8. Marynchenko Ye. (2020). Pedahohichni umovy formuvannia hotovnosti maibutnoho pedahoha profesiinoho navchannia do innovatsiinoi diialnosti u silskohospodarskomu vyrobnytstvi [Pedagogical conditions for the formation of the readiness of a future vocational training teacher for innovative activities in agricultural production]. *Traektoriâ Nauki = Path of Science*. Vol. 6. No 10. S. 4009–4017 [in Ukrainian].
9. Melnyk L. (2010). Formuvannia hotovnosti maibutnikh uchyteliv humanitarnykh spetsialnostei do zastosuvannia interaktyvnykh tekhnolohii u navchalnomu protsesi [Formation of readiness of future teachers of humanities specialties to use interactive technologies in the educational process] : avtoref. dys. … kand. ped. nauk : 13.00.04. Vinnytsia. 21 s. [in Ukrainian].
10. Novyi tlumachnyi slovnyk ukrainskoi movy. (1999). [New Explanatory Dictionary of the Ukrainian Language]: u 4-kh t. Kyiv : Akonit. T. 2. 910 s. [in Ukrainian].
11. Ohiienko O. (2013). Formuvannia hotovnosti do innovatsiinoi diialnosti yak vazhlyva skladova profesiinoi pidhotovky maibutnoho vchytelia. [Formation of readiness for innovative activity as an important component of the professional training of a future teacher]. Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii. № 7 (33). S. 154–162 [in Ukrainian].
12. Tomashevska M. (2020). Pidhotovka maibutnikh vykladachiv pedahohichnykh dystsyplin do profesiinoi vzaiemodii zasobamy interaktyvnykh tekhnolohii [Preparing future teachers of pedagogical disciplines for professional interaction using interactive technologies] : dys. … doktora filosofii z haluzi znan 01 Osvita / Pedahohika za spetsialnistiu 015 Profesiina osvita (za spetsializatsiiamy)/ Mukachivskyi derzhavnyi universytet. Mukachevo. 296 s. [in Ukrainian].
13. Slovnyk-dovidnyk z profesiinoi pedahohiky [Dictionary-reference book on professional pedagogy] (2006). / za red. A. V. Semenovoi]. Odesa : Palmira. 364 s. [in Ukrainian].
14. Filosofskyi slovnyk sotsialnykh terminiv [Philosophical Dictionary of Social Terms]. (2005). 3-ye vyd., dopovnene. Kharkiv : T. Y. F. 672 s. [in Ukrainian].
15. Khrykov Ye. (2011). Pedahohichni umovy, yak skladova naukovykh znan [Pedagogical conditions as a component of scientific knowledge]. *Shliakh osvity*. № 2 (60). S. 11–15 [in Ukrainian].
16. Szutow D. (2020). Vazhlyvist orhanizatsiino-pedahohichnykh umov yak fundamentu rozvytku profesiinoi kompetentnosti vchyteliv istorii profilnoi shkoly [The importance of organizational and pedagogical conditions as the foundation for the development of professional competence of history teachers in a specialized school]. *ZESZYTY NAUKOWE WSG. Seria: Edukacja – Rodzina – Społeczeństwo.* Nr 5. T. 36. P. 193–207 [in Ukrainian].

I. Kushniruk. Pedagogical conditions for forming organizational competence of future teachers of higher education institutions using group learning technologies.

The article substantiates that the modern system of higher education imposes on the teacher not only the requirement for possession of deep professional knowledge, but also the need for formed organizational competence, which is a decisive factor in ensuring the effectiveness of the educational process, especially in the conditions of rapid transformations of the information society. In order to interpret and scientifically and theoretically substantiate the pedagogical conditions for the formation of organizational competence of future teachers of higher education institutions using group learning technologies, a thorough analysis of the content of the concept of "pedagogical conditions" was carried out. As a result of the study, a tendency towards the interpretation of pedagogical conditions as a set of methodological, didactic and psychological prerequisites that provide a favorable educational environment for the purposeful development of both professional and personal qualities of the character of education seekers, their ability to organizational activity within the framework of group interaction has been outlined. For the purpose of scientific and theoretical substantiation, a number of pedagogical conditions have been outlined, the provision of which in the educational process of higher education institutions of Ukraine will contribute to increasing the effectiveness of the formation of organizational competence of future teachers in the implementation of group activity technologies as one of the leading components of their professional training.

Among them: the formation of personal and professional qualities of the personality of future teachers of higher education institutions in the course of applying group learning activity technologies; the formation of positive motivation and value-based attitudes towards.

Key words: *higher education institution, future teacher, organizational competence, pedagogical conditions, group learning technologie.*

УДК 378.046.4:[373.5.016:51]:[512.13+517.1]
DOI https://doi.org/10.31392/UDU-nc.series5.2025.105.15

Мітельман І. М.

