Х-65

696/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ХМАРА ТАМАРА НИКОЛАЕВНА

# ИЗУЧЕНИЕ ВОПРОСОВ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

/Диссертация написана на украинском языке/

/13.00.02 - методика преподавания математики/

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
по методике математики

НБ НПУ

*100207538*

Киев - 1975

Работа выполнена на кафедре математики и методики математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент БЕВЗ Г.П.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук ОСТАПЕНКО В.Н.

Кандидат педагогических наук, и.о.профессора БЕЛЫЙ Б.Н.

Внешний отзыв - Тернопольский государственный педагогический институт, кафедра математики и методики математики.

Автореферат разослан " " 1975г.

Защита состоится "18" июня 1975г.

в 14 часов на заседании Ученого Совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института /г.Киев, ул.Пирогова,9/.

Отзывы просим присылать по адресу: 252030, Киев-30, ул.Пирогова,9, научная часть.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Роль и место теоретико-числового материала в школьном курсе математики в значительной степени определяется тем, что он позволяет достаточно рано начать сложную работу по математическому воспитанию учащихся.

Говоря о важной роли теории делимости чисел в математическом воспитании, А.И.Маркушевич замечает, что эта теория" является одним из немногих разделов математической науки/в данном случае теории чисел/, с которым можно без каких-либо сокращений и пропусков, со всеми необходимыми окончательными определениями и доказательствами, ознакомить учащихся. Этот раздел - логически стройный и завершенный - разворачиваясь цепочкой небольшого количества достаточно простых теорем, дает возможность подвести учеников к пониманию теоремы Эвклида о существовании как угодно больших простых чисел, алгоритма Эратосфена построения таблицы простых чисел, алгоритма Эвклида для отыскания наибольшего общего делителя и применения этих знаний к решению в целых числах линейных уравнений, и наконец, к пониманию теоремы о единственности разложения целого числа на простые множители. Указанные утверждения и методы являются фундаментом теории чисел, и в то же самое время являются простейшими доступными ученику примерами теорем существования и единственности и приме-

ремя простейших алгоритмов, без чего немыслимо создать правильное представление о математической науке. Вместе с тем в этом разделе накапливается конкретный материал для будущего ознакомления учащихся с такими важнейшими алгебраическими понятиями, как кольцо, область целостности, поле"[1].

Изучение вопросов теории чисел способствует развитию математических интересов школьников. Подтверждение этому мы находим в биографиях многих ученых-математиков. Первой книгой по математике И.Г.Петровского была "Теория чисел" Дирихле. Эта книга, вспоминает Иван Георгиевич, поразила его и навсегда повернула интересы в сторону математики. Так возникло увлечение математикой будущего ученого, академика, ректора московского государственного университета. В докладе И.И.Чистякова на I Всероссийском съезде преподавателей математики приводились результаты анкетирования, организованного журналом "Enseignement mathématique" среди известных математиков. Ответы на вопрос анкеты, как и в каком возрасте у будущего ученого возник интерес к математике, свидетельствуют о том, что чаще всего это было благодаря решению проблем, связанных со свойствами чисел.

Роль теоретико-числовых знаний в математическом образовании учащихся не ограничивается лишь учебно-познавательными функциями и положительным влиянием на развитие логического мышления и математических интересов. Ознакомление с историей развития теории чисел воспитывает у учащихся чувство гордости за достиже-

1/ Дополнительные вопросы арифметики целых чисел, ж. "Математика в школе", 1967, № 4.

ния отечественных ученых, т.к. именно русские и советские математики обогатили мировую науку целым рядом работ по теории чисел. Выдающиеся достижения в области теории чисел принадлежат члену Петербургской Академии наук Леонарду Эйлеру. Петербургская школа теории чисел, руководимая выдающимся русским математиком П.Л.Чебышовым, дала науке таких математиков, как А.Н.Коркин, Е.И.Золотарев, А.А.Марков, Г.Ф.Вороной, И.М.Виноградов.

Как видим, изучение теоретико-числового материала в школе имеет широкие и важные задачи, и потому исследование вопросов методики его изучения является актуальным.

История отечественной и зарубежной методики преподавания математики свидетельствует о том, что проблемы изучения вопросов делимости чисел всегда разрабатывались учителями и методистами. В определенном объеме эти вопросы входили во все известные программы и пособия по арифметике. Проблемы содержания и методики изучения вопросов делимости чисел в средней школе рассматривались в ряде педагогических исследований /Ш.Х.Михелович, Ю.М.Колягин, Г.П.Бевз, В.Боцу и др./.

Новый курс математики построен на основе теории множеств, основными понятиями которой являются понятия множества, бинарного отношения, отображения, структуры. По мнению акад. А.Н.Колмогорова, "не вызывает сомнений, что последовательное современное изложение математики, которое начинается с достаточно общих понятий множества, отображения, группы, упрощает ее, открывая в различных отдельных фактах общую их основу, делает изложение более кратким и, наконец, более простым и доходчивым". С точки зрения развития математического мышления учащихся изу-

чение таких обобщающих понятий как "бинарное отношение" и "алгебраическая структура" полезно еще и тем, что обогащает интуицию математика.

