С-59

778/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Александр Иванович СОКОЛЕНКО

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ, РАВНОСИЛЬНЫХ СХОДИМОСТИ

(01.01.01 — теория функций и функциональный анализ)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

КИЕВ—1975

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313862

Работа выполнена в КИЕВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ имени А.М.ГОРЬКОГО

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор физико-математических
наук, профессор Н.А.ЛАВЫДОВ

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико-математических
наук, профессор Ю.Ю.ТРОХИМЧУК
кандидат физико-математических
наук, доцент И.П.ЛОБЫВАНЕЦ

ВЕДУЩЕЕ ПРЕДПРИЯТИЕ -
Киевский государственный университет имени Т.Г.Шевченко

Автореферат разослан "21" октября 1975 г.

Защита диссертации состоится "10" декабря 1975 г. в 14 часов на заседании совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А.М.Горького /ул.Пирогова, 9, ауд. 431/.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке института.

Отзывы просим присылать по адресу:
252030, г.Киев, 30, ул. Пирогова, 9, научная часть.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Пусть даны последовательность комплексных чисел $\{S_n\}$ и матрица $A=\|a_{nk}\|$, где a_{nk} $(n,k=1,2,\ldots)$ – комплексные числа. Если для всех $n=1,2,\ldots$ сходятся ряды

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \qquad /1/$$

и если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} t_n = S,$$

то говорят, что последовательность $\{S_n\}$ или, что одно и тоже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частными суммами $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ суммируется матрицей A к числу S и записывают

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S(A) \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(A).$$

Если из равенства $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ всякий раз следует равенство $\lim_{n\to\infty} S_n = S^*(A)$, то матрицу A называют K – матрицей. Если при этом $S^*=S$, то матрицу A называют T – матрицей.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы A была K – матрицей / T – матрицей/ дает известная теорема Кожима–Шура / [10], стр. 77 – 78/ /Сильвермана–Теплица/ [10], стр. 79/ /.

Наряду со средними вида /1/ в теории суммирования рассматриваются также средние вида

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) S_k, \qquad /2/$$

где $\{a_k(x)\}$ - заданная последовательность функций, определенных в промежутке $[0,x_0)$ / x_0 - конечное число или $+\infty$ / и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, S_k$ сходятся для всех $x \in [0,x_0)$. Говорят, что последовательность $\{S_n\}$ или, что одно и тоже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частными суммами $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ суммируется полунепрерывной матрицей $A=\|a_k(x)\|$ $(0\le x<x_0)$ к числу $S(S\neq\infty)$, если

$$\lim_{x\to x_0-} t(x) = S.$$

В отличие от матрицы преобразования /2/ матрицу преобразования /I/ называют дискретной.

K - матрицу A называют матрицей равносильной /ограниченно равносильной/ сходимости, если она не суммирует ни одной /ни одной ограниченной/ расходящейся последовательности.

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы T - матрица была ограниченно равносильной сходимости дает известная теорема А.Л.Брудно / [2] , теорема 5/:

Для того, чтобы T - матрица $A=\|a_{nk}\|$ была ограниченно равносильна сходимости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta_0>0$ такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S_n| \le \delta_0\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k\Big| \qquad /3/$$

для всех ограниченных последовательностей $\{S_n\}$.

Эта теорема Г.А.Михалиным / [I2] , теорема I4/ перенесена на K - матрицы:

K - матрица $A=\|a_{nk}\|$ ограниченно равносильна сходимости, тогда и только тогда, когда существует число $\delta_0>0$ такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S_n| \le \delta_0 \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Big|\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}-\lim_{n\to\infty}a_{nk})S_k\Big| \quad /4/$$

для любой ограниченной последовательности $\{S_n\}$.

Проверка условий /3/ и /4/ для данной конкретной матрицы $A=\|a_{nk}\|$ часто оказывается затруднительной /ввиду участия в них инородного по отношению к матрице A тела - последовательности $\{S_n\}$/. Поэтому представляют интерес утверждения, дающие лишь в терминах самой K или T - матрицы достаточные или необходимые условия для того, чтобы эта матрица была равносильна /ограниченно равносильна/ сходимости.

Указанным вопросам посвящены многочисленные работы как советских, так и зарубежных авторов. Так хорошо известны результаты Мерсера / [II] /, Р.Агнью / [I] ; [3]; стр.379 ; [10],стр. 207, 254/,З.Польняковского / [I3] /, Н.А.Давыдова / [5] , [6] , [8] , [9] /, Г.А.Михалина / [I2] /, Т.Сырмус / [I4] , [I5] /, Л.Р.Таргонского / [I6] / и другие.