РОЗВИТОК ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ТА ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ЯК ЕЛЕМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ В НЕРІВНОСТЯХ ОЛІМПІАДНОГО ХАРАКТЕРУ

У статті продовжено дослідження дидактико-методичних підходів до проблемно-евристичного навчання доведення нерівностей математичних олімпіад високого рівня. Ефективність такої роботи з математично обдарованими учнями, учасниками інтелектуальних змагань в умовах академічної профілізації на основі поглибленого вивчення математики в старшій школі визначається наскрізністю й цілісністю процесу генералізації знань. Йдеться про концентрацію освітніх ресурсів навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв'язування ускладнених та олімпіадних задач у вимірі стратегій розвивальної наступності.

Позитивні результати суттєво залежать від узгодженої інтеграції предметних і дидактичних зв’язків на рівні змістових ліній математичної освітньої галузі та актуалізації методично значущих ідей у практиці підвищення кваліфікації вчителів математики. Водночас у старшій профільній школі максимально розгортається змістова лінія «Функції», яка набуває ключового значення для інтерпретації нерівностей з позицій властивостей функцій. У контексті цієї змістової лінії учні формують і первинні уявлення про граничний перехід як елемент функціональної компетентності.

Однак реальний стан викладання цього матеріалу виявляє дидактико-методичну проблему: граничний перехід як базова категорія початків аналізу часто не застосовується в розв’язуванні нестандартних задач, умова яких цього безпосередньо не передбачає.

Метою статті є моделювання предметно-методичного кейса, що об’єднує систему різнопланових задач, у яких доведення нерівностей олімпіадного характеру супроводжується елементами дослідження. Наведені задачі, у свою чергу, вимагають здійснення під час дослідження граничних переходів і мотивують учнів опановувати відповідну тематику на більш серйозному рівні.

Запропоновані результати сприяють розвитку спеціалізованих математичних компетентностей через синхронізацію зон найближчого математичного розвитку учнів і вчителів, а також відповідних зон предметно-методичного сегмента професійної компетентності педагога. Такий розвиток функціональної компетентності набуває ознак закріпленого продуктивного освітнього результату та сприяє привабливості програм інституційного підвищення кваліфікації сучасного вчителя математики.

Ключові слова: *методика навчання математики, підвищення кваліфікації вчителів, профілізація старшої школи, генералізація знань, змістові лінії шкільного курсу математики, математична та предметно-методична компетентність, олімпіадні задачі, доведення нерівностей, границі функцій та послідовностей.*

Стратегія реалізації Державного стандарту профільної середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 року № 851, передбачає активізацію продуктивного впровадження академічної профілізації на основі поглибленого вивчення математики в старшій школі. Відбір змісту навчання на профільному поглибленому рівні, робота з математично обдарованими учнями, учасниками олімпіад і турнірів, а також відповідні дидактико-методичні ресурси післядипломної підготовки вчителів математики мають задовольняти вимоги щодо фундаменталізації математичної освіти в нерозривному зв’язку з обсягом і змістом наукових предметних знань у контексті її професіоналізації. Українські й зарубіжні вчені поєднують фундаменталізацію та професіоналізацію освіти в межах єдиного процесу генералізації знань – концентрації навчального матеріалу й дидактико-методичного ресурсу навколо ключових теоретичних розділів і системи навчання розв’язування задач [13].

В умовах профілізації старшої школи особливої уваги потребує трансформація спеціалізованих математичних компетентностей на рівні синхронізації зон найближчого математичного розвитку вчителів та учнів і відповідних зон предметно-методичного сегмента структури компетентностей учителя в контексті принципів розвивальної наступності й формувальної задачної природи цілісної навчально-математичної діяльності [10; 11]. Цим великою мірою визначається сучасна роль актуалізації методично значущих ідей у практиках післядипломної підготовки вчителів математики. Виведення творчо працюючих учителів на високий компетентнісний рівень реалізації математичної та методичної інтеграції провідних змістових ліній може орієнтуватись на дидактичний ресурс і координацію освітніх підходів XP (eXtreme Pedagogy) та ATLM (Agile Teaching / Learning Methodology), працюючих на основі цінностей Маніфесту agile (Manifesto for Agile Software Development, 2001) [3; 8]. У статті [8] докладно аналізується та обгрунтовується, що в загальній методології agile ключову категорію робочого продукту в контексті неперервної педагогічної освіти слід розглядати передусім з позицій зростання професійного статусу її здобувача по завершенні чергового кроку підвищення кваліфікації в будь-якій існуючій формі. Зокрема, у [5; 7] аналізується застосування ідей eXtreme Pedagogy на платформі закладу післядипломної педагогічної освіти для проєктування, моделювання та реалізації дидактичних комплексів, спеціалізованих предметно-методичних кейсів. При цьому робочий продукт технології XP (конкретні працюючі інструменти для виконання чітко поставлених педагогічних завдань) [14] на методологічному, фактологічному та праксеологічному рівні нерозривно взаємодіє з основним робочим продуктом технології ATML – компактною, збалансованою системою знань з обраної теми, яка – з одного боку – і спрацює відразу у форм-факторі коротких релізів, і вплине на здатність розробки власних дидактико-методичних проєктів (кейсів, кластерів), набуття (розвиток, модернізацію) навичок для навчання протягом усього життя (зазначимо, що принцип “skills for life-long learning” було сформульовано саме в межах стратегії ATLM).