Эти идеи, в частности, идея рассмотрения бинарных отношений, не нашли соответствующей разработки в учебных пособиях, хотя такие основные понятия курса как функция и отображение являются бинарными отношениями. В новых учебных пособиях рассматривают свойства отдельных бинарных отношений /например, параллельности, порядка/, встречается термин "отношение".

Вопрос изучения бинарных отношений в средней школе рассматривают в своих работах А.Н.Колмогоров, А.А.Столяр, И.Ф.Тесленко.

По мнению ряда авторов изучение понятий "бинарное отношение", "алгебраическая структура" следует начинать с рассмотрения свойств конкретных бинарных отношений и алгебраических операций. В теории делимости чисел основные бинарные отношения - это отношения частичного порядка /"является делителем", "является кратным"/ и отношения эквивалентности /конгруэнтность чисел по данному натуральному модулю/. Уже есть первый опыт изучения указанных отношений теории делимости чисел на математическом кружке и на факультативных занятиях.

На современном этапе перестройки школьного математического образования перед методистами и учителями стоит сложная задача сочетания новых математических понятий и методов обучения с традиционным учебным материалом, включающим и вопросы теории делимости чисел. В новых учебных пособиях для 4 и 5 классов применяется теоретико-множественный подход к изложению вопросов делимости чисел. На примерах простых и очевидных ут-

верждений о делимости чисел можно ввести понятия "теорема" и "доказательство теоремы", а также формировать представления о необходимых и достаточных условиях. В 6 классе в теме "Тождественные преобразования многочленов" учащимся предлагается рассмотреть значительное число утверждений, связанных с делимостью чисел.

Изложение вопросов делимости чисел на теоретико-множественной основе приводит к рассмотрению не только основных понятий, но и тех отношений, которые устанавливаются между числами в рамках этой теории. В связи с этим оказывается возможным проводить пропедевтику формирования понятий "бинарное отношение" /их основных свойств и способов задания/, "отображение".

Все это говорит о необходимости разработки методики изучения вопросов делимости в новой трактовке /в обязательном курсе и на факультативных занятиях/, выявления недостатков в знаниях учащихся и путей их предупреждения и устранения. В выборе путей исследования мы исходили из того, что эффективность учебно-воспитательного процесса может быть повышена за счет последовательного использования и развития идей, заложенных в новой программе, выявления целесообразных видов учебной деятельности учащихся и методов работы учителя.

Основные задачи исследования: I. Разработать методику изучения тех вопросов делимости чисел, изложение которых по новой программе существенно отличается от традиционного; 2. Показать целесообразность использования числовых моделей для формирования у учащихся таких фундаментальных понятий нового школьного курса математики, как "бинарное отношение", "отобра-

жение", "алгебраическая операция" и "алгебраическая структура", а также проверить эффективность использования для этой цели таких средств наглядности, как графы и диаграммы Эйлера-Венна; 3. Разработать методику обучения учащихся доказательствам математических утверждений на материале, связанном с делимостью чисел; 4. Разработать методические рекомендации для учителей математики в соответствии с основными принципами перестройки преподавания математики в средней школе.

В соответствии с этим потребовалось:

- на основе анализа советской и зарубежной учебно-методической литературы изучить тенденции во взглядах методистов на роль и значение теоретико-числовых знаний в математическом воспитании школьника;

- определить состояние знаний учащихся по вопросам делимости чисел, в частности, выявить ошибки, которые они допускают в понимании основных понятий и бинарных отношений теории делимости чисел;

- сопоставить различные подходы к изучению теории делимости чисел в средней школе и разработать наиболее важные вопросы методики изучения этого учебного материала.

Диссертационная работа написана на основе изучения и анализа математической, научно-методической и психолого-педагогической литературы, касающейся вопросов исследования, опыта автора по изучению качества знаний учащихся при обучении по новым программам, опыта работы с учащимися средней школы и экспериментальных исследований, проведенных автором в 1971-74 годах, а также на основе изучения опыта работы лучших учителей школ г. Киева, Киевской, Кировоградской и Ворошиловградской об-

ластей.

Эффективность разработанной методики проверялась в пяти школах в два этапа. Сначала определялась педагогическая эффективность различных методических подходов к изучению отдельных тем и доступность и целесообразность составленной системы упражнений. Результаты первого этапа показали, что некоторые методические подходы и рекомендации себя не оправдали и требуют определенного уточнения. Для продолжения эксперимента в 1973-74 у.г. нами были составлены тетради с печатной основой для каждого ученика, содержащие 70 заданий /300 экз./. В задачи второго этапа эксперимента входило проверить правильность и целесообразность внесенных в методические разработки изменений и убедиться в том, что предложенная нами методика обеспечивает усвоение определенных программой вопросов теории делимости чисел. В качестве вспомогательных средств при решении поставленных задач использовались методические разработки, методические указания для учителей экспериментальных классов, контрольные задания для определения уровня знаний, умений и навыков учащихся контрольных и экспериментальных классов.

