М69

669/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

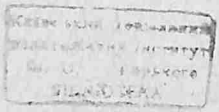
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ГЕННАДИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ МИХАЛИН

"НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВКЛЮЧЕНИЯ, РАВНОСИЛЬНОСТИ И СОВМЕСТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ".

01.01.01. Теория функций и функциональный анализ.



НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313497

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КИЕВ-1974

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им.А.М.Горького

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Н.А.ДАВЫДОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор П.П.КОРОВКИН

кандидат физико-математических наук,
доцент В.Ф.ВЛАСЕНКО

Ведущее предприятие - Институт математики АН УССР

Автореферат разослан "____"_____ 197___ г.

Защита диссертации состоится "_____"_____ 197___г.
в_____ часов на заседании совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета КГПИ им.А.М.Горького, ауд 431.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале института.

Отзывы просим присылать по адресу: г. Киев-30, ул.Пирогова,9

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Пусть даны последовательность комплексных чисел $\{S_n\}$ и матрица $A=\|a_{nk}\|$, где a_{nk} $(n,k=0,1,2,\dots)$ - комплексные числа. Если для всех $n=0,1,2,\dots$ сходятся ряды

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\,S_k$$

и если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} t_n = S$$

то говорят, что последовательность $\{S_n\}$ суммируется матричным методом A к числу S и записывают

$$A\text{-}\lim S_n = S.$$

Если из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ всякий раз следует равенство $A\text{-}\lim S_n = S^*$, то метод суммирования A называют методом Кожина или методом, сохраняющим сходимость, а матрицу $A=\|a_{nk}\|$ - K - матрицей. Если при этом $S^*=S$, то метод суммирования A называют методом Теплица или регулярным методом, а матрицу $A=\|a_{nk}\|$ - T - матрицей.

Пусть C -класс комплекснозначных функций $S(t)$, непрерывных в промежутке $0\le t<\infty$, C^* -множество всех ограниченных функций из класса C. Функцию $S(t)\in C$ назовем сходящейся при $t\to\infty$, если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=S$. В противном случае функцию $S(t)$ назовем расходящейся.

Рассмотрим методы суммирования функций $S(t) \in C$, определяемые линейными интегральными преобразованиями вида

$$t(x) = \int_0^\infty S(t)\, da(x,t). \qquad /1/$$

Пусть $S(t) \in C$. Если для каждого $x \geq 0$ существуют интеграл /1/ и конечный предел

$$\lim_{x\to\infty} t(x) = S$$

то говорят, что функция $S(t)$ суммируется методом A к числу S и записывают $A - \lim S(t) = S$.

Ясно, что матричные методы суммирования последовательностей можно рассматривать как частный случай интегральных методов суммирования вида /1/.

Если из равенства $\lim S(t) = S$ всякий раз следует равенство $A - \lim S(t) = S^*$, то метод суммирования A называют методом, сохраняющим сходимость. Если при этом $S^* = S$, то A называют регулярным методом.

Метод суммирования A, определяемый интегральным преобразованием /1/, мы назовем консервативным методом, если комплекснозначная функция $a(x,t)$ для каждого фиксированного $x \geq 0$ есть функция с ограниченным изменением на каждом отрезке $0 \leq t \leq x'$, причем

$$a(x,x') - a(x,0) \to a(x)\ (x' \to \infty),\quad a(x) \to a\ (x \to \infty),$$

$$a(x,t) \to a(t)\ (x \to \infty)$$

для каждого фиксированного $t \geq 0$,

$$\bigvee_0^\infty (a(x,t)) = \lim_{y\to\infty} \bigvee_0^y (a(x,t)) \leq H < \infty,$$

где $H>0$ - постоянная, не зависящая от x, $\bigvee_0^y[a(x,t)]$ - полное изменение функции $a(x,t)$ на отрезке $0\le t\le y$.

Всякий консервативный метод суммирования сохраняет сходимость в классе C и при этом из равенства

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S$$

следует равенство

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty S(t)\,da(x,t) = aS + \int_0^\infty [S(t)-S]\,d\alpha(t).$$

В частности, если $a=1$ и $\alpha(t)=const$ для всех $t\ge 0$, то метод суммирования A - регулярный в классе C.