Целью настоящей работы является получение некоторых результатов,касающихся достаточных или необходимых условий для того, чтобы K или T - матрица была равносильна /ограниченно равносильна/ сходимости.

Диссертация состоит из двух глав.

В § I показано, что справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть $A=\|a_{nk}\|$-K- матрица, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|=a\neq 0, \quad /5/$$

и $\{S_k\}$ - ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел, причем

$$\lim_{i\to\infty} S_{k_i'} = S^*, \quad \lim_{i\to\infty} S_{k_i''} = S^{**},$$

где S^* и S^{**} - аффиксы концов диаметра множества всех частичных пределов последовательности $\{S_k\}$.

Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{nk_i'}| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{nk_i''}| > a, \qquad /6/$$

то матрица A не суммирует последовательность $\{S_k\}$.

Показано, что условие /5/ является существенным, а условие /6/ нельзя ослабить.

Эта теорема обобщает известную теорему Н.А.Давидова / [8], теорема I/, доказанную им для положительных T - матриц и действительных последовательностей.

Теорема I позволила доказать теоремы 2,4 / §§ I,2/, составляющие

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Пусть $A=\|a_{nk}\|$ - K- матрица, для которой $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv a \neq 0$.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = a \qquad /7/$$

и для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{n\rho_i}| > \frac{a}{2}, \qquad /8/$$

то матрица A ограниченно равносильна сходимости.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k|a_{nk} - a_{n,k+1}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k(a_{nk} - a_{n,k+1}) \qquad /9/$$

и для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{\rho_i\}$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |a_{n\rho_i} - a_{n,\rho_i+1}| > \frac{a}{2}, \qquad /10/$$

то матрица A ограниченно равносильна любой матрице Чезаро порядка $\alpha > 0$.*/

Ранее такого типа результаты получены Н.А.Давыдовым для положительных матриц / [8] , теорема 2/ и произвольных Γ- матриц и матриц Чезаро натурального порядка / [7] , теорема II/.

Пусть $\{S_n\}$- последовательность комплексных чисел. Под ядром в смысле Кноппа последовательности $\{S_n\}$ / [10] , стр.161/ понимают пересечение

$$K(S) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n ,$$

---

*/ Говорят, что матрица A ограниченно равносильна матрице B, если из равенства $\lim S_n = S(A)$ следует равенство $\lim S_n = S(B)$ для всякой ограниченной последовательности $\{S_n\}$ и обратно.

где R_n – выпуклая оболочка множества точек $S_n, S_{n+1}, \dots$.

Известно / [10] , стр. 161/, что ядро ограниченной последовательности комплексных чисел совпадает с выпуклой оболочкой множества всех частичных пределов этой последовательности. Поэтому ядро ограниченной последовательности вполне определяется некоторым подмножеством частичных пределов этой последовательности /это подмножество, вообще говоря, не единственно/.

Определение I. Число $S = \lim_{i\to\infty} S_{k_i}$ назовем A_1 – частичным пределом последовательности $\{S_n\}$, если последовательность

$$\tau_n^{\{k_i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

имеет 1 в качестве своего частичного предела, где $A = \|a_{nk}\|$ – T – матрица.

В § 3 показано, что справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A = \|a_{nk}\| - T$ – матрица, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1, \qquad / \text{II} /$$

и пусть E – множество частичных пределов ограниченной расходящейся последовательности комплексных чисел $\{S_k\}$, определяющих ядро этой последовательности.

Если каждое $x \in E$ есть A_1 – частичный предел последовательности $\{S_k\}$, то $K(S) = K(t)$, где $K(S)$ и $K(t)$ – ядра соответственно последовательностей $\{S_k\}$ и $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Эта теорема обобщает известную теорему Н.А.Давыдова / [8], теорема I/, доказанную им для положительных T - матриц и действительных последовательностей. Из теоремы 5 следует достаточная часть известной теоремы Аллена / [I0] , стр. I88/.

Теорема 7, доказанная в § 3,отмечает аналогичный факт /как в теореме 5/ для положительных K - матриц и действительных последовательностей. С помощью этой теоремы устанавливается

ТЕОРЕМА 8. Если положительная K - матрица $A=\|a_{nk}\|$ такова, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{\infty}a_{np_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\equiv a\neq 0, \quad / \text{ I2 } /$$

то эта матрица преобразует всякую ограниченную последовательность действительных чисел $\{S_k\}$ в последовательность $t_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}S_k$ $(n=1,2,\dots)$, ядро которой совпадает с отрезком $[a\underline{S}+b,\ a\bar{S}+b]$, где $\underline{S}=\underline{\lim_{k\to\infty}}S_k$, $\bar{S}=\overline{\lim_{k\to\infty}}S_k$ и b - некоторое число определяемое последовательностью $\{S_k\}$ и матрицей A .

