є *прообразом* точки *x*. Прообраз точки *x* позначають символами $X^{-1}(x)$.

Очевидно, щоб знайти прообраз точки *x*, потрібно знайти множину всіх розв'язків рівняння $X(E) = x$.

Образом деякої множини $A \subset \Omega$ є об'єднання образів всіх елементів множини A, тобто $\bigcup_{E \in A} X(E)$, яке позначають через $X(A)$. Зокрема $X(\Omega) = \Omega_X$ – це множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$.

Прообразом деякої множини G *точок* є об'єднання прообразів всіх елементів множини G, тобто $\bigcup_{x \in G} X^{-1}(x)$, яке позначають через $X^{-1}(G)$.

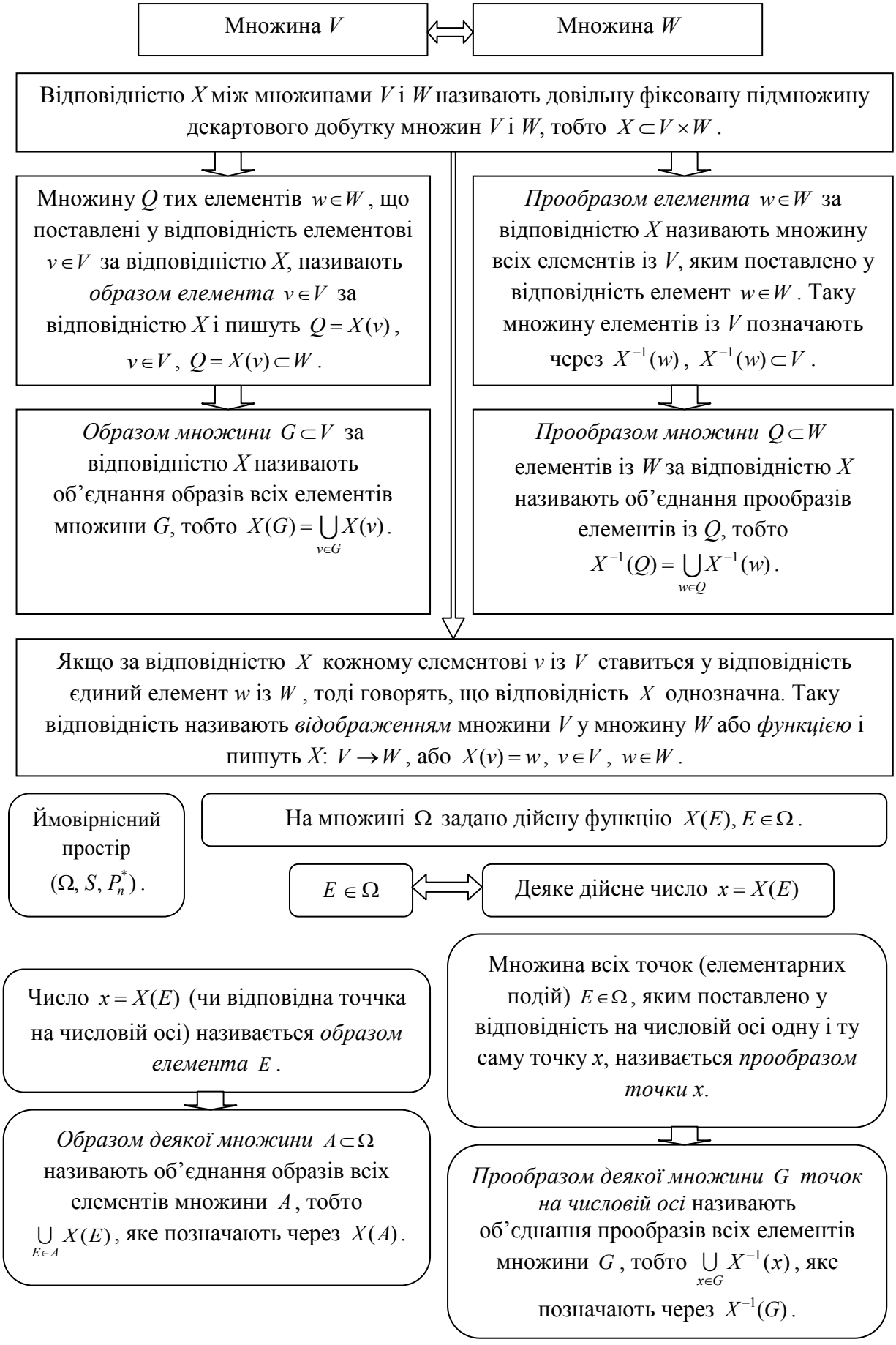


Рис. 2.17. Приклад опорного конспекту з теми «*Поняття випадкової величини*»

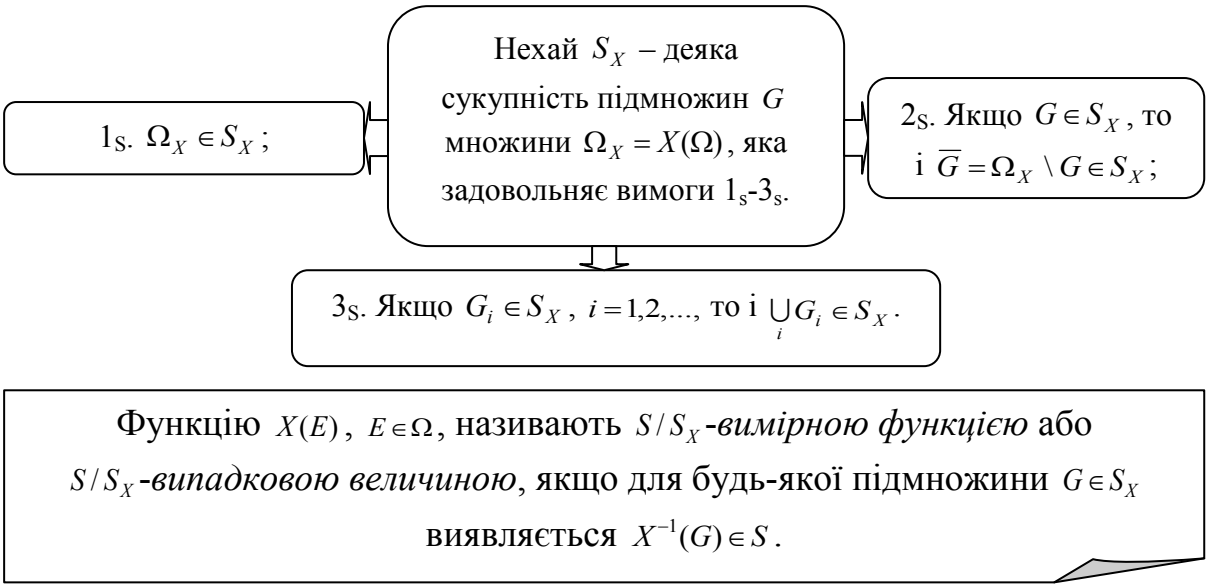


Рис. 2.18. Приклад опорного конспекту з теми «*Поняття випадкової величини*»

Нехай S_X – деяка сукупність підмножин G множини $\Omega_X = X(\Omega)$, яка задовольняє вимоги 1_S-3_S:

1_S. $\Omega_X \in S_X$;

2_S. Якщо $G \in S_X$, то і $\overline{G} = \Omega_X \setminus G \in S_X$;

3_S. Якщо $G_i \in S_X$, $i \in \{1,2,3,...\}$, то і $\bigcup_{i \in I} G_i \in S_X$, $I \subset \{1,2,3,...\}$.

Функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, називають S/S_X-*вимірною функцією* або S/S_X-*випадковою величиною*, якщо для будь-якої підмножини $G \in S_X$ виявляється $X^{-1}(G) \in S$.

На етапі узагальнення та систематизації вивченого матеріалу можна створити опорний конспект у вигляді схеми, який міститиме основні поняття теми, їх властивості та зв'язки між ними. Приклади таких таблиць-схем показано на рис. 2.17 та рис.2.18.

Практичні методи навчання. У навчанні математики поєднання теорії і практики обов'язкове, і тому навчання передбачає застосування особливих методів пізнання, що характеризує дану науку, – спостереження, дослід, демонстраційний приклад, експеримент, які можуть бути введені шляхом проведення лабораторних робіт і демонстраційних дослідів.

Наприклад, під час вивчення поняття статистичної ймовірності можна провести експеримент з підкиданням монети. Кількість підкидань для кожного студента довільна. Після того як кожен порахує відносні частоти випадання герба, порівняти їх з результатами, отриманими іншими студентами та відомими вченими (Таблиця 2.5).

Таблиця 2.5

Результати відомих вчених проведення експерименту з підкиданням монети

	Кількість підкидань	**Кількість випадань герба**	**Відносна частота**
Ж.Бюффон	4040	2048	0,5069
О. Де Морган	4092	2048	0,5005
К.Пірсон	12000	6019	0,5016
В.Феллер	10000	4979	0,4979
К.Пірсон	24000	12012	0,5005
У.Джевонс	20480	10379	0,5068
В.І.Романовський	80640	40151	0,4979

Спостереження вимагає від студентів дослідного (можна сказати, наукового) підходу і самостійного пошуку правильних відповідей на поставлені завдання. Даний метод вимагає фіксації як проміжних, так і підсумкових результатів у формі різних записів, малюнків, схем. Завдяки спостереженню, студенти здійснюють природний перехід від емпіричного пізнання навколишнього світу до теоретичних уявлень і понять, разом з тим виявляючи суттєві взаємозв’язки спостережуваних процесів і явищ. Даний метод добре зарекомендував себе під час опрацювання студентами статистичних даних, виведення означення статистичної ймовірності, геометричного задання ймовірнісної міри, поняття випадкової величини тощо.

Наприклад, можна запропонувати студентам ще на початку навчального року почати збір певних статистичних даних. Це можуть бути дані, які зібрані за допомогою опитування респондентів, або спеціально організованого статистичного спостереження, або великі бази даних, взяті з сайту Державного комітету статистики тощо.

Зібрані дані можуть бути використані під час вивчення числових характеристик розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин. Наведемо приклад системи завдань для опрацювання даних.

Завдання 1. Знайти наступні числові характеристики:

а) центр розсіювання,

б) дисперсію

в) середнє квадратичне відхилення

г) асиметрію

д) ексцес.

Завдання 2. Побудувати графік функції розподілу статистичних ймовірностей на множині значень випадкової величини.

Завдання 3. Порівняти отриманий графік з графіками деяких важливих розподілів ймовірностей, наприклад, біноміальним, нормальним, розподілом Пуассона, з аналогічними значеннями числових характеристик.

Порівнявши графіки можна зробити висновок, що вибірка має ті ж самі властивості, що й генеральна сукупність. Після цього переходимо до вивчення та формування закону великих чисел для статистичних ймовірностей: *за досить великих n практично всі спостережені значення статистичної ймовірності* $P_n^*(A)$ *випадкової події A*, *одержані за різними m серіями із n випробувань кожна*, *досить мало відрізняються одна від одної в переважній більшості серед m серій із n випробувань кожна*, *і зосереджуються навколо деякого значення* $P^*(A) \in [0,1]$.

Вивчення стохастики – це постійний експеримент, моделювання різних життєвих ситуацій, що дає поштовх до дослідницької діяльності, яка в свою чергу розвиває інтерес до стохастичних закономірностей. Стохастичне дослідження – це «похід в невідомість», причому викладач намагається допомогти розшукати той шлях, яким йшли відомі математики, а от свій шлях студент завжди вибирає сам. Почавши з якого-небудь прикладу, факту,

формули, він займається дослідницькою роботою і в цей час в якомусь сенсі переживає почуття радості від усвідомлення того, що розглянув всі можливі випадки, або від того, що розв'язав завдання. Питання, якими студент задається в процесі оволодіння новими поняттями та теоретичними положеннями і закономірностями, ведуть до нових завдань. Основна мета викладача на даному етапі – допомогти студентові систематизувати свої знання. Проведені дослідження в галузі стохастики розвивають мислення, і ця наука стає дорогою до відкриттів. Намагаючись виконати завдання різними способами, студент навчиться краще розв'язувати не лише задачі зі стохастики, але й з інших предметів.

Наприклад, під час вивчення теореми про середнє значення функції, можна запропонувати студентам для дослідження задачі наступного типу [18].

Задача 1. Площа трикутника.

Графік функції $y = \psi(x)$ подано на рис. 2.19. Використовуючи зв'язок між 1-м та 2-м способами обчислення математичного сподівання функції випадкового аргумента (теорему про середнє), вивести формулу для обчислення площі трикутника.

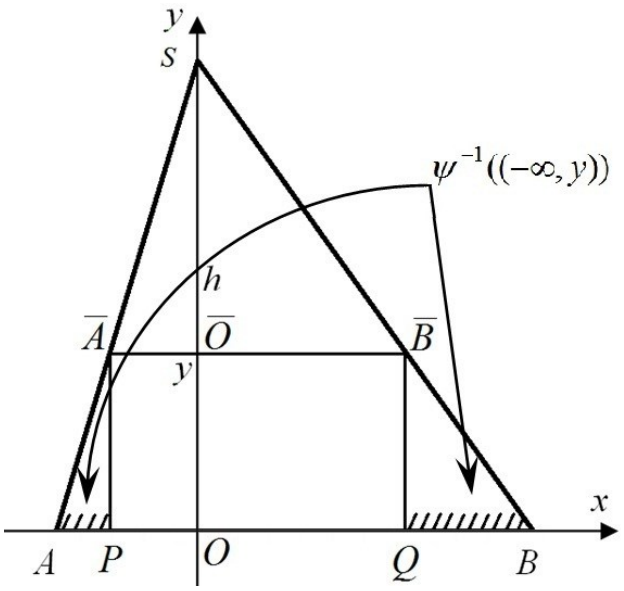


Рис. 2.19. Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y

Правильні наступні рівності: $\frac{\overline{A}\overline{O}}{AO}=\frac{h-y}{h}$, $\frac{\overline{B}\overline{O}}{BO}=\frac{h-y}{h}$.

Враховуючи, що $OQ=\overline{O}\overline{B}$, $PO=\overline{A}\overline{O}$, одержуємо

$$QB=OB-OQ=OB\left(1-\left(1-\frac{y}{h}\right)\right)=OB\cdot\frac{y}{h}.$$

$$AP=AO-PO=AO\left(1-\left(1-\frac{y}{h}\right)\right)=AO\cdot\frac{y}{h}.$$

Функція розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y матиме вигляд (див. Рис. 2.19):

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \frac{y}{h}(AO+OB)\cdot\frac{1}{AO+OB}=\frac{y}{h}, & 0\le y\le h,\\ 1, & h\le y.\end{cases}$$

Відповідно до функції розподілу ймовірностей $F_Y(y)$ знайдемо щільність $f_Y(y)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Y:

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\overline{\in}[0,h],\\ \frac{1}{h}, & y\in[0,h].\end{cases}$$

Обчислимо тепер математичне сподівання випадкової величини Y

$$M[Y]=\int_0^h yf_Y(y)dy=\frac{1}{h}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^h=\frac{h}{2}.$$

За формулою

$$M[Z]=\int_{\Omega_X}zP_Z(dz)=\int_{\Omega_X}\psi(x)P_X(\psi^{-1}(dz)),$$

яка в розглядуваному прикладі зводиться до вигляду:

$$M[Y]=\int_{\Omega_Y}yP_Y(dy)=\int_{\Omega_X}\psi(x)P_X(\psi^{-1}(dy))=\int_{\Omega_X}\psi(x)f_X(x)dx.$$

Одержимо $M[Y]=\int_{AB}\psi(x)f_X(x)dx=\frac{1}{m(AB)}\int_{AB}\psi(x)dx$, звідки $\int_{AB}\psi(x)dx=M[Y]\cdot m(AB)$,

тобто $\int\limits_{AB} \psi(x)dx = \frac{h}{2} \cdot m(AO + OB) = \frac{h}{2} \cdot m(AB)$.

Таким чином, *площа трикутника ASB* дорівнює *половині добутку довжини основи на висоту*.

Якщо трикутник такий, що його вершина проектується за межі його основи (Рис. 2.20), тоді досить продовжити основу трикутника так, щоб вершина трикутника проектувалася на продовжену основу, і розглянути новий трикутник $AB'C$ з так продовженою основою, отриманий з трикутника ABC продовженням його основи (Рис. 2.20). Тоді одержимо

$$S_{AB'C} = \frac{1}{2} \mid A'B \mid \cdot h = \frac{1}{2}(AB + BB')h = S_{ABC} + S_{BB'C} = \frac{1}{2} AB \cdot h + \frac{1}{2} BB' \cdot h,$$

де перший доданок – шукана площа, другий доданок – площа трикутника, доповнюючого трикутник ABC з основою AB до трикутника $AB'C$ з основою AB'.

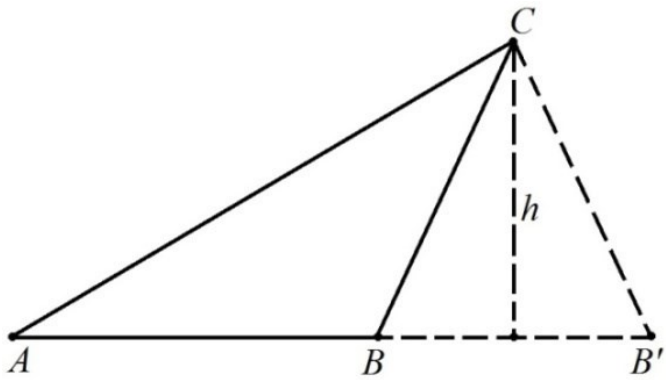


Рис. 2.20

Таким чином формула для обчислення площі трикутника ABC залишається правильною, хоч безпосередньо до трикутника ABC застосувати наведені раніше міркування неможливо, оскільки залежність між змінними x і y, за допомогою якої описується множина точок на сторонах трикутника, в розглядуваному випадку виявляється неоднозначною.

Задача 2. Об'єм тора.

Круг радіуса r переміщується так, що його центр описує коло радіуса R, $(R > r)$, в площині, перпендикулярній до площини круга (Рис. 2.22). Знайти об'єм тіла, що при цьому утворюється (об'єм тора) (Рис. 2.21).

Нехай круг радіуса r розміщено в площині yOz так, що його центр лежить на осі Oy і віддалений від початку координат на віддаль R (Рис. 2.22).

Нехай круг переміщується так, що його центр описує в площині xOy коло радіуса R з центром в початку координат. Тоді горизонтальний діаметр круга описує в площині xOy кільце з внутрішнім радіусом $R-r$ і зовнішнім радіусом $R+r$, рис. 2.22, а коло, що обмежує вказаний круг, описує поверхню, яка називається тором (Рис. 2.21).

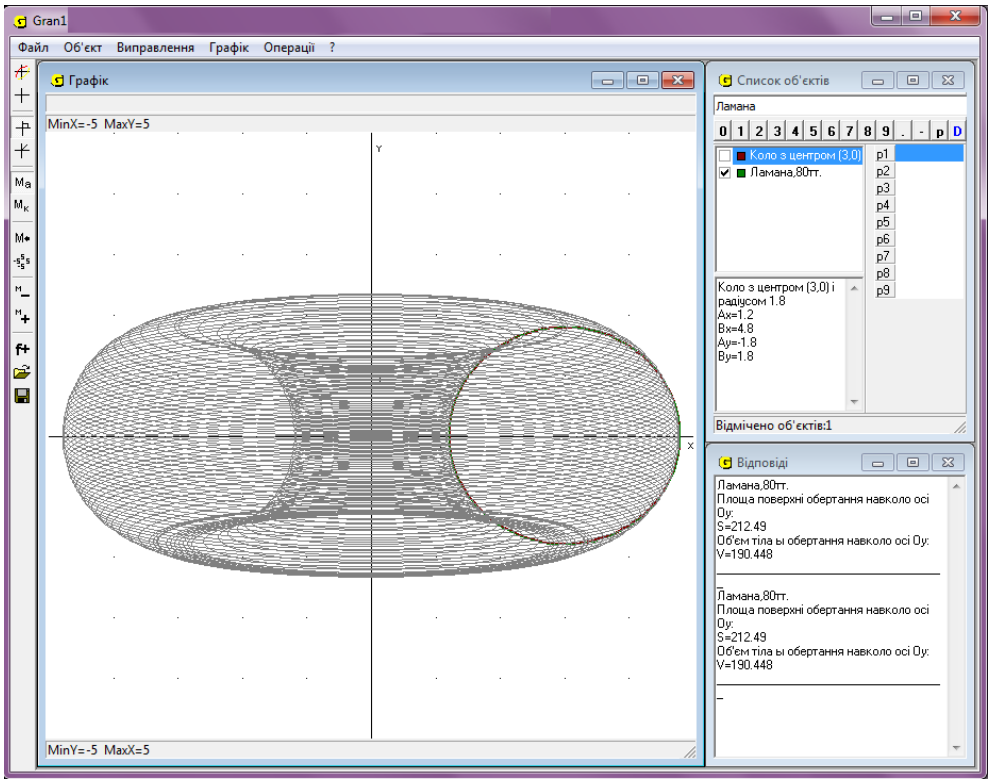


Рис. 2.21. Побудова тора з використанням програмного засобу GRAN1

Нехай на множині G точок цього кільця задано функцію $Z=\psi(x,y)$ таку, що у графічному поданні поверхнею, координати точок на якій задовольняють рівність $z=\psi(x,y)$, є частина поверхні тора, яка лежить над площиною xOy.

Легко бачити, що $m(G)=\pi(R+r)^2-\pi(R-r)^2=4\pi Rr$. Нехай на множині G задано рівномірний розподіл ймовірностей із щільністю

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)}, & \text{коли } (x,y)\in G,\\ 0, & \text{коли } (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

і задано випадкову величину $Z=\psi(X,Y)$, де (X,Y) – випадкова точка із множини G.