Дидактико-методична ефективність залежить від злагодженої інтеграції предметних і дидактичних зв’язків на рівні змістових ліній математичної освітньої галузі. У старшій (профільній) школі максимально розгортається чи не найголовніша з них – змістова лінія «Функції» [12]. Розв’язування рівнянь і нерівностей, доведення нерівностей більш помітно асоціюється не лише із системою типових послідовних дій та операцій, логічних кроків, виконання яких суто в межах таких змістових ліній, як «Числа і вирази», «Рівняння і нерівності», призводить до потрібного результату, а й з нестандартною інтерпретацією таких задач з точки зору властивостей функцій однієї чи навіть декількох змінних та застосуванням відповідних потужних методів математичного аналізу як основи техніки розв’язування ускладнених і олімпіадних задач. Такі питання докладно аналізували вітчизняні науковці Я. Бродський, Т. Колесник, З. Кравченко,

О. Кукуш, В. Лейфура, О. Мартиненко, В. Радченко, А. Сліпенко, І. Соколовська, О. Томащук, Я. Чкана, В. Швець, В. Ясінський та ін.

Водночас у старшій школі функціональна лінія набуває принципово нового статусу: учні отримують первинні уявлення про граничний перехід та границі функцій (нагадаємо, що числові послідовності також можна розглядати як функції натурального аргументу), знайомляться з основами диференціального й інтегрального числення, яке ґрунтується на ідеях граничних переходів. Реальний стан викладання та вивчення основ математичного аналізу виокремлює нагальну дидактико-методичну проблему. Граничний перехід є базовою самостійною складною категорією основ аналізу, джерелом введення нових понять і доведення теорем. Але фактично цей матеріал вимушено розглядається без якісної наукової формалізації, без доведень тощо або ж у спрощеному описово-імітаційному форматі (навіть на рівні профільної математичної шкільної освіти), чим невідворотно знижується його ресурсний статус. У цілому, недостатньо висвітленими чи просто поза увагою залишаються такі ситуації, в яких не теоретичний результат з курсу математичного аналізу, а власне граничний перехід є невід'ємною складовою міркувань під час розв'язування нестандартних задач, умова (постановка) яких цього не передбачає. Можна лише відзначити, що математичні й методичні аспекти застосування граничного переходу доволі повно розкрито в публікаціях, присвячених іншим класам специфічних олімпіадних задач – функціональним рівнянням і нерівностям.

Мета статті – моделювання й координування дидактичних зв'язків деяких типів олімпіадних задач, що зводяться до доведень нерівностей з нестандартними елементами дослідження, із відповідними теоретичними питаннями поглибленого курсу алгебри та початків аналізу. Ця мета є важливою для активізації набутих компетентностей з функціональної змістової лінії як закріпленого освітнього результату, а також для значного підвищення творчого потенціалу сучасного вчителя й постійної модернізації змісту неперервної освіти вчителів математики.

Основні науково-методичні й практичні результати ми презентуємо обґрунтованими прикладами змістового наповнення продуктивних тематичних проєктів – предметно-методичних кейсів [9]. Даний підхід апробовано під час проведення занять на курсах підвищення кваліфікації та на авторських семінарах «Предметно-методичний супровід учнівських олімпіад з математики: розвиток ідей шкільного курсу в контексті сучасних олімпіадних завдань» у КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради». Дидактико-методична кластерна архітектура проєкту відрізняється від класичних задачних комплексів каскадного (лінійного) типу, задачних «ланцюжків» тощо та, вважаємо, доповнює їх [6]. Задачі-моделі [2, с. 9–12] різнопланової тематичної спрямованості в розглядуваних випадках об'єднуються неочевидними внутрішніми «потребами» в здійсненні граничних переходів у різних математичних обставинах, а мотиваційний, змістовий та дійовий компоненти розгортаються за незвичним та непередбачуваним для вчителів (і для учнів із підвищеними освітніми потребами в галузі математики) евристичним сценарієм, що передбачає також володіння додатковими теоретичними знаннями, технічними прийомами різного рівня складності.

Задача 1 (Всеукраїнська олімпіада, 1981 р.). Нехай a_1, a_2, ... a_n – такі дійсні числа, що для всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ має місце нерівність $\left|a_1\sin x + a_2\sin 2x + \ldots + a_n\sin nx\right| \le \left|\sin x\right|$. Доведіть, що $\left|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right| \le 1$.

Розв'язання. Для всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)\setminus\{0\}$ маємо, що

$$\left|a_1\frac{\sin x}{\sin x} + a_2\frac{\sin 2x}{\sin x} + \ldots + a_n\frac{\sin nx}{\sin x}\right| \le 1. \tag{1.1}$$

З теореми про *першу визначну границю* ($\sin t \sim t, t \to 0$) випливає, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$. У нерівності (1.1) перейдемо до границі при $x \to 0$ і отримаємо потрібний результат.