Эта теорема обобщает упомянутую выше теорему Аллена.

В § 4 рассматриваются K - матрицы, не суммирующие ни одной расходящейся последовательности из некоторых множеств последовательностей. Здесь, например, отмечены теоремы II,I2, составляющие

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если элементы K - матрицы $A = \| a_{nk} \|$ для всех $k \geq k_0$ удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} a_{nk} = \alpha_k \text{ для всех } n<k,\ a_{kk} - a_{k+1,k} \geq \alpha > 0, \\ a_{nk} \geq a_{n+1,k} \text{ для всех } n>k \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{array}\right\} \quad / 13 /$$

то эта матрица не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности, имеющей только два различных частичных предела.

Если, кроме того, $A = \| a_{nk} \|$ - положительная матрица, то она не суммирует ни одной неограниченной последовательности, все члены которой содержатся в угле раствора меньше π .

Эта теорема обобщает одну теорему Н.А.Давыдова / [8] , теорема 8/, доказанную им для положительных T - матриц.

В работе [9] Н.А.Давыдов установил одно необходимое условие для того, чтобы дискретная T - матрица была ограниченно равносильна сходимости. В § 5 этот результат переносится на полунепрерывные T - матрицы. Здесь доказана

ТЕОРЕМА 13. Пусть полунепрерывная T - матрица $A = \| a_k(x) \|$ $(0 \leq x < \infty)$ такова, что для любых чисел $x_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует номер $K = K(x_0, \varepsilon)$, для которого

$$\sum_{k=K}^{\infty} | a_k(x) | < \varepsilon \quad / 14 /$$

при всех $x \in [0, x_0]$.

Если матрица A ограниченно равносильна сходимости, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{0\le x<\infty} |a_k(x)| > 0. \qquad / 15 /$$

§§ 1-5 составляют содержание первой главы диссертации.

Другие виды достаточных условий для того, чтобы K или T- матрица была равносильна /ограниченно равносильна/ сходимости дают так называемые теоремы мерсерова типа, названные в честь Мерсера, впервые доказавшего одну из таких теорем / [II] /. Вопросу мерсеровых теорем посвящен § 6. Здесь, в частности, доказана

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - последовательности действительных чисел, для которых $\alpha_n+\beta_n\to\gamma>0\ (n\to\infty)$, и пусть $A=\|a_{nk}\|$ - нормальная матрица, для которой обратная $A^{-1}=\|a_{nk}^{-1}\|$ такова, что для всех $n=1,2,\ldots$ выполняются неравенства

$$a_{nk}^{-1}\le 0 \text{ для всех } k<n \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^{-1}\ge 1. \qquad / 16 /$$

Если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n>0$ и

$$t_n=\alpha_n S_n+\beta_n\sum_{k=1}^{n} a_{nk}S_k=O(1),$$

то $S_n=O(1)$.

Если $0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n<\infty$, $S\ne\infty$ и

$$t_n=\alpha_n S_n+\beta_n\sum_{k=1}^{n} a_{nk}S_k\to\gamma S\ (n\to\infty),$$

где $A=\|a_{nk}\|$ - T - матрица, то $S_n\to S\ (n\to\infty)$.

Условиям этой теоремы удовлетворяют, например, матрицы Чезаро (C,α), $0<\alpha$ 1, Рисса. (R,ρ_n), $\rho_n>0\ (n=1,2,\dots)$.

§§ 7 и 8 диссертации посвящены вопросу тауберовых теорем для матриц некоторых классов.

В § 7 рассматривается класс матриц $\mathcal{L}^{(\rho)}$. Матрица $A=\|a_{nk}\|$ принадлежит классу $\mathcal{L}^{(\rho)}$, если она является нижней треугольной положительной T - матрицей и для нее существует число $\rho>1$ такое, что выполнено условие /20/ */. Класс матриц $\mathcal{L}^{(\rho)}$ содержит, например, матрицы Чезаро (C,α), Гельдера (H,α) и Рисса (R,ρ_n), $\rho_n=A_n^{\alpha-1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$, $\alpha>0$.