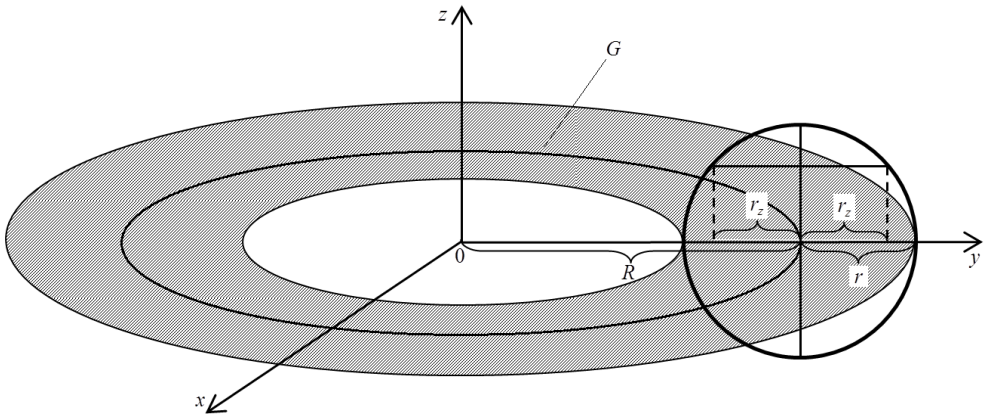


Рис. 2.22. Кільце, яке описує горизонтальний діаметр круга, що обертається навколо осі Oz, в площині xOy з внутрішнім радіусом $R-r$ і зовнішнім радіусом $R+r$

Для обчислення математичного сподівання $M[Z]$ випадкової величини Z знайдемо спочатку $F_Z(z)$:

$$F_Z(z)=P_Z((-\infty,z))=P_{(X,Y)}(Z^{-1}((-\infty,z)))=\begin{cases}0, & \text{коли } z\le 0,\\ \dfrac{m(Z^{-1}((-\infty,z)))}{m(G)}, & \text{коли } 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли } r\le z.\end{cases}$$

Очевидно для $0\le z\le r$ (рис. 2.23)

$$m(Z^{-1}((-\infty,z)))=\pi(R+r)^2-\pi(R+r_z)^2+\pi(R-r_z)^2-\pi(R-r)^2,$$

де $r_Z=\sqrt{r^2-z^2}$, тобто $m(Z^{-1}((-\infty,z)))=4\pi Rr-4\pi Rr_Z$, звідки

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{коли } z\le 0,\\ 1-\dfrac{r_Z}{r}, & \text{коли } 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли } r\le z,\end{cases}$$

тобто

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & \text{коли } z\le 0,\\ 1-\sqrt{1-\dfrac{z^2}{r^2}}, & \text{коли } 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли } r\le z.\end{cases}$$

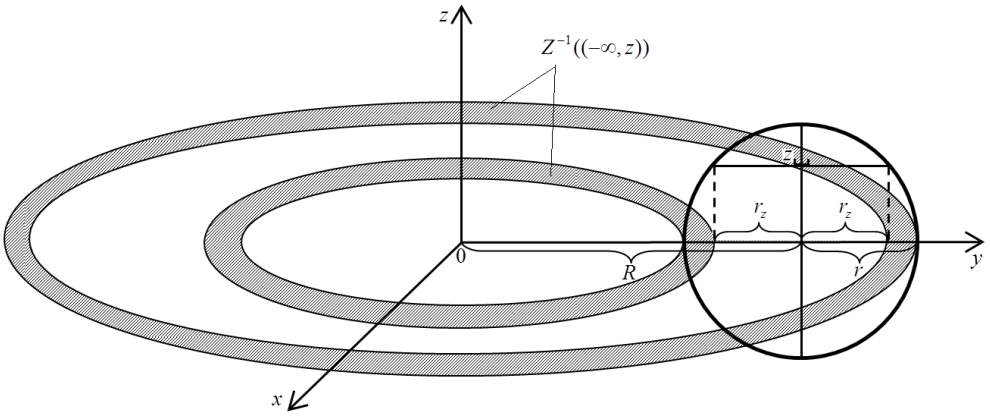


Рис. 2.23. Фігура, яку описує прообраз точки z в площині xOy під час обертання навколо осі Oz

Звідси

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, \text{ коли } z \overline{\in} [0, r], \\ \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 2z}{r^2 \sqrt{1 - \dfrac{z^2}{r^2}}} = \dfrac{\dfrac{z}{r}}{r\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{r}\right)^2}}, \text{ коли } z \in [0, r]. \end{cases}$$

Тоді

$$M[Z] = \int_0^r z \frac{\dfrac{z}{r}}{r\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{r}\right)^2}} dz = \int_0^r z \frac{\left(\dfrac{z}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{r}\right)^2}} d\left(\frac{z}{r}\right).$$

Інтегруючи частинами: $u = z$, $du = dz$, $dv = \dfrac{\left(\dfrac{z}{r}\right) d\left(\dfrac{z}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{r}\right)^2}}$, $v = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{z}{r}\right)^2}$,

одержимо

$$M[Z] = -z\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\Bigg|_0^r + \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2} dz = \int_0^r \frac{1 - \dfrac{z^2}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{r^2}}} dz = r\int_0^r \frac{d\left(\dfrac{z}{r}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{r^2}}} - \int_0^r \frac{\dfrac{z^2}{r^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{z^2}{r^2}}} dz =$$

$$= r\arcsin\left(\frac{z}{r}\right)\Big|_0^r - \int_0^r \frac{\frac{z^2}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}}dz = \frac{\pi r}{2} - \int_0^r \frac{\frac{z^2}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}}dz.$$

Звідки $M[Z] = \int_0^r \frac{\frac{z^2}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}}dz = \frac{\pi r}{4}$.

Таким чином, об'єм тіла під поверхнею тора і над площиною *xOy* (об'єм верхньої половини тора) дорівнює

$$V_1 = \iint_G \psi(x,y)dxdy = M[Z]\cdot m(G) = \frac{\pi r}{4}\cdot 4\pi Rr = \pi R\cdot \pi r^2.$$

Звідки для повного об'єму тора одержуємо: $V_{тора} = 2V_1 = 2\pi R\cdot \pi r^2$.

Аналогічно можна вивести формули для обчислення об'єму зовнішньої та внутрішньої частин тора.

Зовнішня частина тора (Рис. 2.24) описується правою половинкою круга, показаного на рис.2.22. Цього разу ймовірності розподілені рівномірно на множині G_1:

$$G_1 = \{(x,y)\,|\,R^2 \le x^2 + y^2 \le (R+r)^2\},\ m(G_1) = \pi(R+r)^2 - \pi R^2 = \pi(2Rr + r^2).$$

Нехай на множині G_1 задано функцію $z = \psi(x,y)$ таку, що у графічному поданні поверхнею, координати точок якої задовольняють рівність $z = \psi(x,y)$, є частина поверхні тора, яка лежить над кільцем G_1. Нехай $Z_1 = \psi(X,Y)$, задана на множині $\Omega = G_1$.

Для функції розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z_1 одержуємо:

$$F_{Z_1}(z) = P_{Z_1}((-\infty,z)) = P_{(X,Y)}(Z_1^{-1}((-\infty,z))) = \begin{cases} 0, \text{ коли } z \le 0, \\ \dfrac{m(Z_1^{-1}((-\infty,z)))}{m(G_1)}, \text{ коли } 0 \le z \le r, \\ 1, \text{ коли } z \le r, \end{cases}$$

або з врахуванням конкретних даних (див. Рис. 2.24):

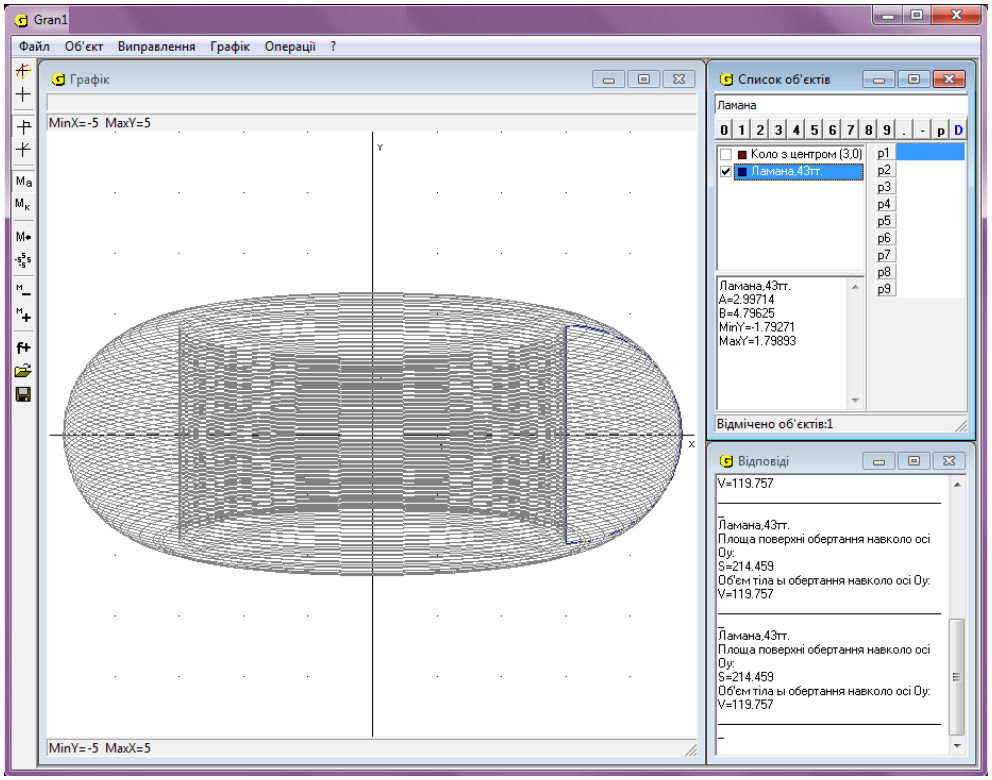


Рис. 2.24. Побудова зовнішньої частини тора з використанням програмного засобу GRAN1

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & \text{коли} \quad z\le 0,\\ \dfrac{\pi(R+r)^2-\pi(R+r_z)^2}{\pi(R+r)^2-\pi R^2}, & \text{коли} \quad 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли} \quad z\ge r;\end{cases}$$

тобто

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & \text{коли} \quad z\le 0,\\ \dfrac{2\pi Rr+\pi r^2-2\pi Rr_z-\pi r_z^2}{2\pi Rr+\pi r^2}, & \text{коли} \quad 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли} \quad z\ge r;\end{cases}$$

звідки

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, & \text{коли} \quad z\le 0,\\ 1-\dfrac{2\pi Rr_z+\pi r_z^2}{2\pi Rr+\pi r^2}, & \text{коли} \quad 0\le z\le r,\\ 1, & \text{коли} \quad z\ge r;\end{cases}$$

або, враховуючи, що $r_z=\sqrt{r^2-z^2}$

$$F_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ 1-\dfrac{2\pi R\sqrt{r^2-z^2}+\pi(r^2-z^2)}{2\pi Rr+\pi r^2}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\ge r.\end{cases}$$

Обчислюючи тепер щільність $f_{Z_1}(z)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z_1, одержимо

$$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\overline{\in}[0,r],\\ \dfrac{1}{2\pi Rr+\pi r^2}\left(2\pi R\dfrac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}+2\pi z\right), \text{ коли } z\in[0,r];\end{cases}$$

тобто

$$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\overline{\in}[0,r],\\ \dfrac{1}{r+\dfrac{r^2}{2R}}\left(\dfrac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}+\dfrac{z}{R}\right), \text{ коли } z\in[0,r].\end{cases}$$

Обчислюючи тепер математичне сподівання випадкової величини Z_1, одержимо:

$$M[Z_1]=\int_0^r z\cdot\frac{1}{r+\dfrac{r^2}{2R}}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}+\frac{z}{R}\right)dz=\frac{2R}{2rR+r^2}\left(\int_0^r\frac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz+\int_0^r\frac{z^2}{R}dz\right).$$

Обчислимо окремо $\int_0^r\dfrac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz$. Інтегруючи частинами: $z=u$, $\dfrac{zdz}{\sqrt{r^2-z^2}}=dv$, $dz=du$, $-\sqrt{r^2-z^2}=v$, одержимо

$$\int_0^r\frac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz=-z\sqrt{r^2-z^2}\Big|_0^r+\int_0^r\sqrt{r^2-z^2}dz=0+\int_0^r\frac{r^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz-\int_0^r\frac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz,$$

звідки

$$\int_0^r\frac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz=\frac{1}{2}\int_0^r\frac{r^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz=\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{z}{r}\right)\Big|_0^r=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r^2}{4}.$$

Таким чином,

$$M[Z_1]=\frac{2R}{2rR+r^2}\left(\frac{\pi r^2}{4}+\frac{r^3}{3R}\right),$$

а тому для об’єму зовнішньої частини тора одержуємо:

$$V_{зовн.тора}=2\cdot M[Z_1]\cdot m(G_1)=2\cdot\frac{2R}{2rR+r^2}\left(\frac{\pi r^2}{4}+\frac{r^3}{3R}\right)\cdot\pi(2Rr+r^2)=$$

$$=4\pi R\left(\frac{\pi r^2}{4}+\frac{r^3}{3R}\right)=2\pi R\cdot\frac{\pi r^2}{2}+\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Обчислимо тепер об’єм внутрішньої частини тора (Рис. 2.25), яка описується лівою половиною круга, показаного на 2.22. Цього разу ймовірності розподілені рівномірно на множині G_2:

$$G_2=\{(x,y)\,|\,(R-r)^2\le x^2+y^2\le R^2\},\ m(G_2)=\pi R^2-\pi(R-r)^2=\pi(2Rr-r^2).$$

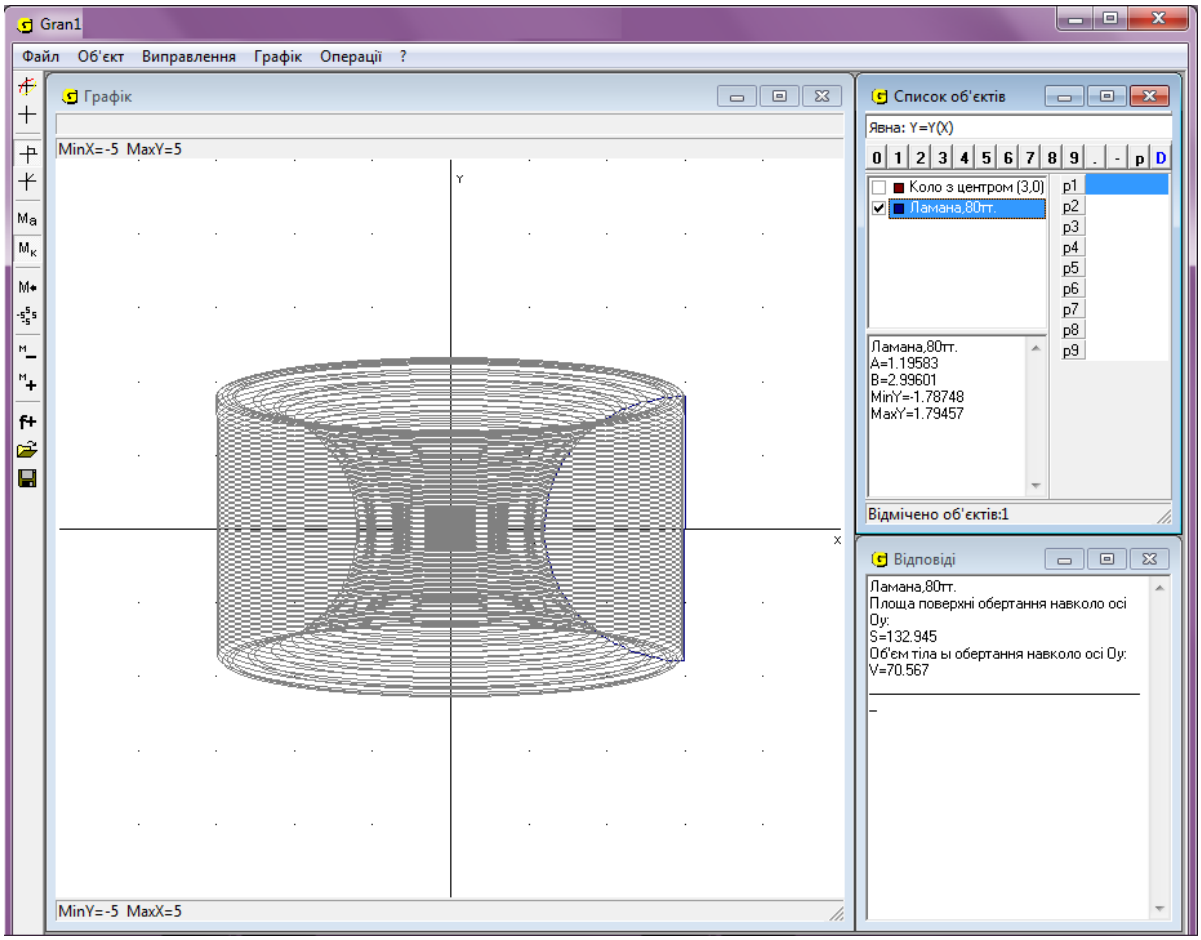


Рис. 2.25. Побудова внутрішньої частини тора з використанням програмного засобу GRAN1

Нехай на множині G_2 задано функцію $z=\psi(x,y)$ таку, що у графічному поданні поверхнею, координати точок якої задовольняють рівність $z=\psi(x,y)$, є частина поверхні тора, яка лежить над кільцем G_2. Нехай $Z_2=\psi(X,Y)$, задана на множині $\Omega=G_2$.

Для функції розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z_2 одержуємо:

$$F_{Z_2}(z)=P_{Z_2}((-\infty,z))=P_{(X,Y)}(Z_2^{-1}((-\infty,z)))=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ \dfrac{m(Z_2^{-1}((-\infty,z)))}{m(G_2)}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\le r,\end{cases}$$

або з врахуванням конкретних даних:

$$F_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ \dfrac{\pi(R-r_z)^2-\pi(R-r)^2}{\pi R^2-\pi(R-r)^2}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\ge r;\end{cases}$$

тобто

$$F_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ \dfrac{2\pi Rr-\pi r^2-2\pi Rr_z+\pi r_z^2}{2\pi Rr-\pi r^2}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\ge r;\end{cases}$$

звідки

$$F_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ 1-\dfrac{2\pi Rr_z-\pi r_z^2}{2\pi Rr-\pi r^2}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\ge r;\end{cases}$$

або, враховуючи, що $r_z=\sqrt{r^2-z^2}$

$$F_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\le 0,\\ 1-\dfrac{2\pi R\sqrt{r^2-z^2}-\pi(r^2-z^2)}{2\pi Rr-\pi r^2}, \text{ коли } 0\le z\le r,\\ 1, \text{ коли } z\ge r;\end{cases}$$

Обчислюючи тепер щільність $f_{Z_2}(z)$ розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини Z_2, одержимо

$$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\overline{\in}[0,r],\\ \dfrac{1}{2\pi Rr-\pi r^2}\left(2\pi R\dfrac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}-2\pi z\right), \text{ коли } z\in[0,r];\end{cases}$$

тобто

$$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}0, \text{ коли } z\overline{\in}[0,r],\\ \dfrac{1}{r-\dfrac{r^2}{2R}}\left(\dfrac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}-\dfrac{z}{R}\right), \text{ коли } z\in[0,r].\end{cases}$$

Обчислюючи тепер математичне сподівання випадкової величини Z_2, одержимо:

$$M[Z_2]=\int_0^r z\cdot\frac{1}{r-\dfrac{r^2}{2R}}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2-z^2}}-\frac{z}{R}\right)dz=\frac{2R}{2rR-r^2}\left(\int_0^r\frac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz-\int_0^r\frac{z^2}{R}dz\right).$$

Оскільки, як було вже показано: $\int_0^r\dfrac{z^2}{\sqrt{r^2-z^2}}dz=\dfrac{\pi r^2}{4}$, одержуємо

$$M[Z_2]=\frac{2R}{2rR-r^2}\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^3}{3R}\right).$$

Отже,

$$V_{вн.ч.тора}=2\cdot M[Z_2]\cdot m(G_2)=2\cdot\frac{2R}{2rR-r^2}\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^3}{3R}\right)\cdot\pi(2Rr-r^2)=$$

$$=4\pi R\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^3}{3R}\right)=2\pi R\cdot\frac{\pi r^2}{2}-\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Таким чином, в процесі навчання стохастики не менше дієвим методом, а часом і найважливішим, є дослідницький метод.

Одним із видів дослідницьких завдань є навчальний експеримент, у якому ставиться мета, вже досягнута наукою, однак студентам цей факт ще

невідомий. Експериментування надає можливість досліджувати різні процеси і явища в штучно створених умовах, відтворювати і повторювати їх неодноразово. В зв'язку з тим, що експеримент являє собою практичну діяльність студентів, то в процесі його реалізації активно задіяні всі органи чуття, і тому процес чуттєвого пізнання набагато ширший і глибший, ніж під час спостереження. Прикладами навчальних експериментів у навчанні стохастики можуть бути підкидання монет, гральних кубиків, багаторазове виймання різнобарвних кульок із скриньки, отримання набору випадкових значень за допомогою генератора випадкових чисел (наприклад, вбудованого в програму Gran1) і т.д.

Демонстраційний приклад (експеримент). Демонстрація процесів і явищ, що відбуваються в навколишньому світі, сприяє кращому і цілісному сприйняттю навчального матеріалу, обгрунтуванню тверджень. Як правило, демонстрація експерименту проводиться паралельно з усним поданням навчального матеріалу викладачем. Однак найбільший ефект від демонстрації отримується в процесі проблемного подання навчального матеріалу, коли на основі досвіду студенти можуть зробити відповідні висновки й узагальнення. Наприклад, зі студентами можна провести наступний дослід, для якого знадобиться ємність з піском. Висипаємо на стіл пісок і стежимо за тим, як він буде розподілятися на поверхні. Завжди після висипання піску на столі утворюється гірка, верхівка якої знаходиться точно під перевернутою ємністю. Профіль цієї гірки фактично повторює форму розподілу ймовірностей для можливих положень піщинок. Ця форма, зокрема, показує, що піщинка, після зіткнення зі столом та іншими піщинками, скоріш за все виявиться в деякому невеликому околі, що знаходиться прямо під центром перевернутої ємності. Такий експеримент вказує на універсальність і розповсюдженість нормального розподілу ймовірностей.

Методи *інтерактивного* навчання стохастики. На думку Б.Ц. Бадмаєва, інтерактивним є навчання, засноване на «психології людських взаємин і

взаємодій» [7]. Пометун О.І. зазначає, що «суть інтерактивного навчання у тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної, активної взаємодії всіх учнів. Це співнавчання, взаємонавчання (колективне, групове, навчання у співпраці... Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, вирішення проблеми на основі аналізу обставин та відповідної ситуації. Воно ефективно сприяє формуванню навичок і вмінь, виробленню цінностей, створенню атмосфери співробітництва, взаємодії...» [155, с. 7].

Розглянемо деякі методи інтерактивного навчання, які можна використовувати в процесі навчання стохастики майбутніх вчителів математики.

Одним з перших методів є *дискусія*. Правильно організовані дискусії можуть бути хорошим способом організації активного мислення студентів та засобом розвитку інтелектуальних здібностей. Наприклад, даний метод в процесі навчання стохастики виявився досить ефективним під час виведення формул теорії ймовірностей, доведенні теорем, розв’язуванні задач на заняттях.