Задача 2. Доведіть, що для довільних дійсних додатних чисел a, b, і c виконується нерівність

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2. \tag{2.1}$$

Чи можна константу 2 у правій частині цієї нерівності замінити меншим числом?

Розв'язання. Позначимо $F(a,b,c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. Тоді

$$F(a,b,c) - 2 = -\frac{a^2c + ab^2 + bc^2 + abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} < 0.$$

Точність оцінки – тобто неможливість зменшити константу в правій частині нерівності (2.1) – зручно обґрунтувати за допомогою такого граничного переходу (для фіксованого значення $a = a_0 > 0$): $F(a_0,b,c) \to 2$, $b = \frac{1}{c} \to 0$, $c \to +\infty$.

Зауваження. Ми встановили також, що

$$\sup\left\{F(a,b,c): a>0, b>0, c>0\right\}=2.$$

Задача 3 (Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 1995 р.). Дано натуральне число $n>2$. Доведіть, що для будь-яких додатних дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ виконується нерівність

$$\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}+\frac{a_2-a_3}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n-a_1}{a_n+a_1}<n-2. \tag{3.1}$$

Чи можливо зменшити константу $n-2$?

Розв’язання. Нерівність (3.1) для подальшого її доведення методом математичної індукції можна записати в рівносильному вигляді $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k+1}>1$ для таких додатних чисел $b_1, b_2, \ldots b_n$, що $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n=1$. Якщо взяти $a_k=(n+1-k)^{\lambda}$, $1\le k\le n$, то за умови $\lambda\to+\infty$ ліва частина нерівності (3.1) прямуватиме до $n-2$. Відтак, зменшити константу $n-2$ неможливо.

Задача 4 (Відкрита олімпіада Рішельєвського ліцею, 2003 р.). Дано натуральне число m. Відомо, що функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ має похідну в кожній точці числової прямої, причому для всіх $x\in\mathbb{R}$ і для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ справджується нерівність $f'(x)\le f'\left(x+\frac{m}{n}\right)$. Доведіть, що функція $\varphi(x)=f'(x)$ є неспадною на всій числовій прямій, тобто $f'(a)\le f'(b)$, якщо $a<b$.

Розв’язання. Нехай $F_n(x)=\frac{n}{m}\left(f\left(x+\frac{m}{n}\right)-f(x)\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді $F_n'(x)\frac{n}{m}\left(f'\left(x\quad\frac{m}{n}\right)\quad f'(x)\right)$, $F_n'(x)\ge 0$, $x\in\mathbb{R}$. Звідси $F_n(a)\le F_n(b)$ для $a<b$, тобто

$$\frac{f\left(a+\frac{m}{n}\right)-f(a)}{\frac{m}{n}}\le\frac{f\left(b+\frac{m}{n}\right)-f(b)}{\frac{m}{n}}.$$

Перейдемо в останній нерівності до границі при $n\to\infty$ і з урахуванням означення похідної функції в точці отримаємо, що $f'(a)\le f'(b)$.

Зауваження. Розібрана задача має вагоме теоретичне значення для опанування учнями класів математичного профілю строгого означення похідної.

Наступна відома задача використовує не лише прийоми роботи із середніми величинами, але й *розбіжність* гармонічного ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, тобто те, що $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to+\infty$, $n\to\infty$ (цей факт досить часто обговорюється на факультативних, гурткових заняттях, на уроках у класах математичного профілю тощо).

Задача 5 (L. Kurlyandchik & A. Merkuriev, 1986). Знайдіть найменше можливе число μ таке, що для кожного натурального $n\ge 2$ нерівність $\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^{-1}<\mu\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}$ має місце для будь-якого набору додатних дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Розв’язання. Позначимо $m=\frac{k(k+1)}{2}$. За нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним маємо:

$$\frac{m^2}{a_1+\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_2}{2}\right)+\ldots+\left(\underbrace{\frac{a_k}{k}+\ldots+\frac{a_k}{k}}_{k\ \text{разів}}\right)}\le\frac{1}{a_1}+\left(\frac{2}{a_2}+\frac{2}{a_2}\right)+\ldots+\left(\underbrace{\frac{k}{a_k}+\ldots+\frac{k}{a_k}}_{k\ \text{разів}}\right),$$

$$\frac{k}{a_1+a_2+\ldots+a_k}\le\frac{4}{k(k+1)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{k^2}{a_k}\right).$$

Відтак,

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^{-1}\le\sum_{k=1}^{n}4k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j(j+1)^2}\right)a_k^{-1}<\sum_{k=1}^{n}2k^2\left(\sum_{j=k}^{n}\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(j+1)^2}\right)\right)a_k^{-1}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) a_k^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{2k^2}{(n+1)^2} \right) a_k^{-1} < 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}.$$

Ми довели, що всі $\mu \geq 2$ мають потрібну властивість.

Нехай тепер $\mu < 2$. Візьмемо $a_k = k$, $1 \leq k \leq n$. Тоді $\sum_{k=1}^{n} k \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right)^{-1} - \mu \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} - \mu \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$ $= (2-\mu) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{2}{n+1} - \mu \to +\infty$, $n \to \infty$, і ця різниця, починаючи з деякого n, буде набувати додатних значень.