Определение 2 /Н.А.Давыдов, [4]/. Замкнутое выпуклое множество G расширенной комплексной плоскости, отличное от всей расширенной комплексной плоскости и от единственной бесконечно удаленной точки, называют $(\mathcal{L}^{1+\alpha})$- множеством последовательности комплексных чисел $\{S_n\}$ $(\alpha\geq 0)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k,m_k]$ $(k=1,2,\dots)$ чисел натурального ряда, что

$$S_n\in G_\varepsilon \text{ для } n_k\leq n\leq m_k<n_{k+1}\ (k=1,2,\dots),\ \lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}}=\infty, \text{ / I7 /}$$

где G_ε - замкнутая выпуклая область в расширенной комплексной плоскости, которая содержит в себе множество G и каждая точка границы которой отстоит от множества G на расстоянии, меньшем или равном ε. В частности, если $(\mathcal{L}^{1+\alpha})$- множеством последовательности $\{S_n\}$ $(\alpha\geq 0)$ является точка, то эту точку называют $(\mathcal{L}^{1+\alpha})$ - точкой последовательности $\{S_n\}$.

---

*/ См. ниже .

Определение 3 /Н.А.Давидов, [4] /. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости называют $(\mathcal{L}^{1+\alpha})$ - точкой последовательности комплексных чисел $\{S_n\}$ $(\alpha \geq 0)$, если можно указать последовательность отрезков $[n_k, m_k]$ $(k=1,2,\dots)$ чисел натурального ряда и последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k $(k=1,2,\dots)$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке комплексной плоскости, таких, что

$$S_n \in G_k \text{ для } n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1} \ (k=1,2,\dots), \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} = \infty. \quad / \text{I8} /$$

В §7 доказана

ТЕОРЕМА I7. Пусть $A=\|a_{nk}\|$ - матрица класса $\mathcal{L}^{(p)}$, $p>1$, и $\{S_n\}$ - последовательность комплексных чисел, для которой

$$|S_n| \leq \begin{cases} Cn^{\alpha(1-\frac{1}{p})} & \text{при } 1<p<\infty \\ Cn^{\alpha} & \text{при } p=\infty \end{cases} \ (n=1,2,\dots), \quad / \text{I9} /$$

где C не зависит от n и $\alpha \geq 0$.

Если множество G является $(\mathcal{L}^{1+\alpha})$- множеством последовательности $\{S_n\}$, то пересечение $\mathcal{P}_2 \cap G$ содержит, по крайней мере, одну конечную или бесконечно удаленную точку, где $\mathcal{P}_2$- - множество всех частичных пределов последовательности $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k$ $(n=1,2,\dots)$.

С помощью этой теоремы в § 7 доказывается ряд теорем тауберова типа. Приведем некоторые из них.

ТЕОРЕМА I8. Пусть $A=\|a_{nk}\|$ - матрица класса $\mathcal{L}^{(p)}$, $\{S_n\}$ - последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию /I9/, и $\{n_k\}$ - заданная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Если $\lim_{k\to\infty}(S_{n_k}-S_{m_k})=0$ для всякой последовательности $\{m_k\}$, для которой $m_k>n_k$, а $\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}}<\infty$, то $\mathcal{P}_1(n_k)\subseteq\mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_1(n_k)$ и $\mathcal{P}_2$ - множества всех частичных пределов соответственно последовательностей $\{S_{n_k}\}$ и $t_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}S_k\ (n=1,2,\ldots)$. Если, кроме того, существует $\lim_{n\to\infty}t_n=S$, где S - число, конечное или бесконечное, то $\lim_{k\to\infty}S_{n_k}=S$.

ТЕОРЕМА 20. Пусть $A=\|a_{nk}\|$ - матрица класса $\mathcal{L}^{(p)}$ и $\{S_n\}$ - ограниченная последовательность комплексных чисел.

Если каждая точка множества E частичных пределов последовательности, определяющих ядро этой последовательности, является (t) - точкой данной последовательности, то $K(S)=K(t)$, где $K(S)$ и $K(t)$ - ядра соответственно последовательностей $\{S_n\}$ и $t_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}S_k\ (n=1,2,\ldots)$.

Результаты § 7 обобщают известные теоремы Е.А.Давыдова / [4], стр. I67-I69/, доказанные им для матрицы средних арифметических.

В § 8 рассматривается вопрос о тауберовых теоремах для матриц класса $M^{(p)}$. Матрица $A=\|a_{nk}\|$ принадлежит классу $M^{(p)}$, если она является T - матрицей и для нее выполняются следующие условия:

I/ существует число $\rho>1$ такое, что

$$n^{1-\frac{1}{\rho}}\|a_n\|_\rho=O(1), \qquad /20/$$

где $\|a_n\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_{nk}|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$ при $1 < p < \infty$,

$\|a_n\|_\infty = \max_{k=1,2,\dots,n} |a_{nk}|$;

2/ справедливо равенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|a_{nk}| \sum_{\nu=n+1}^{k} \frac{1}{\nu} \right) = O(1). \qquad / 21 /$$

Класс матриц $M^{(p)}$ существенно шире класса матриц $\mathcal{L}^{(p)}$

В § 8 установлена

ТЕОРЕМА 22. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем матрицей $A = \|a_{nk}\|$ класса $M^{(p)}$ к S, то равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k = o(1) \qquad / 22 /$$

является необходимым и достаточным условием для сходимости этого ряда к числу S.