Наступний метод інтерактивного навчання – *мозковий штурм*. Даний метод був розроблений А. Осборном в 1953 році і заснований на припущенні, що однією з основних перешкод для появи нових ідей є «страх оцінки» оточуючих (інколи люди намагаються не висловлювати вголос цікаві неординарні ідеї через побоювання бути не почутими і незрозумілими). Тому основна мета застосування «мозкового штурму» полягає у виключенні оцінювального компонента на початкових стадіях появи ідей.

Застосування «мозкового штурму» надає можливість в процесі пошуку розв’язку об’єднати студентів, які відрізняються один від одного інтересами, схильностями, рівнем засвоєння навчального матеріалу. Даний метод виявився досить ефективним під час розв’язування професійно-прикладних стохастичних задач на етапі побудови математичної моделі.

Наприклад, під час вивчення теми «Операції над подіями» питання

«мозкового штурму» можуть бути такими:

1. Чи відбувається подія $A+B$, якщо відбувається подія A?
2. Чи спричинює подія $A+B$ подію A?
3. Чи відбувається подія A, якщо відбувається подія $A \cdot B$?
4. Чи спричинює подія A подію $A \cdot B$?
5. Чи спричинює подія $A \cdot B$ подію A?
6. Чи відбувається подія B, якщо не відбувається подія $A \setminus B$?
7. Чи відбувається і подія $A \setminus B$, якщо відбувається подія A?
8. Якщо $C = A - B$, то $A = C + B$?
9. Чи правильні рівності:
   а) $(A + B) - B = A$;
   б) $(A - B) + B = A$;
   в) $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$;
   г) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
   д) $\bigcap_k A_k = \overline{\bigcup_k \overline{A_k}}$?
10. Чи правильно, що $A + \overline{A} = \Omega$?
11. Чи правильні твердження:
    а) Неможлива подія – це добуток протилежних подій?
    б) Якщо $A = \overline{B}$, то $\overline{A} = B$, тобто події $\overline{\overline{B}}$ і B рівносильні.

2.2.6. Засоби навчання.

Відповідно до загальноприйнятої сучасної класифікації засобів навчання, до навчально-матеріального забезпечення навчання математики, в тому числі і стохастики, необхідно включати: друковані засоби (посібники, збірники задач і вправ, навчально-довідкові та навчально-методичні посібники, роздатковий матеріал і т.д.), наочні засоби (плакати, таблиці тощо), демонстраційні засоби (стенди, моделі демонстраційні тощо), електронні освітні ресурси (мультимедійні підручники, мережеві освітні ресурси і т.д.), аудіовізуальні засоби (слайди, відеофільми, навчальні

кінофільми, навчальні фільми на цифрових носіях), навчальне приладдя (гральні кубики, рулетки, урни з кулями і т.д.), дистанційні курси.

До числа друкованих засобів навчання відносять: навчальний посібник, збірник задач і вправ, навчально-методичний посібник, навчально-довідковий посібник, роздаткові матеріали.

У XVII столітті Я.А. Коменський висунув «золоте правило» дидактики: «Все, що тільки можна, надавати для сприймання чуттями: видиме – зором, чутне – слухом, запахи – нюхом, доступне смакові – смаком, доступне дотикові – дотиком. Якщо якісь предмети можна сприйняти одразу кількома чуттями, нехай вони зразу ж і відчуваються кількома чуттями...» [80]. Вимога, згідно якої знання повинні формуватися з власних спостережень, відіграє велику роль в процесі навчанні.

Так, І.Г. Песталоцці вважав, що «органи чуття самі по собі приносять нам невпорядковані відомості про навколишній світ. Навчання має знищити хаотичність в спостереженнях, розмежувати предмети, а однорідні і близькі знову з'єднати, тобто сформувати в учнів поняття [147].

У сучасній методиці навчання будь-якого предмету поняття наочності відноситься до різних типів сприйняття (зорові, кінестетичні, слухові тощо). Проте жодному з видів наочності не слід називати переваги перед іншим - їх доцільно застосовувати в комплексі.

У практиці навчання стохастики застосування наочних засобів поєднується зі словом викладача. За допомогою слова викладач здійснює управління спостереженнями, а знання про зовнішній вигляд об'єкта, про реальні процеси студенти отримують із спостереження. Або, навпаки, відомості про предмети і процеси реальної дійсності студенти отримують зі словесних повідомлень викладача, тоді як використання наочних засобів для унаочнення навчального матеріалу дає можливість підтвердити або конкретизувати словесні повідомлення.

Наочні навчальні посібники використовуються в навчанні математики, зокрема стохастики, на різних етапах: під час пояснення нового

матеріалу, під час закріплення навчального матеріалу студентами, під час повторення вивченого матеріалу і перевірки знань, а також в позакласній роботі. Вони повинні бути узгоджені із змістом програми і підручником, методами навчання, з врахуванням вікових особливостей студентів, а також задовільняти певні наукові, санітарно-гігієнічні, технічні і економічні вимоги.

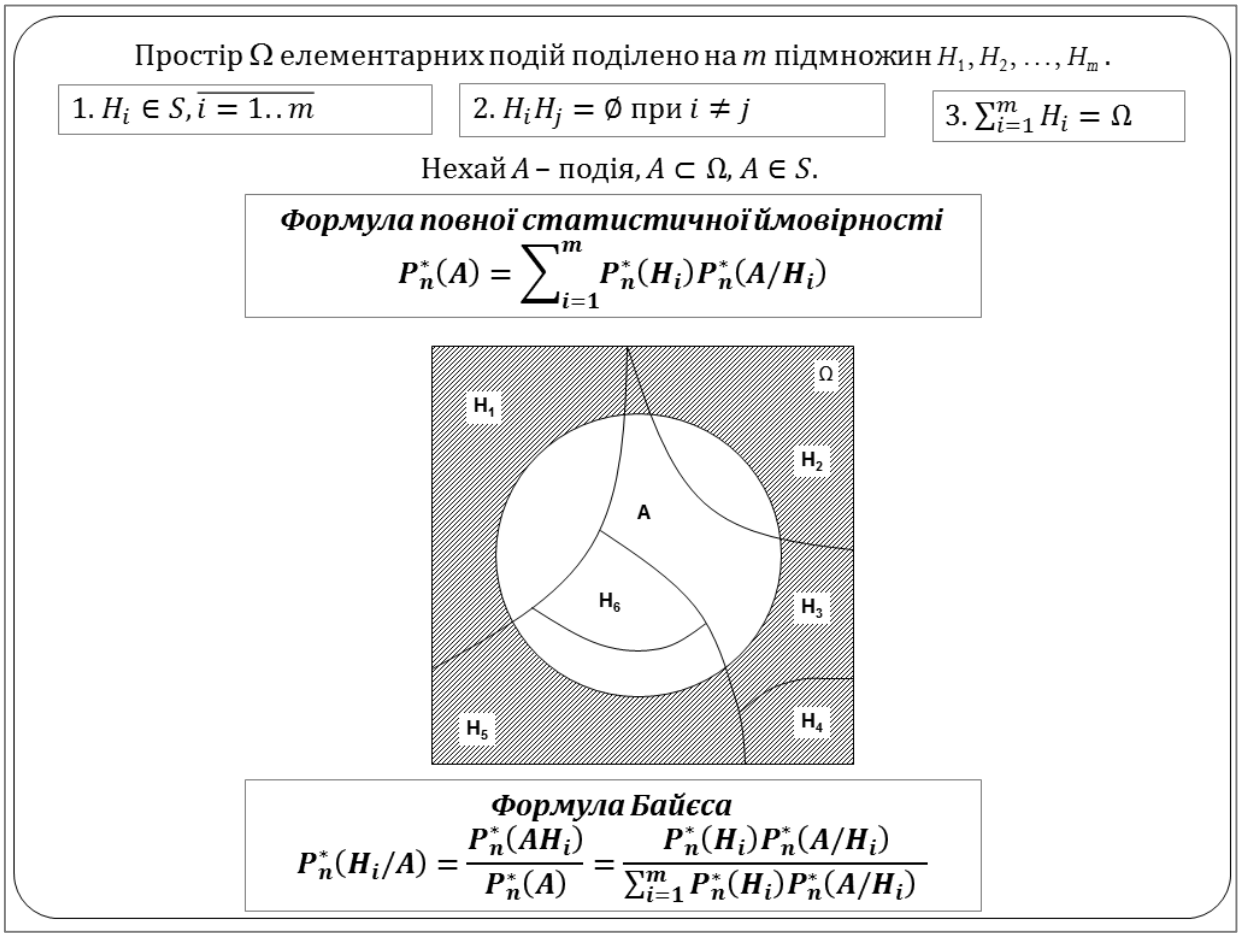


Рис. 2.26. Приклад слайду з теми: «Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса»

До числа основних питань, на які може отримати відповідь студент, який навчається за **підручником**, відносяться наступні: «Які події називають незалежними?», «Що таке узагальнена статистична ймовірність?», «Чи завжди за функцією розподілу ймовірностей можна визначити тип розподілу ймовірностей?» і т.д. Як видно з тематики питань, в підручнику мають бути розкриті важливі теми, що необхідно для розуміння статистичних понять і закономірностей.

Плакат являє собою великоформатне зображення, що супроводжується коротким текстом, зробленим в навчальних цілях. На ньому можна розмістити означення, правила, формулювання теореми або формулу з ілюстраціями до них, різні зображення, а також схеми, таблиці, тексти.

Такі зображення також можуть бути розміщенні на слайді презентації. Наприклад, на рис. 2.26 показано приклад слайду з теми: «Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса».

Таблиці розрізняють за призначенням та оформленням. Основу одних з них складають художньо виконані зображення досліджуваних об'єктів, об'єднані спільною темою (наприклад, таблиця «Види подій», «Поінтервальні розподіли статистичних ймовірностей чи абсолютних частот відбування деякої події»).

Інші таблиці являють собою поєднання цифрового, текстового або графічного матеріалу з одним або кількома малюнками або без них. Одні таблиці використовуються в якості ілюстрацій під час пояснення нового матеріалу, інші - як джерело додаткового матеріалу для уточнення і розширення знань.

Особливе місце займають довідкові та інструктажні таблиці, наприклад, алгоритм розв’язування задач на формулу повної ймовірності. Вони призначені для тривалого користування.

Можна використовувати **демонстраційні моделі** для демонстрації деяких імовірнісних процесів (наприклад, дошка Гальтона, що служить для демонстрації нормального розподілу ймовірностей).

В процесі навчання стохастики потрібно сформувати уявлення про вплив випадковостей на стохастичні висновки за результатами проведених дослідів. У зв'язку з цим необхідна підтримка змістової лінії інформаційними системами навчання.

Щербатих С.В. [223] визначає два основні мотиви використання інформаційно-комунікаційних технологій в процесі навчання стохастики, а саме: 1) комп'ютерно-обчислювальні методи останнім часом все ширше

використовуються в процесі навчання стохастики; 2) застосування ІКТ під час навчання стохастики підвищує якість засвоєння навчального матеріалу.

Застосування сучасних інформаційно-комунаційних технологій в навчальному процесі надає можливість показаувати статистичну природу понять і фактів, що вивчаються в теорії ймовірностей, що має не тільки методологічне, а й велике методичне значення. У практичній діяльності часто доводиться отримувати й опрацьовувати великі об'єми статистичних даних. В таких випадках, наприклад, завдання упорядкування результатів вимірювань вирішується набагато швидше за допомогою комп’ютера.

За допомогою статистичних експериментів, створених за допомогою комп’ютера, можна здійснити моделювання описуваних в задачах ситуацій і порівняти результати, одержувані в експерименті, з теоретично прогнозованими. Застосування ІКТ в навчанні стохастики надає можливість розвивати стохастичне мислення, вміння здійснювати дослідницьку діяльність, формувати стохастичну культуру, вміння здійснювати опрацювання і аналіз даних та синтезувати відповідні висновки.

На сьогодні розроблено велику кількість програмних засобів, за допомогою яких можна вирішувати багато математичних задач. У їх числі: GRAN1, Maple, MathCad, Mathematica, MathLab, Maxima, STATISTICA, Statgraph і т.д. Деякі з цих програм є суто професійними програмами, інші можуть бути використані в процесі навчання математики, зокрема стохастики, як в педагогічному університеті, так і в школі.

Найбільш адаптованими для підтримки навчання стохастики майбутніми вчителями математики є програми GRAN1, STATISTICA.

Разом з тим як викладачем, так і студентами, можуть бути розроблені додаткові програми, які можуть бути використані для досліджень чи розв’язання певного типу задач. Наприклад, під час вивчення деяких властивостей узагальнених статистичних ймовірностей можна використати програму Function, код якої та деякі методичні рекомендації наведено в додатку Г.

2.2.7. Контроль результатів опанування майбутніми учителями математики стохастичними компетентностями.

Даний компонент методичної системи орієнтований на взаємодію педагогів і студентів, контроль зі сторони викладача і самоконтроль зі сторони студентів.

Також важливими основними формами контролю залишаються як і в традиційних методичних системах навчання математики, зокрема стохастики, усний контроль (індивідуальне та фронтальне опитування), письмовий контроль (виконання контрольних та самостійних робіт, тестування) і самоконтроль (аналіз результатів власної роботи, робота над помилками, самоконтроль за рівнем засвоєння навчального матеріалу).

2.3. Методичні особливості побудови стохастичної лінії шкільного курсу математики.

Введення стохастичної компоненти в шкільну математичну освіту має більш ніж 200-річну історію. Перші спроби вивчати ймовірність в школі сягають П.С. Лапласа. Ця історія являє собою цілу серію циклів, що складаються з ініціації процесу, більш-менш масштабного впровадження цієї лінії, пізніше її різкої критики і подальшого виключення стохастичної компоненти зі шкільної програми.

Дискусії з цього питання розгортаються навколо двох фундаментальних тез. Перша полягає в очевидній загальній значущості стохастичних уявлень не тільки у професійній діяльності різного типу, а й у повсякденному житті, під час оцінювання різного роду ризиків, можливостей, надійності, довіри тощо. Друга теза, яка їй протистоїть, полягає в тому, що стохастика у вигляді більш-менш спрощеного університетського курсу теорії ймовірностей у школі абсолютно неприйнятна, її навчання не сприймається і не досягає тих цілей, які перед ним ставляться.

Особливої гостроти питання набуло в сучасній ситуації, коли стохастична компонента увійшла одночасно і в основну школу, і в старшу школу. Наявність однієї і тієї самої лінії на кількох рівнях освіти викликає питання про дублювання, оскільки повторне вивчення вже засвоєного принаймні один раз матеріалу, не активізує розвиток, а гальмує його. Це вимагає не просто методичного опрацювання стохастичної лінії шкільного курсу математики для її адаптації до вікових особливостей мислення, а й фундаментального аналізу можливостей в процесі навчання цієї змістової лінії забезпечувати інтелектуальний, психічний, культурний розвиток на різних етапах навчання з явним вираженням відмінностей методик навчання стохастики на кожному з цих етапів.

На основі аналізу результатів наукових досліджень, психолого-педагогічних та методичних публікацій, програм і підручників виокремлено

три етапи процесу формування статистичних уявлень учнів:

I. *Підготовчий* (5–7 класи). Деякі елементи описової статистики традиційно розглядають у 5–7 класах: таблиці даних, кругові й стовпчасті діаграми, середнє арифметичне, відсотки тощо. В процесі навчання цих понять доцільно проводити пропедевтику вивчення статистики. Для цього не треба розширювати обсяг навчального матеріалу, а досить тільки внести відповідні зміни в його зміст, щоб ознайомити учнів із загальними характеристиками понять, що вивчаються, з їх застосовністю до масових процесів, звернути увагу на міжпредметні зв'язки стохастики та геометрії, природознавства і інших навчальних дисциплін.

II. *Вивчення й закріплення основних понять математичної статистики* (9–11 класи). Вивчення нового матеріалу здійснюється як на уроках математики в межах лекційно-практичної форми навчання із залученням фізичних моделей об'єктів та явищ навколишньої дійсності, так і на інтегрованих уроках "фізика-математика", "математика-фізика" та "математика-інформатика" з тем: "Розподіл молекул за швидкостями. Гістограми", "Показники варіації числових рядів. Похибки вимірювань." і "Графічне подання статистичних даних. Створення діаграм в середовищі табличного процесора Excel".

Вивчення стохастичних понять, пов'язаних із майбутньою професійною діяльністю школярів, доцільно здійснювати відповідно до таких етапів:

1. Демонстрація *актуальності* й *значущості понять*, що вивчаються, для ефективної роботи у сфері майбутніх професійних інтересів старшокласників.

- Наприклад, біноміальні ймовірності використовують для проведення так званого вибіркового контролю якості продукції, що випускається у великих обсягах. Пріоритет у такому практичному застосуванні теорії ймовірностей належить відомому математику українського походження Михайлу Васильовичу Остроградському (1801-1862),

який у 1846 році опублікував роботу, присвячену такому застосуванню.

- Видатні швейцарські вчені Даніїл Бернуллі (1700–1782) та Леонард Ейлер (1707–1782) зробили значний внесок у застосуванні теорії ймовірностей у демографії. Вони фактично започаткували основи сучасної демографії. Серед робіт цієї тематики можна виділити «Дослідження про смертність та примноження роду людського», «Про примноження роду людського». В цих роботах Ейлер вирішує багато задач, що лягли в основу математичної демографії. Він отримав цікаві висновки при розв'язанні задач про подвоєння чисельності населення.

Одна з важливих задач Ейлера.

Нехай N позначає кількість людей, що народилися одночасно, $k(N)$ – кількість людей, що залишилися живими через k років. Відповідно k – ймовірність виживання. Після введення цих позначень Ейлер дає таку відповідь на сформульоване питання: $P_n = \frac{m+n}{n}$, а ймовірність того, що людина помре у вказаний проміжок часу буде: $P_1 = 1 - \frac{m+n}{n}$.

2. *Постановка* й *аналіз проблеми*, яка виникла в процесі вивчення суміжних дисциплін.

Ідея побудови ймовірнісного простору (Ω, S, P) шляхом продовження ймовірнісної міри P (і навіть загальної міри μ) з півпростору S_0 найпростіших подій (найпростіших вимірних підмножин простору Ω) на простір подій $S \supset S_0$ тісно пов'язана з ідеєю про атомну будову всесвіту, народжену більш ніж дві тисячі років тому.

Так, давньогрецький філософ Платон вважав атомами трикутні фігури, за допомогою яких можна утворити не тільки будь-які плоскі фігури, а й будь-які просторові тіла.

3. *Трансформація* проблеми засобами математичного моделювання *в*

стохастичну задачу.

4. *Аналіз* та *інтерпретація результатів*, отриманих у ході розв'язання задачі й прийняття рішення щодо цієї проблеми.

Додатково до чинних підручників були розроблені такі дидактичні засоби навчання: посібник «Стохастика» для вчителів, який містить додаткові відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики; факультативний курс «Початки стохастики»; програмний засіб Function.

III. *Використання знань для самостійних експериментальних досліджень* (9–11 класи). Учням основної й старшої школи властиве прагнення до самостійного проникнення в сутність проявів навколишніх явищ і перебігу процесів. Тому для ефективного формування навичок і вмінь зі стохастики доцільними будуть методи проблемно-пошукового й дослідницького характеру, що стимулюють пізнавальну активність школярів.

Висновки до другого розділу

1. В процесі створення комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання стохастики майбутніх вчителів математики використовуються концептуальні положення як традиційного підходу до створення методичних систем навчання, так і нові підходи, які використовуються в процесі розробки методичних систем навчання інформатики та математики для ВНЗ і загальноосвітніх шкіл. На таких засадах створена методична система навчання певної дисципліни являє собою складну динамічну систему, яка є первинною відносно самої навчальної дисципліни.

2. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання у ВНЗ повинні розроблятися на основі новітніх педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій з орієнтацією на педагогічно виважене та методично вмотивоване і доцільне використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій та інформаційних ресурсів в навчальному процесі.

3. Визначено мету, завдання, навчально-методичне та програмне забезпечення, методи, форми і засоби навчання стохастики майбутніх вчителів математики, а також зміст навчального матеріалу курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика». Зокрема, слід підкреслити, що вивчення основ теорії ймовірностей пропонується розпочинати з вивчення однієї з ймовірнісних мір – статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ (відносної частоти відбування події A в серії із n випробувань), яка задовільняє всі аксіоми теорії ймовірностей, і разом з тим набагато доступніша для розуміння учнями, аніж гіпотетична абстрактно введена ймовірнісна міра, оскільки відповідні теоретичні положення можуть бути перевірені в реальному експерименті.

4. Впровадження комп'ютерів у навчальний процес сприяє не тільки зміні цілей і удосконаленню змісту і засобів навчання, але й потребує відповідного перегляду організаційних форм навчання стохастики.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [17, 24, 26, 19, 25, 27].

РОЗДІЛ 3. РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНОЇ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ ТА ПЕРЕВІРКА ЇЇ ЕФЕКТИВНОСТІ.

Для перевірки гіпотези дослідження та оцінювання ефективності розробленої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики майбутніх учителів математики протягом 2011-2015 років було проведено педагогічний експеримент.

У його процесі розв'язувались такі завдання:

- дослідження процесу навчання курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» студентів спеціальності «Інформатика*» у вищих педагогічних навчальних закладах;
- визначення рівня професійної підготовки зі стохастики майбутніх учителів математики спеціальності «Інформатика*» та необхідності методичної підготовки у даній галузі;
- впровадження розробленого змісту навчального матеріалу з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» в практику педагогічних університетів, дослідження ефективності його використання;
- перевірка ефективності пропонованої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики, зокрема стохастики, майбутніх учителів математики у педагогічному університеті;
- перевірка ефективності розроблених комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання, системи контролю знань та оцінювання досягнутих результатів навчання;
- впровадження розроблених компонентів дистанційного навчання математичних основ інформатики (стохастики, елементів дискретної математики, обчислювальної математики, теорії оптимізації і ін.) в практику заочного навчання майбутніх вчителів математики та слухачів закладів післядипломної педагогічної освіти.

Для визначення цілей, завдань, очікуваних результатів навчання тощо, було проведено аналіз документів (стандартів, програм, навчальних планів і

т.д.), анкетування, опитування, бесіди з шкільними вчителями, викладачами і студентами вищих навчальних закладів, фахівцями в галузі навчання теорії ймовірностей та математичної статистики, використання ІКТ в навчанні. Результати анкетування опрацьовувались із застосуванням методу експертного оцінювання.

На основі отриманих результатів було визначено основні змістові лінії курсу стохастики та розподіл змісту навчального матеріалу за модулями.