Отже, жодне $\mu < 2$ умову не задовольняє, і шуканим найменшим значенням константи μ є саме $\mu = 2$.

Певні типи олімпіадних задач про цілу й дробову частину також можна класифікувати як задачі, пов'язані з нерівностями (оскільки ціла частина $[a]$ дійсного числа a фактично визначається через нерівності: ціле число m називається цілою частиною числа a, якщо $m \leq a < m+1$).

Задача 6 (Всеукраїнська олімпіада, 1998 р.). Дано такі **нерівні** дійсні числа $x \geq 1$ та $y \geq 1$, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{[nx]}{[ny]}$. Доведіть, що числа x і y є натуральними і при цьому x ділиться без остачі на y.

Розв'язання. З умови задачі випливає (при $n = 1$), що $[x] = [y] \left[\frac{x}{y} \right]$, $[x] \vdots [y]$. Припустимо, що x – неціле число, тобто $0 < \{x\} < 1$. Для деякого натурального n виконується рівність $[n\{x\}] = 1$, і тоді $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{[nx]}{[ny]} = \frac{[n[x] + n\{x\}]}{[ny]} = \frac{n[x]+1}{[ny]}$, $[ny] \cdot \left[\frac{x}{y} \right] = n[x] + 1$, $[ny] \cdot \frac{[x]}{[y]} = n[x] + 1$. Оскільки $[x] \vdots \frac{[x]}{[y]}$, то $1 \vdots \frac{[x]}{[y]}$, $[x] = [y]$, $\left[\frac{x}{y} \right] = 1$. Отже, $x \geq y$, $\{x\} \geq \{y\}$.

Якщо $\{x\} > \{y\}$, то існує таке натуральне число m, що $[m(\{x\} - \{y\})] \geq 1$. Маємо:

$$1 = \frac{[mx]}{[my]} = \frac{m[x] + [m\{x\}]}{m[y] + [m\{y\}]} = \frac{m[x] + [m\{y\} + m(\{x\} - \{y\})]}{m[y] + [m\{y\}]} \geq$$

$$\frac{m[x] + [m\{y\}] + [m(\{x\} - \{y\})]}{m[y] + [m\{y\}]} > 1$$

(ми застосували відому властивість цілої частини числа: $[u+v] \geq [u] + [v]$ для всіх дійсних u і v). Отримана суперечність показує, що $\{x\} = \{y\}$. Але тоді, ураховуючи рівність $[x] = [y]$, дістаємо, що $x = y$, а це не відповідає умові задачі.

Відтак, число x є натуральним, і тепер доведемо, що й y є числом натуральним, тобто $y = [y]$. Для цього достатньо показати, що $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{x}{y}$, бо $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{[x]}{[y]}$. Позаяк $k\{y\} - 1 < [k\{y\}] \leq k\{y\}$, $\{y\} - \frac{1}{k} < \frac{[k\{y\}]}{k} \leq \{y\}$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{[k\{y\}]}{k} = \{y\}. \tag{6.1}$$

Далі, $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{[kx]}{[ky]} = \frac{kx}{[k[y] + k\{y\}]} = \frac{kx}{k[y] + [k\{y\}]} = \frac{x}{[y] + \frac{[k\{y\}]}{k}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $\left[\frac{x}{y} \right] = \frac{x}{[y] + \{y\}} = \frac{x}{y}$ (ми скористались граничним співвідношенням (6.1)).

В олімпіадних задачах, пов'язаних з цілою частиною числа, часто використовується той факт, що для $x \geq 0$ та натуральних $p \geq 2$ має місце рівність $\left[\sqrt[p]{[x]} \right] = \left[\sqrt[p]{x} \right]$, яку ми застосуємо нижче. Насправді, позначивши $a = \left[\sqrt[p]{x} \right]$, матимемо: $a \leq \sqrt[p]{x} < a+1$, $a^p \leq x < (a+1)^p$, $a^p \leq [x] \leq x < (a+1)^p$, $a \leq \sqrt[p]{[x]} < a+1$, тобто $a = \left[\sqrt[p]{[x]} \right]$.

Поставимо задачу про «спрощення» виразу $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right]$, $n \in \mathbb{N}$ (якщо в умові задачі пропонується встановити вже готову рівність, якою ця чи подібні конструкції спрощуються, то, як правило,

зробити це неважко). Покажемо, як можна отримати *гіпотезу* щодо відповіді, яку, у свою чергу, буде легко обґрунтувати.