Теоремы 23–25, доказанные в § 8, составляют

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Из суммируемости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ матрицей $A = \|a_{nk}\|$ класса $M^{(p)}$ следует его сходимость, если выполнено одно из трех тауберовых условий: I/ $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$;

2/ $a_n = 0$ для $n \neq n_k$, $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, $a_{n_k} = o(1)$;

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - 1} |a_n|^{\alpha} < \infty$ $(\alpha > 1)$.

Показано, что условие I/ в этом утверждении нельзя заменить условием $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а в условии 2/ данного утверж-

ния нельзя отказаться от требования $a_{n_k} = O(1)$.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на отчетно-научных конференциях кафедр Киевского пединститута им. А.М.Горького и семинаре по теории функций при Институте математики АН УССР.

Основное содержание диссертации отражено в работах [17] - [21].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. Agnew, Euivalence of methods for evaluation of secuences, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, 1952, p. 550-565.
2. А.Л.Брудно, Относительные нормы матриц Теплица, Доклады АН СССР, т.91, № 2, 1953, стр. 197 - 200.
3. Ж.И.Волков и П.Л.Ульянов, О некоторых новых результатах по общей теории суммирования рядов и последовательностей, монография, [10], стр. 363 - 467.
4. Н.А.Давыдов, О границах неопределенности при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона-Абеля, Успехи матем.н., т.12, вып. 4/76/, 1957, стр. 167 - 174.
5. Н.А.Давыдов, Обобщение теоремы Мерсера, Успехи матем.н., т.[illegible], вып. 6/126/, стр. 73 - 77.
6. Н.А.Давыдов, О неэффективности регулярных матриц, Успехи матем.н., т.20, вып. 6/126/, стр. 78 - 80.

7. Н.А.Давыдов, О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов, Украинск.матем.ж., т. 20, № 4, I968, стр. 460 – 47I.

8. Н.А.Давыдов, Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами, Матем.заметки т. I3, вып 2, I973, стр. I79 – I88.

9. Н.А.Давыдов, Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами, респ. научн. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 23, ХГУ, Харьков, I975, стр. 24 – 32.

I0. Г.Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., I960.

II. J.Mercer, On the limit of real variants, Proc. London Math. Soc. (2), vol. 5, 1907, p. 206-224.

I2. Г.А.Михалин, Некоторые вопросы включения, равносильности и совместности линейных методов суммирования, автореферат кандидатской диссертации, Киев, I974.

I3. З.Польняковский, О некоторых теоремах типа Мерсера, Бюллетень Польской АН, отд. 3, т. 4, № 5, I956, стр. 239 – 242.

I4. Т.Сырмус, О некоторых обобщениях теоремы Мерсера, Уч.зап. Тартуского университета, т.I02, Тарту, I96I, стр. I69 – I84.

I5. Т.Сырмус, Об обобщенной теореме Мерсера, Известия АН Эст.ССР, физмат. и техн.н., т.II, № 2, I962, стр. 99 – I05.

I6. Л.Ф.Таргонский, Одна теорема мерсерова типа, респ.научн. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 8, ХГУ, Харьков, I969, стр. 99 – I05.

I7. А.И.Соколенко, О ядрах в смысле Кноппа при суммировании ряда регулярной положительной матрицей, Украинск.матем.ж., т.26, № 4, I974, стр. 578 - 585.

I8. А.И.Соколенко, О тауберовых теоремах для одного класса регулярных матриц, Украинск.матем.ж., т.26, № 6, I974,стр.839-843.

I9. А.И.Соколенко, О K - матрицах, равносильных сходимости, "Приближенные методы математического анализа", тем.научн.сб., КГПИ, Киев, I974, стр. II5 - I27.

20. А.И.Соколенко, О суммировании ограниченных последовательностей регулярными матрицами, респ.научн.сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 23, ХГУ, Харьков, I975, стр. I09 - II9.

2I. А.И.Соколенко, О суммировании ограниченных последовательностей положительными K - матрицами, респ.научн.сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", вып. 23, ХГУ, Харьков, I975, стр. II9 - I24.