Пусть даны консервативные методы суммирования A и B. Говорят, что метод A ограниченно не слабее метода B и записывают $B_0 \subseteq A_0$, если каждая функция $S(t)\in C^*$, суммируемая методом B, суммируется и методом A.

Если $B_0 \subseteq A_0$ и $A_0 \subseteq B_0$, то методы суммирования A и B называют ограниченно равносильными и записывают $B_0 \simeq A_0$.

Консервативный метод суммирования A называют методом, ограниченно равносильным сходимости, если для каждой функции $S(t)\in C^*$ из равенства $A\text{-}\lim S(t) = S^*$ следует равенство $\lim_{t\to\infty} S(t) = S$.

Методы, ограниченно равносильные сходимости, называют также методами, неэффективными в классе C^*.

Два консервативных метода суммирования A и B мы назовем совместными на множестве $\sigma \subseteq C$, если из равенств $A\text{-}\lim S(t) = S_1$, $B\text{-}\lim S(t) = S_2$ следует

равенство $S_1 = S_2$ для каждой функции $S(t) \in \sigma$.

Вопросам равносильности и совместности матричных методов суммирования посвящены многочисленные работы как советских, так и зарубежных авторов. Так, хорошо известны исследования Мерсера /[1] , стр. 135 /, А.Л.Брудно [2], Польняковского [3], Р.Агнью [4], Н.А.Давыдова [5]-[11], Мазура и Орлича [12], и другие. Результаты этих исследований переносились на полунепрерывные и непрерывные методы суммирования [15]-[19]. При этом оказывалось, что без новых дополнительных условий такое перенесение, вообще говоря, невозможно /[16] и [17] /.

Целью настоящей работы является получение некоторых результатов, касающихся вопросов включения, равносильности и совместности консервативных методов суммирования.

Данная диссертация состоит из двух глав.

В первой главе изучаются некоторые вопросы включения, равносильности и совместности матричных методов суммирования. В частности, исследуется вопрос неэффективности методов Кожима на множестве ограниченных последовательностей.

Необходимые и достаточные условия для неэффективности регулярных матричных методов суммирования дает известная теорема А.Л.Брудно [2], утверждающая, что T -матрица $A = \|a_{nk}\|$ не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности тогда и только тогда, когда существует такое число $\mathcal{L} > 0$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n| \le \mathcal{L} \overline{\lim_{n\to\infty}} \Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k\Big| \qquad (2)$$

для всех ограниченных последовательностей $\{S_n\}$.

Проверка условия /2/ для данной конкретной матрицы часто оказывается затруднительной, поэтому представляют интерес утверждения, дающие относительно простые достаточные условия для неэффективности некоторого класса методов Кожима. К таким утверждениям относятся, например, теоремы мерсерового типа [5], [7], [19], [3]. К таким же утверждениям относится и известная теорема Агнью [4], которая говорит, что если T - матрица $A=\|a_{nk}\|$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(|a_{nk}|-\sum_{k=0}^{n-1}|a_{nk}|-\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{nk}|\right)>0, \qquad (8)$$

то соответствующий метод A не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.

В § 1 нами доказано утверждение обобщающее теорему Агнью на K -матрицы:

Теорема 1. Если K -матрица $A=\|a_{nk}\|$ удовлетворяет условию /8/, то соответствующий метод суммирования A не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.

В работе [9] Н.А.Давыдовым рассматривался вопрос о равносильности методов Теплица методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. Теорема 1 позволила обобщить результаты Н.А.Давыдова и получить утверждение о равносильности методов Кожима методам Чезаро на множестве ограниченных последовательностей. В § 2 нами доказана, например

Теорема 2. Пусть K -матрица $A=\|a_{nk}\|$ удовлетворяет для всех $n=0,1,2,\cdots$ трем условиям

1/ $\Delta^{p}a_{nk}\geq 0$ $(k=0,1,2,\cdots)$,

2/ $k^{p}a_{nk}\to 0$ $(k\to\infty)$,

8) $\varlimsup_{n\to\infty} n^{\rho}\Delta^{\rho}a_{nn} > \frac{\Gamma(\rho)a}{2}$,

где $\rho \geq 1$, $\Delta^{\rho}a_{nk} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}C_{\rho}^{\nu}a_{n,k+\nu}$ и $a = \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}$.

Тогда метод суммирования A, определяемый матрицей $A = \|a_{nk}\|$ равносилен методу Чезаро порядка $\rho \geq 1$ на множестве ограниченных последовательностей.

