К75 Р-Р 695/—

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

КОХАНОВСКИЙ Александр Павлович

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

№ 01.01.01. Теория функций и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НБ НПУ
імені М.П. Драгоманова
100313312

Киев – 1975

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А.М. ГОРЬКОГО

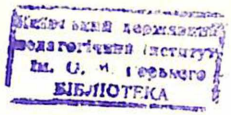
На правах рукописи

КОХАНОВСКИЙ Александр Павлович

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

№ 01.01.01. Теория функций и функциональный анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук



Киев – 1975

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им. А.М. Горького

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук, профессор Н.А.ДАВЫДОВ

Официальные оппоненты :
доктор физико-математических наук, профессор А.Ф.ЕФИМОВ
кандидат физико-математических наук А.И. СТЕПАНЕЦ

Ведущее предприятие – Киевский государственный университет им. Т.Г.Шевченко

Автореферат разослан " " _____ 1975 г.

Защита диссертации состоится " " _____ 1975 г.

в _____ часов на заседании совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета КГПИ им.А.М.Горького.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале института.

Отзывы просим присылать по адресу:

г. Киев-30, ул.Пирогова, 9

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

В теории суммирования расходящихся рядов и ее приложениях логарифмические методы суммирования играют важную роль. Изучением этих методов занимались D. Borwein, Н.А.Давыдов, K. Knopp , В.Л.Кауфман, B. Kuttner , Y. Sitaraman , К.М.Слепенчук и др. В изучении логарифмических методов суммирования значительное место занимают тауберовы теоремы, поэтому, естественно, им уделяется наибольшее внимание. К настоящему времени получено немало результатов такого типа. Однако некоторые из этих результатов не являются окончательными, а другие доказаны при условиях, наложенных на всю суммируемую последовательность. Представляет несомненный научный интерес решение следующих задач:

1/ получить окончательные тауберовы теоремы для этих методов суммирования,

2/ указать теоремы тауберова типа для случая, когда тауберовы условия налагаются на некоторую подпоследовательность суммируемой последовательности.

Решению этих задач и посвящена наша работа.

2. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad /1/$$

с комплексными членами a_n и частными суммами

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad /2/$$

Говорят, что ряд /1/ или последовательность /2/ суммируется к числу S полунепрерывным логарифмическим методом или (L) - методом (/1/, стр. 108) и записывают $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ или $\lim_{n\to\infty} s_n = S(L)$, если ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1}$ сходятся для $0 < x < 1$ и

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = S. \qquad /3/$$

Если $$\lim_{n \to \infty} t_n = S, \qquad /4/$$

где $$t_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{k+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad /5/$$

то говорят, что ряд /1/ или последовательность /2/ суммируется к числу S дискретным логарифмическим методом или (l)-методом (/1/, стр. 82) и записывают $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(l)$ или $\lim_{n \to \infty} s_n = S(l)$.

Если выражение, стоящее под знаком предела в соотношении /3/, ограничено для всех $x \in (0; 1)$, то это обозначают так: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = O(1)(L)$ или $s_n = O(1)(L)$. Аналогично, если последовательность средних дискретных логарифмических /5/ ограничена, то это записывают в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = O(1)(l) \quad \text{или} \quad s_n = O(1)(l)$$

Методы (L) и (l) регулярны, т.е. из сходимости последовательности $\{s_n\}$ к числу S следует и суммируемость этой последовательности каждым из этих методов к числу S (/2/, стр. 79). Известно /3/, что (L) - метод сильнее метода Абеля-Пуассона, а (l) - метод сильнее метода средних арифметических. В работах /3/ и /4/ приведено ряд результатов, выясняющих более тонкую связь между этими методами. (l) - метод эквивалентен методу Рисса

$(R, \ln(n+1), 1)$, играющему важную роль в теории рядов Дирихле (/ I /, стр. 115).

K. Ishiguro установил /3/, что (L) - метод не слабее (C) - метода и привел примеры рядов, суммируемых (L) - методом, однако не суммируемых методом (C). В случае, когда $s_n \geq 0$ $(n=0,1,2,\dots)$, (L) - метод равносилен (C) - методу (/ 5 /, теорема 2). Существуют и другие достаточные условия для равносильности логарифмических методов (/ 6 /, теор. 3-6 ; / 8 /, теорема 2). Однако большинство из этих теорем не являются окончательными, что следует из приведенных ниже результатов главы I.

Глава I посвящена в основном выяснению условий, достаточных для равносильности (L) и (C) методов. В § I этой главы рассматривается вспомогательный метод суммирования (AC), который является произведением метода Абеля-Пуассона на (C) - метод. Показано, что метод (AC) включает (L) - метод, и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(C)$, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем (AC) - методом к числу s и $s_n = O(\ln n)$. С помощью этих лемм в § 2 и § 3 главы I доказаны следующие теоремы.