Будемо спрощувати вираз $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]$ для натуральних n, що зводиться до знаходження (можна передбачати «лінійну» поведінку такої цілої частини; більш того, очікуваний результат тут буде практично очевидним). Доречно звернутись до знаходження асимптоти графіка функції $f(x)=2\sqrt{x^2+x}$ на $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=1.$$

Отже, пряма $y=2x+1$ буде шуканою похилою асимптотою, причому, зрозуміло, $f(x)<2x+1$, $x\geq 0$. Оскільки ми бачимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)\right)=0$, то існує таке натуральне число n_0, що для $n\geq n_0$

$$-1<2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)<0,$$

$$2n<2\sqrt{n^2+n}<2n+1,$$

тобто для $n\geq n_0\left[2\sqrt{n^2+n}\right]=2n$. Позаяк нерівність $2n<2\sqrt{n^2+n}<2n+1$, як легко перевірити, виконується для всіх натуральних n (а не лише починаючи з деякого n_0), то прогнозований результат про виконання рівності для кожного $n\in\mathbb{N}$ ми отримали.

То ж $\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]=4n+1$, $n\in\mathbb{N}$, звідки $\sqrt{\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]}=\sqrt{4n+1}$, $\left[\sqrt{\left[\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right]}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, $\left[\sqrt{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$.

До речі, оскільки $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ (для $m=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, ураховуючи, що число вигляду $4n+2$ не може бути точним квадратом, маємо: $m^2\leq 4n+1<(m+1)^2$, $m^2\leq 4n+1<4n+2<(m+1)^2$, $m<\sqrt{4n+2}<m+1$, $\left[\sqrt{4n+2}\right]=m$), то ми отримали розв’язання такої задачі.

Задача 7 (Всеукраїнська олімпіада, 1978 р.). Доведіть, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$.

Підкреслимо, що фактична відповідь, включена тут до формулювання умови, значно спрощує безпосереднє доведення, виключаючи з нього пошуковий складник (Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Карташов М. В. та ін. Українські математичні олімпіади. К. : Вища школа, 1993. 415 с.).

Математичні та методичні аспекти описаного прийому обговорювались у [1; 4]. Зокрема, там містяться такі твердження, доведення яких у загальному вигляді повторюють наведені вище міркування.

Теорема. Нехай для цілих чисел k і b пряма $y=kx+b$ є асимптотою графіка функції f на $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$), причому існує таке число C, що для всіх $x\geq C$ $f(x)<kx+b$. Тоді знайдеться натуральне число M таке, що для будь-якого натурального $n\geq M$ виконується рівність $\left[f(n)\right]=kn+b-1$.

Теорема. Нехай для цілих чисел k і b пряма $y=kx+b$ є асимптотою графіка функції f на $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$), причому існує таке число C, що для всіх $x\geq C$ $f(x)\geq kx+b$. Тоді знайдеться натуральне число M таке, що для будь-якого натурального $n\geq M$ виконується рівність $\left[f(n)\right]=kn+b$.

Вважаємо, що опрацювання цієї низки теоретичних і задачних кейсів покращує організацію мисленнєвої діяльності в навчально-теоретичній і навчально-дослідницькій зоні математичного й предметно-методичного розвитку, сприяє перетворенню даних зон найближчого розвитку на зони актуального розвитку та утворенню нових інтелектуальних і фахових якостей суб’єктів пізнання та/або професійної діяльності [11].

Висновки. Запропонований стислий дидактико-методичний комплекс мотивуючих математичних сюжетів-індикаторів дозволяє на дослідницькому компоненті освітньої траєкторії здобувачів поглибленої математичної освіти задіяти основні типи граничних переходів, доступні для учнів старшої школи. Тим самим не лише досягається відчутний випереджальний ефект і розширюється ресурс евристичних компетентностей учнів з високим рівнем математичної підготовки, але й удосконалюється інструментарій моделювання й стимулювання пошукової активності працюючого вчителя та майбутнього вчителя – студента-математика закладу вищої педагогічної освіти.

Подальшого вивчення потребують наукові й методичні питання, які впливають на цільність і наскрізність програм поглибленого профільного вивчення математики в старшій школі, програм підвищення кваліфікації вчителів у закладах післядипломної освіти і зміст фахових модулів у вимірі генералізації знань учасників освітнього процесу.

Використана література:

1. Альт М. А. Про деякі асимптотично породжені цілочисельні тотожності. *Збірник «Кожній школі – наукове товариство»*. Одеса : ОблІУВ & ОблСЮТ, 1988. С. 27–28.
2. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Глобін О. І. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні : методичні рекомендації. *Інститут педагогіки НАПН України*, 2017. URL: https://undip.org.ua/library/navchannia-matematyky-v-starshiy-shkoli-na-profilnomu-rivni-metodychni-rekomendatsii
3. Задоріна О. М., Мітельман І. М., Папач О. І. Питання підготовки майбутніх учителів математики до інтеграції в систему післядипломної педагогічної освіти. *Нова педагогічна думка*. 2022. Т. 111. № 3. С. 81–90. https://doi.org/10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90
4. Мітельман І. М. Методичні та практичні аспекти розв'язування деяких олімпіадних задач про цілу частину числа. *Наша школа.* 2000. № 2–3. С. 150–155.
5. Мітельман І. М. Синхронізація спеціалізованих компетентностей під час підготовки учнів до математичних олімпіад як науково-методична проблема. *Матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції «Педагогічна наука і освіта у сучасному вимірі: проблеми і перспективи розвитку»* (м. Одеса, 14 травня 2021 р.). С. 198–204.
6. Мітельман І. М. Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика : колект. моногр. *Одеська акад. неперервної освіти.* Одеса : видавець Букаєв Вадим Вікторович, 2019. С. 241–257.
7. Мітельман І. М. Особливості моделювання спеціалізованих методичних кейсів у контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини*. 2021. Вип. 2. С. 137–149. https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672
8. Мітельман І. М. Дидактичні ресурси agile-стратегій підготовки вчителів до роботи з математично обдарованими учнями. *Наша школа: науково-практичні студії.* 2023. № 1 (1). С. 65–73. https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305
9. Мітельман І. М. Оцінювання деяких виразів з модулем числа під час розв'язування задач з параметрами в дидактичному контексті підвищення кваліфікації вчителів математики. *Академічні візії.* 2023. Вип. 20. http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614
10. Мітельман І. М. Дидактико-методичні аспекти тригонометричної інтерпретації деяких типів алгебраїчних задач підвищеної складності. *Наша школа: науково-практичні студії.* 2024. № 3 (7). С. 24–39. https://doi.org/10.61339/2786-6947.2024.3(7).315923
11. Семенець С. П. Задачний підхід до формування навчально-математичної діяльності та розвитку математичних здібностей учнів. *Математика в рідній школі.* 2016. № 4. С. 14–18.
12. Швець В. О. Змістова лінія «Функції» шкільного курсу математики та особливості її вивчення в середній школі. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації.* 2024. № 2. С. 7–19. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-7-19
13. Ярхо Т., Ємельянова Т., Легейда Д. Упровадження принципу генералізації знань у повторювальний курс елементарної математики в технічних закладах вищої освіти. *Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. 2019. Вип. 3. С. 440–450. https://doi.org/10.31494/2412-9208-2019-1-3
14. Andersson R., Bendix L. eXtreme teaching: A framework for continuous improvement. *Computer Science Education.* 2006. Issue16 (3). P. 175–184.

References:

1. Alt M. A. (1988). Pro deiaki asymptotychno porodzheni tsilochyselni totozhnosti [On some asymptotically generated integer-valued identities]. *Zbirnyk "Kozhnii shkoli – naukove tovarystvo".* Odesa : OblIUV & OblSIuT. S. 27–28 [in Ukrainian].
2. Burda M. I., Vasylieva D. V., Voloshena V. V., Hlobin O. I. (2017). Navchannia matematyky v starshii shkoli na profilnomu rivni [Teaching mathematics in high school at the profile level] : metodychni rekomendatsii *Instytut pedahohiky NAPN Ukrainy.* URL: https://undip.org.ua/library/navchannia-matematyky-v-starshiy-shkoli-na-profilnomu-rivni-metodychni-rekomendatsii [in Ukrainian].
3. Zadorina O. M., Mitelman I. M., Papach O. I. (2022). Pytannia pidhotovky maibutnikh uchyteliv matematyky do intehratsii v systemu pisliadyplomnoi pedahohichnoi osvity [Issues of preparing future mathematics teachers for integration into postgraduate pedagogical education system]. *Nova pedahohichna dumka*. T. 111. № 3. S. 81–90. https://doi.org/10.37026/2520-6427-2022-111-3-81-90 [in Ukrainian].
4. Mitelman I. M. (2000). Metodychni ta praktychni aspekty rozviazuvannia deiakykh olimpiadnykh zadach pro tsilu chastynu chysla [Methodological and practical aspects of solving some olympiad-type problems about integer parts of a number]. *Nasha shkola.* № 2–3. S. 150–155 [in Ukrainian].
5. Mitelman I. M. (2021). Synkhronizatsiia spetsializovanykh kompetentnostei pid chas pidhotovky uchniv do matematychnykh olimpiad yak naukovo-metodychna problema [Synchronization of specialized competencies in the preparation of students for mathematical olympiads as a scientific and methodological problem]. *Materialy III Vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii "Pedahohichna nauka i osvita u suchasnomu vymiri: problemy i perspektyvy rozvytku"* (m. Odesa, 14 travnia 2021 r.). S. 198–204 [in Ukrainian].
6. Mitelman I. M. (2019). Rozvytok predmetno-haluzevykh kompetentnostei uchyteliv matematyky v konteksti formuvannia zghornutykh dydaktychnykh struktur [Development of subject-specific competencies of mathematics teachers in the context of the formation of convoluted didactic structures]. Profesiina kompetentnist suchasnoho pedahoha: metodolohiia, teoriia, metodyka, praktyka : kolekt. monohr. *Odeska akad. neperervnoi osvity*. Odesa : vydavets Bukaiev Vadym Viktorovych. S. 241–257 [in Ukrainian].
7. Mitelman I. M. (2021) Osoblyvosti modeliuvannia spetsializovanykh metodychnykh keisiv u konteksti pidvyshchennia kvalifikatsii vchyteliv matematyky [Peculiarities of modelling of specialized methodical cases in the context of professional