Обучающий эксперимент проводился в 1973-74 гг. автором работы и по разработанным автором материалам в средней школе № 92 г. Киева /учитель Н.Ф.Голюк/, в средней школе № 129 г. Киева /учитель Бабкин Л.Т./, в средней школе № 183 г. Киева /учитель Овруцкая И.С./, в Кролевецкой средней школе № 1 Сумской области /учитель Завадская Е.Г./, в Перевальской средней школе № 1 Ворошиловградской области/учитель Осинская В.Н./.

## СТРУКТУРА И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, выводов и рекомендаций, а также списка использованной литературы.

Первая глава "Общие вопросы изучения отношений делимости чисел в школе" посвящена систематизации основных положений современной математики, имеющих непосредственное отношение к теме исследования, анализу содержания, объема и методов изучения вопросов делимости чисел в современных программах, учебниках и научно-методической литературе. Раскрыта эволюция взглядов методистов на этот учебный материал и ее отражение в школьном преподавании. В заключение первой главы дана характеристика состояния знаний учащихся по вопросам теории делимости чисел.

В первом параграфе этой главы рассмотрены различные определения бинарного отношения, встречающиеся в современной математической литературе; четыре свойства бинарных отношений/рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность/, характерные для отношений теории делимости чисел; встречающиеся в литературе общие обозначения для бинарного отношения и специальные обозначения для отношений делимости чисел, а также способы задания бинарных отношений/подмножество декартового квадрата множества, граф, таблица-сетка/.

В школе предлагается бинарное отношение $R$, рассматриваемое между элементами некоторого множества, трактовать как соотношение $aRb$, которое выполняется для некоторых пар элементов этого множества. Такое представление о бинарном отношении формирует-

ся у учащихся при задании бинарных отношений с помощью графов. Другая трактовка бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества /декартова произведения множеств/ реализуется целенаправленным выполнением ряда упражнений, содержащихся в школьных учебниках математики, в частности при задании бинарных отношений декартовым графиком, где каждая упорядоченная пара отношения является координатами определенной точки графика. Первый элемент пары принадлежит оси абсцисс, а второй - оси ординат. декартов график является частным случаем более общего - табличного - способа задания бинарных отношений. Для табличного задания отношения $R \subset (A \times B)$ проводят несколько вертикалей, обозначая каждую из них некоторым элементом из A, и несколько горизонталей, обозначая их элементами из B. Затем отмечают пересечения тех прямых, для которых соответствующие элементы удовлетворяют отношению $R$. Этот способ задания бинарных отношений способствует овладению учащимися координатным методом.

Основные отношения теории делимости чисел относятся к отношениям частичного порядка /"является делителем", "является кратным"/ и эквивалентности /конгруэнтности по некоторому натуральному модулю/. Рассмотрению этих видов отношений в работе уделено специальное внимание. Отношения теории делимости чисел на множестве $N$ представлены в приведенной ниже таблице.

Отношение эквивалентности предлагается формировать с опорой на характерное для него свойство разбивать множество на классы эквивалентности, используя классификационные схемы.

При изучении признаков делимости чисел учащихся можно ознакомить с разбиением множества натуральных /неотрицательных /

| Свойства отношений / Бинарные отношения теории делимости | Рефлексивность | Симметричность | Транзитивность | Антисимметричность | Вид бинарного отношения |
|---|---|---|---|---|---|
| Делится на | + | - | + | + | Частичный порядок |
| Делит | + | - | + | + | Частичный порядок |
| Взаимно простое с | - | + | - | - | |
| Конгруэнтно по модулю | + | + | + | - | Эквивалентность |

чисел на непересекающиеся классы чисел, дающих при делении на данное натуральное число одинаковые остатки.

Определение отношения эквивалентности как отношения, обладающего свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, является более формальным, и потому менее доступным для учащихся. Это определение предлагается рассмотреть при углубленном изучении теории делимости чисел на факультативных занятиях.

На примерах отношений "не больше", "не меньше", "следует" "делится без остатка", "делит без остатка" рассмотрено отношение частичного порядка, его свойства и особенности задания с помощью графа, таблицы/сетки/. Свойства бинарных отношений частичного порядка предлагается изучать в школе при рассмотрении несложных упражнений соответствующего содержания, а для создания наглядного образа использовать графы.

Представления о бинарных отношениях достаточно хорошо можно сформировать у учащихся на интуитивном уровне, т.к.существо этого понятия в математике и в жизни одинаково и понимается как связь между двумя объектами.

Понятие "бинарное отношение" лежит в основе понятий"функции", "отображение", "алгебраическая операция". Проанализировав различные подходы для определения понятия "функция",мы пришли к выводу,что нецелесообразно специально для этой цели вводить понятие "соответствие", а рассматривать функцию и отображение как функциональные отношения в соответствии с приведенным ниже определением.

Определение. Отношение $R \subset (X \times Y)$ называется функцией, если $\forall_{x, y_1, y_2} [xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2]$.
Формула $y = f(x)$ обозначает то же самое,что и $xfy$.

Если область определения и множество значений функции обозначить соответственно через $D_n(f)$ и $D_n(f)$ ,то при $D_n(f)=X$ и $D(f) \subset Y$ функцию $f$ называют отображением множества X в У. Если также $D_n(f)= Y$ ,то функцию $f$ называют отображением множества X на У.