Педагогічний експеримент проводився у чотири етапи:

- теоретико-пізнавальний (2011 р.);
- констатувальний (2011-2013 рр.);
- пошуковий (2013-2014 рр.);
- формувальний (2014-2015 рр.).

Експериментальною базою дослідження був Інститут інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. В експерименті брали участь студенти третіх курсів спеціальності «Інформатика*».

На теоретико-пізнавальному етапі (2011 р.) було вивчено та проаналізовано діючі підходи й методичні системи навчання курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика" студентів педагогічних університетів; визначено об’єкт, предмет, гіпотезу і завдання дослідження, терміни проведення експерименту та контроль його результатів.

Констатувальний етап (2011-2013 рр.)

На даному етапі педагогічному експерименту були використані наступні методи дослідження: аналіз нормативно-правової бази у галузі розвитку ІКТ навчального призначення, аналіз навчальних програм, навчально-методичної та психолого-педагогічної літератури з проблем дослідження, вивчення результатів діяльності викладачів, психолого-педагогічне спостереження за навчальним процесом, анкетування студентів, бесіди зі студентами, вчителями та викладачами університету.

На даному етапі експерименту були опитані 124 студенти

Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, які здобувають кваліфікацію вчителя математики та 34 вчителі математики. Загальна кількість респондентів – 158. Анкету для майбутніх вчителів та діючих наведено в додатках Б та В відповідно.

Результати констатуючого етапу показали, що загальний рівень стохастичної підготовки майбутніх вчителів математики не задовольняє на належному рівні професійні вимоги, які поставлені перед сучасним вчителем математики.

Пошуковий етап (2013-2014 рр.).

Зміст експерименту полягав у пошуку найбільш вдалого поєднання форм навчально-пізнавальної діяльності студентів на заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики, найбільш раціональної організації самостійної роботи студентів, умов забезпечення контролю за якістю засвоєних знань, аналізі і узагальненню досвіду навчання стохастики.

Методи дослідження: анкетування і аналіз та синтез на його основі відповідних висновків результатів, організація самостійної та індивідуальної роботи зі студентами, бесіди зі студентами, аналіз результатів контрольних робіт та екзаменів.

В процесі дослідження на даному етапі було проаналізовано різні форми і методи організації навчальної діяльності студентів. Виявлені ті розділи курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, які є важливими з точки зору професійної підготовки студентів; здійснено добір навчального матеріалу, вивчення якого сприяє реалізації концепції професійно-педагогічного напряму навчання стохастики майбутніх вчителів математики.

Формувальний етап (2014-2015 рр.).

Проведено статистичний аналіз результатів навчання стохастики на різних спеціальностях в педагогічному університеті. В експериментальній групі 2015 навчального року було 26 студентів. В контрольній – 2014 навчального року 25 студенти. Після закінчення навчання курсу «Теорія

ймовірностей і математична статистика» студенти складають екзамен. На екзамені перевіряються знання студентів, пов’язані із застосуванням визначень та теорем теорії ймовірностей, з’ясовується, чи володіють студенти знаннями із шкільного курсу стохастики та його особливостями, визначається рівень сформованих знань, умінь і навичок необхідних для розв’язування стохастичних задач та для здійснення майбутньої професійної діяльності.

Оцінювання екзамену проводиться за системою ECTS:

- *90-100 балів* (оцінка – «відмінно», «A»). Студент повинен чітко і вільно володіти термінологією, давати логічні, обґрунтовані відповіді на теоретичні питання, вміти визначати головне у вивченому матеріалі, грамотно виконувати практичні та лабораторні завдання, пройти два модульні тести. Роботи мають бути виконані охайно, без суттєвих помилок. Допускається одна неточність у кожному завданні, що істотно не впливає на виконання завдання в цілому;
- *70-89 балів* (оцінка – «добре», «B», «C»). Студент має чітко і вільно володіти термінологією, грамотно виконувати практичні та лабораторні завдання, перелік яких відповідає навчальному елементу дисципліни, пройти два модульні тести. Робота повинна бути виконана охайно, проте можливі одна-дві помилки, що суттєво не впливає на результати виконання завдання в цілому;
- *60-69 балів* (оцінка – «задовільно», «D», «E»). Студент не завжди чітко володіє термінологією, допускає змішування понять, не зовсім правильно виконує практичні та лабораторні завдання, пройшов два модульні тести, подає самостійно оформлені завдання, перелік яких відповідає навчальному елементу дисципліни. Допускається три і більше несуттєвих помилок;
- *1-59 балів* (оцінка – «незадовільно», «F», «FX»). Студент виконав завдання не в повному обсязі. Допускав грубі помилки в роботі, не

володіє спеціальною термінологією. Відповіді оцінюються як такі, що оформлені недбало, з помилками.

Статистичне опрацювання результатів експерименту було проведено з використанням непараметричних критеріїв Вілкоксона, Манна-Уітні. Перевірка даних, використовуючи *t*-критерій, неможлива, оскільки дані розподілені не за нормальним розподілом. Критерій Манна-Уітні застосовується для визначення відмінностей в розподілах ймовірностей на множинах значень випадкових величин на основі порівняння результатів вивчення властивостей цих розподілів за наборами незалежних вибіркових даних [53]. Застосування даного критерію для перевірки гіпотез допустима за умов виконання наступних вимог: 1) вибірки є випадкові; 2) вибірки незалежні; 3) шкала вимірів не вище шкали назв з кількома категоріями.

Сформулюємо нульову гіпотезу про відсутність відмінностей у знаннях, у контрольній і експериментальній групах, що порівнюються під час розв'язування задач з теорії ймовірностей, а також знання з дисциплін, які є математичною основою курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика». Нехай випадкова величина X – число балів, отриманих студентами експериментальної групи на екзамені після проведення експерименту; випадкова величина Y – число балів, отриманих студентами контрольної групи на екзамені після проведення експерименту.

Обсяг першої групи дорівнює 26, обсяг другої групи –25. Розташуємо 26+25=51 значення об'днаної вибірки у порядку зростання, тобто у вигляді варіаційного ряду. Кожному елементу поставимо у відповідність порядковий номер – ранг. Якщо кілька елементів співпадають за величиною, то кожному з них надається значення, яке дорівнює середньому арифметичному їх номерів. Останній елемент в ранжованій об'єднаній вибірці повинен мати номер 51. Цей факт можна використати для перевірки правильності ранжування.

Значення випадкових величин та відповідні їм ранги запишемо у вигляді Таблиця 3.1.

Таблиця 3.1

Проранжовані значення випадкових величин

N	X_i	Y_i	r	N	X_i	Y_i	r	N	X_i	Y_i	r
1		35	4,5	18		70	18,5	35	85		33,5
2		35	4,5	19	70		18,5	36	90		38,5
3	35		4,5	20		70	18,5	37	90		38,5
4		35	4,5	21	75		22,5	38		90	38,5
5		35	4,5	22		75	22,5	39	90		38,5
6	35		4,5	23	75		22,5	40	90		38,5
7		35	4,5	24		75	22,5	41	90		38,5
8		35	4,5	25	80		28	42		92	42,5
9	45		9	26		80	28	43	92		42,5
10		60	10	27	80		28	44	95		47
11		62	11	28		80	28	45		95	47
12		65	14	29	80		28	46	95		47
13	65		14	30		80	28	47		95	47
14		65	14	31	80		28	48	95		47
15		65	14	32	85		33,5	49	95		47
16		65	14	33		85	33,5	50		95	47
17	70		18,5	34	85		33,5	51	98		51

У зв’язку з тим, що ніяких попередніх даних про стан значень у двох групах немає, застосуємо двосторонній критерій Вілкоксона, Манна-Уітні, тобто проведемо перевірку гіпотези H_0 та альтернативної гіпотези H_1.

Гіпотеза H_0 – середнє значення оцінок після проведення експерименту в контрольній групі не менше середнього значення оцінок в експериментальній групі, тобто $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m}$, де n і m – кількість студентів у контрольній та експериментальній групах відповідно, а x_i та y_i – оцінки студентів. Гіпотеза H_1 – середнє значення оцінок після проведення експерименту в контрольній групі менше середнього значення оцінок експериментальної групи, тобто $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} < \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m}$.

На основі даних таблиці обчислимо значення статистики критерію за

формулою:

$$U = \sum_{i=1}^{26} r(X_i) - \frac{n(n+1)}{2} = 525.5 - 325 = 200.5.$$

Об'єм кожної з вибірок більший ніж 20, тому критичне значення статистики критерію знайдемо за формулою

$$W_{\alpha/2} = \frac{n_1 n_2}{2} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

де $Z_{\alpha/2}$ – квантиль нормального розподілу.

Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Звідси $W_{\alpha/2} = 429.02$.

Таким чином справджується нерівність $U < W_{\alpha/2}$. Згідно правила прийняття рішення за використання двостороннього критерію Манна-Уітні, нульова гіпотеза H_0 відхиляється на рівні $\alpha = 0{,}05$ і приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Прийняття цієї гіпотези означає, що на основі аналізу експериментальних даних можна зробити висновок про різницю в законах розподілу випадкових величин X та Y або про відмінність рівнів знань студентів контрольної та експериментальної груп.

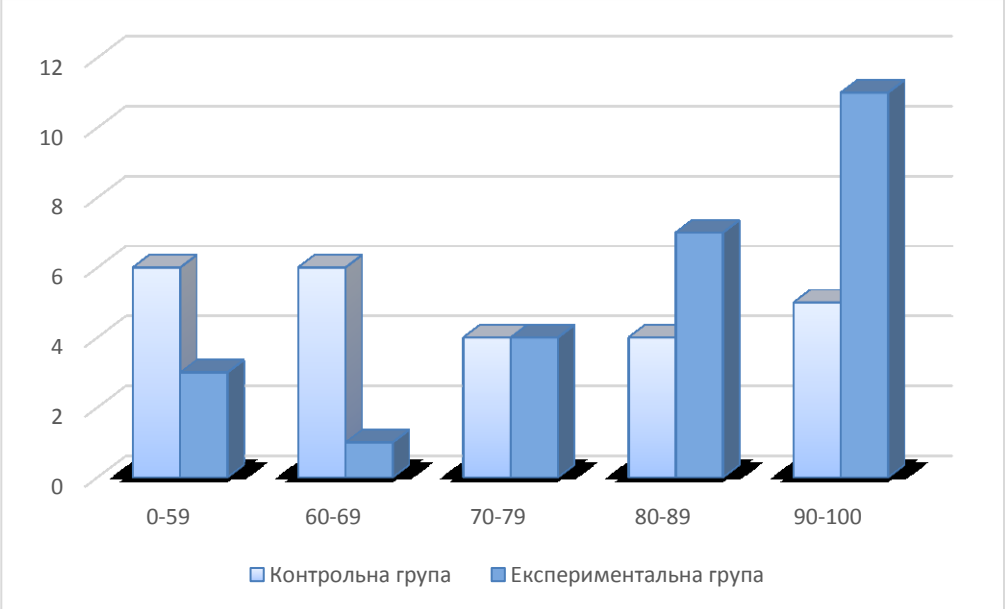


Рис. 3.1. Розподіл студентів за рівнем успішності з теорії ймовірностей та математичної статистики після формувального етапу експерименту

Також даний факт підтверджується тим, що середній бал за екзамен після навчання за пропонованою комп'ютерно-орієнтованою методичною системою у контрольній та експериментальній групах дорівнює 67 та 79 балів відповідно.

Для візуального відображення доведеного факту згрупуємо отримані на екзамені бали за інтервалами «0-59», «60-69», «70-79», «80-89», «90-100». Порівняння кількості студентів, які набрали кількість балів з кожного діапазону для контрольної та експериментальної груп наведено на рис. 3.1.

Аналіз проведення аудиторних занять на основі зміненого змісту та використання інформаційно-комунікаційних технологій показав, що, використовуючи нові технології, можна розширити можливості опрацювання експериментальних даних та сформувати нові види навчальної діяльності, зробити навчання розвивальним та таким, що змінюється з часом. Під час навчання формуються не лише фундаментальні стохастичні знання, науковий світогляд, але і удосконалюються уміння використовувати комп'ютер у навчанні. Таким чином, у процесі навчання теоретичних основ інформатики за пропонованою комп'ютерно-орієнтованою методичною системою підвищують успішність студентів, рівні їх загальнокультурних і професійних компетентностей, готовність до майбутньої професійної діяльності.

Отже, на основі отриманих даних, можна зробити висновок про те, що дана модель комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики, зокрема стохастики, студентів педагогічних університетів є досить ефективною, оскільки сприяє підвищенню успішності студентів стосовно вивчення дисципліни; стимулює бажання використовувати інформаційні технології навчання у майбутній професійній діяльності; підвищує мотивацію до навчання.

Висновки до третього розділу

1. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчально-виховному процесі сприяє підвищенню його ефективності, всебічному і гармонійному розвитку особистості майбутніх вчителів математики, розкриттю їх творчого потенціалу, суттєво впливає на зміст, форми, методи і засоби навчання. Використання вдало дібраних комп'ютерних програм забезпечує розвиток творчих здібностей студентів, стимулює їхню пізнавальну активність, підсилює інтелектуальний розвиток. Разом з тим, підвищується працездатність, зацікавленість студентів різними видами діяльності, поліпшується просторова уява, пам'ять, логічне мислення, розширюється їхній світогляд. Тому застосування комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математичних основ інформатики, зокрема стохастики, є досить перспективним, відкриває широкі можливості вдосконалення навчально-виховного процесу.

2. Аналіз результатів педагогічного експерименту дає підстави для висновків про правильність сформульованої на початку дослідження гіпотези про те, що навчання стохастики з педагогічно виваженим і методично вмотивованим використанням у навчальному процесі засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій буде сприяти вдосконаленню процесу навчання та застосуванню основних понять і методів стохастики під час розв'язування проблем навчання більшості предметів, які вивчають майбутні вчителі математики, активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів та ефективність розробленої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх учителів математики математичних основ інформатики (зокрема, стохастики).

Висновки

Відповідно до мети та поставлених завдань в процесі педагогічного дослідження одержані такі основні результати:

- вивчено та узагальнено вітчизняний і зарубіжний досвід навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики) з використанням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання;
- з'ясовано рівень відображення в навчальних програмах вищих педагогічних навчальних закладів змістової лінії стохастики та визначено її наповнення;
- визначено основні компоненти системи компетентностей, якими повинні оволодіти майбутні вчителі математики в умовах обов'язкового вивчення стохастики, на основі комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики (зокрема, стохастики);
- уточнено окремі поняття курсу стохастики, який вивчається в педагогічному університеті, та елементів стохастики, що вивчаються в середніх навчальних закладах, зокрема поняття випадкової події, ймовірності події, залежних і незалежних подій, поняття випадкової величини, типів розподілів ймовірностей та їх описів і ін.;
- розроблено основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики);
- досліджено внутріпредметні та міжпредметні зв'язки стохастики з іншими математичними дисциплінами (геометрія, алгебра, математичний аналіз та ін.);
- з'ясовано зв'язки курсу стохастики вищих навчальних закладів з шкільними курсами геометрії та алгебри і початків аналізу, зокрема тем, де формуються поняття міри множини – довжини лінії, площі

плоскої фігури, об’єму тіла, маси тіла, міри дискретної множини – кількості елементів у множині і т.д.;

- проведено експериментальну перевірку ефективності розроблених компонентів комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики);
- розроблено дистанційний курс “Теорія ймовірностей та математична статистика” для навчання майбутніх вчителів математики та інформатики.

Отримані результати дослідження дають підстави зробити такі висновки:

1. Пропонований підхід до навчання математичних основ інформатики (зокрема, стохастики) дає можливість значною мірою забезпечити до деякої міри фундаменталізацію теоретичної підготовки майбутніх учителів математики, поглиблення і розширення їхньої теоретичної бази знань, їх придатність до практичних застосувань, в тому числі до науково-методичних досліджень.

2. Застосування пропонованої комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики дає можливість забезпечити мотивацію пізнавальної діяльності студентів, диференціацію навчання, значно активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів, інтенсифікувати навчальний процес, що сприяє формуванню системи загальнокультурних та професійних компетентностей майбутніх вчителів на достатньо високих рівнях.

3. Комп’ютерно-орієнтована методична система навчання майбутніх вчителів математики окремих розділів математичних основ інформатики (зокрема, стохастики) повинна будуватись із врахуванням усіх компонентів і особливостей навчального процесу, бути орієнтованою на професійно спрямоване навчання студентів, становлення і розвиток системи їхніх загальнокультурних і професійних компетентностей.

4. Загальний рівень стохастичної підготовки випускників педагогічних вищих навчальних закладів не відповідає професійним вимогам, які пред'являються до сучасного фахівця. Досягти необхідного професійного рівня можна тільки на основі комплексного підходу, цілеспрямованих і поетапних дій, науково-обгрунтованих методів управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів. Для організації ефективної підготовки майбутніх вчителів математики до роботи в умовах інформатизації навчального процесу необхідно в курсі стохастики модернізувати існуючі зміст і засоби навчання, форми організації навчального процесу, методи та дидактичні принципи, спрямовані на істотне удосконалення методичних систем навчання, зокрема за рахунок фундаметалізації змісту навчання, інформатизації навчального процесу на основі принципів педагогічно виваженого та методично вмотивованого і доцільного використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі.

5. Використання інформаційних технологій навчання стохастики майбутніх вчителів математики, орієнтоване на міждисциплінарну предметну підготовку, може внести істотний внесок у їх професійну підготовку.

6. Врахування типології програмних засобів надає можливість за рахунок відповідного функціонального наповнення технологій навчання інтенсифікувати процес навчання стохастики.

7. Використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні майбутніх вчителів математики має бути педагогічно виваженим і методично вмотивованим та потребує детального ознайомлення викладачів із відповідними психічними, фізіологічними, віковими та інтелектуальними особливостями студентів вищих навчальних закладів, а також майбутніх вчителів з особливостями психічного розвитку учнів, їхніми фізіологічними, віковими та інтелектуальними особливостями.

8. В процесі створення комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання стохастики майбутніх вчителів математики використовуються концептуальні положення як традиційного підходу до створення методичних

систем навчання, так і нові підходи, які використовуються в процесі розробки методичних систем навчання інформатики та математики для ВНЗ і загальноосвітніх шкіл. На таких засадах створена методична система навчання певної дисципліни являє собою складну динамічну систему, яка є первинною відносно самої навчальної дисципліни.

9. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання у ВНЗ повинні розроблятися на основі новітніх педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій з орієнтацією на педагогічно виважене та методично вмотивоване і доцільне використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій та інформаційних ресурсів в навчальному процесі.

10. Визначено мету, завдання, навчально-методичне та програмне забезпечення, методи, форми і засоби навчання стохастики майбутніх вчителів математики, а також зміст навчального матеріалу курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика». Зокрема, слід підкреслити, що вивчення основ теорії ймовірностей пропонується розпочинати з вивчення однієї з ймовірнісних мір – статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ (відносної частоти відбування події A в серії із n випробувань), яка задовільняє всі аксіоми теорії ймовірностей, і разом з тим набагато доступніша для розуміння учнями, аніж гіпотетична абстрактно введена ймовірнісна міра, оскільки відповідні теоретичні положення можуть бути перевірені в реальному експерименті.

11. Аналіз результатів педагогічного експерименту дає підстави для висновків про правильність сформульованої на початку дослідження гіпотези про те, що навчання стохастики з педагогічно виваженим і методично вмотивованим використанням у навчальному процесі засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій буде сприяти вдосконаленню процесу навчання та застосуванню основних понять і методів стохастики під час розв'язування проблем навчання більшості предметів, які вивчають

майбутні вчителі математики, активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів та ефективність розробленої комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання майбутніх учителів математики математичних основ інформатики (зокрема, стохастики).

Отримані результати дали змогу намітити деякі напрямки подальших досліджень:

- розробка системи задач та вправ відповідно до удосконалених теоретичних відомостей;
- удосконалення компонентів комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання математичних основ інформатики;
- розробка методичної системи дистанційного навчання математичних основ інформатики.

Список використаних джерел

1. Абдуллина О.А. Общепедагогическая подготовка учителя в системе высшего педагогического образования: для пед. спец. высш. учеб. заведений / О.А. Абдуллина – М.: Просвещение, 1990. – 141 с.
2. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / [А.М. Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін.] ; за ред. А.М. Колмогорова. – К.: Освіта, 1994. – 350 с.
3. Алексюк А.М. Педагогіка вищої освіти України: Історія. Теорія: підручник для студ., асп. та мол. викл. вузів / А.М. Алексюк. — К.: Либідь, 1998. – 558 с. (Міжнародний фонд "Відродження").
4. Андреев В.И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности. Основы педагогики творчества / В.И. Андреев. – Казань: Казанский университет, 1988. – 240 с.
5. Аносов І.П. Людина в Інтернет-технологічному освітньому процесі: до постановки проблеми / І.П. Аносов // Педагогіка і психологія формувань творчої особистості: проблеми і пошуки. Збірник наукових праць. – Київ-Запоріжжя. – 2002. – Вип.24. – С. 133-139.
6. Асеев В. Г. Мотивация учебной деятельности и формирование личности / В.Г. Асеев. – М., 1976. – 221 с.
7. Бадмаев Б.Ц. Методика преподавания психологии: учеб. пос. для студ. высш. учеб. заведений / Б.Ц. Бадмаев. – М.: ВЛАДОС, 1999. – 304 с.
8. Балл Г.О. Культуротвірна функція психологічної науки: монографія / Г.О. Балл. – Кіровоград: Імекс-ЛТД, 2014. – 264 с.
9. Баханов К.О. Що таке технологія навчання? / К.О. Баханов // Шлях освіти. – 1999. – №3. – С. 24.
10. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009. – 288 с.
11. Бевз Г.П. Підручник з алгебри 7-9 кл. / Г.П.Бевз. – К.: Школяр, 2002. – 303 с.
12. Бергер П. Социальное конструирование реальности. Трактат по социологии знания / П. Бергер, Т. Лукиан. – М.: Медиум, 1995. – 323 с.