Пусть $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \cdots$, $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n = 1$ и пусть матрица $A = \|a_{nk}\|$ определяется равенством

$$a_{nk} = \begin{cases} \varepsilon_{n-k}, & \text{если } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{если } k > n \end{cases} \qquad /4/$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

В работе [11] Н.А.Давыдовым показано, что метод суммирования A, определяемый матрицей /4/, не суммирует ни одной ограниченной последовательности, имеющей только два различных частных предела. В § 2 нами доказана

Теорема 10. Метод суммирования A, определяемый матрицей /4/, не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.

Теорема 10 дает новый класс неэффективных регулярных матричных методов суммирования, не описываемых упомянутой уже нами теоремой Агнью [4].

В § 4 рассмотрен вопрос, касающийся точности известной теоремы Мазура-Орлича / [12], см.также [13] и [14], стр. 367 / об ограниченной совместности двух регулярных матричных методов суммирования, один из которых не слабее другого. Мазуру и Орличу принадлежит и пример /[14], стр. 369 / T - матриц $A = \|a_{nk}\|$ и $B = \|b_{nk}\|$.

и неограниченной последовательности $\{S_n\}$, который показывает, что эта их теорема, вообще говоря, не переносится на неограниченные последовательности. Однако в этом примере ни матрица $A=\|a_{nk}\|$, ни матрица $B=\|b_{nk}\|$ не суммируют ограниченных расходящихся последовательностей.

В работе [10] Н.А.Давыдовым показано, что для любой наперед заданной неограниченной последовательности комплексных чисел $\{S_n\}$ и любых наперед заданных комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq z_1$, существуют T -матрицы $A=\|a_{nk}\|$ и $B=\|b_{nk}\|$ такие, что $B \subseteq A$, $A-\lim S_n = z_1$ и $B-\lim S_n = z_2$. Однако и здесь матрица $B=\|b_{nk}\|$ не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности, хотя матрица $A=\|a_{nk}\|$ и суммирует некоторые из них. В этой же работе [10] поставлен вопрос: нельзя ли в приведенном утверждении матрицу $B=\|b_{nk}\|$ построить такой, что она суммировала некоторые ограниченные расходящиеся последовательности? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 12.

Во второй главе исследуются некоторые вопросы равносильности и совместности консервативных методов суммирования.

Если рассматривать перенесение упомянутой выше теоремы А.Л.Брудно [2] на консервативные методы суммирования, то естественным аналогом условия /2/ следует считать условие

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|S(t)| \le \mathcal{L}\,\overline{\lim_{t\to\infty}}\left|\int_0^{\infty} S(t)\,d[a(x,t)-a(t)]\right|. \qquad /5/$$

Таким образом, можно предположить, что консервативный метод суммирования A неэффективен в классе C^* тогда и только тогда, когда существует такое число $\mathcal{L}>0$, что

для всех $S(t)\in C^*$ выполнено условие /5/. Однако такое предположение не оправдывается. Это следует, например, из того, что справедлива

Теорема 16. Существуют консервативные методы суммирования A такие, что

$$a-\int_0^\infty d\alpha(t)=0,$$

но которые неэффективны в классе C^*.

Пусть дан метод суммирования A, определяемый преобразованием /1/ и пусть $S(t)\in C$ -такая функция, что существуют интегралы /1/ для всех $x\geq 0$. Мы говорим, что метод A удовлетворяет для функции $S(t)$ условию $(\mathcal{E})$, если для любых чисел $\varepsilon>0$ и $X>0$ существует число $Y(\varepsilon,X,S(t))>0$ такое, что

$$\left|\int_y^\infty S(t)\,d\alpha(x,t)\right|<\varepsilon$$ для всех $x\in[0,X]$ и всех $y>Y$

Для консервативных методов суммирования A, удовлетворяющих условию $(\mathcal{E})$, в § 6 доказана

Теорема 14. Пусть дан консервативный метод суммирования A, удовлетворяющий условию $(\mathcal{E})$ для всех функций $S(t)\in C$ Для того чтобы метод A был равносилен сходимости на множестве C^*, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\mathcal{L}>0$, что для всех функций $S(t)\in C^*$ выполняется условие /5/.