В новом школьном курсе математики функцию и отображение считают синонимами. Если изучать функцию как бинарное отношение с разными первыми элементами в множестве пар,то функция отождествляется с отображением множества первых элементов на множество вторых элементов пар.

Отношения, устанавливаемые между числами и их делителями, а также между числами и множествами их делителей являются при-

мерами нефункциональных и функциональных отношений, их целесообразно использовать при ознакомлении учащихся с понятием функции. При рассмотрении множеств простых делителей чисел возможно ознакомить учащихся с примером отображения, сохраняющего порядок. Например, если на множестве натуральных чисел задана частичная упорядоченность отношением делимости, а на множестве простых делителей задана частичная упорядоченность отношением включения, то имеем пример изоморфизма частично упорядоченных множеств. Правильным является утверждение: "Если число $m$ делится без остатка на число $n$ $(m, n \in N)$, то множество простых делителей числа $m$ включает в себя множество простых делителей числа $n$ $(P < Q)$".

Предусмотренное новой программой изучение операций на множестве геометрических преобразований, ознакомление с элементами векторной алгебры естественно требует обобщения этих знаний путем введения определения алгебраической операции и на его основе - основных алгебраических структур. В работе показано, что такие обобщения возможно сделать, рассматривая алгебраические операции над элементами нечисловой природы в темах "Арифметика вычетов" и "Арифметика классов вычетов" при углубленном изучении вопросов теории делимости чисел на факультативных занятиях. Предлагается ознакомить восьмиклассников с понятиями группы, подгруппы, кольца, кольца целостности, поля.

В четвертом параграфе этого раздела "Качество усвоения учащимися вопросов делимости чисел" изложены результаты констатирующего эксперимента по изучению состояния теоретико-числовых

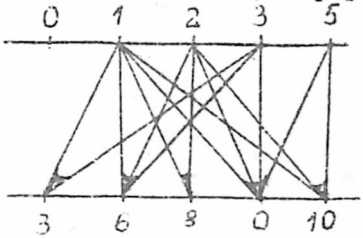
знаний учащихся. Констатирующий эксперимент проводился в течение 1969-1973 гг. путем анализа материалов, полученных отделом методики математики НИИ педагогики УССР при экспериментальной проверке пробных пособий по математике для 5 и 6 классов/в четырех школах г.Киева, десяти сельских школах и во всех школах г.Севастополя/, а также изучения качества знаний учащихся при обучении по новым программам в Ворошиловградской, Кировоградской и Житомирской областях. Использовался материал наблюдений, проводимых автором работы в средних школах №129, №92, №138 г.Киева при изучении темы "Делимость натуральных чисел" в пятых классах. Мы пришли к выводу о том, что: 1/ вопросы делимости чисел желательно рассматривать на множестве неотрицательных целых чисел; 2/ следует усовершенствовать предложенную в учебнике пятого класса систему обозначений для множеств делителей, кратных данного числа, общих делителей, общих кратных, наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел; 3/ целесообразно широко использовать круги Эйлера для иллюстрации соотношений, связанных с делимостью чисел; 4/ изучение признаков делимости чисел следует использовать для формирования у учащихся умений строить умозаключения и проводить доказательства; 5/ значительное внимание следует уделять вопросам культуры математических записей при решении задач на делимость, в частности целесообразно применять теоретико-множественную символику, сокращенные записи задач на доказательство; 6/ наряду с основными понятиями делимости чисел следует рассматривать с учащимися соответствующие бинарные отношения.

Во в т о р о й  г л а в е "методика изучения основных вопросов делимости чисел в восьмилетней школе" рассмотрены частные вопросы методики преподавания этого учебного материала в обязательном курсе и на факультативных занятиях. Разработана методика введения основных понятий делимости чисел и соответствующих бинарных отношений, рассмотрены некоторые спорные вопросы, связанные с терминологией и символикой, культурой математических записей учащихся. Значительное внимание уделено возможности и целесообразности использования числовых моделей, рассматриваемых при изучении делимости чисел для формирования представлений учащихся о таких теоретико-множественных понятиях, как бинарные отношения и их свойства, отображения, алгебраические операции и алгебраические структуры, составляющих основу современного математического образования.

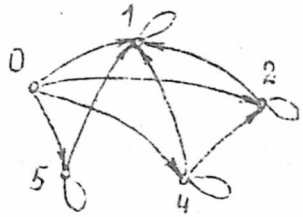
"...каждое понятие находится в известном отношении, в известной связи со всеми остальными" /В.И.Ленин. Полн.собр.соч., т.29, стр.179/. Эти связи /отношения/ определяют логическую структуру учебного материала, переходы от одних понятий к другим в процессе рассуждений. Структурное построение курса, выделение в нем основных понятий, их систем и связанных с ними операций создают благоприятные возможности полноценного усвоения его учащимися. Реализация этих возможностей зависит от того, как организованы действия учащихся с учебным материалом, какие свойства и отношения объектов они выявляют посредством этих действий. Схемы логической структуры учебного материала, рассмотренного в диссертации, приведены на стр. 18, 26.