13. Беспалько В.П. Инструменты диагностики качества знаний учащихся / В.П. Беспалько // Школьные технологии. – 2006. – №2. – С.138-150.
14. Бидайбеков Е.Ы. О необходимости подготовки и переподготовки педагогических кадров в области информатизации образования / Е.Ы. Бидайбеков, Г.Б. Камалова, Е.А. Киселева // Научно-методический журнал «Педагогика и психология». – 2011. – №1. – С. 164-167.
15. Биков В.Ю. Сучасні завдання інформатизації освіти [Електронний ресурс] / В. Ю. Биков // Інформаційні технологій і засоби навчання – 2010. – № 1(15). – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/ ITZN/em15/emg.html.
16. Биков В.Ю. Теоретико-методологічні засади створення і розвитку сучасних засобів та е-технологій навчання / В.Ю. Биков // Розвиток педагогічної і психологічної наук в Україні 1992-2002. Збірник наукових праць до 10-річчя АПН України / Академія педагогічних наук України. – Ч. 2. – Харків: "ОВС", 2002. – С. 182-189.
17. Биляй И.М. Начала стохастики. Факультативный курс для учащихся старшей школы / И.М. Биляй, М.И. Жалдак, Г.А. Михалин. – Киев: Издательство НПУ имени М.П. Драгоманова, 2014. – 168 с.
18. Біляй І.М. Взаємозв’язки стохастики і геометрії / І.М. Біляй // Математика в сучасній школі – 2013. –№ 3. – С. 23–27.
19. Біляй І.М. Використання міжпредметних зв’язків та аналогій у процесі навчання теорії ймовірностей майбутніх учителів математики / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2012. – Випуск 12(19). – С. 3–15.
20. Біляй І.М. Використання педагогічного програмного засобу Gran1 у процесі вивчення деяких понять стохастики [Електронний ресурс] / І.М. Біляй // Інформаційні технології і засоби навчання. –2015. – Том 49, № 5. – С. 134-151. — Режим доступу: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/

itlt/issue/view/75/showToc. – Заголовок з екрану.

21. Біляй І.М. Дослідження залежності графіка функції розподілу ймовірностей від структури подій / І.М. Біляй // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2015. – Випуск 17(24). – С. 132–142.
22. Біляй І.М. Закон великих чисел для статистичних ймовірностей і задання ймовірності за Мізесом / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: збірник наукових праць. Випуск X: в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2012. – Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – С. 77-93.
23. Біляй І.М. Математичне сподівання, теорема про середнє та обчислення площ та об'ємів деяких фігур / І.М. Біляй // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2012. – Випуск 12(19). – С. 141–153.
24. Біляй І.М. Початки стохастики: факультативний курс для учнів старшої школи / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 162 с.
25. Біляй І.М. Про зв'язок ймовірнісних моделей з деякими іншими моделями реального світу / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2011. – Випуск 10(17). – С. 25–39.
26. Біляй І.М. Стохастика: посібник для вчителів / М.І. Жалдак, І.М. Біляй. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 302 с.
27. Біляй І.М. Формування поняття випадкової величини за допомогою наочних методів навчання / Біляй І.М. // Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті: матеріали І-ї Міжнародної науково-практичної конференції (Ченстохова – Ужгород –

Дрогобич, 19-20 листопада 2015 р.) : Посвіт, 2015. – С. 192-193.

28. Богданова І.М. Інформаційно-модульна технологія як умова забезпечення саморозвитку особистості майбутнього вчителя / І.М. Богданова // Наука і освіта. – 2002. – №1. – С.76-79.
29. Богоявленский Д.Н. Психология усвоения знаний в школе / Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.
30. Болюбаш Н.М. Використання сучасних інформаційних технологій у професійній підготовці економістів [Електронний ресурс] / Н.М. Болюбаш // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2009. – №5 (13). Режим доступу: http://www.ime.edu-ua.net/em13/emg.html.
31. Бондаренко Т.В. Інформаційні технології на уроці математики / Т.В. Бондаренко, І.І. Дмитренко // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – 2001. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – С. 29-30.
32. Боровков А.А. Теория вероятности / А.А. Боровков. – [4-е изд.] – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 470 с.
33. Бродський Я.С. Про введення ймовірнісно-статистичної змістової лінії в шкільний курс математики / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2000. – №4. – С. 19-24.
34. Бродський Я.С. Про ймовірнісно-статистичну змістову лінію у шкільному курсі математики / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2006. – №7. – С. 2-11.
35. Бродський Я.С. Про міжнародний досвід моніторингу математичної підготовки учнів середніх навчальних закладів / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2001. – № 3. – С. 30-36.
36. Брушлинский А.В. Мышление и прогнозирование / А.В. Брушлинский. – М.: Мысль, 1979. – 230 с.
37. Булах І.Є. Мотивація навчання і валідизація оцінювання рівня знань / І.Є. Булах, І.М. Шило // Педагогіка і психологія. Вісник АПН. – 1996. –

№3. – С. 125-129.

38. Бунимович Е.А. О теории вероятностей и статистике в школьном курсе / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев, Ю.Н. Тюрин [и др.] // Математика в школе. –2009. – № 7. – С. 3-13.
39. Васильченко І.П. Сучасна математика та її викладання / І.П. Васильченко // Вища школа. – 2001.– № 6. – С. 33–37.
40. Васильченко І. Удосконалення та реформування освітньої системи у провідних країнах світу / І. Васильченко, З. Васильченко // Вища школа. – 2009. – № 5. – С. 77-89.
41. Вдовенко М.І. Класифікація електронних засобів навчання: постановка проблеми / М.І. Вдовенко // Військова освіта: зб. наук. праць. – 2006. – № 2 (18). – С.172-180.
42. Вербицкий А.А. Проблема трансформации мотивов в контекстном обучении / А.А. Вербицкий, Н.А. Бакаева // Вопросы психологии. – 1997. – №3. – С. 12-15.
43. Вища освіта в Україні. Нормативно-правове регулювання / За заг. ред. А.П. Зайця, В.С. Журавського. – К.: ФОРУМ, 2003. – 950 с.
44. Вітвицька С.С. Основи педагогіки вищої школи: методичний посібник для студентів магістратури / С.С. Вітвицька. – Київ: Центр навчальної літератури, 2003. – 316 с.
45. Внесок Петра Яковича Гальперіна у розвиток педагогічної та вікової психології (до 110-річчя від дня народження) [Електронний ресурс] / Володимир Бондар, Юлія Приходько // Вісник Інституту розвитку дитини. – Режим доступу: http://www.stattionline.org.ua/pedagog/85/15481-vnesok-grigoriya-silovicha-kostyuka-u-rozvitok-vitchiznyano%D1%97-psixologichno%D1%97-nauki-do-110-richchya-vid-dnya-narodzhennya.html.
46. Выготский Л.С. Детская психология : Собрание сочинений в 6 т. / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1984. – Т. 4. – 432 с.
47. Гальперин П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П.Я. Гальперин. – Москва : Издательство Московского университета, 1985. – 45 с.

48. Гихман И.И. Теория вероятностей / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.
49. Глушков В.М. Основы безбумажной информатики / В.М. Глушков. – М: Наука, 1987. – 552 с.
50. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко – М.: Наука, 1988. – 448 с.
51. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник / С.У. Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.
52. Горошко Ю.В. Система інформаційного моделювання у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Юрій Васильович Горошко; наук. консультант М.І. Жалдак; Чернігівський нац. пед. ун-т імені Т. Г. Шевченка. – Чернігів, 2013. – 470 с.
53. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях: Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. – М.: Просвещение, 1977. – 136 с.
54. Гриб'юк О.О. Психолого-педагогічні вимоги до комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики в контексті підвищення якості освіти / О.О. Гриб'юк // Higher Education of Ukraine in the context of integration to European Educational Spase. – 2013. – № 4 (46) – С. 110-123.
55. Гудирева О.М. Вплив нових інформаційних технологій навчання на активізацію навчально-пізнавальної діяльності студентів / О.М. Гудирева // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: збірник науких праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2003. – Вип. 6. – С. 25-36.
56. Гулюкина Н.А. Педагогический тест: этапы и особенности конструирования и использования: учеб. пособие / Н.А. Гулюкина, С.В. Клишина. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2001. – 132 с.
57. Гуревич Р. Можливості новітніх інформаційних технологій у підготовці педагогічних кадрів / Р. Гуревич, А. Коломієць // Трудова підготовка в закладах освіти. – 2002. – №2. – С. 52-53.

58. Дем’яненко В.М. Підготовка вчителів до використання мультимедійних засобів навчання / В.М. Дем’яненко // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2002. – Випуск 5. – С. 233-237.
59. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс] / Постанова Кабінету міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392. – Режим доступу: http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#n9.
60. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс] / Постанова Кабінету міністрів України від 14 січня 2004 р. № 24. – Режим доступу: http://mon.gov.ua/content/%D0%9E%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B0/derj-standart.pdf.
61. Джерджен К.Д. Социальное конструирование и педагогическая практика / [К.Д. Джерджен; пер. с англ. А.М. Корбута; под ред. А.А. Забирко] // Образовательные практики: амплификация маргинальности: Сборник. – Мн.: Технопринт, 2000. – 184 с.
62. Дистанційне навчання: психологічні засади: монографія / [М.Л. Смульсон, Ю.І. Машбиць, М.І. Жалдак та ін. ; за ред. М.Л. Смульсон]. – Кіровоград : Імекс-ЛТД, 2012. – 240 с.
63. Ершов А.П. Опыт применения ЭВМ в школьном учебном процессе / А.П. Ершов // Материалы Всесоюзной конференции «Применение ЭВМ для обеспечения учебного процесса и управления образованием». – Свердловск, 1985. – С. 11–15.
64. Єфименко В.В. Методика навчання комп'ютерної математики майбутніх учителів інформатики : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / В.В. Єфименко; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. - Київ, 2015. - 22 с.
65. Жалдак М.І. Деякі властивості ймовірнісних моделей стохастичних експериментів / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник наукових праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – № 3. – С. 49-68.

66. Жалдак М.І. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою / Жалдак М.І., Михалін Г.О. – К.: Шкільний світ, 2006. – 120 с.
67. Жалдак М.І. Психолого-педагогічні вимоги до комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / О.О. Гриб'юк, М.І. Жалдак // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – № 14 (21). –С. 3-19.
68. Жалдак М.І. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики: для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів / Жалдак М.І., Михалін Г.О., Кузьміна Н.М. – Полтава: «Довкілля-К», 2010. – 728 с.
69. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – [3 вид., доповнене]. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 340 с.
70. Жалдак М.І. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, С.Я. Деканов. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
71. Жалдак М.І. Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування / Жалдак М.І., Михалін Г.О., Деканов С.Я. // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, 2007. – Випуск 5 (12). – С. 3-9.
72. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики / М.І. Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. пр. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. – № 7. – С. 3–16.
73. Жалдак М.І. Про коректність введення понять «випадкова подія», «ймовірність» та «випадкова величина» у шкільному курсі математики / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ імені М.П.

Драгоманова, 2008. – №6(13) – С. 3-12.

74. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Посібник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 708 с.
75. Жильцов О.Б. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики студентів нематематичних спеціальностей : научное издание / О. Б. Жильцов // Вісник Київського інституту бізнесу та технологій / Київський ін-т бізнесу та технологій. – Київ : КІБІТ, 2007. – Вип. 1(6) . – С. 97-99.
76. Зайченко І.В. Педагогіка. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів / І.В. Зайченко. – [2-е вид.] – К.: «Освіта України», «КНТ», 2008. – 528 с.
77. Закон України «Про Національну програму інформатизації» [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/74/98-%D0%B2%D1%80
78. Зязюн І.А. Педагогіка добра: ідеали і реалії: Науково-методичний посібник / І.А. Зязюн. – К.: МАУП, 2000. – 312 с.
79. Инновационное обучение: стратегия и практика [под ред. В. Ляудис]. – М.: Новая школа, 1994. – 144 с.
80. Історія педагогіки: курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. / К., 2004. –171 с. – Режим доступу: http://www.info-library.com.ua/books-book-69.html
81. Кадемія М.Ю. Використання нових інформаційних технологій у підготовці педагогічних працівників / М.Ю. Кадемія // Теоретичні та методичні засади розвитку педагогічної освіти: педагогічна майстерність, творчість, технології: Зб. наук. праць / За заг. ред. Н.Г. Ничкало. – Х. : НТУ „ХПІ”, 2007. – С. 471-472.
82. Кан-Калик В.А. Грамматика общения / В.А. Кан-Калик. – М.: Роспедагентство, 1995. – 108 с.

83. Клочко В.І. Формування професійно спрямованої іншомовної компетентності фахівців технічних та економічних спеціальностей засобами сучасних інформаційних технологій: монографія / В. І. Клочко, М.Г. Прадівлянний. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 196 с.
84. Кобильник Т.П. Методична система навчання математичної інформатики у педагогічному університеті: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Тарас Петрович Кобильник; НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2009. – 256 с.
85. Коваленко О.Е. Методика професійного навчання: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / О.Е. Коваленко. – Х.: Вид-во НУА, 2005. – 360 с.
86. Коваленко В.Г. Алгебра: Експериментальний навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. вивченням математики в спеціалізов. шк. фіз.-мат. профілю / В.Г. Коваленко, В.Я. Кривошеєв, О.В. Старосєльцева. – [2-ге вид.] – К.: Освіта, 1996. – 286 с.
87. Коваленко О.Е. Методика професійного навчання. Тестові завдання для самостійної роботи: навчальний посібник для студентів інженерно-педагогічних спеціальностей / Коваленко О.Е., Шматков Є.В. – Х., 2005. – 439с.
88. Коваль Л. В. Професійна підготовка майбутніх педагогів: культуротворчий вимір / Л.В. Коваль // Діяльність психолого-педагогічної освіти та мистецт Бердянського державного педагогічного університету (2012–2013 навчальний рік) / [відп. ред.. Л.В. Коваль, О.А. Халабузар]. – Бердянськ : Видавець Ткачук О.В., 2013. – С. 5–23.
89. Коваль Т.І. Підготовка викладачів вищої школи: інформаційні технології у педагогічній діяльності : навч.-метод. посіб. / Т.І. Коваль. - К.: Вид. центр НЛУ, 2009. - 380 с.
90. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 159 с.
91. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В.. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

92. Колчук Т.В. Методика дистанційного навчання геометрії учнів основної школи : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 / Т.В. Колчук; Київ, 2014. – 20 с.
93. Концепція інформатизації загальноосвітніх навчальних закладів, комп'ютеризації сільських шкіл (витяг) // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2001. – №4. – С. 43.
94. Корсунська Н.О. Оптимізація комп'ютерних технологій навчання / Н.О. Корсунська // Професійно-технічна освіта. – 1998. – № 1. – С. 33-38.
95. Костюченко А.О. Що потрібно знати програмістові, який працює з комп'ютерною побудовою графіків функцій / А.О. Костюченко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – 2010. – №. 8. – С. 190-195.
96. Кравчук В.Р. Алгебра: підручник для 9 кл. / В.Р. Кравчук, М.В. Підручна, Г.М. Янченко. – [Вид. 3-є, переробл. та доп.] – Т.: Підручники і посібники, 2007. – 256 с.
97. Кремень В.Г. Освіта і наука в Україні – інноваційні аспекти. Стратегія. Реалізація. Результати / В.Г. Кремень. – К.: Грамота, 2005. – 448 с.
98. Крысько В. Г. Психология и педагогика : Схемы и комментарии / В. Г. Крысько. – М. : Владос-Пресс, 2001. – 368 с.
99. Кудрявцев Л.Д. О тенденциях и перспективах математического образования [Электронный ресурс] / Л.Д. Кудрявцев, А.И. Кирилов, М.А. Бурковская, О.В. Зимина. – Режим доступа: http://www.academiaxxi.ru/Meth_Papers/Paper2.htm.
100. Кузнецов Э. И. Общеобразовательные и профессионально-прикладные аспекты изучения информатики и вычислительной техники в пед. институте: автореф. дис... докт. пед. наук. – М., 1990. – 38 с.
101. Лапчик М.П. Методика преподавания информатики / М.П. Лапчик. – М.: Академия, 2001. – 624 с.
102. Леднев В.С. Содержание образования: сущность, структура, перспективы / В.С. Леднев. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.

103. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность / Избранные психологические произведения: В 2т. / Под ред. В.В. Давыдова и др. – М.: Политиздат, 1983. – Т. 2. – 584 с.
104. Лиходєєва Г.В. Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики : автореф. дис ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Г.В. Лиходєєва . – Київ, 2009 . – 20 с.
105. Ліпінська А.В. Використання комп'ютерів у навчанні елементів стохастики в старшій школі / А.В. Ліпінська // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2008. – № 1. – С. 39-42.
106. Ліпінська А.В. Історія розвитку стохастики / А.В. Ліпінська // Математика в школі. – 2007. – № 4. – С.49-53, № 5. – С. 51-55.
107. Максименко С.Д. Генеза існування особистості / Сергій Дмитрович Максименко. – К.: Вид-во ООО "КММ", 2006. – 240 с.
108. Малати Дж. Математическое образование в странах третьего мира – надежда для мирового развития всего математического образования в XXI веке (рус.) / Дж. Малати // Статья на круглом столе «Информационные средства обучения для повышения качества метематического образования», январь 2004 года [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://conferens.sumdu.edu.ua/ dl2004/ru/date/seminar/ 2004_01_22/article/.
109. Махмутов М.И. Современный урок: вопросы теории / М.И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1981. – С. 36.
110. Машбиц Е. И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е.И. Машбиц. – К.: Высшая школа, 1987. – 223 с.
111. Машбиц Е.И. Информационные технологии обучения и психологическое развитие молодежи / Е.И. Машбиц // Нові технології навчання: Наук.-метод. зб. / Кол. авт. – К.: Наук.-метод. центр вищої освіти, 2004. – Спецвипуск. – С. 84-87.
112. Машбиц Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е.И. Машбиц. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.

113. Машбиць Ю.І. Нові інформаційні технології навчання / Ю. Машбиць // Педагогічна газета. – 2004. – № 11. – С. 3.
114. Машбиць Ю.І. Актуальні психолого-педагогічні проблеми дистанційного навчання / Ю.І. Машбиць, М.Л. Смульсон // Актуальні проблеми психології (психологічна теорія і технологія навчання). – [за ред. С.Д. Максименка, М.Л. Смульсон]. – К.: Міленіум, 2005. – Т. 8. Вип. 1. – С. 6-23.
115. Мерзляк А.Г. Алгебра: Підручник для 9 класу загальноосв. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 320 с.
116. Мерзляк А.Г. Математика: Підручник для 6 класу / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2006. – 304 с.
117. Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г.О. Михалін. – Київ: РННЦ «ДІНІТ», 2003. – 320 с.
118. Мойсеюк Н.Є. Педагогіка. Навчальний посібник / Н.Є. Мойсеюк. – К., 2007. – 656 с.
119. Моляко В.О. Здібності, творчість, обдарованність: теорія, методика, результати досліджень / В.О. Моляко, О.Л. Музика. – Житомир: Видавництво ПП Рута, 2007. – 319 с.
120. Монахов В.М. Методологические вопросы ИТ- образования, связанные разработкой технологий построения систем образования с наперёд заданными свойствами: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. / В.М. Монахов – М.: ИНТУИТ.РУ. – 2010.
121. Монахов В.М. Что такое информационная технология обучения / В.М. Монахов // Математика в школе. – 1990. – № 2. – С. 47–54.
122. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – [4-е изд.] – М.: Мнемозина, 2002. – 192 с.
123. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики: навч. посіб.: у 4 ч. / Н.В. Морзе; за ред. акад. М.І. Жалдака. – К.: Навчальна книга, 2004. –

Ч. ІІІ: Методика навчання інформаційних технологій – 196 с.

124. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики: навч. посіб.: у 4 ч. / Н.В. Морзе; за ред. акад. М.І. Жалдака. – К.: Навчальна книга, 2003. – Ч. ІІ: Методика навчання інформаційних технологій – 287 с.
125. Морзе Н.В. Методика навчання інформатики: навч. посіб.: у 4 ч. / Н.В. Морзе; за ред. акад. М.І. Жалдака. – К.: Навчальна книга, 2003. – Ч. І: Загальна методика навчання інформатики. – 254 с.
126. Морзе Н.В. Основи інформаційно-комунікаційних технологій : навч. посіб. / Н. В. Морзе. – К. : Вид. група BHV, 2008. – 350 с.
127. Морзе Н.В. Основи методичної підготовки викладача інформатики: монографія / Н.В. Морзе. – К.: Курс, 2003. – 372 с.
128. Морзе Н.В. Підготовка педагогічних кадрів до використання комп'ютерних телекомунікацій / Н.В. Морзе // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – Випуск 6. – 2003. – с.11-25.
129. Морзе Н.В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Наталія Вікторівна Морзе; НПУ імені М.П. Драгоманова. – К., 2003. – 452 с.
130. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір. Режим доступу: http://osvita.ua/doc/files/news/8/800/8.pdf.
131. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів : Математика [Електронний ресурс] / М.І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір. Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1349869088/.

132. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_st.pdf.
133. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_ak.pdf.
134. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_pr.pdf.
135. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/ matem_pogl.pdf.
136. Напрям підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.040302 Педагогіка і методика середньої освіти. Інформатика. [Електронний ресурс] / Галузеві стандарти вищої освіти. – Режим доступу: http://www.uazakon.com/documents/date_7s/pg_ihgzwm.htm
137. Національна Доктрина розвитку освіти в Україні у XXI столітті: Проект // Освіта. – 2001. – №№ 60-62.
138. Никифорова М.А. Преподавание математики в школе и ИКТ / М.А. Никифорова // Математика в школе. – 2005. – № 6. – с.73.
139. Ничкало Н.Г. Неперервна професійна освіта як філософська та педагогічна категорія / Н.Г. Ничкало // Неперервна професійна освіта: теорія і практика: Науково-методичний журнал. – 2001. – Вип. 1. – С. 9-22.
140. Новик И.А. Современные тенденции в проведении исследований по теории и методике обучения естественным наукам (математике, физике, информатике) / И.А. Новик ; [уч. изд. пособие] – [2-е изд. доп.]. – Мн.:

БГПУ, 2005. – 52 с.

141. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / [Е. Полат, М.Ю. Бухаркина, М.В. Моисеева, А.Е. Петров] ; под ред. Е.С. Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 272 с.
142. Олексенко В.М. Інформаційні та педагогічні технології в освіті / В.М. Олексенко // Матеріали V Всеукраїнської конференції "ІТОНТ-2006". – Черкаси: ЧНУ, 2006. – С. 92.
143. Паламарчук В.Ф. Як виростити інтелектуала: Посібник для вчителів / В.Ф. Паламарчук. – Тернопіль: Богдан, 2000. – 152 с.
144. Панішева О. Софізми в теорії ймовірностей / О. Панішева // Математика в школі. – 2003. – № 8. – с.27 – 29.
145. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и колледжей : [под ред. П.И. Пидкасистого]. – М.: Педагогическое общество России, 1998. – 640 с.
146. Пеньков А.В. Использование новой информационной технологии при преподавании математики в старших классах средней школы: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / А.В. Пеньков. – К.: КДПУ ім. М.П. Драгоманова, 1992. – 172 с.
147. Песталоцци И.Г. Избранные педагогические сочинения: в 2-х томах / И.Г. Песталоцци. – М.: Педагогика, 1981. – Т. 1. – 336 с; Т. 2. – 416с.
148. Пєхота О.М. Освітні технології: Навчально-методичний посібник / [Пєхота О.М., Кіктенко А.З., Любарська О.М. та ін.] ; за заг. ред. О.М. Пєхоти. – К.: АСК, 2002. – 255 с.
149. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребёнка. Логика и психология / Жан Пиаже. – М.: Просвещение, 1969. – 659 с.
150. Платонов К.К. Структура и развитие личности / К.К. Платонов. – М.: Наука, – 1986. – 256 с.

151. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников / Адам Плоцки. – М.: Просвещение, 1996. – 191 с.
152. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: підруч. для 7-9 кл. сред. шк. / О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2000. – 223 с.
153. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: підруч. для 10- 11 кл. серед. шк. / О.В. Погорєлов. – К. : Освіта, 2000. – 128 с.
154. Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: Учебное пособие. / Е.С. Полат – Академия, 2008. – 272 с.
155. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук.-метод. посібн. / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. – [за ред. О.І. Пометун]. – К.:Видавництво А.С.К., 2004. – 192 с.
156. Почтовюк С.І. Розвиток критичного мислення студентів технічних коледжів у процесі навчання інформатики: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / С.І. Почтовюк ; наук. керівник М.І. Жалдак ; Нац пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2013. – 22 с.
157. Програма для класів з поглибленим вивченням математики. 8-11 класи / [укл. М.І. Бурда, М.І. Жалдак, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара, М.Й. Ядренко]. – Математика. – 2001. – № 37 (145). – 48 с.
158. Професійні та особисті якості вчителя [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://osvita.ua/vnz/reports/pedagog/14107/.
159. Прохоров Ю.В. Некоторые вопросы теории вероятностей/ Ю.В. Прохоров // Итоги науки. Серия Теория вероятностей. – 1963, 1965. – С. 49-72.
160. Проэкт cleverstudents.ru – математика доступна каждому [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.cleverstudents.ru/definite_integral/figures_area.html.
161. Пышкало А.М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе : авторский доклад по монографии «Методика обучения геометрии в начальных классах», предст. на соиск. уч. степ. докт. пед.

наук / А.М. Пышкало; Акад. пед. наук СССР. – М., 1975. – 60 с.

162. Раков С.А. Комп'ютерна підтримка дослідницького підходу у математичній освіті, болонський процес та профілізація загальноосвітньої школи / С.А. Раков // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. пр. / Ред. кол. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. №2(9). – 2005. – с.42-53.
163. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. … доктора пед. наук: 13.00.02 / Сергій Анатолійович Раков. – Х., 2005. – 516 с.
164. Рамський Ю.С. Логічні основи інформатики: навчальний посібник / Ю.С. Рамський. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2003. – 286 с.
165. Рамський Ю.С. Методична система формування інформаційної культури майбутніх вчителів математики: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02 "Теорія та методика навчання (інформатика)" / Ю.С. Рамський; Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова. – К., 2013. – 560 с.
166. Реньи А. Трилогия о математике: Заметки о преподавании теории вероятностей / Альфред Реньи. – М.: Мир, 1980. – 376 с.
167. Реньї А. Заради чого необхідно викладати теорію ймовірностей? / Альфред Реньї. – Математика в школі, 1998. – №1.
168. Роберт И.В. Информационные технологии в науке и образовании / И.В. Роберт, П.И. Самойленко. – М. – 1998. – 178 с.
169. Роберт И.В. Современные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования / И.В. Роберт. – М.: Школа-Пресс, 1994. – 204с.
170. Романов М.А. Сертификация школьных учителей математики в США / М.А. Романов // Математика в школе. – 2000. – № 5. – с.74-78.
171. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2004. – 713 с.

172. Садовничий В.А. Математическое образование: настоящее и будущее / В.А. Садовничий // Доклад на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», г. Дубна, сентябрь 2000 г. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.1september.ru/ru/mat/2000/no40_1.htm.
173. Севастьянов Б.А. Сборник задач по теории вероятностей / Б.А. Севастьянов , В.В. Чистяков , А.М. Зубков – Москва: Наука, 1980. – 222 с.
174. Сейдаметова З.С. Методическая система уровневой подготовки будущих инженеров-программистов по специальности «Информатика»: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 / З.С. Сейдаметова; НПУ им. М.П. Драгоманова. – К., 2007. – 559 с.
175. Семеріков С.О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: монографія / С.О. Семеріков; наук. ред. акад. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг: Мінерал; НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.
176. Семеріков С.О. Теоретико-методичні основи фундаменталізації навчання інформатичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання (інформатика) / Сергій Олексійович Семеріков; Національний педагогічний ун-т імені М. П. Драгоманова. – К., 2009. – 369 с.
177. Сисоєва С.О. Педагогічні технології: визначення, структура, проблеми впровадження / О.С. Сисоєва // Неперервна проф. освіта: теорія і практика. – 2002. – Вип. 4 (8). – С. 69-79.
178. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики / М.Н. Скаткин. – М.: Педагогика, 1984. – 96 с.
179. Смалько О.А. Вивчення новинок галузі нанотехнологій у вузівських інформатичних курсах / О. А. Смалько // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – 2010. - №. 8. – С. 125-129.

180. Смирнов С.Д. Педагогика и психология высшего образования. От деятельности к личности / С.Д. Смирнов. – М.: Academia, 2001. – 304 с.
181. Смирнова-Трибульская Е.Н. Основы формирования информатических компетентностей учителей в области дистанционного обучения: монографія / Е.Н. Смирнова-Трибульская. – Херсон: Издательство «Айлант», 2007. – 704 с.
182. Смульсон М.Л. Психологія розвитку інтелекту / М.Л. Смульсон. – К.: Нора-друк, 2003. –298 с.
183. Смульсон М.Л. Психологічні особливості віртуального освітнього середовища / М.Л. Смульсон. – [за ред. С. Д. Максименка]. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008. – Т.8. – Випуск 5. – 132 с.
184. Сорока Л.І. Використання елементів історизму в курсі теорії ймовірностей / Л.І. Сорока// Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – С. 209-211.
185. Спірін О.М. Теоретичні та методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів інформатики за кредитно-модульною системою: монографія / О.М. Спірін. – [за наук. ред. акад. М.І. Жалдака]. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 300 с.
186. Спірін О.М. Теоретичні та методичні основи кредитно-модульної системи навчання майбутніх учителів інформатики: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня д-ра пед. наук: 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти» / Олег Михайлович Спірін; АПН України, Ін-т пед. освіти і освіти дорослих. – К., 2009. – 40 с.
187. Студенецкая В.Н. Новое пособие по теории вероятностей в основной школе / В.Н. Студенецкая, О.М. Фадеева // Математика в школе. – 2004. – № 7. – с.63-71.
188. Стучинська Н. Задачі зі стохастики. Природничий напрям освіти / Н. Стучинська // Математика в школі. – 2007. – № 1. – с.34-38.

189. Стучинська Н. Теорія та практика формування стохастичної культури / Н. Стучинська // Математика в школі. – 2006. – № 7. – с.11-15.
190. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. праць: у 2-х част. / Ред. кол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця: ДОВ “Вінниця”, 2000. – Ч.І – 486 с., Ч. ІІ – 531 с.
191. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми: Зб. наук. пр. – Київ-Вінниця: ДОВ ”Вінниця”, 2006. – Вип. 12. – 477 с.
192. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 344 с.
193. Талызина Н.Ф. Теоретические проблемы программированного обучения / Н.Ф. Талызина. – М.: изд-во МГУ, 1969. – 134 с.
194. Тихомиров В.М. О некоторых проблемах математического образования / В.М. Тихомиров // Тезисы доклада на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», г. Дубна, сентябрь 2000 г. [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://archive.1september.ru/ mat/2001/04/no04_1.htm.
195. Триус Ю.В. Інноваційні інформаційні технології у навчанні математичних дисциплін. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Інформатизація вищого навчального закладу» / Ю.В. Триус. – Львів, 2012. – Випуск №731. – С. 76-81.
196. Триус Ю.В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи / Ю.В. Триус // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. – 2010. – №. 9. – С. 16-29. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nchnpu_2_2010_9_5.pdf.
197. Триус Ю.В. Інформаційні технології у викладанні прикладних математичних дисциплін / Ю.В. Триус // Информационные технологии в учебном процессе: Сборник трудов четвертого научно-методического

семинара. – Одесса: ЮГПУ им. К.Д. Ушинского, 2003. – с.120-123.

198. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах: дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Юрій Васильович Триус, Черкаський національний ун-т ім. Богдана Хмельницького. – Черкаси, 2005. – 649 с.
199. Трунова О.В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики: дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / О.В. Трунова, НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2007. – 228 с.
200. Трунова О.В. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики / О.В. Трунова // Математика в школі. – 2005.– № 2. – с.40-47.
201. Тюрин Ю.Н. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе по учебному пособию Ю.Н. Тюрина и др. «Теория вероятностей и статистика» / [Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко]. – Математика в школе. – 2009. – № 7. – с.14-31.
202. Тютюнник О.І. Використання систем комп'ютерної математики для створення програмних засобів навчального призначення [Електронний ресурс] / О.І. Тютюнник, В.М. Михалевич // Вісник Вінницького політехнічного інституту – 2013. – №6. – Режим доступу: http://visnyk.vntu.edu.ua/index.php/visnyk/article/view/1022/1021.
203. Фейгенберг И.М. Видеть-предвидеть-действовать / И.М. Фейгенберг. – М.: Знание, 1986. - 160 с.
204. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер.– М.: Мир, 1984. – Т. 1. –528 с.
205. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.
206. Фіцула М.М. Вступ до педагогічної професії: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти / М.М. Фіцула. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 168 с.

207. Франчук Н.П. Методика навчання комп’ютеризованого перекладу фахових текстів майбутніх учителів інформатики: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Наталія Петрівна Франчук, м-во освіти і науки України, НПУ імені М.П. Драгоманова. – Київ, 2014. – 337 с.
208. Хинчин А.Я. Избранные труды по теории вероятностей /А.Я. Хинчин. – М.: 1995. – 552 с.
209. Хмара Т.М. Розвиток поняття ймовірності випадкової події в змісті шкільного курсу математики / Т.М. Хмара // Проблеми сучасного підручника: зб. наук. праць. – К. : Педагогічна думка. – 2012. – Випуск 12. – С. 742-746.
210. Чибисов Д.М. Задачи по математической статистике / Д.М. Чибисов, В.И. Пагурова. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1990.– 171 с.
211. Шавальова О.В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп'ютеризації навчання : дис... канд. пед. наук / О. В. Шавальова ; Нац пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. - Київ, 2007. - 224 с.
212. Шавальова В.І. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання математики у вищому педагогічному навчальному закладі / В.І. Шавальова // Тези Міжнародної конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь" (16 грудня 2002 р., м. Київ). – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2002. – 101 с.
213. Шамова Т.И. Активизация учения школьников / Т.И. Шамова. – М.: Педагогика, 1982. – 386 с.
214. Швець В.О. Міжпредметні зв’язки математики і фізики сьогодні / В.О. Швець // Тези Міжнародної конференції «Методика в теорії диференціальних рівнянь». – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. – С. 96.
215. Швець В.О. Міжпредметні зв’язки математики і фізики та астрономії в школі / В.О. Швець, Л.М. Бойко // Математика в школі. – 2001. – № 6. – С. 21-25.
216. Шевандрин Н.И. Психодиагностика и коррекция развития личности /

Н.И. Шевандрин. – [2-е изд.] – М.: ВЛАДОС, 2001. – 512 с.

217. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширякв. – М.: Наука. 1989. – 640 с.
218. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в середніх закладах освіти / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара – К: Освіта, 2003. – 310 с.
219. Шмигевський М. Коротка історія теорії ймовірностей / М. Шмигевський // Математика в школі, 2009. – № 10. – с.40-45.
220. Шунда Н.М. Элементарная стохастика в курсе математики VII-IX классов основной школы / Н.М. Шунда, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова // Математика в школе, 2003. – № 3. – с.36
221. Щербатых С.В. Методические особенности изложения статистического материала стохастической линии школьного курса математики /С.В. Щербатых // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. 9-14 октября 2006 г., г. Орёл. Т. 3. – Орёл: Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. – С. 233-237.
222. Щербатых С.В. О первой попытке введения теории вероятностей в школу (К 155-летию со дня рождения П.А. Некрасова) / С.В. Щербатых // Математика. – 2008. – № 1. – С. 9-10.
223. Щербатых С.В. Методическая система обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика) / Сергей Викторович Щербатых; ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломносова». – М., 2011. – 438 с.
224. Яшанов С.М. Сучасні інформаційні технології в освіті: навч.-метод. посіб. / С.М. Яшанов, М.С. Яшанов ; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. – 157 с.
225. Яшанов С. М. Теоретико-методичні засади системи інформатичної підготовки майбутніх учителів трудового навчання: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.04 / Сергій Микитович Яшанов. – К: Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова, 2010. – 529 с.

226. Aaron E., Spivey M. (1998). Frequency vs. probability formats: Framing the three doors problem. In M. A. Gernsbacher & S. J. Derry (Eds.),Proceedings of the twentieth annual conference of the Cognitive ScienceSociety (pp. 13–18). Mahwah, NJ: Erlbaum.
227. Anderson L.W. A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives [Текст] / L.W. Anderson, D.R. Krathwohl. – New York: Addison Wesley Longman, 2001. – 302 p.
228. Apelt W. Motivation und Fremdsprachenunterrich / W. Apelt. – Leipzig: VEB Verlag Enzyklopädie, 1981. – 165 p.
229. Chadjipadelis T. 2003. Children's walk in probability and statistics from childhool to youth. The Proceedings of the 19th Panhellenic Conference on Mathematical Education, Veria, Greece, 27-40.
230. Competency Standards Modules : ICT competency standards for teacher. – Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2008. – 13 p.
231. Computing Curricula 2001 : Computer science – Final Report (December 15, 2001) / [Chang C., Denning P. J., Cross J. H. II et all]. – 2001. – 240 p.
232. Cruz E. Bloom's revised taxonomy [Електронний ресурс] / E. Cruz // Encyclopedia of Educational Technology. – 2003.
233. Gavalis B. Computers and the EFL Class: Their Advantages and Possible Outcome. English Teaching Forum, Vol. 35, № 4, 1998. – 64 c.
234. Girotto V., Gonzales G. (2001). Solving probabilistic and statisticalproblems: A matter of information structure and question form. Cognition, 78, 247–276.
235. Hell W., Heinrichs C. (2000). Das Monty Hall Dilemma (Ziegenproblem) mit 30 TËuren. In D.Vorberg, A. Fuchs, T. Futterer, A. Heinecke, U. Heinrichs, U. Mattler,&S.Tollner (Eds.), TeaP. – 2000.
236. Lengyel E. Mathematicsfor 3D game programming andcomputergraphics.- Course Technology PTR, 2004. - 315 p.
237. Malchin Christian. Stochastic networks. Discrete and continuous time models: Diss. / Fakultat fur Mathematik, Informatik und Naturwiss. der Universitat Hamburg. – Hamburg, 2008. – 181 p.

238. Meurant G. Computer Solution of Large Linear Systems. Studies in Mathematics and its Applications.- SMIA, Vol. 28, 1999. – 754 p.
239. Microsoft company. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.microsoft.com/learning/training/default.mspx. – 2008.
240. Mignotte M. Mathematics for computer algebra.-New York: Springer-Verlag, 1992. - 346 p.
241. Moodle. Офіційна сторінка середовища [Electronic source]. – Access mode: http://moodle.com/.
242. National Technological University [Electronic source]. – 2008. – Режим доступу: http://www.ntu.edu/home/aboutus.asp#AC.
243. Open Education Center [Electronic source]. – Режим доступу: http://www.ceac.com. – Заголовок з екрана, 2008.
244. Ready to Teach [Electronic source]: U.S. Department of Education . – 2009. – Режим доступу: http://www.ed.gov/programs/readyteach/index.html
245. Řezanková, HanaSymbolic Computing Systems in Teaching Statistics in theCzech Republic and PolandISI, 56th Session, 2007 //
246. Ross B.H. (1987). This is like that: The use of earlier problems and theseparation of similarity effects. Journal of Experimental Psychology:Learning, Memory and Cognition, 13, 629–639.
247. Ruchen, Dominique S. Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society. 2003. Hogrefe & Huber Publishers, Germany. – 206 p.
248. Sheynin Oscar. Theory of probability and statistics as exemplified in short dictums. – B.: NG Verlag, 2006. – 161p.
249. Stefan Krauss X.T. Wang. The Psychology of the Monty Hall Problem: Discovering Psychological Mechanisms for Solving a Tenacious Brain Teaser. – Journal of Experimental Psychology: General. – 2003, Vol. 132, No. 1, 3–22.
250. Umryk M. Using Active E-Learning to Accommodate the Net Generation of Learners, In: 'E-learning & Lifelong Learning', Monograph Sc. Editor: Eugenia Smyrnova-Trybulska, University of Silesia, Studio-Noa, Katowice-Cieszyn, 2013, p. 101-115.

Додатки

Додаток А

Робоча програма курсу

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів – 5</td><td>Галузь знань
0403 «Системні науки та кібернетика»</td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td>Напрям підготовки
6.040302 «Інформатика»</td></tr>
<tr><td>Модулів – 3</td><td rowspan="6"></td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 5</td><td>3-й</td><td>3-й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання: застосування інформаційних технологій при вивченні дисципліни</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість годин – 180</td><td>1-й/2-й</td><td>1-й/2-й</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних в т.ч. індивідуальна робота – 4,5 год. самостійної роботи студента – 6 год.</td><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
«Бакалавр»</td><td>/ 34 год.</td><td>6 год / 6 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td></td><td>4 год / 8 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>/ 34 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальна робота</td></tr>
<tr><td>/ 12 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>/ 100 год.</td><td>62 год/ 94 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання:</td></tr>
<tr><td>/ 12 год.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td>/ екзамен</td><td>/ екзамен</td></tr>
</table>

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить:

для денної форми навчання – 0,8

для заочної форми навчання – 0,15

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета навчання: сформувати у студентів знання, вміння і навички, необхідні для розв'язування задач, в яких наявні елементи випадковості, для опрацювання результатів експериментів, в тому числі і педагогічних, а також для навчання елементів теорії ймовірностей та математичної статистики в середніх навчальних закладах.

Завдання навчання:

1) розкрити місце і значення знань з теорії ймовірностей і математичної статистики в загальній і професійній освіті людини, з'ясувати психолого–педагогічні аспекти засвоєння предмета, взаємозв'язки курсу теорії ймовірностей з іншими навчальними предметами, зокрема математичним аналізом, аналітичною геометрією, алгеброю, з шкільним курсом математики, показати практичну значимість методів математичної статистики, їх застосовність до розв'язування найрізноманітніших гуманітарних, технічних і наукових проблем;

2) забезпечити ґрунтовне вивчення студентами тих понять і методів теорії ймовірностей, які можуть бути використані ними при навчанні окремих розділів шкільної математики і відповідній їх інтерпретації, а також при навчанні елементів теорії ймовірностей і математичної статистики в середніх навчальних закладах, розуміння ідей використання методів теорії ймовірностей і математичної статистики як при реалізації навчального процесу, так і при його дослідженні з метою удосконалення і коригування;

3) виховати у майбутніх вчителів творчий підхід до розв'язування проблем навчання математики, зокрема з використанням засобів сучасних інформаційних технологій, сформувати знання, вміння і навички, необхідні

для самостійного аналізу навчального процесу, дослідження різноманітних методичних проблем і психолого–педагогічних ситуацій, розвинути здатність і відчуття необхідності постійної самоосвіти і самовдосконалення, наукового пошуку шляхів удосконалення процесу навчання, формування загальної і математичної культури учнів, активізації їх пізнавальної діяльності, творчої активності, надання навчальній діяльності дослідницького характеру, самостійного пошуку нових знань.

4) сформувати у студентів достатні знання, необхідні для практичного проведення навчально–виховної роботи при вивченні різних розділів шкільних курсів математики та інформатики.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен **знати**:

- основні поняття теорії ймовірностей;
- статистичні розподіли;
- важливі розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових величин;
- основні числові характеристики розподілів випадкових величин;
- закони великих чисел;

вміти:

- розв’язувати задачі теорії ймовірностей і математичної статистики;
- аналізувати та порівнювати розподіли випадкових величин;
- прогнозувати результати на основі статистичних даних;
- будувати розподіли за їх параметрами.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Випадкові події. Статистичні ймовірності.

Основні поняття: стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події. Операції над подіями. Простір подій. Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори. Умовна статистична ймовірність. Ймовірність добутку подій. Залежні і незалежні події. Події, незалежні в сукупності. Формула повної

статистичної ймовірності. Формула Байєса. Повторні незалежні випробування. Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей. Деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Поняття випадкової величини.

Основні вміння: розв'язувати задачі на знаходження статистичної ймовірності подій. Будувати ймовірнісні простори за наслідками експерименту. Застосовувати формули Байєса та повної статистичної ймовірності до розв'язування задач. Будувати графіки функцій щільності та розподілу статистичних ймовірностей. Обчислювати основні числові характеристики розподілів.

Тема 1. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Операції над подіями.

Тема 2. Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори.

Тема 3. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса. Умовна статистична ймовірність. Залежні і незалежні події. Події, незалежні в сукупності.

Тема 4. Поняття дискретного та неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей.

Тема 5. Функція дискретного та неперервного розподілу статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей.

Змістовий модуль 2. Ймовірності.

Основні поняття: ймовірнісні міри. Означення ймовірності. Функція та щільність одновимірного розподілу ймовірностей та їх властивості. Геометрично задані ймовірності. Властивості ймовірностей. Умовні ймовірності. Залежні і незалежні події. Формула повної ймовірності.

Формула Байєса. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Дискретні розподіли ймовірностей. Двовимірний дискретний розподіл ймовірностей. Неперервні розподіли ймовірностей. Двовимірний неперервний розподіл ймовірностей. Деякі числові характеристики дискретних розподілів ймовірностей. Деякі числові характеристики неперервних розподілів ймовірностей. Приклади важливих розподілів ймовірностей. Одновимірний нормальний розподіл ймовірностей. Двохвимірний нормальний розподіл ймовірностей.

Основні вміння: задавати ймовірності за допомогою функцій щільності і розподілу, розв'язувати задачі з використанням формули Бернуллі, обчислювати ймовірність подій при повторних незалежних випробуваннях, будувати та аналізувати графіки двовимірних розподілів ймовірностей.

Тема 1. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей. Означення ймовірності. Геометрично задані ймовірності.