Из теоремы 16 вытекает, что без условия $(\mathcal{E})$ условие /5/ перестает быть необходимым для справедливости утверждения теоремы 14, хотя оно и остается достаточным для справедливости этого утверждения.

Достаточное же условие для неэффективности консервативного метода суммирования A дает

Теорема 17. Всякий консервативный метод суммирования A, удовлетворяющий условию

$$\lim_{x\to\infty}\left[|a(x,x)-\lim_{t\to x-0}a(x,t)|-\lim_{x'\to x-0}\bigvee_{0}^{x'}(a(x,t))-\bigvee_{x}^{\infty}(a(x,t))\right]>0,$$

равносилен сходимости на множестве C^*.

Теорема 17 обобщает одну теорему Н.А.Давыдова [18], доказанную им для линейных регулярных интегральных преобразований вида /1/. Из теоремы 14 в качестве следствия можно получить и теорему 1, доказанную нами в § 1.

Пусть даны матричные методы A и B, определяемые соответственно K-матрицами $A=\|a_{nk}\|$ и $B=\|b_{nk}\|$. Введем обозначения

m -множество всех ограниченных последовательностей,

c -множество всех сходящихся последовательностей,

$|A|$ $(|B|)$ -множество всех последовательностей $\{S_n\}$, для которых

$$\sup_{n}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}S_k|<\infty \quad \left(\sup_{n}\sum_{k=0}^{\infty}|b_{nk}S_k|<\infty\right);$$

C_A (C_B) -множество всех последовательностей $\{S_n\}$, суммируемых методом A (B).

F_A - множество всех последовательностей $\{S_n\}$ из C_A, для которых сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}a_{nk}S_k$

и $\sup_{m,n}\left|\sum_{k=0}^{m}a_{nk}S_k\right|<\infty$.

Упомянутая уже наша теорема Мазура-Орлича в этих обозначениях будет звучать так:

Теорема А. Пусть A и B - регулярные матричные методы суммирования. Если $m \cap C_A \subseteq m \cap C_B$, то A и B совместны на множестве m.

В работе [20] доказана

Теорема В. Пусть A и B - регулярные матричные методы суммирования. Тогда из включения $|A| \cap C_A \subseteq |B| \cap C_B$ следует совместность этих методов на множестве $|A| \cap |B|$.

Следующее утверждение доказано в работе [21].

Теорема С. Пусть A и B - методы Кохима, совместные на множестве C, причем метод A - корегулярный, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} \neq 0$. Тогда из включения $\mathcal{F}_A \subseteq C_B$ следует совместность методов A и B на $\mathcal{F}_A$.

Ясно, что из теоремыС следует теорема В, а из теоремы В - теорема А.

Пусть A и B - консервативные методы суммирования. По аналогии с матричными методами введем обозначения

$C^{(\infty)}$ - множество всех сходящихся функций $S(t) \in C$;

$C_A(C_B)$ - множество всех функций $S(t)$, суммируемых методом $A(B)$;

$\mathcal{F}_A$ - множество всех функций $S(t)$ из C_A, для которых существует интеграл

$$\int_0^{\infty} S(t)\,da(t)$$

и

$$\sup_{x,\,y\geq 0} \left| \int_0^{y} S(t)\,da(x,t) \right| < \infty.$$

В работе [16] построен пример полунепрерывных регулярных методов A и B, показывающий, что даже теорема А, вообще говоря, не переносится на полунепрерывные методы сум-

мирования.

В § 7 нами доказано несколько большее:

Теорема 23. Пусть $S(t)\in C$ – любая наперед заданная расходящаяся функция, S_1 и S_2 – любые наперед заданные комплексные числа и пусть множество C_1, такое, что $C^*\subseteq C_1\subseteq C$ и $S(t)\in C_1$. Тогда существуют совместные на множестве сходящихся функций класса C консервативные методы суммирования A и B такие, что A – корегулярный, т. е, $a-\int_0^\infty da(t)\neq 0$, A и B суммируют некоторые расходящиеся функции из класса C^*, $A\subseteq B$ на множестве C_1 и $A\text{-}\lim S(t)=S_1$, а $B\text{-}\lim S(t)=S_2$.