Понятия "делитель" и "кратное" предлагается вводить, начи-

ная с выяснения существа отношений "является делителем" и "является кратным". Эти отношения на числовых множествах полезно устанавливать с помощью графов. Например:



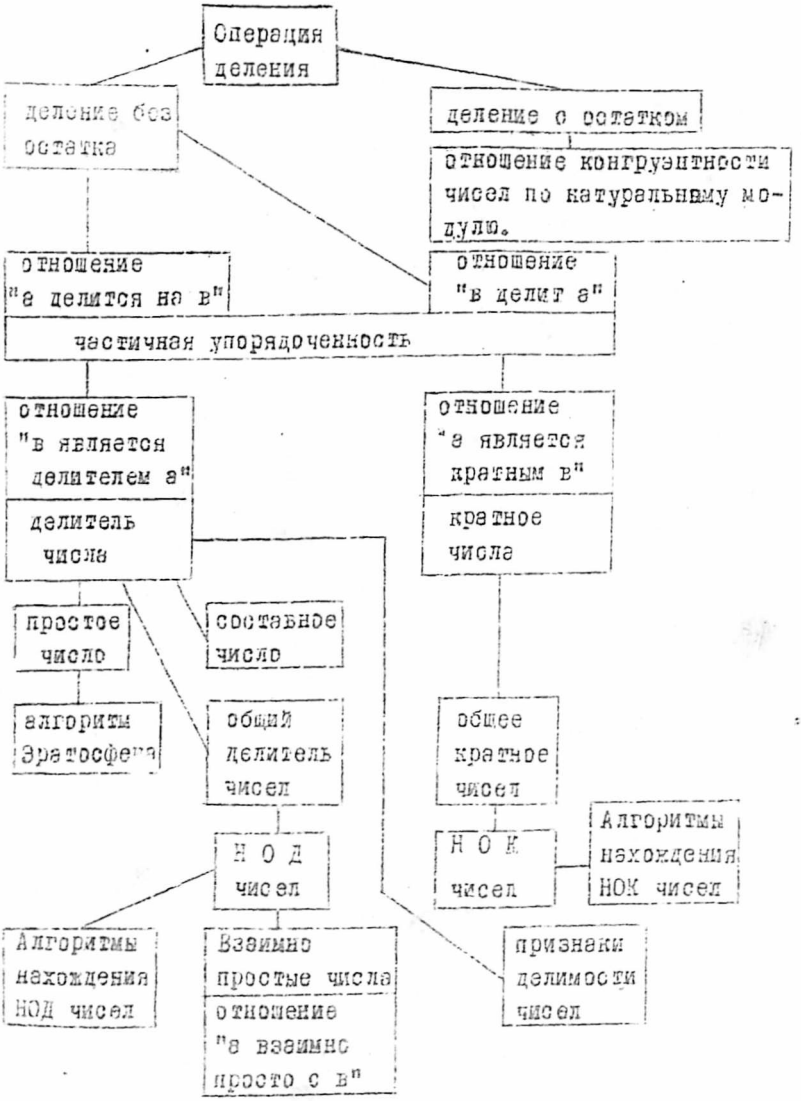

Двудольный граф отношения "является делителем" между элементами множеств
$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ и
$B = \{3, 6, 8, 0, 10\}$.




Граф отношения "является кратным" на множестве
$N = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

Как известно, основой формирования понятий является своеобразная учебная деятельность детей, адекватная данному понятию. Поэтому учебная деятельность строилась так, чтобы свойства чисел, связанные с делимостью, ученики выявляли в результате самостоятельных наблюдений над числами.

В учебной литературе используются два определения понятия "делитель". Одно из них соответствует принятому в теории чисел, а именно: "Пусть $a$ и $b$ $(b \neq 0)$ - целые числа, $b$ называется делителем $a$, если существует целое число $q$, такое, что $a = bq$". Во втором делитель определяется как число, на которое данное число делится без остатка. На раннем этапе введения этого понятия /4-5 класс/ более приемлемым оказывается второе определение. Однако формировать понятие "делитель" следует, исходя из его теоретико-числовой трактовки. Исходным моментом при таком подходе


Операция деления
деление без остатка
деление с остатком
отношение конгруэнтности чисел по натуральному модулю.
отношение "а делится на в"
отношение "в делит а"
частичная упорядоченность
отношение "в является делителем а"
делитель числа
отношение "а является кратным в"
кратное числа
простое число
составное число
алгоритм Эратосфена
общий делитель чисел
общее кратное чисел
Н О Д чисел
Н О К чисел
Алгоритмы нахождения НОК чисел
Алгоритмы нахождения НОД чисел
Взаимно простые числа
отношение "а взаимно просто с в"
признаки делимости чисел

является то, что делимость числа без остатка на свой делитель - следствие его мультипликативной структуры. Мы убедились в том, что интуитивные представления учащихся о делимости чисел находятся в соответствии с этим положением. Таким же путем следует формировать понятие "кратное числа".