Тема 2. Повторні незалежні випробування. Властивості ймовірностей. Залежні і незалежні події. Формула Байєса. Формула Бернуллі.

Тема 3. Розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини. Дискретні розподіли ймовірностей. Неперервні розподіли ймовірностей. Приклади важливих розподілів ймовірностей. Одновимірний та двовимірний нормальний розподіл ймовірностей.

Змістовий модуль 3. Випадкові величини.

Основні поняття: випадкові величини. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкової величини. Функції випадкового аргументу. Випадкові вектори. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора. Функції кількох випадкових аргументів. Математичне сподівання випадкової величини. Властивості математичного сподівання. Моменти випадкових величин. Умовні розподіли ймовірностей та їх числові характеристики. Деякі важливі функції від випадкових величин з нормальними розподілами ймовірностей. Поняття про випадкові процеси.

Основні вміння: будувати розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини, випадкового вектора. Обчислювати та аналізувати значення математичного сподівання, моменти випадкових величин.

Тема 1. Поняття випадкової величини. Функції випадкового аргументу. Випадкові вектори.

Тема 2. Математичне сподівання випадкової величини. Властивості математичного сподівання.

Тема 3. Моменти випадкових величин. Умовні розподіли ймовірностей та їх числові характеристики. Поняття про випадкові процеси.

Змістовий модуль 4. Граничні теореми.

Основні поняття: закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.

Основні вміння: застосовувати теореми Чебишова, Бернуллі та центральну граничну теореми до розв’язування задач.

Тема 1. Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі.

Тема 2. Центральна гранична теорема. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.

Змістовий модуль 5. Елементи математичної статистики.

Основні поняття: основні поняття й задачі математичної статистики Функція та щільність розподілу статистичних ймовірностей. Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірностей. Надійна ймовірність. Надійні інтервали. Статистична перевірка гіпотез. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло).

Основні вміння: обчислювати статистичні оцінки параметрів розподілу, обчислювати надійні інтервали, перевіряти статистичні гіпотези про відповідність статистичних даних прогнозованим. Використовувати метод Монте-Карло для обчислення ймовірностей випадкових процесів.

Тема 1. Основні поняття й задачі математичної статистики. Функція та щільність розподілу статистичних ймовірностей. Надійна ймовірність.

Тема 2. Статистична перевірка гіпотез. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло).

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна і вечірня форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Змістовий модуль 1. Випадкові події. Статистичні ймовірності												
Тема 1. Простір елементарних подій. Операції над подіями.		2				4		1				4
Тема 2. Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори.		1		2		8		1	1			8
Тема 3. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.		1		2	2	4			2			10
Тема 4. Поточковий та поінтервальний розподіли статистичних ймовірностей.		2				4		1				8
Тема 5. Характеристики поточкового та поінтервального розподілів статистичних ймовірностей.		4		4	2	6		1	1			8
Разом за змістовим модулем 1.	48	10		8	4	26	46	4	4			38
Змістовий модуль 2. Ймовірності												
Тема 1. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей.		2										4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Тема 2. Повторні незалежні випробування.		2		2	2	4		1	2			20
Тема 3. Розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини.		2		2		4		1				8
Разом за змістовим модулем 2.	20	6		4	2	8	36	2	2			32

Змістовий модуль 3. Випадкові величини												
Тема 1. Випадкова величина. Функції випадкового аргумента.		2		2		8		1				8
Тема 2. Математичне сподівання випадкової величини.		2		2		4		1	2			10
Тема 3. Моменти випадкових величин.		2		2	2	4						16
Разом за змістовим модулем 3.	30	6		6	2	16	38	2	2			34
Змістовий модуль 4. Граничні теореми												
Тема 1. Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі.		3		4		13		1	1			16
Тема 2. Централь-на гранична теорема. Асимп-тотичні теореми Муавра-Лапласа.		3		4	2	12		1	1			16
Разом за змістовим модулем 4.	41	6		8	2	25	36	2	2			32
Змістовий модуль 5. Елементи математичної статистики												
Тема 1. Основні поняття й задачі математичної статистики.		3		4		5		1				4
Тема 2. Статис-тична перевірка гіпотез.		2		2		10		1	1			8
Тема 3. Метод статистичних випробувань.		1		2	2	10			1			8
Разом за змістовим модулем 5.	41	6		8	2	25	24	2	2			20
Усього годин	180	34		34	12	100	180	12	12			156

5. Теми лабораторних робіт

№ п/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій.	2
2.	Поняття випадкової події. Вірогідна та неможлива події. Операції над подіями.	2
3.	Статистична ймовірність події.	2
4.	Умовна статистична ймовірність. Статистична	2

	ймовірність добутку подій. Залежні і незалежні відносно ймовірнісної міри випадкові події. Події, незалежні відносно ймовірнісної міри в сукупності.	
5.	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.	2
6.	Поточковий та поінтервальний розподіли статистичних ймовірностей. Їх числові характеристики.	2
7.	Повторні випробування.	2
8.	Поняття випадкової величини. Прості випадкові величини.	2
9.	Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень простих випадкових величин.	2
10.	Ймовірнісні міри. Означення ймовірності. Двовимірний розподіл ймовірностей. Числові характеристики двовимірного розподілу ймовірностей.	4
11.	Функції випадкового аргумента. Випадкові вектори. Розподіл ймовірностей на множині значень випадкового вектора.	2
12.	Моменти випадкових величин.	2
13.	Кореляція випадкових величин.	2
14.	Лінійна регресія.	2
15.	Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірностей. Надійні інтервали.	2
16	Статистична перевірка гіпотез.	2

6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Простір елементарних подій. Операції над подіями.	4
2	Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори.	8
3	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.	4

4	Поточковий та поінтервальний розподіли статистичних ймовірностей.	4
5	Числові характеристики поточкового та поінтервального розподілів статистичних ймовірностей.	6
8	Повторні випробування.	4
9	Розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини.	4
10	Випадкова величина. Функції випадкового аргумента.	8
11	Математичне сподівання випадкової величини.	4
12	Моменти випадкових величин.	4
13	Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі.	13
14	Центральна гранична теорема. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.	12
15	Основні поняття й задачі математичної статистики. Статистична перевірка гіпотез.	5
16	Метод статистичних випробувань.	20
	Разом	100

7. Індивідуальні завдання

1. На 100 однакових за розмірами навмання вибраних ділянках землі з однаковою кількістю внесених добрив зібрано різний урожай зерна. Результати проведених спостережень подано в Таблиця 1. На основі поданого статистичного матеріалу визначити статистичні оцінки для математичного сподівання й дисперсії досліджуваної випадкової величини (урожай).

Таблиця 1

Урожай, ц/га	14	15	16	17	18	19	20
Кількість ділянок	6	10	18	28	20	12	6

2. Учні виконують стрибки у висоту. Висота стрибка навмання взятого учня є випадковою величиною з нормальним розподілом ймовірностей, причому середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5см$. За даними 100 спостережень здобута статистична оцінка для математичного сподівання досліджуваної випадкової величини $\bar{x}_n = 135см$. Знайти інтервал, в якому з ймовірністю $0{,}9$ знаходиться математичне сподівання висоти стрибка учня.

3. Середній урожай зерна з одного гектара є випадковою величиною. За даними 100 спостережень дістали такий інтервальний (неперервний) розподіл статистичних ймовірностей (Таблиця 2).

Таблиця 2

Урожайність ц/га	13,3–14,5	14,5–15,5	15,5–16,5	16,5–17,5	17,5–18,5	18,5–19,5	19,5–2-,5
Статистичні ймовірності	0,06	0,10	0,18	0,28	0,20	0,12	0,06

За допомогою критерію Пірсона перевірити, чи сумісні здобуті статистичні дані з гіпотезою про те, що на множині значень досліджуваної випадкової величини розподіл ймовірностей нормальний. Рівень значущості α покласти рівним 0,95.

8. Методи контролю

8.1. Завдання до контрольної роботи (тестові завдання).

Контрольна робота № 1

Варіант 1

1. Якщо $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $S = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$, то чи можна стверджувати, що елементи сукупності S є подіями ?

2. Знайти ймовірність того, що дві з трьох точок, кинутих на відрізок АВ, що попередньо був поділений точкою С у відношенні 1:2, потраплять на відрізок СВ, якщо ймовірності попадання у дві підмножини відрізка СВ однакової міри однакові, тобто розподіл ймовірностей на СВ рівномірний.

3. Скільки просторів подій можна утворити, пов’язаних з простором

елементарних подій $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$?

4. В мішень в тирі виконано 200 пострілів, в яких отримано 116 влучень. Що більш ймовірно – те що стріляв спортсмен, який за кожного пострілу влучає з ймовірністю $\frac{2}{3}$, чи те , що стріляв спортсмен, який за кожного пострілу влучає з ймовірністю $\frac{1}{2}$, якщо право на 200 пострілів спортсмени розігрували за допомогою монетки з двома рівномірними наслідками розіграшу – «*Г*» (герб) і «*Ц*» (цифра)?

Варіант 2

1. Чи буде ймовірнісним простором набір об'єктів (Ω, S, P), коли $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S=\{\varnothing,\{1,2\},\{3,4,5,6\},\Omega\}$, $P(\{1,2\})=\frac{1}{3}$, $P(\{3,4,5,6\})=\frac{2}{3}$?

2. Знайти ймовірність того, що дві з чотирьох точок, кинутих на відрізок АВ, що попередньо був поділений точкою С у відношенні 2:3, потраплять на відрізок СВ, якщо ймовірності попадання у дві підмножини відрізка АВ однакової міри однакові, тобто розподіл ймовірностей на АВ рівномірний.

3. Спростити вираз $(A+C)(B+C)$.

4. Статистична ймовірність успішного виконання вправ для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,75. Спортсмени виконували вправи один за одним доти, доки хтось не виконав вправи успішно або обидва не зроблять кожен дві спроби. Той, хто успішно виконував вправу першим, одержував приз. Знайти статистичні ймовірності одержання призу кожним спортсменом.

Контрольна робота № 2

Варіант 1

1. Знайти центр розсіювання і дисперсію для двохвимірного розподілу ймовірностей, заданого таблицею

y_j \ x_i	0	1
0	0,5	0,05
1	0,05	0,4

2. Процент браку у партії товару складає 1%. Скільки одиниць товару слід відібрати для перевірки якості, щоб з ймовірністю $0{,}95$ можна було стверджувати, що у навмання вибраній такій кількості одиниць товару процент бракованих виробів відрізняється від 1% не більше, ніж на $0{,}5\%$.

3. Довести, що $\sqrt{M[(X+Y)^2]} = \left| \sqrt{M[X^2]} + \frac{|a|}{a}\sqrt{M[Y^2]} \right|$, якщо $Y=aX$, $a \in R$.

Варіант 2

1. Знайти центр розсіювання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення для розподілу, заданого функцією розподілу ймовірностей $F(x) = x^2 - 2x - 3$. Така функція не може бути функцією розподілу ймовірностей, бо $F(0) = -3$, а має бути $F(x) \geq 0$ задовільних .

2. Ймовірність позитивного результату в кожному випробуванні дорівнює $0{,}85$. Скільки випробувань треба провести, щоб з ймовірністю не меншою, ніж $0{,}97$ можна було б очікувати, що не менше ніж 200 разів випробування дадуть позитивний результат.

3. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X має вигляд $f_x(x) = \begin{cases} 1-|x|, & коли\ |x| \leq 1, \\ 0, & коли\ x \geq 1. \end{cases}$ Знайти функцію розподілу ймовірностей і щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $Y = |X| - 1$.

8.2. Питання до екзамену

1. Випадкові події та операції над ними.
2. Статистичні ймовірності та їх властивості. Розподіли статистичних ймовірностей.

3. Умовні статистичні ймовірності. Статистична ймовірність добутку подій. Формула повної статистичної ймовірності.
4. Означення ймовірності. Ймовірнісний простір.
5. Ймовірнісні міри та способи їх задання.
6. Умовні ймовірності. Залежні і незалежні відносно ймовірнісної міри випадкові події. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
7. Повторні випробування. Формула Бернуллі.
8. Випадкові величини. Операції над випадковими величинами.
9. Задання розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини.
10. Розподіл ймовірностей на множині значень функції випадкового аргументу.
11. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості.
12. Нормальний розподіл ймовірностей та його числові характеристики.
13. Моменти випадкових величин та їх властивості.
14. Функція двохвимірного розподілу ймовірностей та її властивості.
15. Щільність двохвимірного розподілу ймовірностей та її властивості.
16. Одновимірні розподіли ймовірностей складових двохвимірного випадкового вектора. Залежні і незалежні випадкові величини.
17. Дискретний двохвимірний розподіл ймовірностей та відповідні одновимірні розподіли. Умовні розподіли.
18. Випадкові вектори та розподіли ймовірностей на множинах значень випадкових векторів.
19. Математичне сподівання функції від випадкового вектора.
20. Нерівності Коші-Буняковського та Ієнсена.
21. Нерівність Чебишева та її застосування.
22. Закон великих чисел. Теореми Чебишева і Бернуллі.
23. Центральна гранична теорема
24. Зв'язок локальної та інтегральної теорем Муавра-Лапласа з центральною граничною теоремою.

25.Критерії узгодження гіпотетичного розподілу із статистичними даними.

9. Розподіл балів, які отримують студенти

Для екзамену

Поточне тестування та самостійна робота					Підсумковий тест (екзамен)	Сума
Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Змістовий модуль 3	Змістовий модуль 4	Змістовий модуль 5	100	100
30	20	20	15	15	100	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	**A**	відмінно	зараховано
80-89	**B**	добре	
70-79	**C**		
65-69	**D**	задовільно	
60-64	**E**		
35-59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	**F**	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

10. Методичне забезпечення

10.1. Навчально-методична карта дисципліни

«Теорія ймовірностей та математична статистика»

2 семестр 2013/2014 н.р.

За навчальним планом:

1 семестр, 18 тижнів, 180 годин, 5 кредитів ECTS,

лекції 34 год. (1 лекція 1 раз на тиждень), лабораторні роботи 34 год. (1 робота 1 раз на тиждень),

2 контрольні роботи, іспит (8 годин)

СХЕМА ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Тиждень	Тематика лекцій	Тематика практичних занять	Вид контролю на практичному занятті	К-ть балів	Позааудиторний контроль	К-ть балів
Модуль 1. Випадкові події. Статистичні ймовірності (5 тижнів)						
1.	Простір елементарних подій. Операції над подіями.	Простір елементарних подій. Операції над подіями.				
2.	Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори.	Статистична ймовірність події. Ймовірнісні простори.	Поточна успішність	5		
3.	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.				
4.	Поточковий та поінтервальний розподіли статистичних ймовірностей.	Поточковий та поінтервальний розподіли статистичних ймовірностей.	Поточна успішність	5		
5.	Числові характеристики поточкового та поінтервального розподілів статистичних ймовірностей.	Числові характеристики поточкового та поінтервального розподілів статистичних ймовірностей.	**Контрольна робота № 1**	20		
					Всього за І модуль:	**30**
Модуль 2. Ймовірності. Випадкові величини (6 тижнів)						
6.	Аксіоматична побудова теорії ймовірностей.	Аксіоматична побудова теорії ймовірностей.				
7.	Повторні випробування.	Повторні випробування.				
8.	Розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини.	Розподіли ймовірностей на множині значень випадкової величини.	Поточна успішність	10		
9.	Випадкова величина. Функ-ції випадкового аргумента.	Випадкова величина. Функції випадкового аргумента.	Поточна успішність	10		
10.	Математичне сподівання випадкової величини.	Математичне сподівання випадкової величини.				
11.	Моменти випадкових величин.	Моменти випадкових величин.	**Контрольна робота № 2**	20		
					Всього за ІІ модуль:	**40**

Модуль 3. Граничні теореми. Елементи математичної статистики (6 тижнів)						
12, 13.	Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі.	Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі.	Поточна успішність	5		
14.	Центральна гранична теорема. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.	Центральна гранична теорема. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа.	Поточна успішність	5		
15.	Основні поняття й задачі математичної статистики.	Основні поняття й задачі математичної статистики.				
16.	Статистична перевірка гіпотез.	Статистична перевірка гіпотез.	Інд. завд.	20		
17.	Метод статистичних випробувань.	Метод статистичних випробувань.				
					Всього за ІІІ модуль:	**30**
					Всього за ІІ семестр	**100**
					Екзамен:	**100**

11. Рекомендована література

Основна література

1. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою. Видання 4-те перероблене і доповнене – К.: Видавництво «Шкільний світ», 2006. – 120 с.

2. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика: Посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 708 с.

3. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Кузьміна Н.М. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики: Посібник для вчителів. – Полтава, «Довкілля-К», 2010. – 728 с.

4. М.І. Жалдак, І.М. Біляй. Стохастика: Посібник для вчителів. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 302 с.

5. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. Початки стохастики. Факультативний курс для учнів старшої школи. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 162 с.

Додаткова

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976. – 288 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
3. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1965. – 304 с.
4. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и

математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 440 с.

5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
6. Кемени Дж., Снелл Дж. Введение в конечную математику. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 486 с.
7. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. Шк., 1973. – 368 с.
8. Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
9. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974. – 120 с.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
12. Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
13. Майстров Д.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. - М.: Наука, 1967. – 320 с.
14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
15. Толстов Г.П. Мера и интеграл. - М.: Наука, 1976. - 392 с.
16. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. – М.: Мир, 1964. – Т. 1. – 499 с.; 1967. – Т. 2. – 752 с.
18. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
19. Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
20. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. – М., Наука, 1976. – 520 с.

Додаток Б

Анкета

для учнів

1. Чи вважаєте Ви математику складною дисципліною? Якщо так, то чим це можна пояснити? _____

_____

_____

_____

_____

3. Що на Ваш погляд потрібно зробити для того, щоб шкільна математика стала доступнішою? _____

_____

_____

_____

_____

4. В яких науках, на Ваш погляд, математика має застосування? _____

_____

_____

5. Як можна підвищити інтерес до математики? _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

6. Чи вважаєте Ви, що стохастика є цікавим і пізнавальним розділом математики? Відповідь обґрунтуйте. _____

_____

_____

_____

_____

7. Чи вивчалась стохастика Вами в школі? Якщо так, то які поняття, теми Ви пам’ятаєте? _____

_____

_____

_____

_____

8. Назвіть програмні засоби, які можна використовувати в процесі навчання стохастики? _____

_____

_____

9. Чи вважаєте Ви доцільним використання ІКТ в процесі навчання стохастики? Відповідь обґрунтуйте. Вкажіть переваги/недоліки використання ІКТ. _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Додаток В

Анкета

для вчителів математики

1. Чи вважаєте Ви, що зміст шкільної математики на сучасному етапі «відірваний» від реального життя? _____

   _____

   _____

2. Чи можна модернізувати шкільний курс математики? Яким чином? _____

   _____

   _____

3. Як Ви відноситесь до введення в шкільний курс математики стохастичної лінії?

   Позитивно *Не маю конкретної відповіді* *Негативно*

4. Чи має навчання науки про випадкове практичну значимість в школі? ____

   _____

5. Як Ви оцінюєте свої знання зі стохастики? _____

   _____

   _____

6. В чому, на Вашу думку, полягають труднощі у навчанні стохастики? _____

   _____

   _____

7. Чи потрібна Вам перепідготовка для вдосконалення навчання стохастики?

   _____

   _____

8. Чи використовуєте Ви ІКТ на уроках математики? _____

   _____

   _____

9. Які, на Вашу думку, переваги та недоліки використання ІКТ в навчальному процесі? В процесі навчання стохастики? _____

   _____

Додаток Г

Методичні рекомендації використання програми Function під час вивчення стохастики

Програмний засіб «Function» був створений для комп'ютерної підтримки занять з теорії ймовірностей та математичної статистики на тему під час вивчення інтервального розподілу.

1. Призначення програмного засобу

Основним призначенням програмного засобу «Function» є використання на заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики або в процесі самостійного вивчення студентами навчального матеріалу для формування відповідних теоретичних знань та практичних умінь у якості наочностей.

За тематикою та змістом, а також за вимогами до підготовки студентів педагогічних університетів «Function» повністю відповідає навчальній програмі з теорії ймовірностей та математичної статистики.

- Викладач використовує «Function» у процесі викладання нового матеріалу на занятті.

- Студент використовує «Function» для засвоєння навчального матеріалу вдома при самостійному вивченні цього матеріалу.

2. Використання програмного засобу

Використання «Function»

Основним варіантом використання «Function» є створення демонстраційних навчальних матеріалів, які створюються викладачем безпосередньо на занятті.

Допоміжним варіантом (але достатньо важливим), є практична робота студентів з розв'язування задач на побудову функцій розподілу за допомогою «Function».