Теорема I. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(L)$ и последовательность t_n, определяемая равенством /5/, действительная и медленно убывает или комплексная и медленно колеблется, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$.

Теорема 3. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(L)$ и $t'_n - s_n = O(\ln n)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(C)$, где

$$t'_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{k+1} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Из теоремы 3 в качестве ее следствия получаем известную теорему *B. Kuee* (/ 6 /, теор. 2): для того чтобы из $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ следовало $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, необходимо и достаточно, чтобы $t'_n - S_n = o(1)$ $(n \to \infty)$

Теорема 4. Для того, чтобы из $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ следовало $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(\ell)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$S_0 + S_1 + \dots + S_n = o(n \ln n).$$

Эта теорема содержит в себе теорему 4 *З. Киее* из работы (6): если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ и $S_0 + S_1 + \dots + S_n = O(n)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(\ell)$.

Теорема 5. Пусть частные суммы $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условию

$$\varliminf_{n\to\infty} (S_{\nu n} - S_n) \geq -z > -\infty \quad (z \geq 0),$$

когда $\ell < \frac{\nu}{\nu} \to L$ $(n \to \infty)$

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = O(1)(L)$, то $S_n = O(\ln n)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(\ell)$

Теорема 6. Пусть частные суммы $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условию

$$\varliminf_{n\to\infty} (S_{\nu n} - S_n) \geq -z > -\infty \quad (z \geq 0),$$

когда $1 < \frac{\ln n}{\ln n} \to 1 \ (n \to \infty)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = O(1)(L)$, то $s_n = O(1)$

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(L)$, то $\lim_{n\to\infty} |s - s_n| \le 2$.

В частности, при $2 = 0$ из теоремы 6 получаем известную теорему *B. Kuttner* (7).

Теорема 8. Пусть частные суммы $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условию

$$s_n > -u \ln(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где u – произвольное фиксированное положительное число.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(L)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$.

Эта теорема обобщает известную теорему *K. Ishiguro* /5/: если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(L)$ и $s_n > -u \ (n = 0, 1, 2, \dots)$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$.

Оказывается, что теорема 8 в некотором смысле точная, а именно, справедлива

Теорема 9. Пусть положительные числа $\alpha_n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$ монотонно и сколь угодно медленно стремятся к $+\infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует последовательность $\{s_n\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} s_n = o(L)$ и $s_n = O(\alpha_n \ln n)$, однако эта последовательность не суммируется (C) – методом.

Результаты § 4 главы I тесно примыкают к теореме 8 и являются существенными дополнениями последней. Сформулируем одну из теорем этого параграфа.

Теорема 10. Пусть $s_{n_i} \ (i = 0, 1, 2, \dots)$ – все те члены комплексной последовательности $\{s_n\}$, которые удовлетворяют

условию $|s_{n_i}| > \mu \ln(n_i+1)$

при каком-нибудь $\mu > 0$. Тогда из $\lim_{n\to\infty} s_n = s(L)$ следует $\lim_{n\to\infty} s_n = s(\ell)$, если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln n_k} \sum_{i=0}^{k} \frac{s_{n_i}}{n_i+1} = 0.$$

§ 5 главы I посвящен изучению связи между (L) - методом и методами $(\ell, 2)$ и $(C,r)\ell$, где $(\ell,2)$ - произведение двух дискретных логарифмических методов суммирования, а $(C,r)\ell$ - произведение метода Чезаро порядка $r > 0$ на (ℓ) - метод. Здесь доказаны такие теоремы.

Теорема I3. Если $\lim_{n\to\infty} s_n = s(L)$ и функция

$$F(z) = \frac{1}{\ln\frac{1}{1-z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$$

ограничена внутри единичного круга, то $\lim_{n\to\infty} s_n = s(\ell,2)$ и $\lim_{n\to\infty} s_n = s((C,r>1)\ell)$.

Теорема I4. Если $\lim_{n\to\infty} s_n = s((C,r>0)\ell)$, то $\lim_{n\to\infty} s_n = s(L)$.

Теорема I5. Существует последовательность $\{s_n\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} s_n = s(C,2)$, однако эта последовательность не суммируется (L) - методом.

Отметим тот интересный факт, что если условие теоремы I3 несколько ослабить, а именно, предположить функцию $F(z)$ ограниченной внутри единичного круга за исключением окрестности какой-нибудь точки $z_0 \neq 1$ единичной окружности, то утверждение теоремы I3 становится неверным.