Из теоремы 23, в частности, следует, что теорема С, вообще говоря, не переносится на консервативные методы суммирования. Однако справедлива доказанная в § 8

Теорема 24. Пусть A – корегулярный метод суммирования, определяемый преобразованием / .1 / и удовлетворяющий условию (G) для всех функций $S(t)\in \mathcal{F}_A$, пусть B – консервативный метод суммирования и пусть A и B – совместны на множестве сходящихся функций класса C. Тогда из включения $\mathcal{F}_A\subseteq C_B$ следует совместность методов A и B на множестве $\mathcal{F}_A$.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на городском семинаре по теории функций при Институте математики АН УССР / г. Киев, май 1971 г., ноябрь 1971г., май 1973г./

Основное содержание диссертации отражено в работах [22]-[27].

Литература

1. Г.Харди, Расходящиеся ряды, М.,И.Л., 1951
2. А.Л.Брудно, Относительные нормы матриц Теплица, ДАН СССР, 91 /1953/ 197-200.
3. Польняковский, О некоторых теоремах типа Мерсера, Бюл. Польск. АН, отд.3, 1952, 4, № 5, 239-242.
4. R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation of sequences, Proc. Amer. Math. Soc., 2, 1952, 550-565.
5. Н.А.Давыдов, Обобщение теоремы Мерсера, Усп.мат.наук, т.XX, вып.6/126/, стр.72-77.
6. Н.А.Давыдов, О неэффективности регулярных матриц, Усп. мат.наук, т.XX, вып.6 /126/ стр.
7. Н.А.Давыдов, Обобщение мерсеровой теоремы Кнопна-Белифанте, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Респ.научн.сб.,Изд-во ХГУ, Харьков, вып. 3, 1966, стр.86-89.
8. Н.А.Давыдов, О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов, УМЖ, т.19, № 4, 1967.
9. Н.А.Давыдов, О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов, УМЖ, т.20, № 4, 1967.
10. Н.А.Давыдов, О точности теоремы Мазура-Орлича, Матем.заметки, т.11, № 4 /1972/, 481-486.
11. Н.А.Давыдов, Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами, Матем.заметки, т.13, № 2/1973/, 179-188.
12. S. Mazur, W. Orlich, Sur les methodes lineares de sommation, C. R., 196/1933, 32-34
13. А.Л.Брудно, Суммирование ограниченных последовательностей матрицами, Матем.сб., 16/1945/, 191-247.

14. Р.Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., 1960.

15. Н.Альтман, Обобщение одной теоремы Мазура-Орлича по теории суммирования, Studia math. (Warszawa), 1953, 13, №2, 238-248.

16. Ю.Г.Горст, О распространении теоремы Мазура-Орлича на полунепрерывные и интегральные методы суммирования, Бюлл. Польск.АН, сер. мат. астр. и физ. наук, т. , №12, 1963.

17. Ю.Г.Горст и М.З.Елин, О некоторых существенных различиях между матричными и полунепрерывными методами суммирования Бюлл.Польск.АН, серия мат. астр. и физ. наук,т. №1,1963.

18. Н.А.Давыдов, Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования; Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Респ. научн. сб., вып.6, изд-во ХГУ, Харьков, 1968,

19. Л.Ф.Таргонский, Одна теорема Мерсерова типа; Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Респ.научн. сб.,вып.8, 1969,

20. И.И.Волков, О совместности двух методов суммирования, Матем.заметки, т.1, №3 /1967/, 283-290.

21. J. Boos, Verträglichkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren, Math. Z., 128, №1, 15-22 /1972/.

22. Г.А.Михалин, Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых матрицами с конечными строками; Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Респ. научн.сб.,изд-во ХГУ, вып.18, Харьков 1973,стр.137-144.

28. Г.А.Михалин, Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Коши методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей, Укр. матем. журн. т. 26 , №1, 1974

24. Г.А.Михалин, Неэффективные линейные интегральные преобразования, сохраняющие сходимость; Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Респ. научн. сб., изд-во ХГУ, Харьков /принято к опубликованию/

25. Г.А.Михалин, К теореме Мазура-Орлича, Известия высших учебных заведений /принято к опубликованию/ аннотация №6, 1972

26. Г.А.Михалин, Неэффективность одного класса регулярных матриц, Математические заметки / принято к опубликованию/

27. Г.А.Михалин, Об одной теореме типа Мазура-Орлича, Укр. матем. журн., т. 26, №4, 1974

Лаб. КТИПП Заказ № 204 БФ-26740
Тираж 200 экз.