В методической и учебной литературе применяются различные обозначения для множеств делителей и кратных данного числа. Наш эксперимент показал целесообразность применения для множества делителей числа а обозначение Д/а/, для множества кратных числа - К/а/. Использование этих обозначений позволяет более последовательно реализовать теоретико-множественный подход к рассмотрению вопросов делимости чисел и облегчить организацию самостоятельных и полусамостоятельных работ учащихся. Система таких заданий разработана нами в форме тетрадей с печатной основой. В соответствии с обозначениями, принятыми для множеств делителей числа и кратных числа, множество общих делителей двух чисел предлагается обозначать Д/а, в/, множество кратных двух чисел предлагается обозначать К/а, в/, наибольший общий делитель двух чисел - НОД/а, в/, наименьшее общее кратное - НОК /а, в/.

На уроках в 5 классе мы пользовались термином "отношение", не давая определения этому понятию. Для отношения "а делится на в" можно ввести обозначение $\vdots$ . Это предупреждает ошибочное использование учащимися для этого отношения знака операции деления $(:)$ , повышает культуру математических записей, способствует лучшему усвоению понятий "делитель числа" и "кратное числа".

Сейчас первое ознакомление учащихся с вопросами делимости чисел происходит в 5 классе. Однако, обыкновенные дроби начинают

изучать еще в начальной школе. Естественно продолжить их изучение в 4 классе. В связи с этим возможно и более раннее ознакомление школьников с понятиями "делитель", "кратное", соответствующими бинарными отношениями и признаками делимости на 10, 2, 5, 3. Признак делимости на 10 вполне возможно ввести еще в начальной школе. Ученики 4 класса не подготовлены к проведению доказательств этих утверждений в общем виде. Однако этот материал целесообразно использовать для выработки у учащихся умений строить умозаключения. С этой целью рекомендуется рассмотреть с учащимися достаточное количество упражнений на распознавание понятий "делитель" и "кратное", а также на обоснование делимости отдельных чисел на 2, 5, 10, 3, 9. Следует отметить исключительную наглядность и убедительность для учащихся утверждений о делимости чисел. Считаем, что к ним следует вернуться в 5-6 классах. Возможны два подхода: 1/ специально выделить время для рассмотрения соответствующих теорем; 2/ предложить утверждения о признаках делимости чисел в качестве задач на доказательство. В процессе нашего исследования мы убедились в целесообразности последовательного формирования умений учащихся доказывать математические утверждения при изучении вопросов делимости чисел по системе, показанной на схеме, стр. 22 .

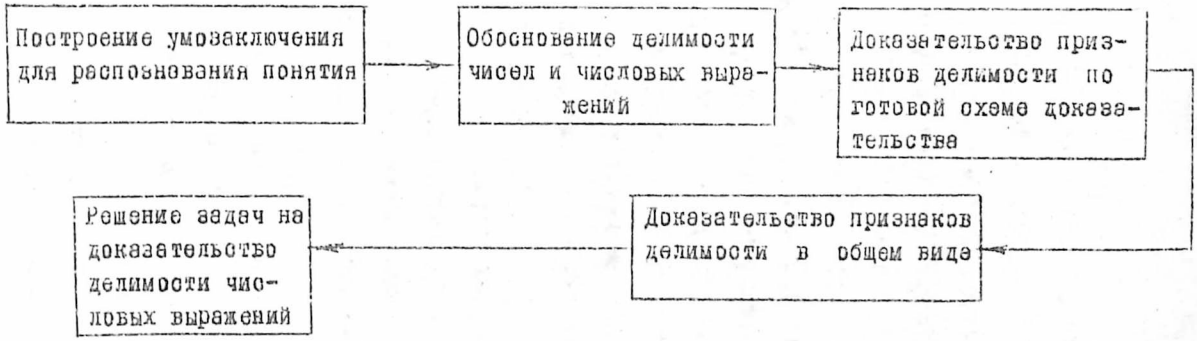
В диссертации рассмотрены вопросы методики решения задач, связанных с делимостью чисел. Эти задачи чаще всего не требуют громоздких вычислений, используют хорошо известный ученикам числовой материал и поэтому способствуют повышению активности и самостоятельности учебной деятельности учащихся, а характер про-

водимых рассуждений развивает их логическое мышление. Новые учебные пособия содержат достаточное число задач на доказательство делимости числовых выражений /5 класс/, многочленов /6 класс/, а также задач повышенной трудности /дополнительный раздел в учебнике для 5 класса/. Считаем, что задачи на делимость чисел следует рассматривать и в 9 классе при изучении метода математической индукции, на занятиях математических кружков и на факультативных занятиях. В работе даны методические рекомендации относительно решения с учащимися задач, культуры математических записей.