3. В работе /9/ Н.А.Давыдов ввел понятие $(\mathcal{C})$ – множества последовательности комплексных чисел и доказал одно свойство $(\mathcal{C})$ – метода суммирования рядов, названного им $\mathcal{C}$ – свойством, из которого был получен ряд теорем тауберова типа для этого метода, обобщающих известные классические теоремы. Из другой его работы /10/ следует тот факт, что это свойство $(\mathcal{C})$-– метода, вообще говоря, не переносится на (L) – метод. Естественно возникает вопрос, какое дополнительное условие надо наложить на (L) – метод суммирования, чтобы утверждение, аналогичное $(\mathcal{C})$ – свойству $(\mathcal{C})$ – метода, было справедливым и для (L) – метода. Во второй главе мы указываем одно такое дополнительное условие, при выполнении которого упомянутое выше $(\mathcal{C})$ – свойство переносится и на (L) – метод. Вместе с этим перенесены на такой (L) – метод и все теоремы тауберова типа для $(\mathcal{C})$ – метода.

Для формулировки результатов этой главы нам понадобится следующее определение, принадлежащее Н.А.Давыдову /9/.

Пусть $\mathcal{G}$ – замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, и пусть $\mathcal{G}_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ – замкнутая ε – окрестность множества $\mathcal{G}$.

Множество $\mathcal{G}$ называется $(\mathcal{C})$ – множеством последовательности комплексных чисел $\{s_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность отрезков $[n_k, m_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, что

$$s_n \in \mathcal{G}_\varepsilon \quad \text{для} \quad n_k \le n \le m_k < n_{k+1};$$

$$\frac{\ln m_k}{\ln n_k} \geq \lambda(\varepsilon) > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости называется (C) – точкой последовательности $\{S_n\}$, если существуют число $\lambda > 1$, последовательность отрезков $[n_k, m_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$S_n \in \mathcal{G}_k \quad \text{для} \quad n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1},$$

$$\frac{\ln m_k}{\ln n_k} \geq \lambda > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

При этом последовательность замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ стягивается к бесконечно удаленной точке, если расстояние множества $\mathcal{G}_k$ от точки $z = 0$ стремится к бесконечности при $k \to \infty$.

Сформулируем теперь основную теорему второй главы.

Теорема 16. Пусть множество $\mathcal{G}$ является (C) – множеством для последовательности $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ частных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ и сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ограничена внутри круга $\mathcal{K}_{x_0}(z : |z - x_0| < 1 - x_0)$ при каком-нибудь $x_0 \in [0, 1)$, то $S \in \mathcal{G}$.

В качестве простых следствий этой теоремы получен ряд теорем тауберова типа для (L) – метода. Например:

Теорема 18. Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, и пусть $a_n = O\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ для $n_k \leq n \leq m_k < n_{k+1}$,

$$\ln m_k / \ln n_k \geq \lambda \geq 1.$$

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(L)$ и сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ограничена внутри круга $\mathcal{K}_{x_0}(|z - x_0| < 1 - x_0)$

при каком-нибудь $x_0 \in [0, 1)$, то $\lim_{k \to \infty} S_{p_k} = S$, где $n_k \le p_k \le m_k$.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на двух заседаниях семинара по теории функций при Институте математики АН УССР.

Основное содержание диссертации отражено в работах /11/ – /14/ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Харди, Расходящиеся ряды, Ил. М., 1951.
2. Р.Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., 1960.
3. K. Ishiguro, On the Summability Methods of Logarithmic Type, Proc. Japan Acad., 38, № 10, 1964.
4. K. Ishiguro, A Note on the Logarithmic Means, Proc. Japan Acad., 39, № 8, 1963.
5. K. Ishiguro, A Converse Theorem on the Summability Methods, Proc. Japan Acad., 39, № 1, 1963.
6. B. Kuttner, Some tauberian theorems for the logarithmic method of summability, Canad. J. Math., 20, № 6, 1968.
7. B. Kuttner, A tauberian theorem for the logarithmic method of summation, Proc. Cambridge Philos. Soc., 63, № 2, 1967.
8. Y. Sitaraman, A Note on Logarithmic Summability (L), Proc. Edinburgh Math. Soc., 15, № 1, 1966.
9. Н.А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., 28/80/:4, 1956.

10. Н.А.Давыдов, $O\ (c)$ – точках последовательности, суммируемой методом Абеля–Пуассона, Матем.сб., 43/85/:I, 1957.

11. А.П.Кохановский, (e) – свойство полунепрерывного логарифмического метода суммирования и теоремы тауберова типа, Укр.матем.журн., т. 26, № 5, 1974.

12. А.П.Кохановский, Теоремы тауберова типа для полунепрерывного логарифмического метода суммирования рядов, Укр.матем.журн., т.26, № 6, 1974.

13. А.П.Кохановский, Условие равносильности логарифмических методов суммирования, Укр.матем.журн., т. 27, № 2, 1975.

14. А.П.Кохановский, Условие равносильности (L) – метода методу $(C\ 1)$ суммирования последовательностей, сб. "Приближенные методы математического анализа", изд-во КГПИ им.А.М.Горького, Киев, 1974, стр. 128–132.

Лаб. фото-офсетной печати КГПИ им. А.М. Горького

Зак. 215 Тир. 200экз.