development of mathematics teaches]. *Zbirnyk naukovykh prats Umanskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu imeni Pavla Tychyny.* Vyp. 2. S. 137–149. https://doi.org/10.31499/2307-4906.2.2021.236672 [in Ukrainian].
8. Mitelman I. M. (2023). Dydaktychni resursy agile-stratehii pidhotovky vchyteliv do roboty z matematychno obdarovanymy uchniamy [Didactic resources of agile strategies for preparing teachers to work with mathematically gifted students]. *Nasha shkola: naukovo-praktychni studii*. № 1 (1). S. 65–73. https://doi.org/10.61339/2786-6947.2023.1.286305 [in Ukrainian].
9. Mitelman I. M. (2023). Otsiniuvannia deiakykh vyraziv z modulem chysla pid chas rozviazuvannia zadach z parametramy v dydaktychnomu konteksti pidvyshchennia kvalifikatsii vchyteliv matematyky [Estimation of some expressions with absolute values in solving problems with parameters in the didactic context of mathematics teacher professional development]. *Akademichni vizii.* Vyp. 20. http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.8096614 [in Ukrainian].
10. Mitelman I. M. (2024) Dydaktyko-metodychni aspekty tryhonometrychnoi interpretatsii deiakykh typiv alhebraichnykh zadach pidvyshchenoi skladnosti [Didactic and methodical aspects of trigonometric interpretation in some types of advanced algebraic problems]. *Nasha shkola: naukovo-praktychni studii.* № 3 (7). S. 24–39. https://doi.org/10.61339/2786-6947.2024.3(7).315923 [in Ukrainian].
11. Semenets S. P. (2016). Zadachnyi pidkhid do formuvannia navchalno-matematychnoi diialnosti ta rozvytku matematychnykh zdibnostei uchniv [A task approach to formation of educational mathematical activity and the development of mathematical abilities of students]. *Matematyka v ridnii shkoli*. № 4. S. 14–18 [in Ukrainian].
12. Shvets V. O. (2024). Zmistova liniia “Funktsii” shkilnoho kursu matematyky ta osoblyvosti yii vyvchennia v serednii shkoli [Content line “Functions” of the school mathematics course and the peculiarities of its study in secondary school]. *Dydaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii.* № 2. S. 7–19. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-7-19 [in Ukrainian].
13. Yarkho T., Yemelianova T., Leheida D. (2019). Uprovadzhennia pryntsypu heneralizatsii znan u povtoriuvalnyi kurs elementarnoi matematyky v tekhnichnykh zakladakh vyshchoi osvity [The introduction of the principle of generalization of knowledge to the repetitive course of elementary mathematics at technical higher educational establishments]. *Naukovi zapysky Berdianskoho derzhavnoho pedahohichnoho universytetu*. *Seriia: Pedahohichni nauky.* Vyp. 3. S. 440–450. https://doi.org/10.31494/2412-9208-2019-1-3 [in Ukrainian].
14. Andersson R., Bendix L. (2006). eXtreme teaching: A framework for continuous improvement. *Computer Science Education*. Issue16 (3). P. 175–184

I. Mitelman. Development of functional competence and passage to the limit as an investigative element in the olympiad-type inequalities.

The article continues a study of didactic and methodological approaches to problem-heuristic teaching of proving inequalities of high-level mathematical competitions. The effectiveness of such work with mathematically gifted students, participants of intellectual competitions in the context of academic profiling based on advanced study of mathematics in high school is determined by the crosscutting and integrity of the process of knowledge generalisation. It is about concentrating educational resources around key theoretical sections and a system of teaching complicated and olympiad tasks in accordance with the developmental continuity strategies.

Positive results significantly depend on the coordinated integration of subject and didactic connections at the level of content areas of mathematics education and the actualisation of methodologically relevant ideas in the practice of professional development of mathematics teachers. At the same time, in the high school, the “Functions” content line is fully explored, which is of key importance for interpreting inequalities from the position of the properties of functions. In the context of this content line, students also form primary understanding of passage to the limit as an element of functional competence.

However, the actual state of teaching this material reveals a didactic and methodological problem: passage to the limit as a base category of the elements of analysis is often not used in solving non-standard problems whose conditions do not directly imply it.

The purpose of the article is to model a subject-methodical case that combines a system of diverse tasks in which the proving of olympiad-type inequalities is accompanied by investigation elements. These tasks, in turn, require the implementation of passage to the limit in the study and motivate students to master the corresponding topics at a more serious level.

The proposed results contribute to the improvement of specialised mathematical competencies by synchronising the areas of immediate mathematical development of students and teachers, as well as the relevant areas of the subject-methodological segment of the teacher’s professional competence. This development of functional competence acquires the features of a well-established productive educational result and promotes the attractiveness of institutional in-service training programmes for modern mathematics teachers.

Key words: *mathematics teaching methodology, professional teacher development, profiling of high school, knowledge generalisation, content lines of high school mathematics course, mathematical and subject-methodological competence, olympiad-type problems, proving inequalities, limits of functions and sequences.*