Код програми:

```
unit untMain;
interface
uses
```

```
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,
Forms, Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, Grids, ComCtrls, Vcl.XPMan,
Vcl.Menus, Vcl.ColorGrd, Vcl.ActnMan, Vcl.ActnColorMaps;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Panel1: TPanel;
    Panel2: TPanel;
    Panel3: TPanel;
    Panel4: TPanel;
    Button1: TButton;
    LabeledEdit1: TLabeledEdit;
    LabeledEdit2: TLabeledEdit;
    LabeledEdit3: TLabeledEdit;
    StringGrid1: TStringGrid;
    UpDown1: TUpDown;
    Image1: TImage;
    Button2: TButton;
    Button3: TButton;
    Button4: TButton;
    XPManifest1: TXPManifest;
    btnCalc_Last: TButton;
    imgX: TImage;
    imgY: TImage;
    btnGrid: TButton;
    PopupMenu1: TPopupMenu;
    N1: TMenuItem;
    LabeledEdit4: TLabeledEdit;
    Image2: TImage;
    Button5: TButton;
    Button6: TButton;
    ColorBox1: TColorBox;
    ledWidthLine: TLabeledEdit;
    UpDown2: TUpDown;
    Button7: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Image1Click(Sender: TObject);
    procedure StringGrid1Exit(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
    procedure Button4Click(Sender: TObject);
    procedure UpDown1ChangingEx(Sender: TObject; var AllowChange:
Boolean;
      NewValue: Integer; Direction: TUpDownDirection);
    procedure btnCalc_LastClick(Sender: TObject);
    procedure btnGridClick(Sender: TObject);
    procedure Image1MouseMove(Sender: TObject; Shift: TShiftState; X,
      Y: Integer);
    procedure StringGrid1KeyUp(Sender: TObject; var Key: Word;
      Shift: TShiftState);
    procedure Button5Click(Sender: TObject);
    procedure Button6Click(Sender: TObject);
    procedure FormResize(Sender: TObject);
    procedure Button7Click(Sender: TObject);
    procedure FormShow(Sender: TObject);
  private
    function SummCorrect: Boolean;
```

```
  public
    { Public declarations }
  end;
const
  lim=6;
  epsilon=7;
  big_epsilon=1e12;
  GridY = 10;
  GridX = 10;
var
  Form1: TForm1;
  A, B, h: Extended;
  N, i: Word;
  p, Px: array of Extended;
  uuu: Boolean;
  Step: Word;
  was_draw: boolean;
implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.btnCalc_LastClick(Sender: TObject);
var
  s: Extended;
begin
  s := 0;
  for i := 0 to N-2 do s := s + p[i];
  p[N-1] := 1-s;
  StringGrid1.Cells[1,N] :=FloatTostrf(p[N-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
end;

procedure TForm1.btnGridClick(Sender: TObject);
var
  hi: Double;
begin
//========= Grid Y ====================================================
  imgY.Canvas.Brush.Color := clScrollBar;
  imgY.Canvas.Rectangle(-1,-1,imgY.Width+1,imgY.Height+1);
  imgY.Canvas.Pen.Width := 2;

  imgY.Canvas.MoveTo(imgY.Width-1,-1);
  imgY.Canvas.LineTo(imgY.Width-1,imgY.Height-1);

  imgY.Canvas.Brush.Style := bsClear;
  imgY.Canvas.Pen.Width := 1;
  hi := (imgY.Height-20) / GridY;
  for i := 0 to GridY do
  begin
    imgY.Canvas.MoveTo(imgY.Width,imgY.Height-(10+Trunc(i*hi)));
    imgY.Canvas.LineTo(imgY.Width-10,imgY.Height-(10+Trunc(i*hi)));
    if GridY < 25 then imgY.Canvas.TextOut(0,imgY.Height-
(22+Trunc(i*hi)),FloatToStrF(i*1/GridY,ffFixed,3,2));
  end;
//========= Grid X ====================================================
  A := StrToFloat(LabeledEdit2.Text);
  B := StrToFloat(LabeledEdit3.Text);//+(B-A)/N;
  imgX.Canvas.Brush.Color := clScrollBar;
```

```
  imgX.Canvas.Rectangle(-1,-1,imgX.Width+1,imgX.Height+1);
  imgX.Canvas.Pen.Width := 2;

  imgX.Canvas.Brush.Style := bsClear;
  imgX.Canvas.Pen.Width := 1;
  imgX.Canvas.MoveTo(imgY.Width-2,1);
  imgX.Canvas.LineTo(imgX.Width,1);
  hi := (Image1.Width-20)/GridX;
  for i := GridX downto 0 do
  begin
    imgX.Canvas.MoveTo(imgX.Width-(10+Trunc(i*hi)),0);
    imgX.Canvas.LineTo(imgX.Width-(10+Trunc(i*hi)),10);
    if GridX < 13 then imgX.Canvas.TextOut(imgX.Width-
(10+Trunc(i*hi))-20,8,FloatToStrF(A+(GridX-i)*(B-
A)/GridX,ffFixed,3,2));
  end;
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
 if CloseQuery then Close;
end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
const
  colorcolunt = 6;
  Colr: array [0..colorcolunt] of TColor =
(clBlack,clRed,clBlue,clGreen,clGray,clYellow,clSilver);
  NameColor: array [0..colorcolunt] of String[15] =
('Чорний','Червоний','Синій','Зелений','Сірий','Жовтий','Срібний');
var
  i: ShortInt;
begin
 was_draw := false;
 LabeledEdit4.EditLabel.Caption := #229+'=';
 Step := 0;
 Button3.Enabled := False;
 uuu := False;
 N := 5;
 A := 0;
 B := 5;
 SetLength(p,N+1);
StringGrid1.Cells[0,0] := '[a--b]';
 StringGrid1.Cells[1,0] := 'P([a--b])';
 h := (B-A)/N;
 for i := 1 to N do
 begin
   StringGrid1.Cells[0,i] := '('+FloatTostrf(a+h*(i-1),ffFixed,0,3)+'-
-'+FloatTostrf(a+h*(i),ffFixed,0,3)+']';
   StringGrid1.Cells[1,i] :=FloatTostrf(p[i-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
 end;
   StringGrid1.Cells[0,i] := '('+FloatTostrf(a+h*(i-1),ffFixed,0,3)+'-
- inf]';
   StringGrid1.Cells[1,i] :=FloatTostrf(p[i-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
LabeledEdit4.Text := '1,000000';
DoubleBuffered := True;
```

```
{=====================================================================}
 for i := 0 to colorcolunt do
 begin
   ColorBox1.AddItem(NameColor[i],TObject(Colr[i]));
 end;
 ColorBox1.ItemIndex := 0;
 ColorBox1.Enabled := True;

{=====================================================================}
end;

procedure TForm1.FormResize(Sender: TObject);
begin
  Panel2.Left := form1.ClientWidth-(Panel2.Width+7);
  Panel2.Height := Form1.ClientHeight-39;
  Panel4.Height := Panel2.Height-154;
  StringGrid1.Height := Panel4.Height-42;
  Button1.Top := Panel2.Top+Panel2.Height;
  Button1.Left := Panel2.Left-2;
  Panel1.Width := Form1.ClientWidth-207;
  Panel1.Height := Form1.ClientHeight-15;
  Image1.Width := Panel1.Width-34;
  Image1.Height := Panel1.Height-26;
  Image2.Width := Image1.Width;
  Image2.Height := Image1.Height;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
  A := StrToFloat(LabeledEdit2.Text);
  B := StrToFloat(LabeledEdit3.Text);
  N := StrToInt(LabeledEdit1.Text);
  inc(Step);
  if (Step>lim)or(N>Image1.Width div 2) then Button2.Enabled := False;
  if Step>0 then Button3.Enabled := True;
  LabeledEdit1.Enabled := False;
  LabeledEdit2.Enabled := False;
  LabeledEdit3.Enabled := False;
  UpDown1.Enabled := False;
  StringGrid1.Options := StringGrid1.Options - [goEditing];
  uuu:=true;
  N := N * 2;
  UpDown1.Position := N;
  Button4Click(Self);
end;

procedure TForm1.Image1Click(Sender: TObject);
begin
  uuu := False;
  LabeledEdit1.Enabled := true;
  LabeledEdit2.Enabled := true;
  LabeledEdit3.Enabled := true;
  UpDown1.Enabled := true;;
  StringGrid1.Enabled := true;
  StringGrid1.Options := StringGrid1.Options + [goEditing];
  Button3.Enabled := False;
  Button5.Visible := True;
```

```
  Step := 0;
end;

procedure TForm1.Image1MouseMove(Sender: TObject; Shift: TShiftState;
X,
  Y: Integer);
var
  s: String;
  YY: Integer;
  rez: Double;
begin
  if not was_draw then Button4Click(Self);
  image1.Picture := image2.Picture;
  try
    rez := Px[Trunc((X-10) / ((image1.Width-20) / N))];
  except
    Showmessage('Сталась невіодма помилка, її буде виправлено');
  end;
  if X<10 then
  begin
    s := '( '+FloatToStrF((X-10)*(B-A)/(image1.Width-
20),ffFixed,4,3)+' ; '+FloatToStrF(0,ffFixed,4,3)+' )';
    image1.Canvas.Pen.Color := clRed;
    image1.Canvas.Ellipse(X-5,image1.Height-5,X+5,image1.Height-15);
    image1.Canvas.MoveTo(X,image1.Height-5);
image1.Canvas.LineTo(X,image1.Height-15);
    image1.Canvas.MoveTo(X-3,image1.Height-10);
image1.Canvas.LineTo(X+3,image1.Height-10);
    image1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
  end  else
  if X>=(image1.Width-10) then
  begin
    s := '( '+FloatToStrF((X-10)*(B-A)/(image1.Width-
20),ffFixed,4,3)+' ; '+FloatToStrF(1,ffFixed,4,3)+' )';
    image1.Canvas.Pen.Color := clRed;
    image1.Canvas.Ellipse(X-5,5,X+5,15);
    image1.Canvas.MoveTo(X,5); image1.Canvas.LineTo(X,15);
    image1.Canvas.MoveTo(X-3,10); image1.Canvas.LineTo(X+3,10);
    image1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
  end else
  begin
    s := '( '+FloatToStrF((X-10)*(B-A)/(image1.Width-
20),ffFixed,4,3)+' ; '+FloatToStrF(Px[Trunc((X-10) / ((image1.Width-
20) / N))],ffFixed,4,3)+' )';
    YY := image1.Height-10-Trunc(rez*(image1.Height-20));
    image1.Canvas.Pen.Color := clRed;
    image1.Canvas.Ellipse(X-5,YY-5,X+5,YY+5);
    image1.Canvas.MoveTo(X,YY-3); image1.Canvas.LineTo(X,YY+3);
    image1.Canvas.MoveTo(X-3,YY); image1.Canvas.LineTo(X+3,YY);
    image1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
  end;
  image1.Canvas.TextOut(3,3,s);
end;

procedure TForm1.UpDown1ChangingEx(Sender: TObject; var AllowChange:
Boolean;
  NewValue: Integer; Direction: TUpDownDirection);
begin
```

```
  if (Direction = updUp) then
  if uuu then
  begin
    SetLength(p, N+1);
    StringGrid1.RowCount := N+2;
    h := (B-A)/N;
    for i := N downto 1 do
    begin
      p[i] := p[(i+1)div 2]/2;
      StringGrid1.Cells[0,i+1] := '('+FloatTostrf(A+h*(i-
1),ffFixed,5,3)+'--'+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,3)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i+1] :=FloatTostrf(p[i-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
    end;
  end else
  begin
    StringGrid1.RowCount := NewValue+1;
    N := NewValue;
    Setlength(p,N);
    SetLength(Px,N);
    h := (B-A)/N;
    for i := 1 to N do
    begin
      p[i-1] := 1/N;
      StringGrid1.Cells[0,i] := '('+FloatTostrf(A+h*(i-
1),ffFixed,5,3)+'--'+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,3)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i] :=FloatTostrf(p[i-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
    end;
  end;

  if (Direction = updDown) then
  if uuu then
  begin
    StringGrid1.RowCount := N+2;
    h := (B-A)/N;
    i := 1;
    While i<=N do
    begin
      p[i] := p[i*2-1]+p[i*2];
      StringGrid1.Cells[0,i+1] :=
'('+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,3)+'--
'+FloatTostrf(A+h*(i+1),ffFixed,5,3)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i+1]
:=FloatTostrf(p[i],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
      inc(i);
    end;
    SetLength(p, N+1);
    //StringGrid1.Cells[0,N+1] := 'Sum=';
    //StringGrid1.Cells[1,N+1] := '1';
    LabeledEdit4.Text := '1,0000000';
  end else
  begin
    StringGrid1.RowCount := NewValue+1;
    N := NewValue;
    Setlength(p,N+1);
    SetLength(Px,N+1);
    h := (B-A)/N;
```

```
    for i := 1 to N do
    begin
      p[i-1] := 1/N;
      StringGrid1.Cells[0,i] := '('+FloatTostrf(A+h*(i-
1),ffFixed,5,3)+'--'+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,3)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i] :=FloatTostrf(p[i-
1],ffFixed,epsilon+2,epsilon);
    end;
  end;
end;

{
procedure TForm1.UpDown1ChangingEx(Sender: TObject;
  var AllowChange: Boolean; NewValue: Smallint;
  Direction: TUpDownDirection);
begin
  if (Direction = updUp)and(uuu) then
  begin
    //N := N*2;
    SetLength(p, N);
    StringGrid1.RowCount := N+2;
    h := (B-A)/N;
    for i := N downto 1 do
    begin
      p[i-1] := p[(i-1)div 2]/2;
      StringGrid1.Cells[0,i] := '['+FloatTostrf(A+h*(i-
1),ffFixed,5,2)+'--'+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,2)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i] :=FloatTostrf(p[i-1],ffFixed,6,4);
    end;
  end;

  if (Direction = updDown)and(uuu) then
  begin
    StringGrid1.RowCount := N+2;
    h := (B-A)/N;
    i := 0;
    While i<N do
    begin
      p[i] := p[i*2]+p[i*2+1];
      StringGrid1.Cells[0,i+1] :=
'['+FloatTostrf(A+h*(i),ffFixed,5,2)+'--
'+FloatTostrf(A+h*(i+1),ffFixed,5,2)+']';
      StringGrid1.Cells[1,i+1] :=FloatTostrf(p[i],ffFixed,6,4);
      inc(i);
    end;
    SetLength(p, N);
    StringGrid1.Cells[0,N+1] := 'Sum=';
    StringGrid1.Cells[1,N+1] := '1';
  end;
end; }

procedure TForm1.StringGrid1Exit(Sender: TObject);
var
  s: Double;
  c: Int64;
begin
  s := 0;
  try
```

```
    for i := 1 to N do
    begin
      p[i] := StrToFloat(StringGrid1.Cells[1,i+1]);
      s := s+p[i];
    end;
  except
  end;
  //StringGrid1.Cells[1,N+1] := FloatToStrF(s, ffFixed, 9,7);
  LabeledEdit4.Text := FloatToStrF(s, ffFixed, 7,6);
  c := Trunc(s*big_epsilon)+1;
  if (c<>big_epsilon)or((c-1)<>big_epsilon) then
  begin
    LabeledEdit4.Font.Color := clRed;
  end else
  begin
    LabeledEdit4.Font.Color := clBlack;
  end;
end;

function TForm1.SummCorrect: Boolean;
var
  c: Int64;
begin
  c := 0;
  try
    for i := 1 to N do
    begin
      p[i] := StrToFloat(StringGrid1.Cells[1,i+1]);
      c := c+Round(p[i]*big_epsilon);
    end;
  except
  end;
  LabeledEdit4.Text := FloatToStrF(c/big_epsilon, ffFixed, 7,6);
  if c<>big_epsilon then
  begin
    LabeledEdit4.Font.Color := clRed;
    result := false;
  end else
  begin
    LabeledEdit4.Font.Color := clBlack;
    result := true;
  end;
end;

procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);
begin
  dec(Step);
  if Step<lim+1 then Button2.Enabled := True;
  if Step=0 then Button3.Enabled := False;
  LabeledEdit1.Enabled := False;
  LabeledEdit2.Enabled := False;
  LabeledEdit3.Enabled := False;
  UpDown1.Enabled := False;
  StringGrid1.Options := StringGrid1.Options - [goEditing];
  uuu:=true;
  N := N div 2;
  UpDown1.Position := N;
  Button4Click(Self);
```

```
end;

procedure TForm1.Button4Click(Sender: TObject);
var
  j, T: Word;
  x, y, o_y, o_x: Integer;
  Tex, rez,old_rez, o_rez: Double;
  boo: Boolean;
  u: ShortInt;
begin
  //btnGridClick(Self);
  was_draw := true;
  boo := False;
  Image1.Canvas.Rectangle(-5,-5,image1.Width+5,image1.Height+5);
{================================================= вісь OX}
  image1.Canvas.Pen.Width := 1;
  image1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
  image1.Canvas.MoveTo(-1,image1.Height-10);
  image1.Canvas.LineTo(image1.Width+1,image1.Height-10);

{================================================= вісь OX}
  SetLength(Px, N+1);
  Px[0]:= p[0];
  for j := 1 to N do
  begin
    Px[j] := Px[j-1]+p[j];
  end;
  tex := (image1.Width-20) / (N);
  image1.Canvas.Pen.Color := ColorBox1.Selected;
  for u := 1 to UpDown2.Position do
  begin
    image1.Canvas.MoveTo(0,(UpDown2.Position+1)div 2 -
u+image1.Height-10);
    image1.Canvas.LineTo(10,(UpDown2.Position+1)div 2 -
u+image1.Height-10);
  end;
  old_rez := 0;
  j := 1;
  while j<image1.Width-15 do
  begin
    rez := Px[Trunc(j / Tex)];
    boo := rez<>old_rez;
    old_rez := rez;
    if boo then
    begin
      {image1.Canvas.Pen.Style := psDot;
      image1.Canvas.LineTo(j+9, image1.Height-10-
Trunc(old_rez*(image1.Height-20)));
      image1.Canvas.Pen.Style := psSolid;}

      if N<90 then
      begin
        image1.Canvas.Pen.Style := psDot;
        image1.Canvas.Pen.Color := clBlack;
        image1.Canvas.Pen.Width := 1;
        image1.Canvas.MoveTo(j+9,image1.Height-10);
        image1.Canvas.LineTo(j+9, image1.Height-10-
Trunc(old_rez*(image1.Height-20)));
```

```
        image1.Canvas.Pen.Style := psSolid;
        image1.Canvas.Pen.Color := ColorBox1.Selected;
        //image1.Canvas.Pen.Width := UpDown2.Position;
      end;
      if N<11 then
      begin
        image1.Canvas.Pen.Width := 1;
        image1.Canvas.Ellipse(j+7,image1.Height-10-
Trunc(rez*(image1.Height-20))-3,j+13,image1.Height-10-
Trunc(rez*(image1.Height-20))+3);
        inc(j,3);
        rez := Px[Trunc(j / Tex)];
        x := image1.Canvas.PenPos.X+3;
        y := image1.Canvas.PenPos.Y;
        for u := 1 to UpDown2.Position do
        begin
          //image1.Canvas.LineTo(x,y);
          image1.Canvas.MoveTo(x,(UpDown2.Position+1)div 2 - u+y);
        end;
      end;
    end;
    x := image1.Canvas.PenPos.X;
    y := image1.Canvas.PenPos.Y;
    o_y := image1.Height-10-Trunc(rez*(image1.Height-20));
    for u:=1 to UpDown2.Position+1 do
    begin
      image1.Canvas.MoveTo(x,y);
      image1.Canvas.LineTo(j+10, (UpDown2.Position+1)div 2-u+o_y);
    end;
    inc(j);
  end;
  x := image1.Canvas.PenPos.X;
  y := image1.Canvas.PenPos.Y;
  for u := 1 to UpDown2.Position do
  begin
    image1.Canvas.MoveTo(image1.Width-11,(UpDown2.Position-1)div 2-
u+10);
    image1.Canvas.LineTo(image1.Width, (UpDown2.Position-1)div 2-
u+10);
  end;
  image2.Picture := image1.Picture;
end;

procedure TForm1.Button5Click(Sender: TObject);
begin
  if SummCorrect then
  begin
    btnGridClick(Self);
    Button4Click(Self);
    image1.Enabled := true;
    Button5.Visible := False;
  end;
end;

procedure TForm1.Button6Click(Sender: TObject);
begin
  if SummCorrect then button6.Caption := 'Ok' else button6.Caption :=
'Err';
```

```
end;

procedure TForm1.Button7Click(Sender: TObject);
begin
  image2.Width := image1.Width;
  image2.Height := image1.Height;
  Image1.Canvas.Brush.Color := clGray;
  image1.Enabled := True;
  image1.Visible := true;
  Image1.Canvas.Rectangle(-1,-1,image1.Width+1,image1.Height+1);
  image1.Canvas.Rectangle(500,500,600,600);
end;

end.
```

Додаток Д

Навчальні програми

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [132].

Прикладна спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню ІКТ у навчання математики, повноцінному введенню ймовірнісно-статистичної змістової лінії у шкільний курс математики.

Сучасна математична освіта неможлива без формування ймовірнісно-статистичного мислення. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики вивчаються, починаючи з основної школи, в обсязі, що відповідає вимогам Державного стандарту. У старшій школі ця змістова лінія суттєво розширюється, поглиблюється. Вивчення цієї теми спирається на елементи комбінаторики, теорії ймовірностей, математичної статистики, що вивчалися в основній школі.

Тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» вивчається в 11 класі в обсязі 10 годин.

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень. [133]

Змістове наповнення програми базується на компетентнісному підході до навчання, спрямованому на формування системи відповідних знань, умінь, навичок, що дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної діяльності в різних сферах. Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу: обчислює ймовірності випадкових подій, оцінює шанси їх настання, вибирає оптимальні рішення;

Тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» вивчається в 11 класі в обсязі 12 годин.

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [134]

Початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики є

однією із змістових ліній, на які розподілено навчальний матеріал.

Узагальнене поняття ймовірності доцільно формувати на основі означення статистичної ймовірності. В такому разі слід звернути увагу на умову статистичної стійкості частот результатів дослідів, навести приклади виявлення статистичних закономірностей. Бажано приділити увагу пропедевтиці понять вибірки, розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) та його числових характеристик.

Тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» вивчається в 11 класі в обсязі 15 годин.

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) [135].

Тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» присвячена формуванню в учнів відповідних понять і навичок їх використання. На відміну від академічного рівня, де поняття ймовірності зазвичай формується на основі означення статистичної ймовірності (відносної частоти), у класі з поглибленим вивченням математики одночасно використовуються два підходи: класичне і статистичне означення ймовірності. Слід звернути увагу на відмінність як в теоретичному аспекті, так і в практичному застосуванні цих означень, розглянути умову статистичної стійкості дослідів, навести приклади виявлення статистичних закономірностей, для чого приділити увагу пропедевтиці понять вибірки, розподілу статистичних ймовірностей та його числових характеристик. На основі зазначених теоретичних відомостей має бути здійснено перехід до понять математичної статистики, розгляду математичного апарату опрацювання статистичних даних.

Тема «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» вивчається в 11 класі в обсязі 25 годин.

Таблиця 1

Рівень	Тема/Зміст навчального матеріалу	Вимоги до навичок та вмінь
Рівень стандарту	Тема 6. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. [Перестановки, розміщення, комбінації.] Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку.	Учень (учениця): обчислює відносну частоту події; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові характеристики вибірки даних.
Академічний рівень	Тема 7. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. [Перестановки, розміщення, комбінації.] Вибіркові характеристики: розмах	Учень (учениця): обчислює відносну частоту події; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові

	вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку.	характеристики вибірки даних.
Профільний рівень	Тема 7. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Перестановки, розміщення, комбінації. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку.	Учень (учениця): обчислює відносну частоту події; обчислює ймовірність події, користуючись її означенням і комбінаторними схемами; пояснює зміст середніх показників та характеристик вибірки; знаходить числові характеристики вибірки даних.
Класи з поглибленим вивченням математики	Тема 11. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики Елементи комбінаторики. Біном Ньютона та трикутник Паскаля. Випадкова подія. Відносна частота події. Класичне визначення ймовірності. Геометрична	Учень (учениця): формулює означення основних понять комбінаторики; розв’язує комбінаторні задачі; наводить геометричну інтерпретацію операцій над подіями; обчислює ймовірність

	ймовірність. Операції над подіями. Ймовірності суми та добутку подій. Незалежність подій. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне подання інформації про вибірку	події, користуючись комбінаторними та геометричними схемами; обчислює математичне сподівання випадкової величини; пояснює зміст середніх показників, оцінює числові характеристики випадкової величини за її вибірковими характеристиками та навпаки.