Признаки делимости чисел являются необходимыми и достаточными условиями. При ознакомлении учащихся с этим видом математических утверждений возможно использовать их теоретико-множественную трактовку, в основе которой лежит операция включения. Исходным положением при этом является то, что теоремы в курсе математики средней школы обычно выражают включение некоторых объектов или их множеств в другие множества, в частности, это касается утверждений о делимости чисел. Так, если обозначить условие некоторой теоремы /утверждения/ через A, а заключение через B и соответственно - множество объектов, которые определяются условием A, через $M_A$, а множество объектов, определяющихся условием B, через $M_B$, то для доказательства утверждения $A \Rightarrow B$ нужно доказать, что $M_A \subset M_B$. Тогда условие A является достаточным для заключения B. Аналогично оно является необходимым, если $M_A \supset M_B$. Условия A достаточное и необходимое для заключения B, если $M_A \subset M_B$ и $M_A \supset M_B$, т.е. если $M_A = M_B$. Все эти опреде-

С Х Е М А

формирования у учащихся умений доказывать математические утверждения при изучении вопросов делимости чисел



ления легко иллюстрируются диаграммами Эйлера. Нами составлена серия заданий, при выполнении которых ученики осваивают понятия о необходимых и достаточных условиях в теоретико-множественной трактовке. Использование таких диаграмм заменяет при этом определение. Доступность этих заданий обеспечивается хорошим усвоением учащимися операции включения. Одновременно создаются условия для более глубокого понимания учениками свойств множества натуральных чисел, повышению их общей математической и логической культуры.

Третья глава работы "Методика ознакомления учащихся с отношениями делимости чисел" посвящена содержанию и методике факультативного изучения бинарных отношений частичного порядка и эквивалентности, а также алгебраических структур теории делимости чисел.

Бинарные отношения частичного порядка и эквивалентности - наиболее распространены в школьном курсе математики. Ознакомление с ними учащихся позволяет установить взаимосвязь между различными понятиями и разделами курса. Изучение операций и их свойств на множествах элементов арифметик классов вычетов и арифметик вычетов естественно ведет к обобщению знаний учащихся о различных операциях, строгому определению алгебраической операции и введению понятий "группа", "кольцо," "поле". Объем необходимых для таких обобщений знаний у семиклассников и восьмиклассников вполне достаточный.

Тему "Дополнительные вопросы арифметики целых чисел" рекомендуем изучать на факультативных занятиях по такой програм-

ме:

7 класс.

I. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений. Бинарные отношения частичного порядка и их свойства. Отношения "является делителем" и "является кратным".

2. Делимость чисел. Признаки делимости чисел.

3. Простые числа.

4. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель.

5. Алгоритм Эвклида.

8 класс.

I. Отношения эквивалентности и их свойства. Отношение конгруэнтности чисел по данному натуральному модулю.

2. Конгруэнции.

3. Применение конгруэнций к выведению признаков делимости чисел.

4. Неопределенные уравнения.

5. Бинарная алгебраическая операция и ее основные свойства. Числовые алгебраические структуры.

6. Арифметика классов вычетов.

7. Арифметика вычетов.

8. Алгебраические структуры теории делимости чисел.

Бинарные отношения, алгебраические операции и алгебраические структуры следует рассматривать в преемственности с пропедевтикой этих понятий в обязательном курсе. Строгие определения вводятся как результат систематизации и обобщения знаний. В диссертации показано, в какой системе следует рас-

сматривать эти вопросы, даны соответствующие методические рекомендации и упражнения. Логическая структура учебного материала, рассмотренного в работе, представлена в схеме на стр.26.

Результаты проведенных в ходе исследования экспериментов показали, что:

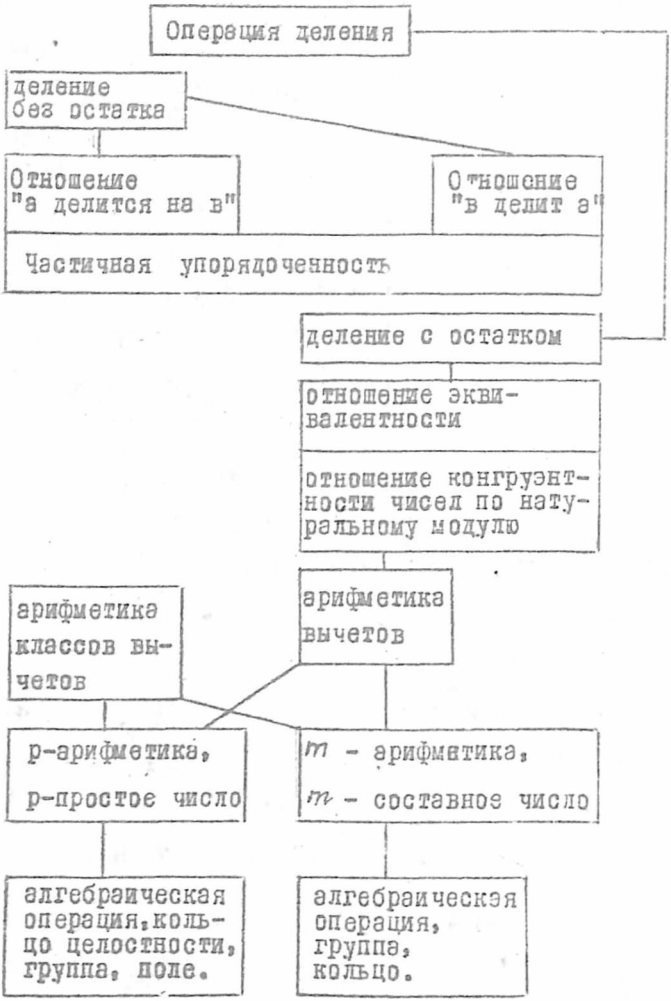
1. Последовательная реализация теоретико-множественной концепции требует изучения не только основных понятий теории делимости чисел, но и тех бинарных отношений, которые устанавливаются между числами и числовыми множествами в рамках этой теории.

2. Целесообразно пояснить учащимся существо проблемы, породившей теорию делимости чисел. Отношение "делится на" следует рассматривать перед определением понятия "делитель числа".

3. Отношения "является делителем" и "является кратным" взаимно обратны. При формировании этих понятий эффективно использование графов. Полезно употреблять термин "отношение", а при рассмотрении несложных упражнений ознакомить учащихся со свойствами отношений частичного порядка, не вводя термины "рефлексивность", "антисимметричность", "транзитивность".

4. С целью предупреждения довольно распространенной ошибки смешивания понятий бинарного отношения "делится на" и операции деления целесообразно использовать символ : . Своевременное введение этого символа повышает культуру математических записей учащихся.

5. Рассмотрение множеств чисел, кратных данного числа и множеств чисел, дающих при делении на данное число одинаковые остатки, следует использовать для формирования представлений


Операция деления
деление без остатка
Отношение "а делится на в"
Отношение "в делит а"
Частичная упорядоченность
деление с остатком
отношение эквивалентности
отношение конгруэнтности чисел по натуральному модулю
арифметика вычетов
арифметика классов вычетов
p-арифметика, p-простое число
m - арифметика, m - составное число
алгебраическая операция, кольцо целостности, группа, поле.
алгебраическая операция, группа, кольцо.

учащихся об отношении эквивалентности. Эти же примеры убедительно иллюстрируют понятие классификации.

6. Утверждения о делимости чисел являются первыми теоремами в школьном курсе математики; числовой материал - наиболее убедителен для введения понятий "теорема" и "доказательство теоремы", а также для выработки первых навыков построения умозаключений и проведения доказательств. Эту работу следует проводить с учащимися дифференцированно.

7. Изучение признаков делимости чисел тесно связано с формированием у учащихся представлений о необходимых и достаточных условиях. Наряду с рассмотрением математических условий в логическом плане, возможно и целесообразно использовать их теоретико-множественную трактовку. Эффективным средством наглядности при этом являются диаграммы Эйлера-Венна.

8. При углубленном изучении теории делимости чисел на факультативных занятиях в темах "Арифметика классов вычетов" и "Арифметика вычетов" учащиеся встречаются с примерами простейших моделей алгебраических структур. Опыт нашей работы показал, что при изучении указанных тем возможно ввести определения алгебраических операций, алгебраических структур, бинарных отношений, в частности, частичного порядка и эквивалентности. При этом строгие определения вводятся как результат систематизации и обобщения знаний.

Основные результаты исследования были доложены и обсуждены на Республиканском научно-методическом семинаре при кафедре математики и методики математики Киевского государст-

венного педагогического института имени А.М.Горького, на заседании этой кафедры, на Республиканских педчтениях и III Всесоюзных педчтениях в г.Минске, а также на научно-практической конференции НИИ педагогики УССР и НИИ психологии УССР.

Методические рекомендации относительно внедрения результатов исследования в школьное преподавание математики были освещены в лекциях на курсах, прочитанных автором для директоров, завучей, заведующих районными отделами народного образования при Центральном институте повышения квалификации работников народного образования /г.Киев, 1974 г./, курсах повышения квалификации и переподготовки учителей при Киевском городском и Киевском областном институтах усовершенствования квалификации учителей /1972-1974 гг./, на совещаниях учителей математики Дарницкого и Подольского районов г.Киева, на семинаре руководителей математических кружков и факультативных занятий при Львовском областном институте усовершенствования квалификации учителей /г.Львов, 1974 г./.

Основные положения диссертации изложены в следующих опубликованных работах:

1.Элементы теории отношений на уроках математики, ж. "Початкова школа", 1970, № 5, /на украинском языке/.

2.Отношение эквивалентности и арифметика вычетов", сб. "Нове у викладанні математики", К., "Радянська школа", 1972 /на украинском языке/.

3.Необыкновенные арифметики, сб. "В світі математики", К., "Радянська школа", 1974.

4. Из опыта проведения факультативных занятий в восьмилетней школе, сб. "Психолого-педагогические основы совершенствования содержания и методов обучения". Предметы естественно-математического цикла. Тезисы доклада, прочитанного на III Всесоюзных педагогических чтениях, М., "Просвещение", 1973.

5. Математическая хрестоматия для 6-8 классов. К., "Радянська школа", 1968 /составитель/, /на украинском языке/.

6. Преемственность в формировании представлений о делимости чисел, ж. "Початкова школа", 1975, №1/на украинском языке/.

7. Пропедевтика формирования понятия об отношении эквивалентности в процессе решения заданий на делимость, сб. "Методика викладання математики", вып. 9, К., "Радянська школа", 1974 /на украинском языке/.

8. Некоторые особенности изучения тождеств сокращенного умножения, ж. "Радянська школа", 1973 /на украинском языке/.

9. Изучение алгебры в 7 классе по новой программе, ж. "Радянська школа", 1973, № 9, № 11/на украинском языке/.

10. Изучение алгебры в 8 классе по новой программе, ж. "Радянська школа", 1974, № 11 /на украинском языке/.